



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 128 за 1980 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Галактионова О.О.,
Златоустов В.А.**

**2π-периодические решения
уравнения Дюффинга**

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галактионова О.О., Златоустов В.А.
2π-периодические решения уравнения Дюффинга // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1980.
№ 128. 15 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1980-128>

ПРЕПР
Г-15

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М.В.КЕЛДЫША
АКАДЕМИЯ НАУК СССР

О.О.Галактионова, В.А.Златоустов

2П - ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЮФФИ

18/1

Препр. Галактионова О.О.
Г-15 и Златоустов В.А.
2П - периодические ре-
шения уравнения Дюффи-
га. Препр. 128 за 1980 г.
I с/л

18/1

Академия Наук СССР
Орден Ленина
Институт прикладной
математики им. М.В.Келдыша
БИБЛИОТЕКА

Москва, 1980 г.

А Н Н О Т А Ц И Я

Исследуются свойства 2π - периодических решений уравнения Дюффинга

$$\ddot{x} + \mu(x + \alpha x^3) = e \sin t$$

при произвольных значениях определяющих параметров μ , α и e . Используя методы теории монотонных операторов, получены некоторые общие результаты о существовании и единственности его нечетных 2π - периодических решений. С помощью численных методов определены области существования и устойчивости различных 2π - периодических решений данного уравнения.

Ключевые слова и фразы: уравнение Дюффинга, периодические решения, коэрцитивные и монотонные операторы, численные методы.

2π - PERIODIC SOLUTIONS OF DUFFING
EQUATION

O.O. Galaktionova, V.A. Zlatoustov

Abstract

The properties of 2π -periodic solutions of Duffing equation $\ddot{x} + \mu(x + \alpha x^3) = e \sin t$ under arbitrary values of parameters μ , α and e are investigated. Some common results for existence and uniqueness of odd 2π -periodic solutions are determined by applying results from the theory of monotone operators. The existence and stability regions of different 2π -periodic solutions are determined by numerical methods.

Key words and phrases: Duffing equation, periodic solutions, coercive and monotone operators, numerical methods.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

	стр.
Введение	4
1. Некоторые общие результаты о существовании и единственности нечетных 2π - периодических решений	5
2. Результаты численных расчетов	9
2.1. 2π - периодические решения при $e \neq 0$	9
2.1.1. Случай $\mu \neq 1$, $\mu\alpha < 0$	9
2.1.2. Случай $\mu > 0$, $\alpha > 0$	9
2.1.3. Случай $\mu < 0$, $\alpha < 0$	11
2.1.4. Случай $\mu \geq 1$, $\alpha < 0$	12
2.2. Устойчивость 2π - периодических решений	14
Литература	16

В настоящей работе исследуются 2π -периодические решения нелинейного дифференциального уравнения Дюффинга

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x + \alpha x^3) = e \sin t \quad (1)$$

при произвольных значениях определяющих параметров μ , α и e . Это уравнение описывает периодические движения, которые характерны для незатухающих вынужденных колебаний систем с нелинейными характеристиками.

Мы ограничимся исследованием уравнения (I) при $|\alpha| = 1$, когда $\ddot{x} + \mu(x \pm x^3) = e \sin t$, поскольку любое решение (I) при $|\alpha| \neq 1$ сводится к рассматриваемому случаю простой заменой

$$x(t) \rightarrow \sqrt{|\alpha|} x(t), \quad e \rightarrow \sqrt{|\alpha|} e.$$

Систематическое исследование порождающих $2\pi/n$ -периодических решений ($n = 1, 2, 3, \dots$) при $e = 0$ было проведено в [1]. Там же с помощью методов Чезари [2] и результатов работ [3, 4] были определены при $e \ll 1$ все возможные 2π -периодические решения уравнения (I) и для нахождения этих решений были сформулированы следующие краевые задачи:

$$x(0) = x(\pi) = 0 \quad (2)$$

$$\dot{x}(\pi/2) = \dot{x}(3\pi/2) = 0 \quad (3)$$

$$x(0) = \dot{x}(\pi/2) = 0. \quad (4)$$

В разделе I данной работы доказывается существование, по крайней мере, одного нечетного 2π -периодического решения уравнения (I) при $\mu\alpha < 0$. Доказательство проводится методом Галеркина [5] (этот метод, в частности, дает фактический способ нахождения приближенного решения). В дополнительном предположении $\mu \leq 1$ доказывается также единственность построенного решения. В частности, в рассматриваемом случае $\mu\alpha < 0$ устанавливается равномерная ограниченность всех нечетных 2π -периодических решений.

В разделе 2 в области $E = \{|\mu| \leq 10, 0 \leq e \leq 4\}$ *

*) Нетрудно видеть, что замена e на $-e$ равносильна сдвигу t на π . Поэтому все исследование проводится только при $e \geq 0$.

$|\alpha| = 1\}$ численно решаются различные краевые задачи для (I) с условиями (2)-(4) и в результате определяются области существования и устойчивости*) 2π -периодических решений, которые при $e = 0$ переходят в порождающие решения $x_{\pm} = 0$ ($x_{\pm}^{\pm}: 1 \leq \mu < \infty$;

$$x_{\pm}^{\pm}: -\infty < \mu \leq 1), x_{n/2}^{(2)}, \beta_{n/2}^{(2)}, \alpha_{n/2}^{(2)} (n=1, 2, 3; \nu=0, 1); \bar{x}_{n/2}^{(2)}, \bar{\beta}_{n/2}^{(2)}, \bar{\alpha}_{n/2}^{(2)} (n=2; \nu=0, 1).$$

Всюду в дальнейшем изложении будем пользоваться обозначениями, принятыми в [1]. В частности, так же, как в [1] решения при произвольных значениях e будем обозначать через $x_{\pm}^{\pm}(x_{\pm}^{\pm}, x_{\pm}^{\pm})$,

$$x_{n/2}^{(2)}, \beta_{n/2}^{(2)}, \alpha_{n/2}^{(2)} (n=1, 2, 3; \nu=0, 1); \bar{x}_{n/2}^{(2)}, \bar{\alpha}_{n/2}^{(2)}, \bar{\beta}_{n/2}^{(2)} (n=2; \nu=0, 1) **).$$

В работе в результате численных расчетов установлено, что внутри области E существуют решения, которые не имеют порождающих при $e = 0$ и тем самым не имеют себе аналогов в классе решений, построенных классическими методами малого параметра Пуанкаре и Чезари [1]. Исследуется ветвление этих решений, находятся точки бифуркации и кривые разветвления.

Результаты, полученные в разделе 2 с помощью численных методов, хорошо согласуются с теоретическими выводами раздела I.

Авторы выражают искреннюю благодарность В.А.Сарычеву за постоянное внимание к работе и ценные советы, а также В.В.Сазонову за неоднократные полезные обсуждения.

I. Некоторые общие результаты о существовании и единственности нечетных 2π -периодических решений.

В этом разделе доказываются некоторые общие результаты о существовании и единственности решения краевой задачи (I), (2).

Пусть $\lambda = -\mu\alpha > 0$ ***) , тогда (I) можно записать в виде

*) Изучение устойчивости имеет первостепенную важность в связи с возможным прикладным значением рассматриваемой задачи (см. библиографию в [1]).

