



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 192 за 1985 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Сарычев В. А., Златоустов В.А.,
Шиповских Т.А.**

2π-периодические решения
уравнения типа Дюффинга с
симметричной
восстанавливающей силой

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сарычев В. А., Златоустов В.А., Шиповских Т.А. 2π-периодические решения уравнения типа Дюффинга с симметричной восстанавливающей силой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1985. № 192. 15 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1985-192>

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША АН СССР

В.А. Сарычев, В.А. Златоустов, Т.А. Шиповских

2 π - ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА

ДЮФИНГА С СИММЕТРИЧНОЙ ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕЙ СИЛОЙ

Препр. Сарычев В.А.
и др.
С-20 25-периодичес-
кие решения уравнения..
Препр. № 192 за 1985г.

19.12.86 Подписано

16/16

16/16

Академия Наук СССР
Институт математики
Москва

Москва 1985 г.

АННОТАЦИЯ

В работе представлены результаты численного нахождения периодических решений уравнения типа Дюффинга

$$\ddot{x} + F(x) = e \sin t,$$

где $F(x) = \mu(x + \alpha x^3 + c x^5)$ при произвольных значениях параметров μ, α, c, e . Рассмотрен способ нахождения аналогичных решений при произвольной степени полинома в $F(x)$.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Результаты численных расчетов	3
2. Влияние степени нелинейности симметричной восстанавливающей силы на периодические решения уравнений типа Дюффинга	5
Литература	7

ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуются гармонические и ультрагармонические решения уравнения

$$\ddot{x} + \mu(x + \alpha x^3 + c x^5) = e \sin t \quad (0.1)$$

при произвольных значениях параметров μ, α, c, e . Разные / I / были построены зависимости начальных значений $\dot{x}(0)$ от μ и $x(\pi/2)$ от μ для порождающих $2\pi \frac{m}{n}$ - периодических решений ($m = \pm 1$; $n = 1, 2, 3, 4, 5$) уравнения (0.1) при малых значениях амплитуды вынуждающей силы. Были сформулированы краевые задачи для нахождения $2\pi m$ -периодических ($m = \pm 1$) уравнения (0.1) при $e \neq 0$.

В данной работе приведены результаты численного анализа гармонических ($n = 1$) и ультрагармонических ($n = 2, 3, 4, 5$) решений уравнения (0.1) при произвольных значениях амплитуды вынуждающей силы e . В случае, когда решение однородного уравнения (0.1) при $e = 0$ не может быть найдено аналитически, рассмотрен способ численного построения порождающих решений (раздел 2). Там же проведено сравнение гармонических решений уравнения математического маятника

$$\ddot{x} + \mu \sin x = e \sin t, \quad (0.2)$$

уравнения Дюффинга при $\alpha = -1/3!$

$$\ddot{x} + \mu(x + \alpha x^3) = e \sin t, \quad (0.3)$$

и уравнения (0.1) при $\alpha = -1/3!$, $c = 1/5!$.

1. Результаты численных расчетов

В работе / I / проведено исследование порождающих $2\pi \frac{m}{n}$ -периодических решений уравнения (0.1) при $e = 0$. При $e \ll 1$ были выделены 2π -периодические решения уравнения (0.1) вида $x_{n/m}^{(z)}(t, e)$, $\bar{x}_{n/m}^{(z)}(t, e)$, $\theta_{n/m}^{(z)}(t, e)$, переходящие при $e = 0$ в соответствующие $2\pi \frac{m}{n}$ -периодические решения.

Согласно обозначениям, введенным в / I /, к решениям вида $x_{n/m}^{(z)}(t, e)$ относятся решения: $\alpha_{n/1}^{(z)}$ ($n = 1+5$, $z = 0, 1$), $\beta_{n/1}^{(z)}$ ($n = 1+5$, $z = 0, 1$), $\gamma_{n/1}^{(z)}$ ($n = 1+5$; $z = 0, 1$), $\delta_{n/1}^{(z)}$ ($n = 1+3$; $z = 0, 1$), $\epsilon_{n/1}^{(z)}$ ($n = 1+3$; $z = 0, 1$), $\zeta_{n/1}^{(z)}$ ($n = 1+3$; $z = 0, 1$), $\eta_{n/1}^{(z)}$ ($n = 1+3$; $z = 0, 1$), $\lambda_{n/1}^{(z)}$ ($n = 1+3$; $z = 0, 1$).

$$\xi_{n/4}^{(z)} (n=I+3, z=0, I), \varphi_{n/4}^{(z)} (n=I+3; z=0, I), \\ \bar{\sigma}_{n/4}^{(z)} (n=I+3, z=0, I).$$

В результате численного решения однопараметрической краевой задачи

$$x(0) = x(\pi) = 0 \quad (I.I)$$

для уравнения (0.I) эти решения, а также решения $d_0(t, e)$, $\beta_0(t, e)$, $\delta_0(t, e)$, $\delta_0(t, e)$, $\xi_0(t, e)$, $x_0(t, e)$, $\lambda_0(t, e)$, $\xi_0(t, e)$, $\sigma_0(t, e)$, $\varphi_0(t, e)$ продолжают в область произвольных значений параметра e .

К решениям вида $\bar{x}_{n/m}^{(z)}(t, e)$ относятся решения $\bar{\delta}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\delta}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\xi}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\sigma}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\varphi}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\lambda}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\xi}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\sigma}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\varphi}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$, $\bar{\xi}_{2/4}^{(z)} (z=0, I)$. Они определяются в результате решения для уравнения (0.I) краевой задачи

$$\dot{x}(\pi/2) = \dot{x}(3\pi/2) = 0. \quad (I.2)$$

К решениям вида $\theta_{n/m}^{(z)}(t, e)$ относятся решения $\psi_{n/4}^{(z)} (n=I+4, z=0, I)$, $\varphi_{n/4}^{(z)} (n=I+4, z=0, I)$, $\chi_{n/4}^{(z)} (n=I, 2; z=0, I)$, $\varphi_{n/4}^{(z)} (n=I, 2, 3; z=0, I)$, $\varphi_{n/4}^{(z)} (n=I+4; z=0, I)$, $\varphi_{n/4}^{(z)} (n=I+4; z=0, I)$, которые также удовлетворяют краевым условиям (I.2). В работах / 2, 3 / показано, что всякое решение краевых задач (0.I), (I.I) и (0.I), (I.2) является 2π -периодическим решением уравнения (0.I). Нетрудно доказать, что решение краевой задачи (0.I), (I.I) нечетно / 2, 4 /. Устойчивость 2π -периодических решений исследовалась в первом приближении при помощи численного интегрирования уравнения в вариациях $\dot{y} + \mu(1 + 3\alpha x^2 + 5c x^4)y = 0$ совместно с уравнением (0.I). Участки изолиний, удовлетворяющие условию устойчивости ($|A| < 1$, / 5 /), отмечены штриховкой.

Результаты численных расчетов представлены на рис. I+62. Решения вида $\bar{x}_{n/m}^{(z)}(t, e)$ изображены на рис. I+46, а решения вида $\bar{x}_{n/m}^{(z)}(t, e)$ и $\theta_{n/m}^{(z)}(t, e)$ на рис. 47-74. Представляют интерес случаи, когда в области определения параметров появляются новые решения, не имеющие порождающих при $e=0$. Появление этих решений связано с нелинейными свойствами уравнения (0.I). Рассмотрим, например, ультрагармонические решения $\beta_{2/4}^{(0)}$ и $\beta_{2/4}^{(I)}$ (рис. I0) на изолинии $\mu=0.2$. В диапазоне $2.95 \leq e \leq 4.93$ существуют два новых решения, не имею-

щие аналогов в классе порождающих решений. Новые решения являются устойчивыми и сливаются с решениями $\beta_{2/4}^{(0)}$ и $\beta_{2/4}^{(I)}$ соответственно в точках A и C. Новые решения сливаются между собой в точке B.