**) В работе не рассматриваются 2π -периодические решения, переходящие при $e=0$ в $\theta_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$ ($\alpha < 0$), $\theta_{n/2}^{(2)}$ ($n=1, 2, 3; \nu=0, 1$)

***) При $\lambda < 0$ доказываемые ниже теоремы не применимы, однако в этом случае анализ может быть проведен локальными методами (например, с помощью теорем Банаха и Шаудера о неподвижной точке).

$$\ddot{x} + \mu x - \lambda x^3 = e \sin t. \quad (5)$$

Введем оператор N по формуле

$$Nx = -\ddot{x} - \mu x + \lambda x^3. \quad (6)$$

Тогда задача (5), (2) записывается следующим образом:

$$Nx = -e \sin t, \quad t \in (0, \pi), \quad x(0) = x(\pi) = 0. \quad (7)$$

При доказательстве существования и единственности решения задачи (5), (2) мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в [5]. В частности, через $L^2((0, \pi))$ обозначим гильбертово пространство функций со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой, которые определяются, соответственно, по формулам

$$(f, g) = \int_0^\pi f(t)g(t)dt, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2}.$$

Также воспользуемся пространствами Соболева

$$H^m((0, \pi)) = \{f \mid \frac{d^\alpha f}{dt^\alpha} \in L^2((0, \pi)) \quad \forall \alpha \leq m\}$$

при $m = 1, 2$. Очевидно, что оператор N в (7) действует из $H_0^2((0, \pi))$ в $L^2((0, \pi))$ (здесь $H_0^2((0, \pi)) = H^2((0, \pi)) \cap \{f \mid f(0) = f(\pi) = 0\}$, это же обозначение вводится для $m = 1$) и является деминепрерывным*).

Основной результат сформулирован в следующей теореме.

Теорема. Пусть $\lambda > 0$. Тогда задача (5), (2) имеет, по крайней мере, одно решение. Если, кроме того, $\mu \leq 1$, то это решение единственно. Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма I. Пусть $\lambda > 0$. Тогда оператор (7) является коэрцитивным [5], т.е.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{(Nx, x)}{\|x\|} = +\infty, \quad x \in H_0^2((0, \pi)). \quad (8)$$

При доказательстве этой леммы используется неравенство Гельдера [6]

$$\int_0^\pi x^4(t)dt \geq \frac{1}{\pi} \|x\|_2^4.$$

Лемма 2. Пусть $\lambda > 0$ и $\mu \leq 1$. Тогда оператор (7) является строго монотонным, т.е. для любых $x, y \in H_0^2((0, \pi))$, $x \neq y$

$$(Nx - Ny, x - y) > 0 \quad (9)$$

*) Это означает, что из условия $f_n \rightarrow f$ в $H_0^2((0, \pi))$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что $Nf_n \rightarrow Nf$ в $L^2((0, \pi))$.

Доказательство леммы 2. Из определения оператора N имеем

$$(Nx - Ny, x - y) = - \int_0^\pi (\ddot{x} - \ddot{y})(x - y)dt - \mu \|x - y\|^2 + \lambda \int_0^\pi (x^3 - y^3)(x - y)dt.$$

Производя в первом интеграле интегрирование по частям, получим

$$(x \neq y) \quad (Nx - Ny, x - y) > \|\dot{x} - \dot{y}\|^2 - \mu \|x - y\|^2.$$

Применяя теперь неравенство Пуанкаре [6] $\|\dot{W}\| \geq \|W\|$, $W \in H_0^1((0, \pi))$, приходим к оценке $(Nx - Ny, x - y) > (1 - \mu) \|x - y\|^2$, откуда при $\mu \leq 1$ следует (9), если $x \neq y$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Воспользуемся методом Галеркина [5, 7]. Выберем полную систему линейно независимых элементов ("базис") в $H_0^2((0, \pi))$ из собственных функций задачи

$$\ddot{W}_j = -\lambda_j W_j, \quad t \in (0, \pi), \quad W_j(0) = W_j(\pi) = 0.$$

(Очевидно, что $\lambda_j = j^2$ и $W_j(t) = \sqrt{2/\pi} \sin jt$).

Приближенное решение будем искать для каждого $m = 1, 2, \dots$ в виде

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i W_i(t), \quad (10)$$

где постоянные α_i определяются из системы уравнений

$$(Nx_m(t), W_j(t)) = -e(\sin t, W_j(t)), \quad 1 \leq j \leq m. \quad (11)$$

Докажем, что система (II) при любом m имеет, по крайней мере, одно решение. Система (II) определяет в пространстве R^m оператор B , который действует следующим образом:

$$B\alpha = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}, \quad \alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}.$$

Здесь $\beta_j = (Nx_m(t) + e \sin t, W_j)$, $1 \leq j \leq m$.

В силу деминепрерывности оператора N оператор $B: R^m \rightarrow R^m$ является непрерывным. Из коэрцитивности оператора N (см. лемму I) получаем

$$(B\alpha, \alpha)_{R^m} = (Nx_m(t) + e \sin t, x_m(t)) \geq \left[\frac{(Nx_m(t), x_m(t))}{\|x_m\|} - |e| \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right] \|x_m\| \geq 0, \quad (12)$$

если x_m достаточно велико. Тогда по следствию из теоремы Брауэра о неподвижной точке [5] заключаем, что существует такое $\alpha \in R^m$, для которого $B\alpha = 0$, а это означает разрешимость системы (II) при любом m . Таким образом, приближенное решение (10) существует при любых m , причем x_m ограничены в $L^2((0, \pi))$. Из (II) также следует, что

$$\|\dot{x}_m\|^2 \leq \mu \|x_m\|^2 + e \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|x_m\|,$$

откуда x_m ограничены в $H_0^1((0, \pi))$.

Наконец, используя равенства $\dot{W}_j = -\lambda_j W_j$, из (II) получим, что x_m ограничены и в $H_0^2((0, \pi))$. Следовательно (см., например, [5]), можно выбрать такую подпоследовательность $\{x_{m_i}\} \subset \{x_m\}$, что $x_{m_i} \rightarrow x_m$ при $m_i \rightarrow \infty$ слабо в $H_0^2((0, \pi))$. Поскольку вложение $H_0^2((0, \pi)) \subset H_0^1((0, \pi))$ компактно [5], то $x_{m_i} \rightarrow x_m$ при $m_i \rightarrow \infty$ сильно в $H_0^1((0, \pi))$. Переходя теперь к пределу в (II) при $m = m_i \rightarrow \infty$ и учитывая, что все функции, принадлежащие $H_0^1((0, \pi))$ непрерывны, убеждаемся, что x является решением задачи (7).

Единственность построенного решения при $\mu \leq 1$ следует из леммы 2. Действительно, пусть существуют два решения $x_1(t) \neq x_2(t)$. Тогда из (7) следует, что $(Nx_1 - Nx_2, x_1 - x_2) = 0$, поскольку $Nx_1 - Nx_2 = 0$. Однако, это противоречит (9), т.е. строгой монотонности оператора N при $\mu \leq 1$. Теорема доказана.

В следствии I дана оценка решения задачи (5), (2) в метрике $C((0, \pi))$.

Следствие I. Пусть $x(t)$ — решение задачи (5), (2) при $\lambda > 0$. Тогда справедлива оценка

$$\max |x(t)| \leq \left\{ \frac{|e|}{2\lambda} + \left[\left(\frac{e}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\mu^2}{27\lambda^3} \right]^{1/2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{|e|}{2\lambda} - \left[\left(\frac{e}{2\lambda} \right)^2 - \frac{\mu^3}{27\lambda^3} \right]^{1/2} \right\}^{1/3}$$

(при любых значениях параметров число, стоящее в правой части, действительное). Эта оценка следует из знакоопределенности второй производной x по t в точке абсолютного экстремума функции $x(t)$.

Следствие 2. В условиях теоремы единственное для $\mu \leq 1$ решение сходится к порождающему решению $x_x(t) = 0$.

Замечание I. Результат о единственности решения, сформулированный в теореме, является более сильным по сравнению с полученным в [8], где для аналогичной задачи единственность устанавливается лишь в предположении $\mu < 0$.

Замечание 2. Теорема I остается справедливой и для уравнения Дюффинга с демпфированием

$$\ddot{x} + \mu(x + \alpha x^3) + \delta \dot{x} = e \sin t, \quad \delta = \text{const},$$

поскольку дополнительный (по сравнению с уравнением (I)) член не влияет на коэрцитивность и монотонность соответствующего оператора N .

В заключение отметим, что в утверждениях теоремы не содержится каких-либо ограничений малости на параметры рассматриваемой задачи.

2. Результаты численных расчетов.

2.1. 2π — периодические решения при $e \neq 0$.

В предыдущем разделе доказано существование и единственность нечетных 2π — периодических решений уравнения (I) при некоторых ограничениях на параметры μ и α . Фактическое построение всех возможных 2π — периодических решений при произвольных значениях параметров μ , α и e , а также исследование их устойчивости проводится с помощью численных методов.

2.1.1. Случай $\mu \leq 1$, $\mu\alpha < 0$.

В разделе I было показано, что задача (I), (2) в этом случае имеет единственное нечетное 2π — периодическое решение, совпадающее при $e \ll 1$ с x_2^- [I]. Зависимость начальных значений $\dot{x}(0)$ от e для этого решения изображена на рис. 1 (при $0 < \mu \leq 1$ и $\alpha = -1$) и на рис. 2 (при $-10 \leq \mu < 0$ и $\alpha = 1$).

Сделаем одно замечание. Пусть решение x_2 (x_2^+ или x_2^-) достаточно мало. Тогда нелинейный член $\mu\alpha x^3$ в (I) мал по сравнению с другими членами уравнения и поэтому можно ожидать, что x_2 будет близко к решению соответствующего линейного уравнения $\ddot{x} + \mu x = e \sin t$, которое имеет вид $x_2 = \frac{e}{\mu - 1} \sin t$ ($\mu \neq 1$). Отсюда, если $|e| \ll |\mu - 1|$ (на самом деле достаточно, чтобы $|e| < |\mu - 1|$)*, то начальные значения $\dot{x}_2(0)$ с высокой точностью определяются по формуле $\dot{x}_2(0) = e/(\mu - 1)$, из которой получается качественная картина поведения решения x_2 (например, для x_2^- см. рис. 1, 2, а для x_2^+ — рис. 9).

2.1.2. Случай $\mu > 0$, $\alpha > 0$.

В этом случае при $e \ll 1$, $0 < \mu \leq 10$, $\alpha > 0$

* Это условие выполняется, в частности, при достаточно больших μ .

существует девять ^{*}) 2π -периодических решений уравнения (I): $x_z, \alpha_{n/l}^{(2)}$ ($n = 1, 2, 3; z = 0, 1$), $\bar{\alpha}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) [I]. Решения $x_z, \alpha_{n/l}^{(2)}$ ($n = 1, 2, 3; z = 0, 1$) нечетны и определяются краевыми условиями (2). Решения $x_z, \alpha_{n/l}^{(2)}$ ($n = 1, 3; z = 0, 1$) наряду с условиями (2) также удовлетворяют условиям (4). Зависимость $\dot{x}(0)$ от e при различных μ для этих решений приведена на рис. 3, 4, 7, 9. Решения $\bar{\alpha}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) определяются с помощью (3) и изображены на рис. 11, 12.

Решения $x_z, \alpha_{n/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). На рис. 3, 4 приведены решения, которые совпадают при $e \ll 1$ с решениями $\alpha_{n/l}^{(a)}, x_z, \alpha_{n/l}^{(i)}$. Решение x_z (значения $\dot{x}(0) < 0$ выше пунктирной линии) и решение $\alpha_{n/l}^{(2)}$ сливаются между собой вдоль пунктирной линии (рис. 3), которой в плоскости параметров (μ, e) соответствует кривая разветвления (рис. 5). Она начинается в точке бифуркации $\mu = 1, e = 0$ и ограничивает область существования этих решений в E .

Решения $\bar{\alpha}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). Зависимость $\dot{x}(0)$ от e для этих решений приведена на рис. 7. В результате численного решения краевой задачи (2) для (I) было обнаружено, что могут существовать либо два (при $2,55 < \mu < 10$), либо четыре (при $0 < \mu < 2,55$) решения. Новые решения рождаются в точке $\mu_* = 2,55$, $e_* = 1,449$.

Появление этих решений объясняется нелинейными свойствами уравнения (I) (отметим, что при $e = 0$ порождающих решений для них не существует). Как видно из рис. 7, решения $\alpha_{2/l}^{(2)}$ и $\bar{\alpha}_{2/l}^{(2)}$ сливаются в точках, где касательные к изолиниям $\mu = \text{const}$ вертикальны. В плоскости (μ, e) этим точкам соответствует кривая разветвления $L_0 L_1$ (рис. 8). Участку $L_1 L_3$ отвечают точки, где сливаются новые решения. Из точки L_1 ($\mu_* = 2,55$, $e_* = 1,449$) начинается кривая разветвления $L_1 L_2$, на которой сливаются все четыре решения.

Решения $\alpha_{n/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$), x_z^+ . Зависимость $\dot{x}(0)$ от e для этих решений при различных μ представлена на рис. 9. Решения x_z^+ и $\alpha_{3/l}^{(2)}$ сливаются вдоль пунктирной линии, которой в плоскости параметров (μ, e) соответствует кривая разветвления, на-

^{*}) На самом деле при $e \ll 1$, $\alpha > 0$ и любом фиксированном $\mu > 0$ существует бесконечное множество 2π -периодических решений $\alpha_{n/l}^{(2)}$ ($n = 1, 2, \dots; z = 0, 1$) (см. [I], формула (I5)) и мы ограничиваемся исследованием только тех решений, которые при $e = 0$ имеют точки бифуркации [I, 9] $\mu = n^2$ в исследуемом диапазоне $0 < \mu \leq 10$ (т.е. $n = 1, 2, 3$).

чинающаяся в точке бифуркации $\mu = 9$, $e = 0$ и имеющая в этой точке горизонтальную касательную (рис. 10).

Решения $\bar{\alpha}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). Результаты численного исследования решений $\bar{\alpha}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) задачи (I), (3) в области E приведены на рис. 11, на котором изображена зависимость $x(\pi/2)$ от e при различных μ . Установлено, что решения $\bar{\alpha}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) существуют в диапазоне $0 < \mu < 4$, а при $\mu_* = 1,0$, $e_* = 2,877$ появляются новые решения, которые не имеют порождающих при $e = 0$.

Решения $\bar{\alpha}_{2/l}^{(a)}$ и $\bar{\alpha}_{2/l}^{(i)}$ склеиваются вдоль пунктирной линии, которой в плоскости параметров (μ, e) соответствует кривая разветвления $L_0 L_1$ (см. рис. 12). Новые решения склеиваются на кривых разветвления $L_2 L_3$ и $L_2 L_4$.

2.1.3. Случай $\mu < 0$, $\alpha < 0$.