2. Влияние степени нелинейности симметричной восстанавливающей силы на периодические решения уравнений типа Дюффинга

При $\alpha = -I/6$, $c = I/I20$ полином в выражении для восстанавливающей силы уравнения (0.I) представляет собой первые три члена разложения функции $\sin x$ в ряд Тейлора. Случай, когда в разложении $\sin x$ учитываются два первых члена, соответствует уравнению Дюффинга (0.3) при значении $\alpha = -I/6 / 7$ /. Фазовая плоскость и порождающие решения для уравнений (0.I), (0.2), (0.3) представлены при $\mu > 0$ на рис. 75 (б, г), 76 (б, г), 77 (б, г) и при $\mu < 0$ на рис. 75 (в, д), 76 (в, д), 77 (в, д).

Полином третьей степени при $\alpha = -I/6$ (рис. 76а) аппроксимирует функцию $F(x) = \mu \sin x$ (рис. 75а) лучше, чем полином пятой степени (рис. 77а). Поэтому для уравнений (0.2) и (0.3) наблюдается лучшее совпадение картины порождающих решений, чем для уравнений (0.2) и (0.I). Повидимому для полинома седьмой степени в $F(x)$ картина порождающих решений будет лучше соответствовать картине порождающих решений для уравнения (0.2).

Необходимо отметить, что случай, когда восстанавливающая сила представлена симметричным полиномом пятого порядка, является предельным, т.к. при повышении степени полинома невозможно получить решения однородного уравнения в явном виде. На примере уравнения (0.2) был опробован следующий метод нахождения порождающих $2\pi \frac{m}{n}$ -периодических решений уравнения

$$\ddot{x} + F(x) = e \sin t \quad (2.I)$$

при $e=0$ для полинома $F(x) = \mu(x + \alpha x^3 + c x^5 + \dots)$. Решения x_i ($i=1, \dots, k$), где k - количество действительных корней полинома $F(x)$ определяются соотношениями $\dot{x}=0, F(x)=0$ и являются особыми точками уравнения (2.I). Методом фазовой плоскости определяется характер особых точек (центр, седло или точка возврата). Уравнение (2.I) при $e=0$ всегда имеет

стационарное решение $x_i^0 = 0$. При $\mu > 0$ этому решению соответствует центр на фазовой плоскости, а при $\mu < 0$ — седло. При $\mu > 0$ в точках бифуркации $\mu = n^2/m^2$ / I / возникают нестационарные порождающие решения периода $T_0 = 2\pi \frac{m}{n}$. С помощью численного метода продолжения по параметру μ из точек бифуркации строим порождающие $2\pi \frac{m}{n}$ — периодические решения вида $x_{n/m}^{(2)}$. При этом решается краевая задача

$$x(0) = x(\pi m/n) = 0 \quad (2.2)$$

для уравнения

$$\ddot{x} + F(x) = 0. \quad (2.3)$$

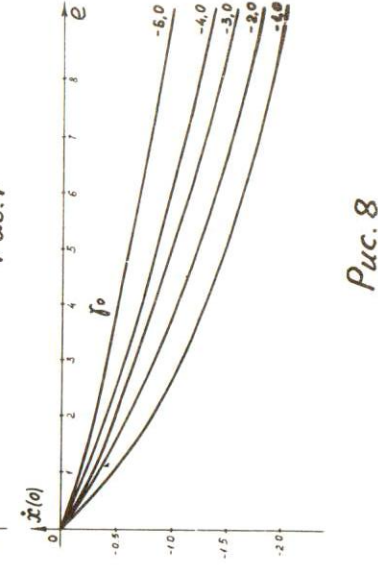
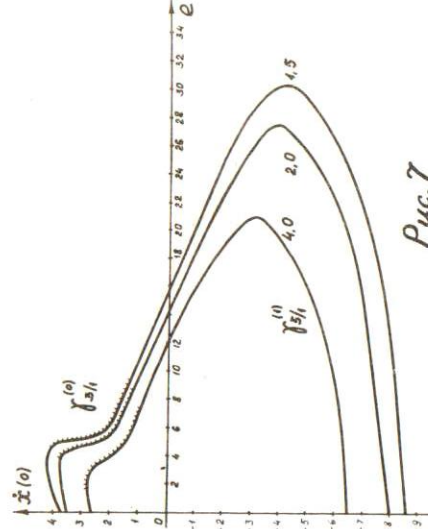
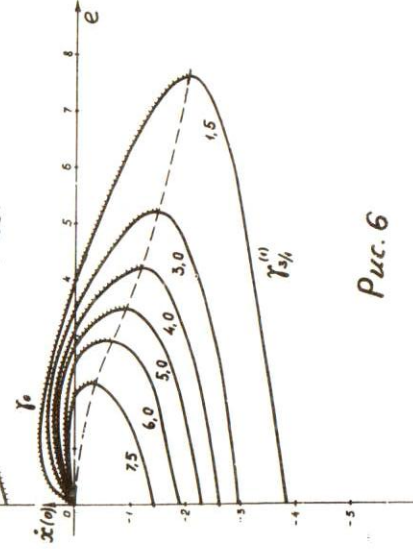
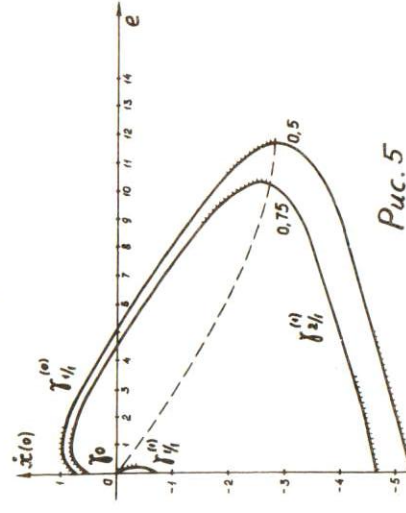
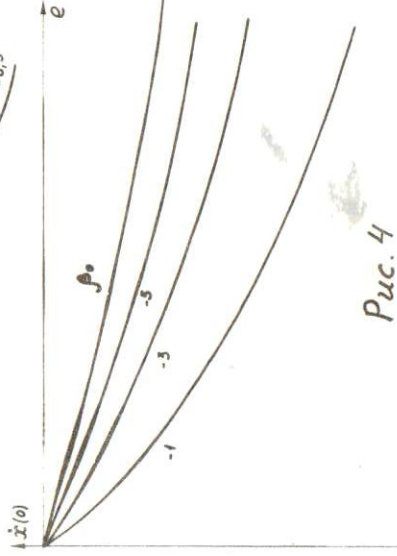
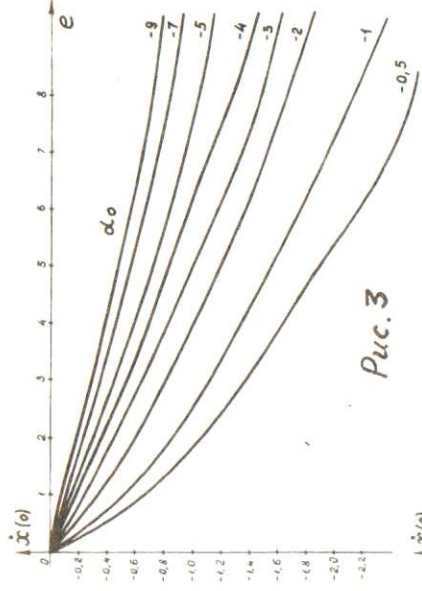
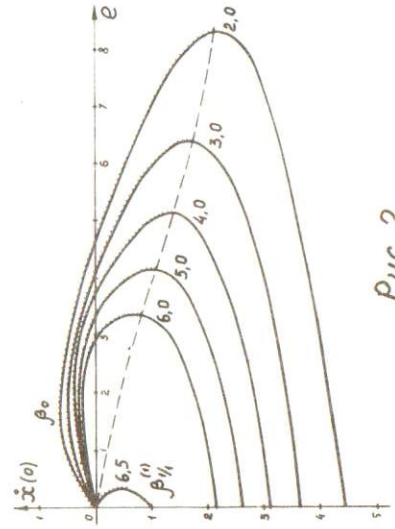
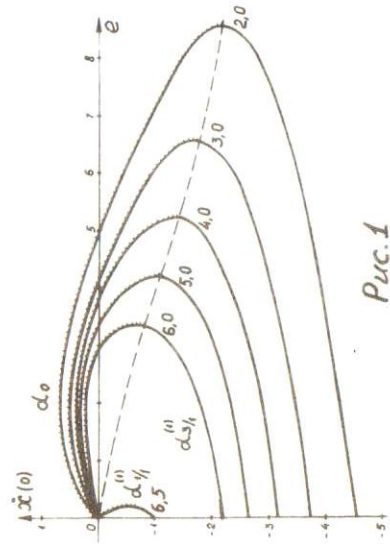
Решение $x_0(t)$ краевой задачи (2.3), (2.2) является нечетной функцией периода $T_0 = 2\pi \frac{m}{n}$. Действительно, нетрудно проверить, что функция $y(t) = -x_0(-t)$ удовлетворяет уравнению (2.3) и краевым условиям (2.2). Тогда из теоремы Коши следует, что $x_0(t) = -x_0(-t)$, т.е. $x_0(t)$ — нечетна. С учетом нечетности порождающего решения и правой части возмущенного уравнения (2.1), можно применять метод Цезари-Хейла /2,3,4/. $2\pi m$ — периодические решения уравнения (2.1) при $\epsilon \neq 0$ находятся численно с помощью однопараметрической краевой задачи $x(0) = x(\pi m) = 0$. Порождающие решения вида $x_{n/m}^{(2)}$ / I / находятся при $\epsilon = 0$ в результате решения краевой задачи $\dot{x}(\pi/2) = x(\pi/2 + \pi m/n)$ для уравнения (2.3).