При $\mu < 0$, $\alpha < 0$, $e \ll 1$ существует бесконечное множество решений $\beta_{n/l}^{(2)}$ ($n = 1, 2, \dots, z = 0, 1$) [I], однако, как и в предыдущем случае, мы ограничимся исследованием 2π -периодических решений только при $n = 1, 2, 3$. В силу этого при $-10 \leq \mu < 0$, $\alpha < 0$ мы будем исследовать девять 2π -периодических решений уравнения (I): $x_z^-, \beta_{n/l}^{(2)}$ ($n = 1, 2, 3; z = 0, 1$), $\bar{\beta}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). Решения $x_z^-, \beta_{n/l}^{(2)}$ ($n = 1, 2, 3; z = 0, 1$) определяются с помощью (I), (2), причем эти решения при нечетных n ($n = 1, 3$) можно определить также с помощью (I), (4). Эти решения при $0 \leq e \leq 4$ изображены на рис. 13-16, 21.

Решения $\bar{\beta}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) определяются с помощью (I), (4) и изображены на рис. 17-18.

Решения $x_z^-, \beta_{n/l}^{(2)}$ ($n = 1, 2, 3; z = 0, 1$). Решения $\beta_{n/l}^{(a)}$ изображены на рис. 13, а решения x_z^- и $\beta_{n/l}^{(i)}$ - на рис. 14. Оба этих решения сливаются вдоль пунктирной линии, являющейся геометрическим местом точек, в которых касательные к изолиниям $\mu = \text{const}$ вертикальны. В области E этой пунктирной линии соответствует кривая разветвления Γ_4 (рис. 21), которая при $\mu \rightarrow 0$ асимптотически приближается к оси абсцисс. Кривая Γ_4 является границей области существования решений x_z^- (при $\mu < 0$) и $\beta_{n/l}^{(i)}$.

Решения $\beta_{2/l}^{(2)}$ и $\beta_{3/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) изображены соответственно на рис. 15, 16.

Решения $\bar{\beta}_{2/l}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). На рис. 17 приведены решения,

которые при $e \ll 1$ совпадают с $\bar{\beta}_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). Внутри области E наряду с этими решениями существуют четыре новых решения, которые не имеют порождающих решений при $e = 0$ и появление которых обусловлено нелинейными свойствами уравнения (I).

Кривые разветвления Γ_1 и Γ_2 для новых решений и для $\bar{\beta}_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) изображены на рис. 18, причем на кривой Γ_1 склеиваются четыре новых решения, а на кривой Γ_2 попарно склеиваются два новых и два старых решения.

2.1.4. Случай $\mu \geq 1$, $\alpha < 0$.

При $1 \leq \mu \leq 10$, $e \ll 1$, $\alpha < 0$ уравнение (I) имеет не более девяти 2π -периодических решений: $x_{n/1}^{(2)}$ ($n = 1, 2, 3$; $z = 0, 1$), $\bar{x}_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) и x_z^+ [1, 9]. Решения $x_{n/1}^{(2)}$ ($n = 1, 2, 3$; $z = 0, 1$), x_z^+ нечетны и определяются с помощью задачи (I), (2), причем решения x_z^+ и $x_{n/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) при нечетных $n = 1, 3$ также могут быть определены с помощью (I), (4). Для определения $\bar{x}_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) решалась задача (I), (3). Результаты численного решения задач (I), (3) и (I), (4) представлены на рис. 19-21, 23-26.

Решения x_z^+ , $x_{1/1}^{(2)}$, $x_{3/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). На рис. 19, 20 приведены решения, которые совпадают при $e \ll 1$ с решениями x_z^+ , $x_{1/1}^{(0)}$, $x_{3/1}^{(0)}$, $x_{3/1}^{(1)}$, $x_{3/1}^{(2)}$. Решения x_z^+ и $x_{1/1}^{(0)}$ сливаются при $1 < \mu \leq 9$ вдоль пунктирной линии, которой в области E соответствует участок $P_1 P_2$ кривой разветвления Γ_1 (рис. 21).

Начальный участок кривой разветвления Γ_1 можно получить аналитически при достаточно малых e . Следуя методу Галеркина, приближенное решение уравнения (I) будем искать в виде $x_1 = \alpha_0 \sin t$, где постоянная α_0 определяется из соответствующего (см. раздел I) алгебраического уравнения $(N x_1, \sin t) = 0$, которое имеет вид

$$\alpha_0^3 + \frac{3}{4} \frac{(\mu-1)^3}{\mu\alpha} - \frac{4}{3} \frac{e}{\mu\alpha} = 0.$$

Как известно, число действительных решений этого кубического уравнения зависит от знака дискриминанта

$$D = \frac{4[81e^2\mu\alpha + 16(\mu-1)^3]}{(9\mu\alpha)^3}.$$

Таким образом, при $D > 0$ существует одно, а при $D < 0$ — три 2π -периодических решения и уравнение

$$e^2 = -\frac{16}{81} \frac{(\mu-1)^3}{\mu\alpha} \quad (14)$$

приближенно определяет начальный участок кривой Γ_1 (рис. 22).

В диапазоне $9 < \mu \leq 10$ на рис. 20 представлены решения, совпадающие при $e \ll 1$ с $x_{1/1}^{(0)}$, $x_{1/1}^{(1)}$, $x_{3/1}^{(0)}$, x_z^+ и $x_{3/1}^{(1)}$. Решение $x_{1/1}^{(0)}$ склеивается с решением $x_{3/1}^{(0)}$ вдоль пунктирной линии ($\dot{x}(0) > 0$), соответствующей участку $P_2 P_3$ кривой разветвления Γ_1 (рис. 21). Таким образом, кривая Γ_1 , начинающаяся в точке бифуркации $\mu = 1$, $e = 0$, ограничивает в E область существования решений $x_{1/1}^{(0)}$, x_z^+ ($1 < \mu \leq 9$) и решений $x_{1/1}^{(0)}$, $x_{3/1}^{(0)}$, ($9 < \mu \leq 10$). Решения x_z^+ и $x_{3/1}^{(0)}$ сливаются между собой вдоль пунктирной линии ($\dot{x}(0) < 0$), которой в плоскости (μ, e) соответствует кривая разветвления Γ_2 (рис. 21). Она начинается в точке бифуркации $\mu = 9$, $e = 0$ и ограничивает в E область существования решений x_z^+ и $x_{3/1}^{(0)}$.

Решения $x_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). Эти решения изображены на рис. 23. Они сливаются вдоль пунктирной линии, которой в плоскости (μ, e) соответствует кривая разветвления Γ_2 (рис. 25). Она начинается в точке бифуркации $\mu = 4$, $e = 0$, имеет в этой точке горизонтальную касательную и является границей области существования в E решений $x_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$).

Решения $\bar{x}_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$). Решения $\bar{x}_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$) изображены на рис. 24, где приведена зависимость $x(\pi/2)$ от e для различных значений μ . Эти решения сливаются вдоль пунктирной линии, которой в плоскости (μ, e) соответствует кривая разветвления Γ_2 (рис. 26). Она также начинается в точке бифуркации $\mu = 4$, $e = 0$, имеет в этой точке горизонтальную касательную и ограничивает область существования в E решений $\bar{x}_{2/1}^{(2)}$ ($z = 0, 1$).