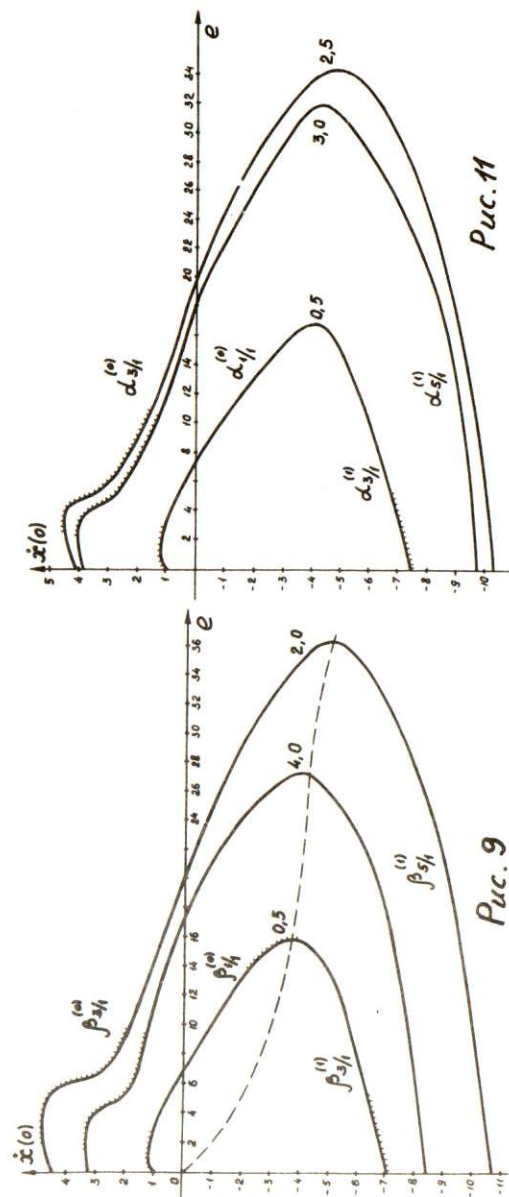
В случае, когда стационарное решение $x_i^0 \neq 0$ является центром, точки бифуркации имеют вид $\mu = n^2/(F'(x_i^0) \cdot m^2)$, где $F'(x_i^0) = 1 + 3a(x_i^0)^2 + 5c(x_i^0)^4 + \dots$ / I,6 /. В точках бифуркации стационарное решение x_i^0 сливается с нестационарными порождающими решениями вида $\theta_{n/m}^{(2)}$, численное определение которых сводится к решению краевой задачи $\dot{x}(\pi/2) = \dot{x}(\pi/2 + \pi m/n)$ для уравнения (2.3).

На примере уравнения (0.1) обнаружилось полное совпадение результатов построения порождающих периодических решений численным методом и с помощью аналитического выражения для общего решения.

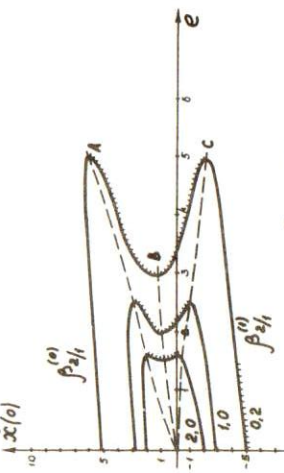
ЛИТЕРАТУРА

1. В.А.Сарычев, В.А.Златоустов, Т.А.Шиповских. Вынужденные гармонические колебания системы, близкой к автономной, под действием симметричной восстанавливающей силы. Препринт ИПМ, 1985г.
2. В.А.Сарычев, В.А.Златоустов. Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. Препринт ИПМ № 48, 1975г.
3. В.А.Сарычев, В.А.Златоустов, В.В.Сазонов. Вынужденные периодические колебания математического маятника. Препринт ИПМ № 32, 1977г.
4. В.А.Сарычев, В.В.Сазонов. Об одном методе исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт ИПМ № 105, 1976г.
5. И.Г.Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва, 1956г.
6. В.А.Златоустов, Т.А.Шиповских. 2π — периодические решения асимметричного уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы. Препринт ИПМ № 136, 1985г.
7. О.О.Галактионова, В.А.Златоустов. 2π — периодические решения уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы. Препринт ИПМ № 33, 1980г.