Используя результаты работы [10], можно вывести приближенные уравнения кривых Γ_2 и $\bar{\Gamma}_2$ при $e \ll 1$

$$\Gamma_2: \mu = 4 + \frac{2}{3} e^2 - \frac{3}{540} e^4 + \dots,$$

$$\bar{\Gamma}_2: \mu = 4 + \frac{2}{3} e^2 - \frac{17}{540} e^4 + \dots$$

2.2. Устойчивость 2π - периодических решений.

Устойчивость 2π - периодических решений уравнения (I) будем исследовать с помощью уравнения в вариациях

$$\ddot{y} + \mu(1 + 3\alpha x^2)y = 0. \quad (I5)$$

Здесь $x = x(t)$ - исследуемое на устойчивость периодическое решение. Характеристическое уравнение для (I5) имеет вид [II] $\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0$, где $A = y_1(\pi)\dot{y}_2(\pi) + y_2(\pi)\dot{y}_1(\pi) / y_1(\pi)\dot{y}_2(\pi) - y_2(\pi)\dot{y}_1(\pi)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ - решения уравнения (I5) с начальными условиями $y_1(0) = \dot{y}_2(0) = 1$, $\dot{y}_1(0) = y_2(0) = 0$ [I3]. Если $|A| < 1$, то периодическое решение $x(t)$ устойчиво в линейном приближении, а при $|A| > 1$ неустойчиво*. Граница области устойчивости задается уравнением $|A| = 1$.

Для стационарного порождающего решения $x_2 = 0$ легко получить зависимость

$$A = \begin{cases} \cos 2\pi \sqrt{\mu} & , \quad \mu > 0 \\ \operatorname{ch} 2\pi \sqrt{-\mu} & , \quad \mu < 0 \end{cases} \quad (I6)$$

которая представлена на рис. 27.

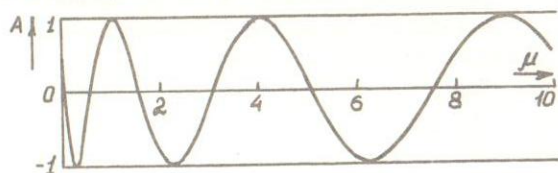


Рис. 27.

Из (I6) следует, что решение $x_2 = 0$ устойчиво при $\mu > 0$ и неустойчиво при $\mu < 0$. В точках бифуркации $\mu = 1, 4, 9$ имеет место критический случай $|A| = 1$.

*) Далее всюду под устойчивостью понимается устойчивость в линейном приближении.

**) Аналогичным образом для стационарного решения $\theta_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$ ($\alpha < 0$) можно получить выражение

$$A = \begin{cases} \operatorname{ch} 2\pi \sqrt{2\mu} & , \quad \mu > 0 \\ \cos 2\pi \sqrt{-2\mu} & , \quad \mu < 0 \end{cases}$$

Для всех нестационарных порождающих решений в областях их существования при $e = 0$ также имеет место критический случай.

Анализ устойчивости 2π - периодических решений при произвольных значениях μ и e из области E проводился с помощью численных расчетов в два этапа. На первом этапе численно решалась соответствующая однопараметрическая краевая задача и в результате находились начальные значения $\dot{x}(0)$ или $x(\pi/2)$. На втором этапе уравнение (I5) численно интегрировалось совместно с (I), начальные условия для которого были найдены на первом этапе.

Результаты численного исследования устойчивости 2π - периодических решений уравнения (I) представлены на рис. 5, 6, 21, 25, 26, где области устойчивости этих решений заштрихованы. На рис. 1, 3, 4, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 23, 24 участки устойчивости 2π - периодических решений отмечены штриховкой.

Рассмотрим более подробно области устойчивости для решений x_2 , $x_{3/1}^{(2)}$, $x_{2/1}^{(2)}$, $\bar{x}_{2/1}^{(2)}$ ($\nu = 0, 1$), представленные на рис. 21, 25, 26. Область устойчивости решения x_2^+ (рис. 21) при $1 < \mu \leq 9$ ограничена кривой разветвления Γ_1 . Внутри этой области (заштрихованной) имеется узкая зона неустойчивости (на рисунке она незаштрихована), которая начинается в точке $\mu = 4$, $e = 0$ и ограничена кривыми $\bar{\Gamma}_2$ и Γ_2 , пересекающимися в точке ρ_0 ($\mu = 0.782$, $e = 0.287$) и одновременно являющимися кривыми разветвления для решений $x_{2/1}^{(2)}$, $\bar{x}_{2/1}^{(2)}$ (рис. 25, 26)*).

В диапазоне $9 < \mu \leq 10$ кривая $\Gamma_1^{(0)}$ (рис. 21) ограничивает область устойчивости для решения $x_{3/1}^{(0)}$. На кривой Γ_1 устойчивые решения x_2^+ и $x_{3/1}^{(0)}$ склеиваются с неустойчивым решением $x_{1/1}^{(0)}$ (рис. 19, 20).

На кривой разветвления Γ_3 устойчивое решение x_2^+ склеивается с неустойчивым решением $x_{3/1}^{(1)}$. Область устойчивости решения $x_{1/1}^{(1)}$ ($1 < \mu \leq 10$) ограничена справа границей $A = -1$. В диапазоне $-10 \leq \mu \leq 1$ решение x_2^- устойчиво в заштрихованной области, причем граница $A = -1$ пересекает ось $\mu = 0$ в точке $e_* = \sqrt{2/3}$. Значение $e_* = \sqrt{2/(-3\alpha)}$ ($\alpha < 0$) при произвольных α можно получить аналитически, используя метод, изложенный в [11].

*) Кривые Γ_2 и $\bar{\Gamma}_2$ при выбранном масштабе рисунка в действительности сливаются и изображены раздельно только для наглядности.

Для решений $x_{2/1}^{(0)}$, $x_{2/1}^{(1)}$ и $\bar{x}_{2/1}^{(0)}$, $\bar{x}_{2/1}^{(1)}$, области устойчивости изображены соответственно на рис. 25, 26. Эти решения попарно устойчивы или неустойчивы одновременно, причем в точке ρ_0 происходит пересечение границ областей устойчивости [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Галактионова О.О., Златоустов В.А. 2π - периодические решения уравнения Дюффинга при малых значениях амплитуды вынуждающей силы, препринт ИПМ АН СССР, № 33, 1980.
2. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Мир, 1964.
3. Сарычев В.А., Сазонов В.В., Златоустов В.А. Вынужденные периодические колебания математического маятника, препринт ИПМ АН СССР, № 32, 1977.
4. Сарычев В.А., Златоустов В.А., Сазонов В.В. Численное исследование периодических решений дифференциальных уравнений второго порядка. Отчет ИПМ АН СССР, 1976.
5. Гаевский Х., Греггер К., Захармас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1978.
6. Харди Г., Литтлвуд Дж., Полла Г. Неравенства, М., ИЛ, 1948.
7. Каудерер К. Нелинейная механика, ИЛ, М., 1961.
8. Kannan R., Locker J. Nonlinear boundary value problems and operators TT^* , J. Diff. Equat., 28, 60-103, 1978.
9. Белоцерковская О.О. 2π - периодические решения уравнения Дюффинга, Труды МЭТИ, 1977.
10. Артемьев Н.А. Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики, Изв. АН СССР, серия мат., т. 8, № 2, 61-100, 1944.
11. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, М., 1956.
12. Белоцерковская О.О. Устойчивость 2π - периодических решений уравнения Дюффинга, Труды МЭТИ, 1978.