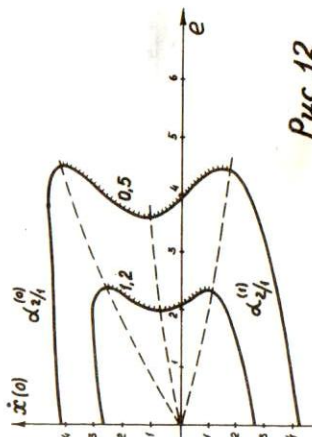




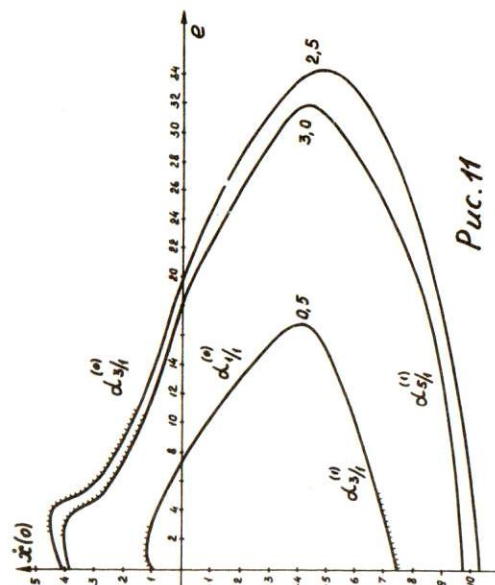
Puc. 9



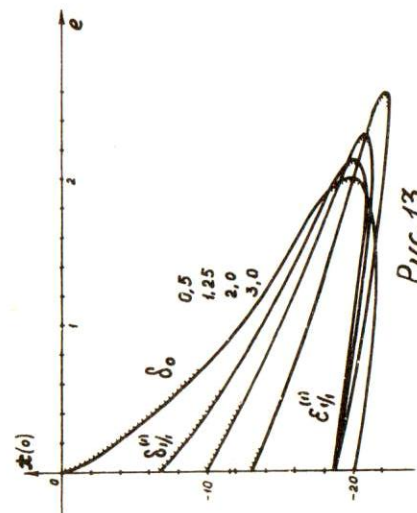
Puc. 10



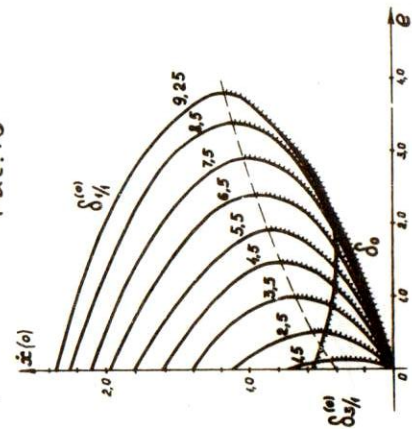
Puc. 12



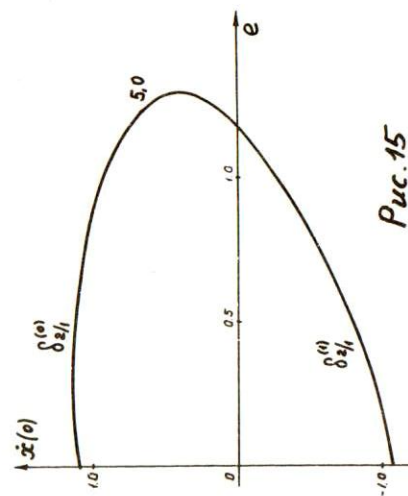
Puc. 11



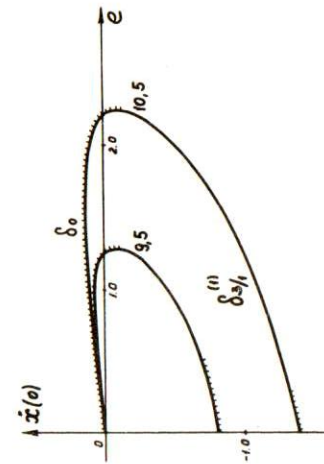
Puc. 13



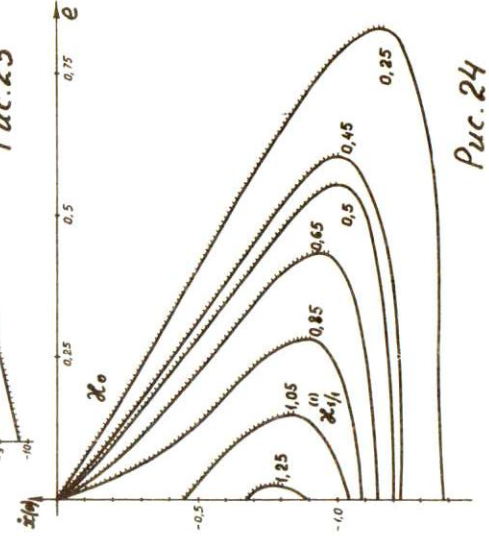
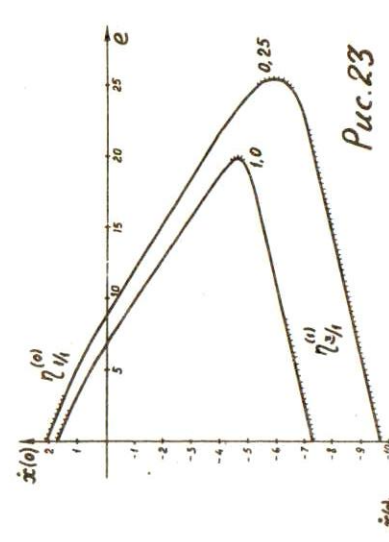
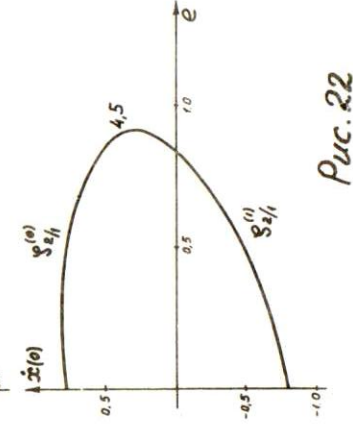
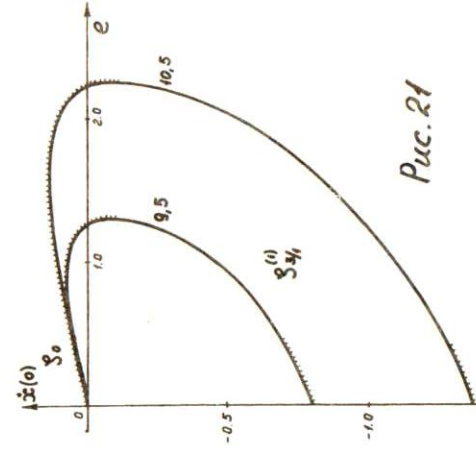
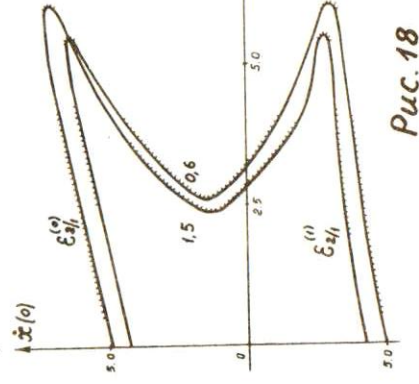
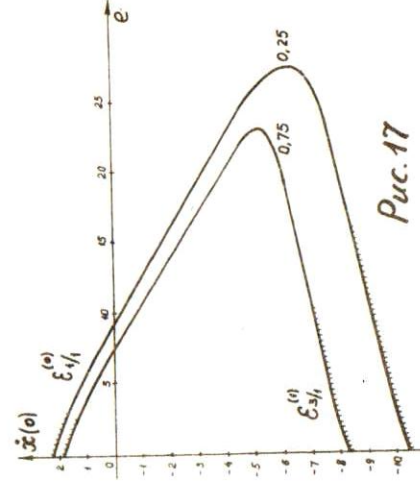
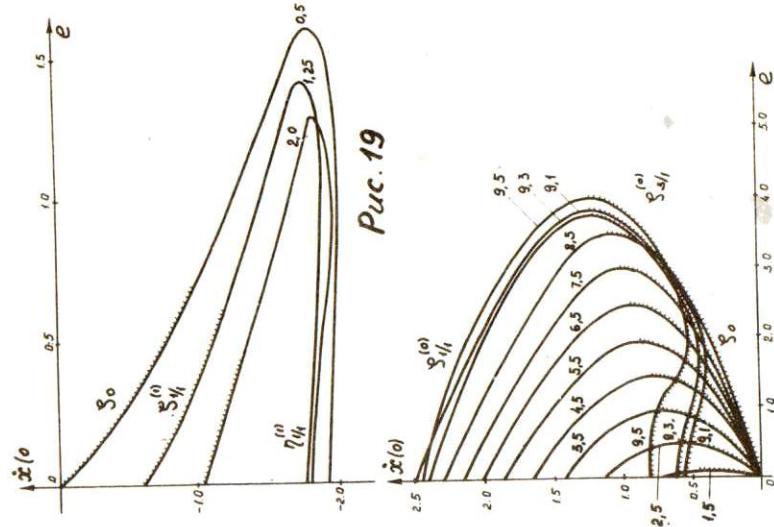
Puc. 14

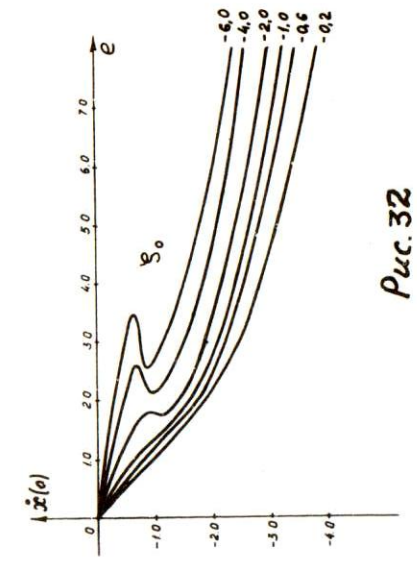
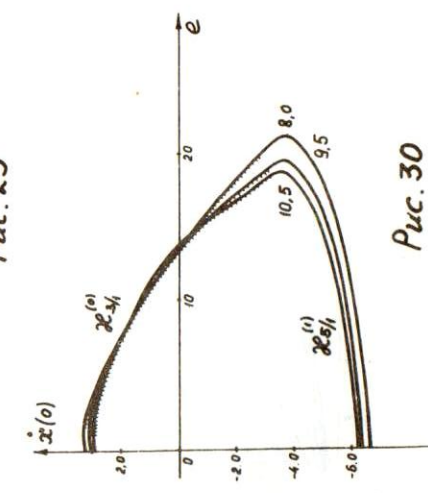
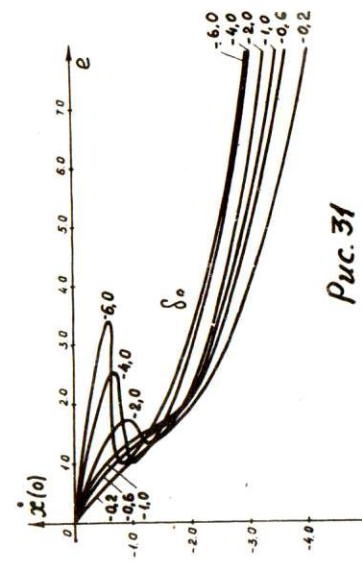
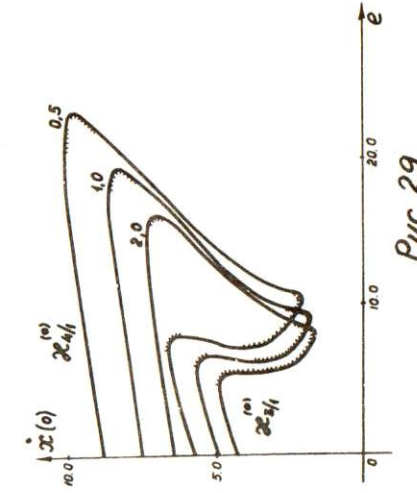
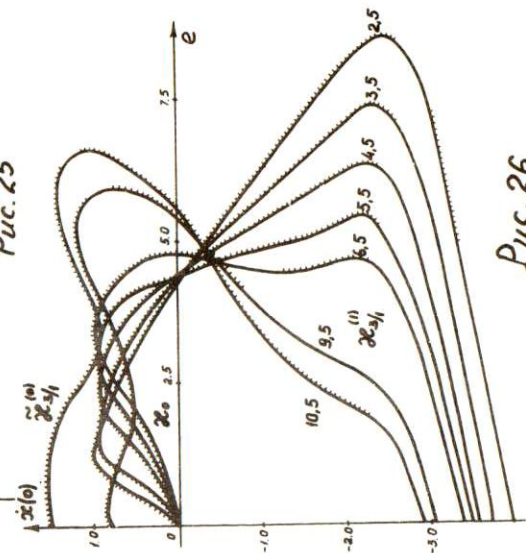
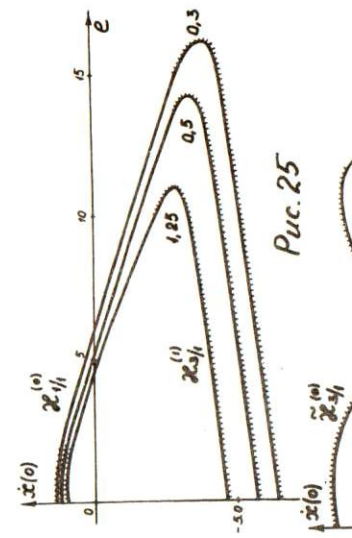
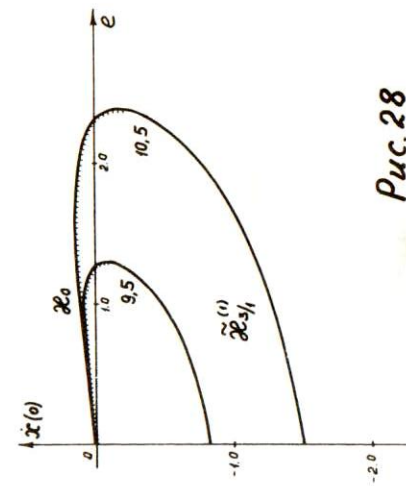
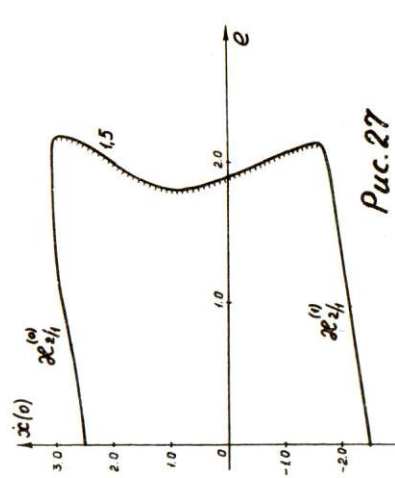


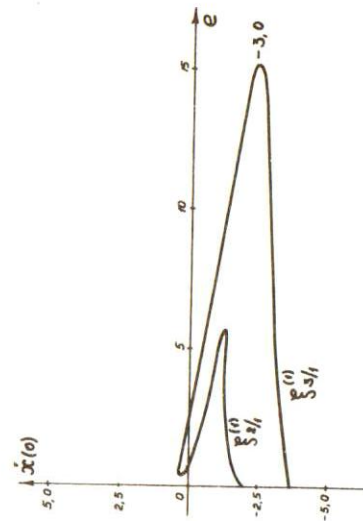
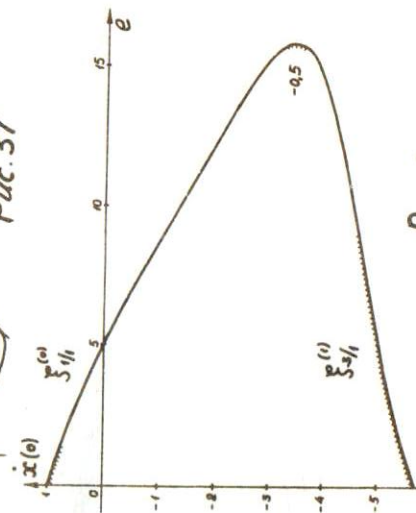
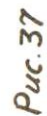
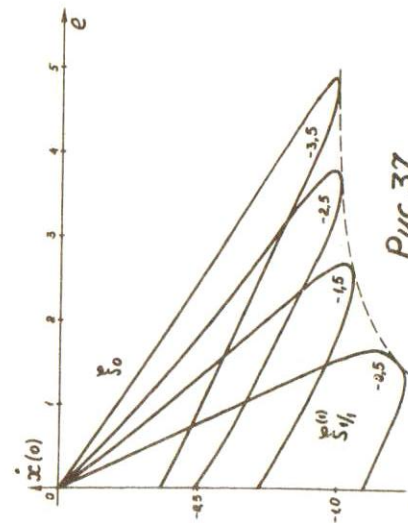
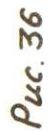
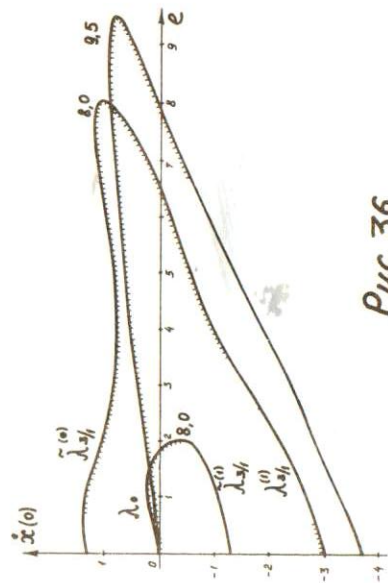
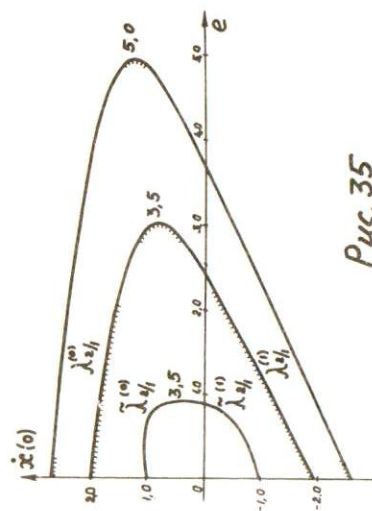
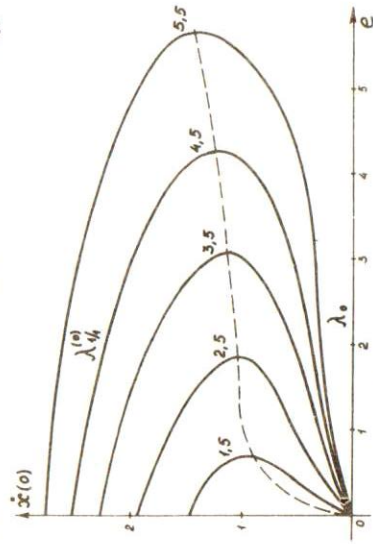
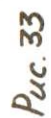
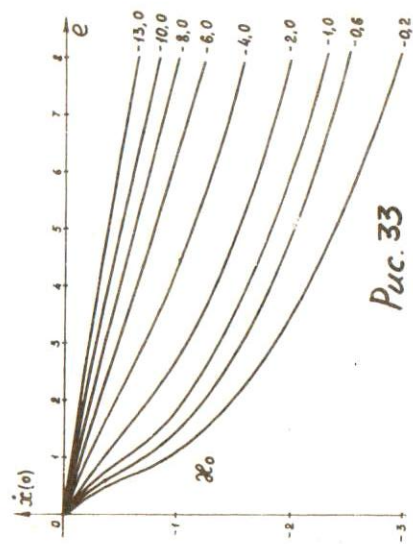
Puc. 15