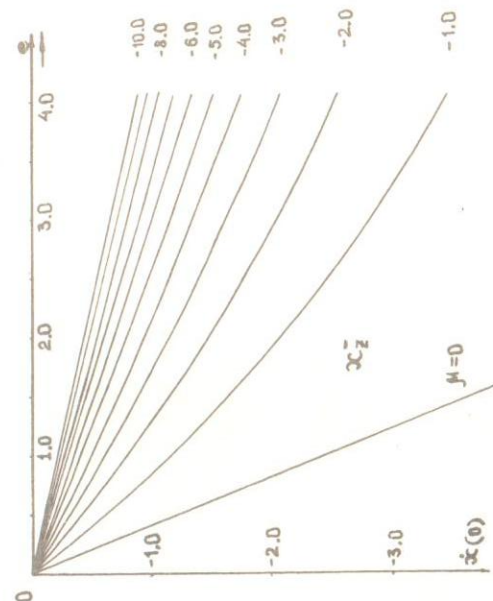


РИС.2.

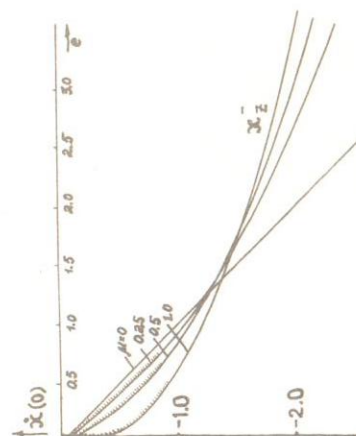


РИС.1.

Академия Наук СССР
Средняя Издательская
Институт прикладной
математики им. С.В. Ковалева
БИБЛИОТЕКА

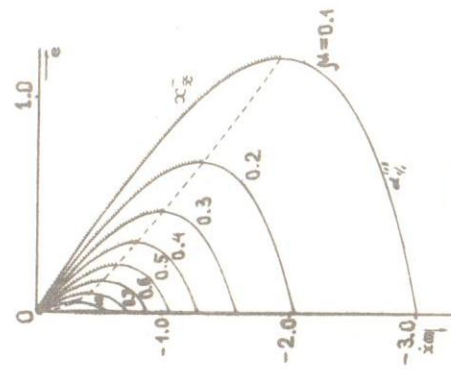


РИС.3.

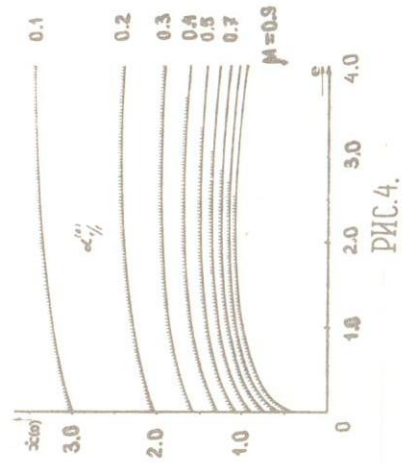


РИС.4.

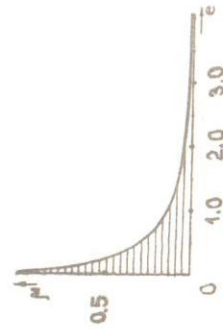


РИС.5.

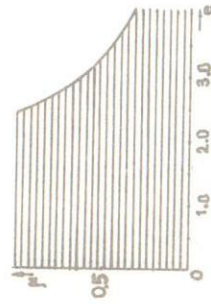


РИС.6.

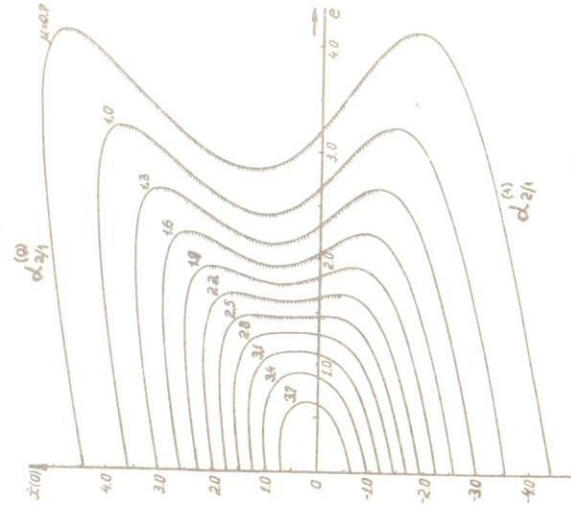


РИС.7.

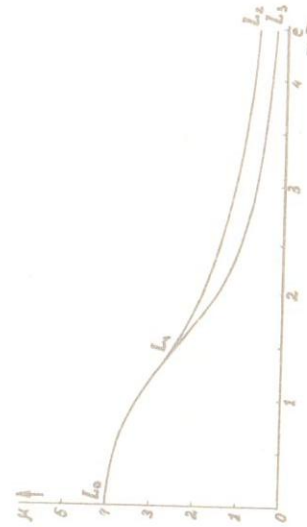


РИС.8.

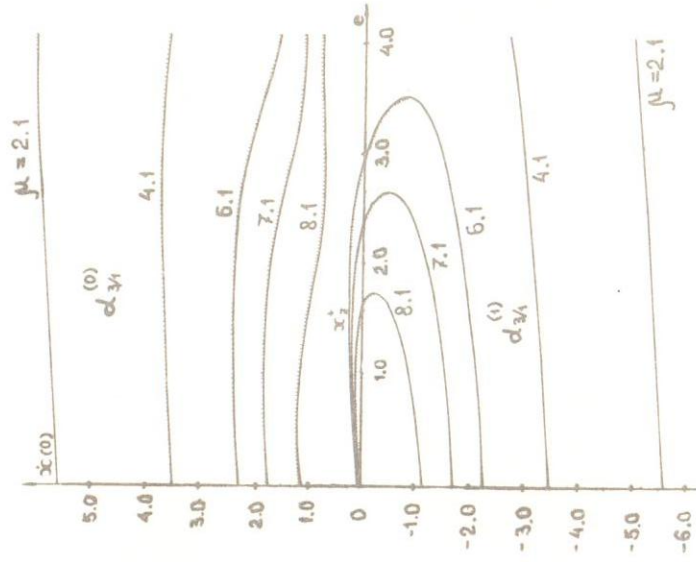


РИС.9.

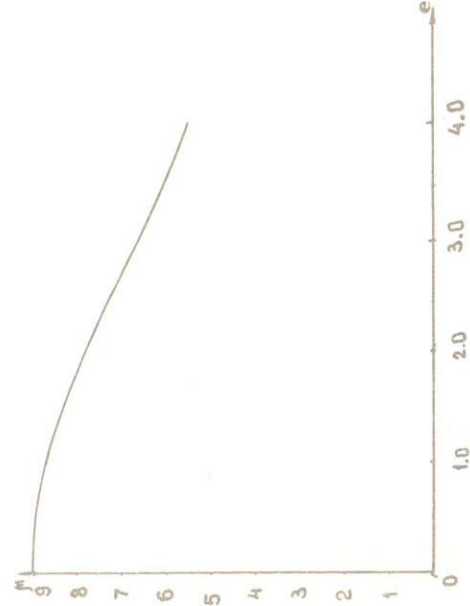


РИС.10.

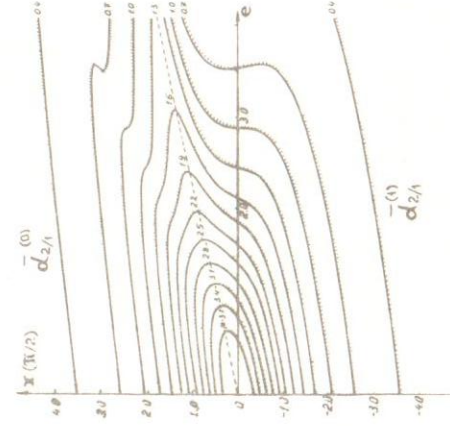


РИС.11.



РИС.12.

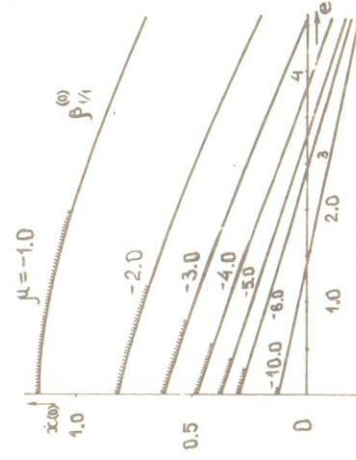


РИС.13.

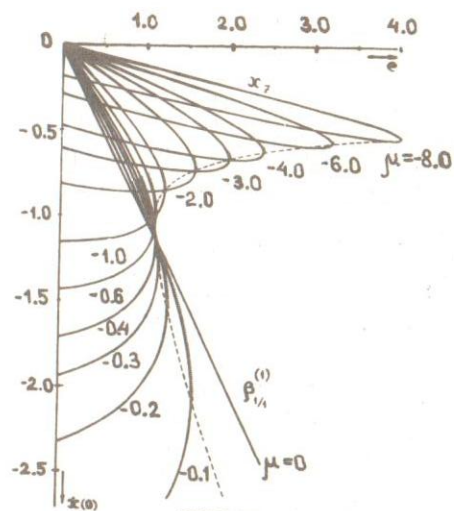


РИС.14.

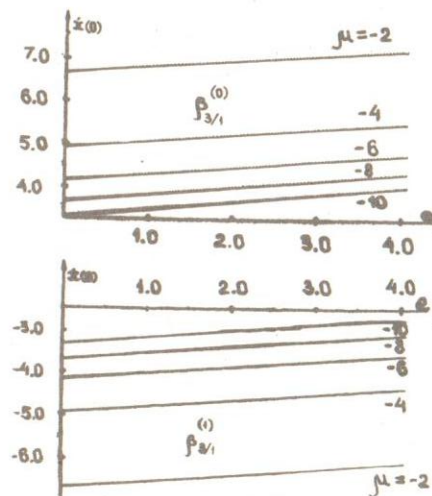


РИС.16.

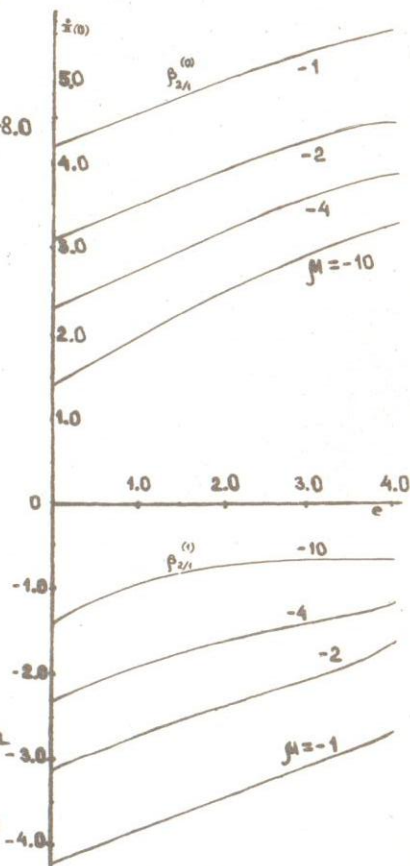


РИС.15.

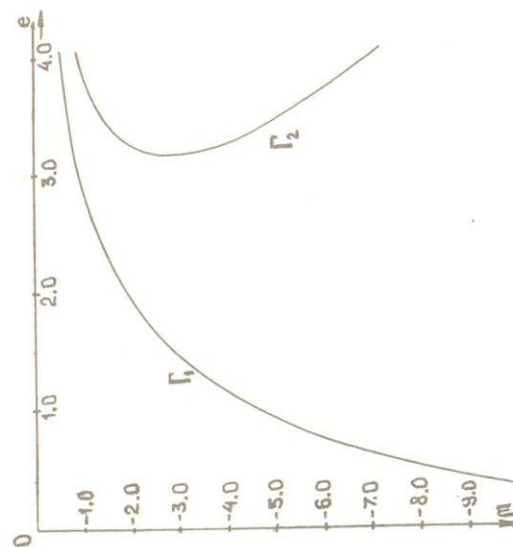


РИС.18.

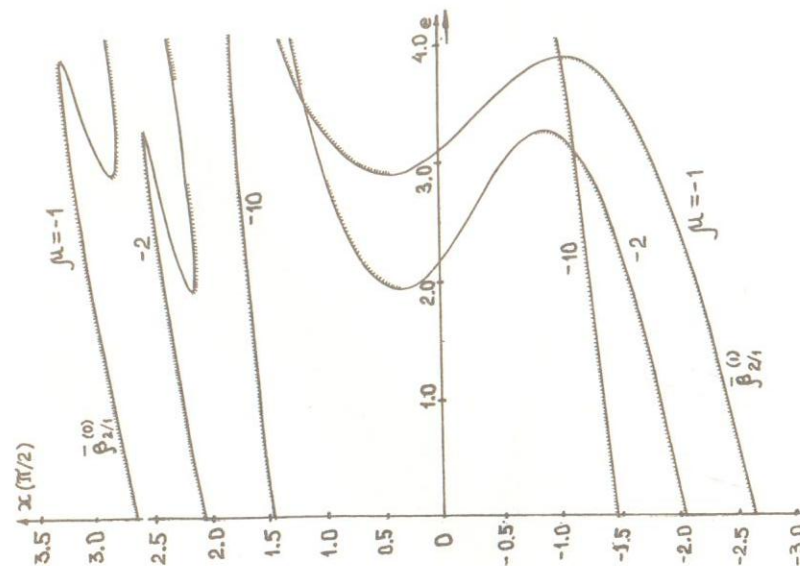


РИС.17.