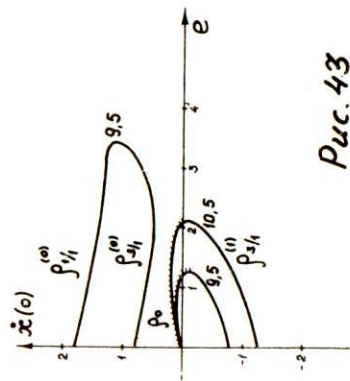


Puc. 16

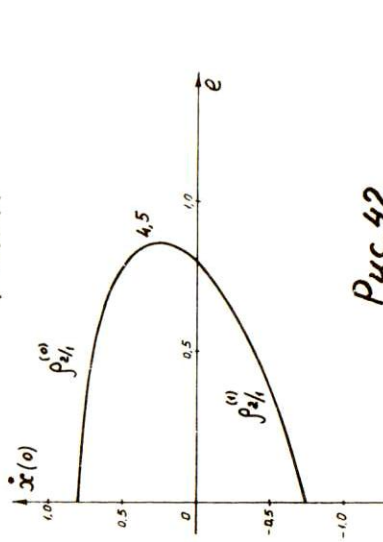




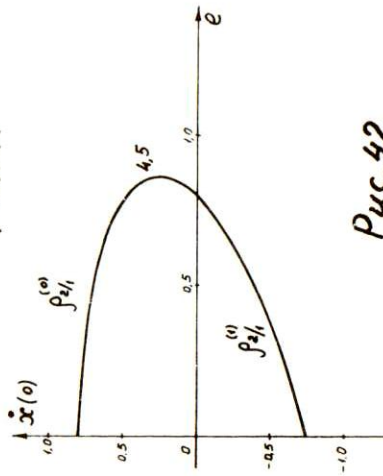




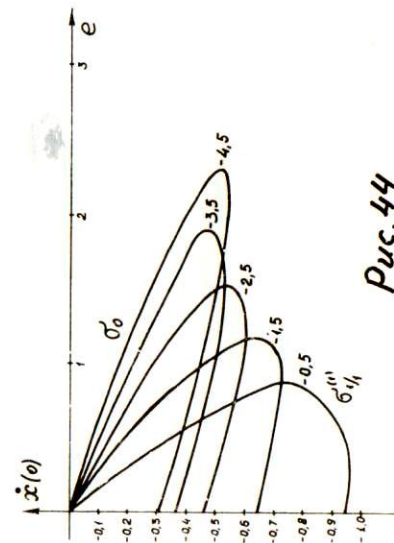
Puc. 43



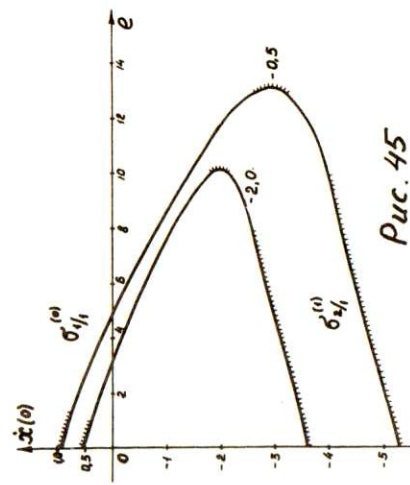
Puc. 41



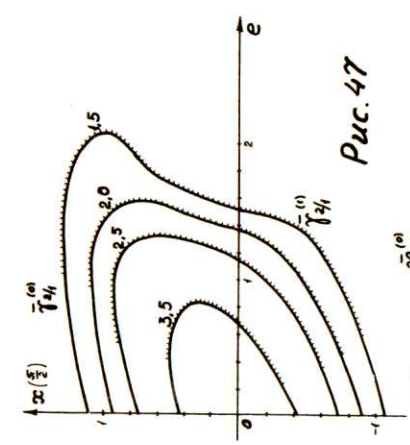
Puc. 42



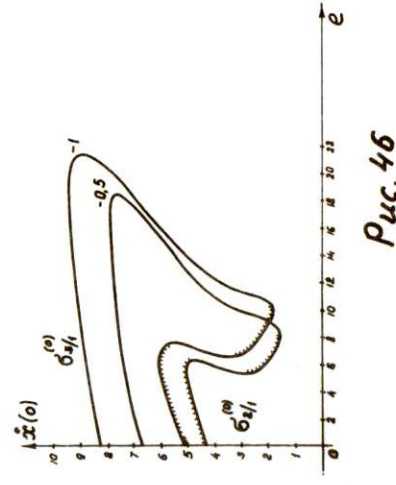
Puc. 44



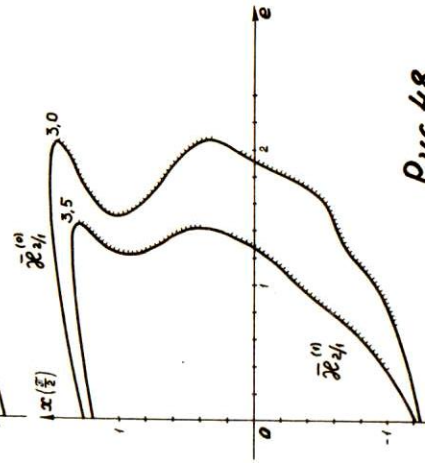
Puc. 45



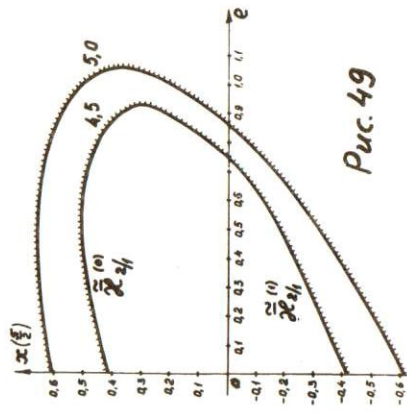
Puc. 47



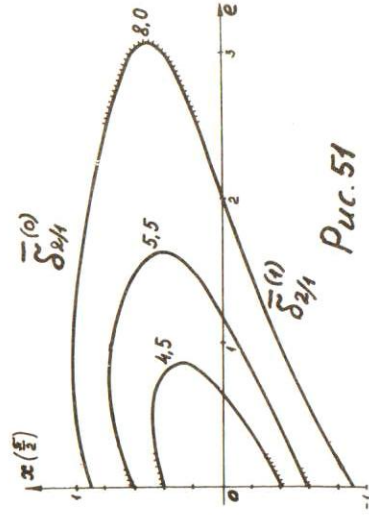
Puc. 46



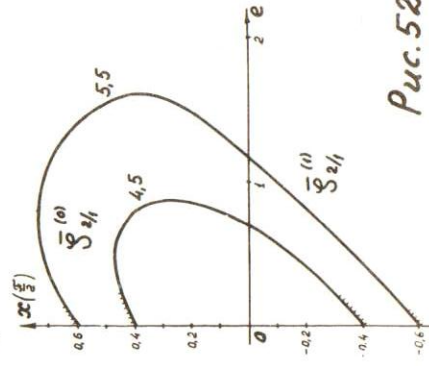
Puc. 48



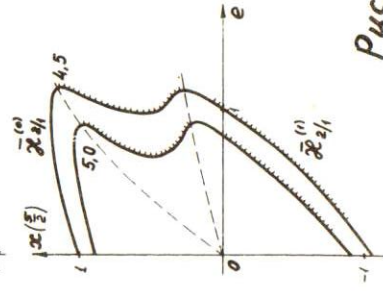
Puc. 49



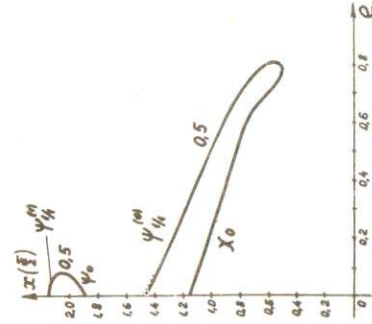
Puc. 51



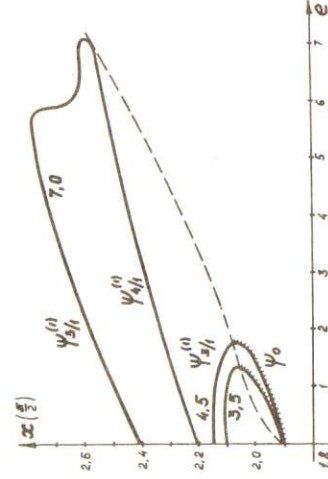
Puc. 52



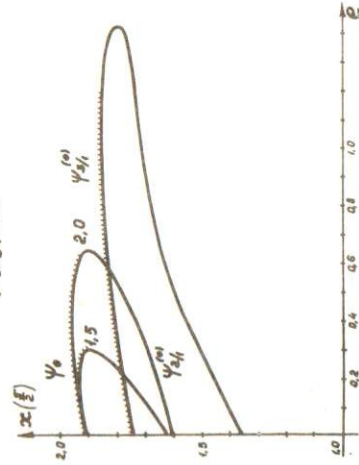
Puc. 50



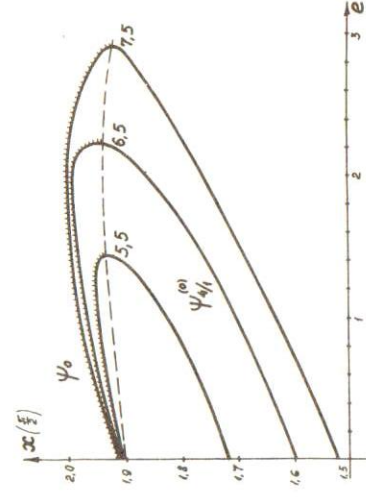
Puc. 53



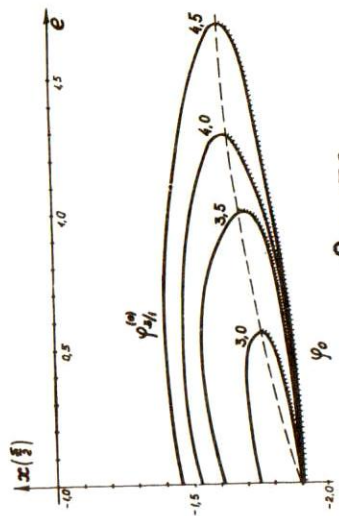
Puc. 55



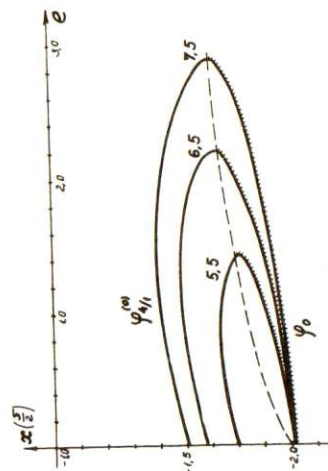
Puc. 54



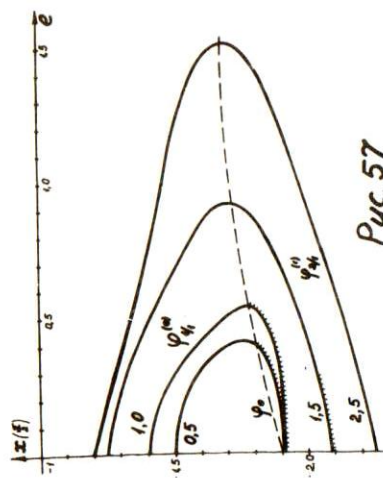
Puc. 56



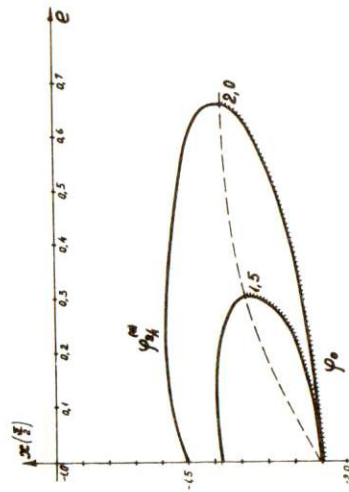
Puc. 59



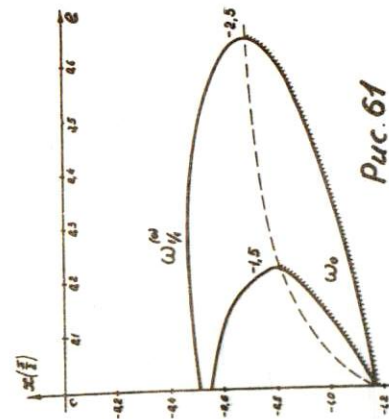
Puc. 60



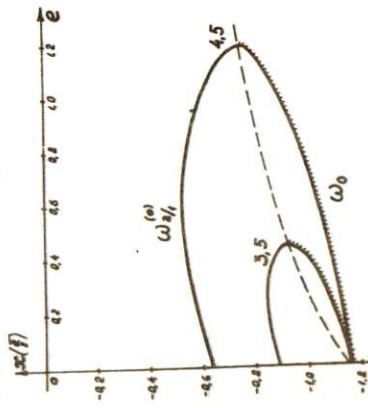
Puc. 57



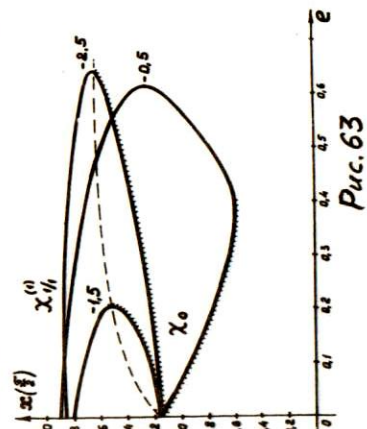
Puc. 58



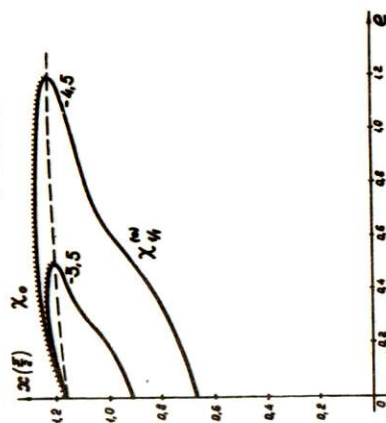
Puc. 61



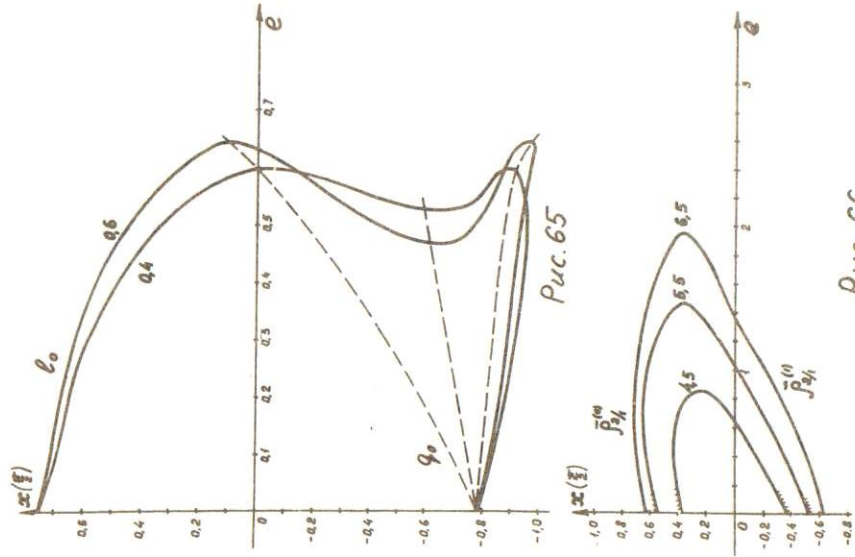
Puc. 62



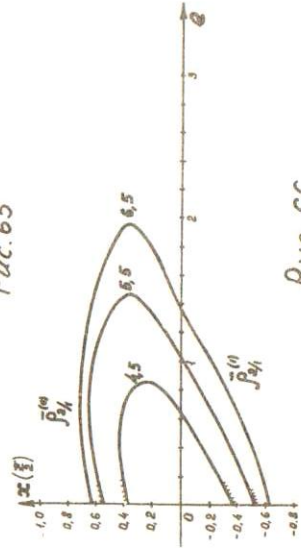
Puc. 63



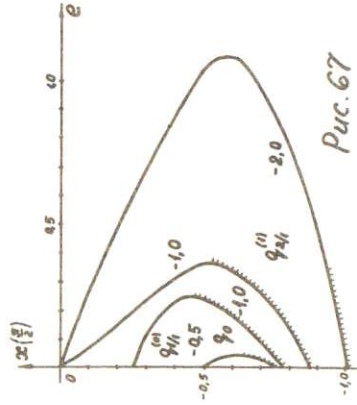
Puc. 64



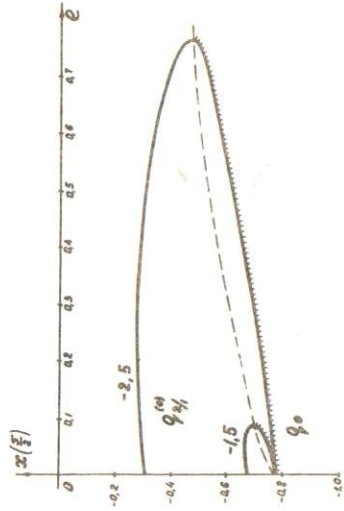
Puc. 65



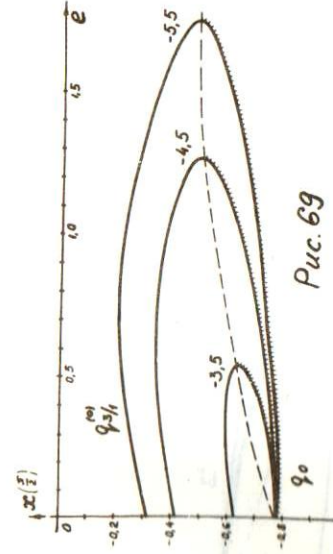
Puc. 66



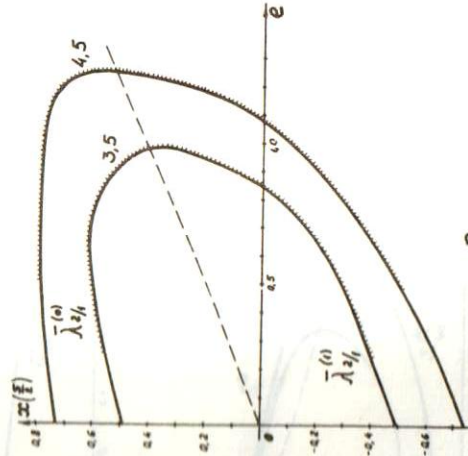
Puc. 67



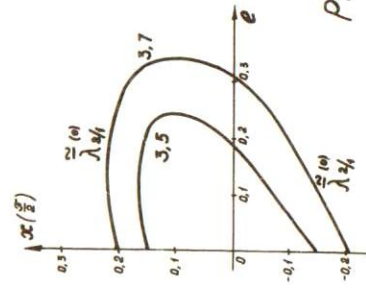
Puc. 68



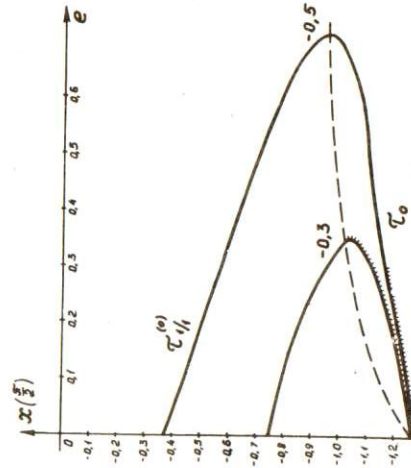
Puc. 69



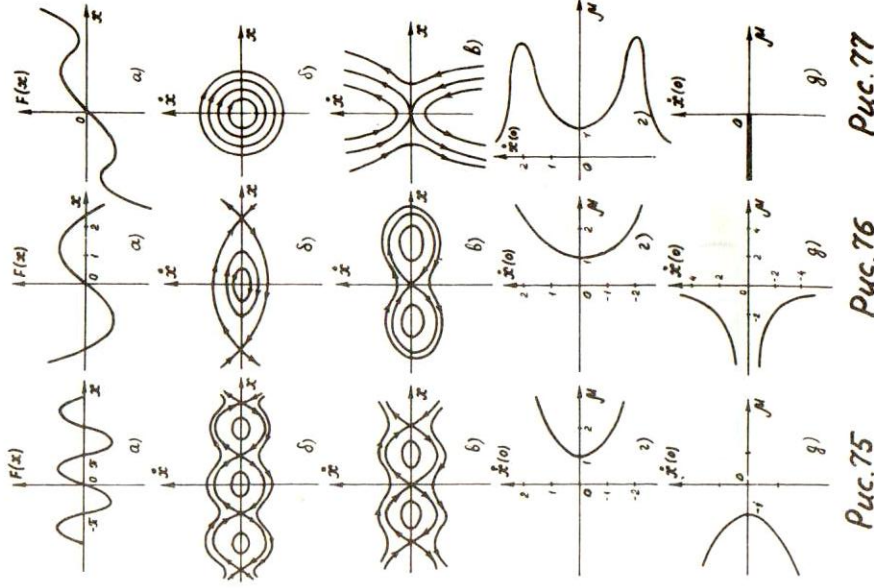
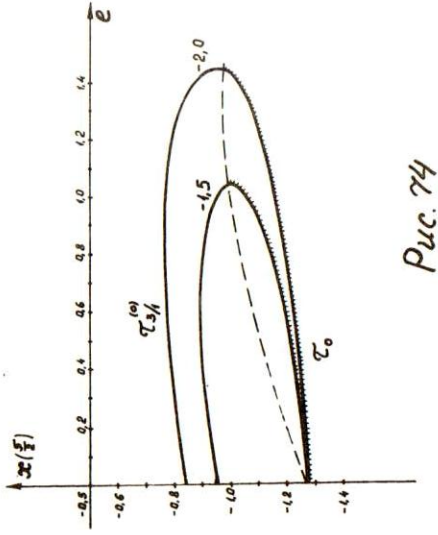