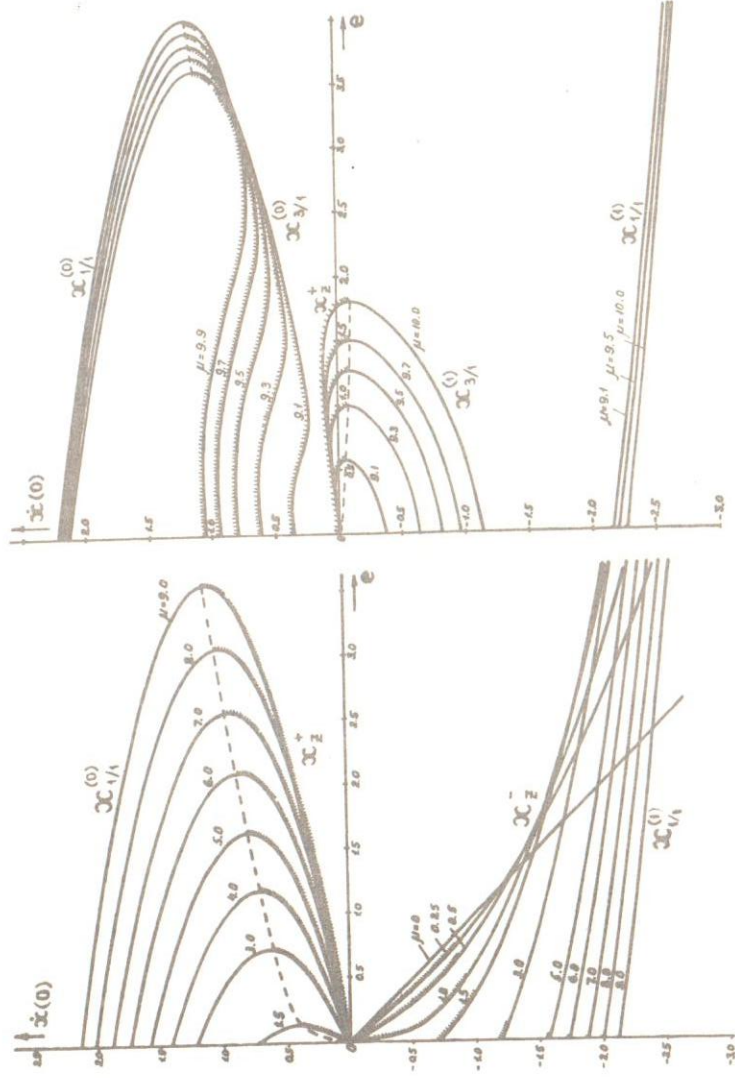


РИС.19.

РИС.20.

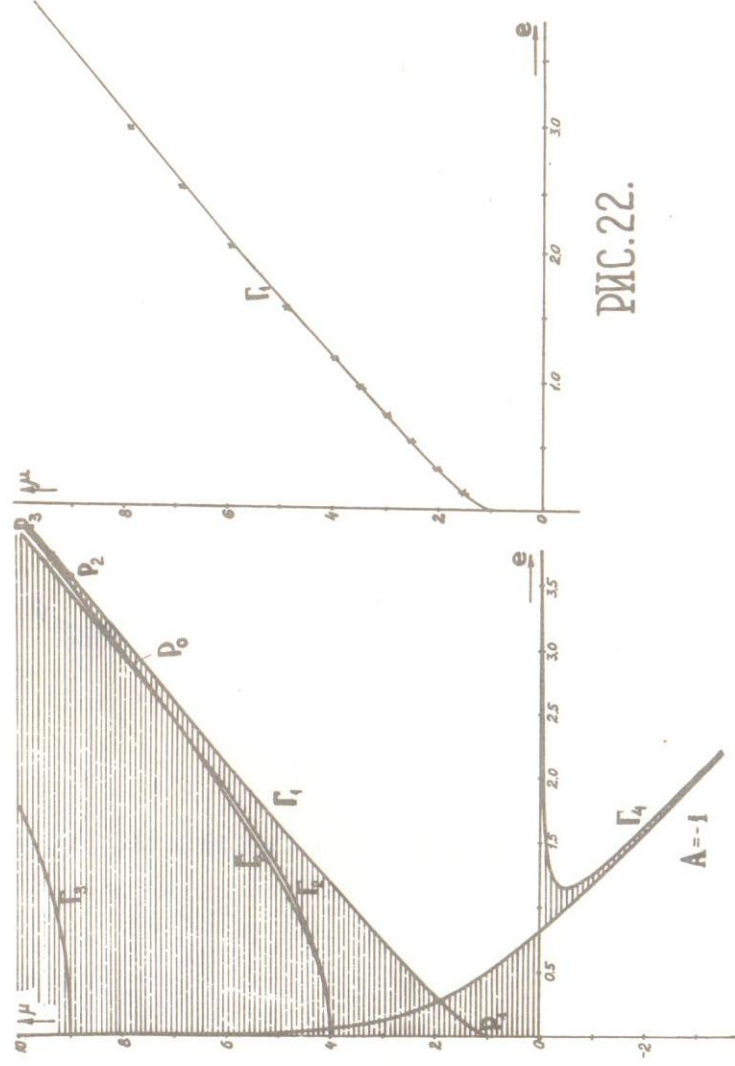


РИС.21.

РИС.22.

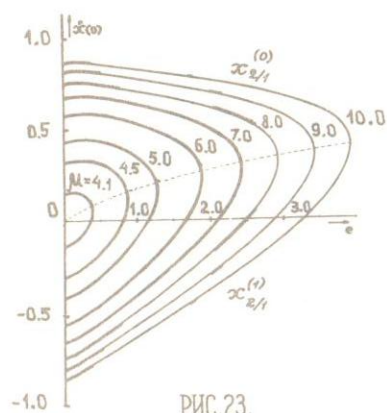


РИС.23.

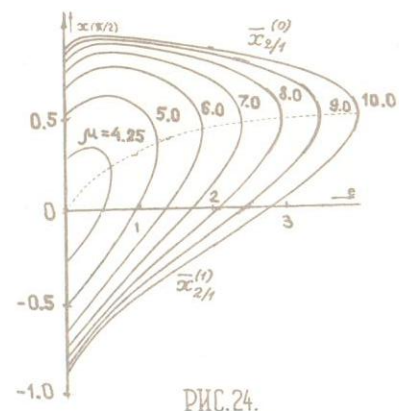


РИС.24.

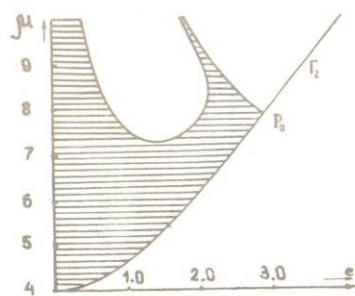


РИС.25.

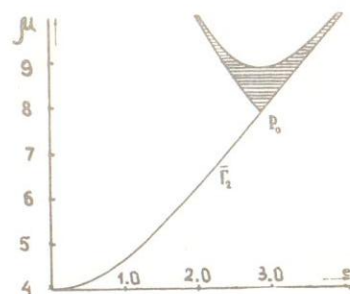


РИС.26.

О.О. Галактионова, В.А. Златоустов, "25" - периодические решения уравнения Дюффинга".
Редактор В.А. Сарычев. Корректор О.О. Галактионова.

Подписано к печати 08.10.80г. № Т-14986. Заказ № 6178.
Формат бумаги 60 X 90, 1/16. Тираж 160 экз.
Объем 1,1 уч. изд. л. Цена 10 коп.

355(02)2



Отпечатано на ротационных в Институте прикладной математики АН СССР
Москва, Миусская пл. 4.

Все авторские права на настоящее издание принадлежат Институту прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР.

Ссылки на издание рекомендуется делать по следующей форме:
и.о., фамилия, название, препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, год, №.

Распространение: препринты института продаются в магазинах Академкниги г. Москвы, а также распространяются через Библиотеку АН СССР в порядке обмена.

Адрес: СССР, 125047, Москва-47, Миусская пл. 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, ОНТИ.

Publication and distribution rights for this preprint are reserved by the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences.

The references should be typed by the following form: initials, name, title, preprint, Inst.Appl.Mathem., the USSR Academy of Sciences, year, N(number).

Distribution. The preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, the USSR Academy of Sciences are sold in the bookstores "Academkniga", Moscow and are distributed by the USSR Academy of Sciences Library as an exchange.

Address: USSR, 125047, Moscow A-47, Miusskaya Sq.4, the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Ac.of Sc., the USSR, Information Bureau.