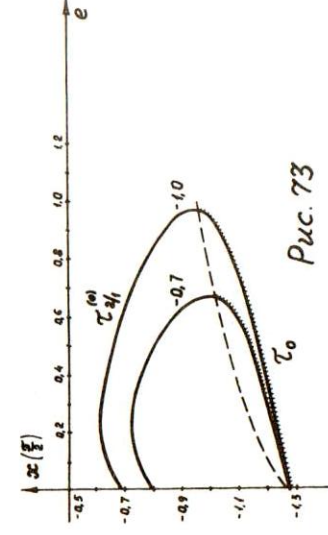
Puc. 70



Puc. 71



Puc. 72



Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издашие рекомендуется делать по следующей форме:
и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша
АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Adress: USSR, I25047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.

Сарычев Василий Андреевич, Златоустов Виктор Анатольевич,
Шиповских Татьяна Анатольевна "2П" - периодические решения
уравнения типа Дюффинга с симметричной восстанавливающей си-
лой."

Редактор В.А. Сарычев.

Корректор Ю.А. Садов.

Подписано к печати 10.12.85 г. № Т - 21419. Заказ № 478.

Формат бумаги 60X90 1/16. Тираж 180 экз.

Объем 1,5 уч.-издл. Цена 12 коп.

055 (02)2



Отпечатано на ротационных машинах в Институте прикладной математики АН СССР

Москва, Миусская пл. 4.