Гаджиев М.Г., Молчанов А.М.

Аналитическая формула ударной волны. Об одном классе уравнений состояния

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

М. Г. Гаджиев, А. М. Молчанов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА УДАРНОЙ ВОЛНЫ. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Препринт № 53

Москва 1969 г.

Гаджиев, М. Г. Аналитическая формула ударной волны. Об одном классе уравнений состояния : препр. № 53 / М. Г. Гаджиев, А. М. Молчанов ; ИПМ АН СССР. – М. : [б. и.], 1969. – 14 с. : 2 рис. – Библиогр.: с. 14 (2 назв.).

Реферат

Показано, что для уравнений состояния вида,

$$p = f(\rho T),$$

где f – произвольная функция своего аргумента, задача об ударной волне допускает аналитическое решение

$$e + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = const,$$
$$\rho w = const,$$

при условии, что коэффициенты вязкости и теплопроводности связаны соотношением

$$P_r = \frac{\eta C_p}{\lambda} = \frac{3}{4}.$$

п. 1. Введение

Учет диссипативных факторов – вязкости и теплопроводности – требует численного интегрирования при отыскании структуры ударной волны. Для решения конкретных задач этого вполне достаточно, однако качественное исследование возможных особенностей сильно затруднено.

К счастью существует обширный класс уравнений состояния, допускающих аналитическое решение задачи об ударной волне.

Правда такое решение существует только при определенном соотношении коэффициентов вязкости и теплопроводности, а именно, при числе Прандтля, равном трем четвертям,

$$P_r = \frac{3}{4}.$$

Но аналитическое решение существует еще в двух крайних случаях – при отсутствии вязкости, когда критерий Прандтля равен нулю,

$$P_r = 0,$$

и, наоборот, в случае пренебрежимо малой теплопроводности, когда этот безразмерный параметр обращается в бесконечность

$$P_r = \infty.$$

В задаче о звуковой волне (линейное приближение в гидромеханике) это критическое значение,

$$P_r = \frac{3}{4},$$

уже было найдено ранее (в работе одного из авторов [1]), как граница, отделяющая область преимущественного влияния вязкости от области доминирования теплопроводности.

То, что именно на этой критической границе существует аналитическое решение полной, нелинейной задачи, позволяет думать, что эта граница является точной и роль ее не ограничивается рамками линейного, звукового приближения.

Уравнения состояния, допускающие аналитическое решение, задаются, как это показано ниже, произвольной функцией произведения плотности на температуру,

$$p = f(\rho T)$$

то есть определяются произвольной функцией одного переменного. Это довольно широкий класс функций.

Так, например, произвольное уравнение состояния

$$p = F(\rho T),$$

вдоль любой из своих изотерм

$$T = T_0$$

совпадает с одним из представителей этого класса, а именно

$$p = F(\tfrac{\rho T}{T_0}, T_0) \equiv f(\rho T).$$

Аналогичное представление можно построить и вдоль других термодинамических кривых.

Поэтому найденный класс может служить удобным орудием исследования общих свойств ударных волн.

п. 2. Ударная волна

Уравнения гидромеханики для одномерного течения вязкой теплопроводной несжимаемой жидкости в эйлеровых координатах имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{4}{3}\eta \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\rho\left(e + \dfrac{u^2}{2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(e + \dfrac{u^2}{2}\right) + \rho u\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{4}{3}\eta\, u\, \dfrac{\partial u}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь три искомых функции:

$$\begin{cases} \text{скорость } u = u(x,t) \\ \text{плотность } \rho = \rho(x,t) \\ \text{температура } T = T(x,t), \end{cases} \quad (2)$$

Остальные величины – давление *P*, энергия *e*, коэффициенты вязкости η и теплопроводности λ – являются функциями только термодинамических переменных ρ и *T*,

$$\begin{cases} P = P(\rho,t), \\ e = e(\rho,t), \\ \eta = \eta(\rho,t), \\ \lambda = \lambda(\rho,t), \end{cases} \quad (3)$$

и не зависят от скорости *u*.

Стоит заметить, что всюду в уравнениях коэффициент вязкости входит только с множителем $\frac{4}{3}$, поэтому «экзотическое» значения параметра Прандтля – три четверти – связано только с неудачной исторической традицией выделять множитель «четыре трети» из коэффициента вязкости. Эта традиция восходит к кинетической теории газов. С точки зрения уравнений сплошной среды, коэффициентом вязкости более естественно называть именно множитель μ:

$$\mu = \frac{4}{3}\eta, \quad (4)$$

который фактически входит в уравнения. Если ввести соответствующее число Прандтля,

$$\widetilde{p}_r = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{4}{3}\frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{4}{3} p_r, \quad (5)$$

то его критическое значение существенно более понятно и естественно

$$p_{r\,крит.} = 1. \quad (6)$$

Возвращаясь к нашей задаче, напомним, что плоской ударной волной называется решение вида:

$$\begin{cases} u = u(x - Dt) \\ \rho = \rho(x - Dt) \, . \\ T = T(x - Dt) \end{cases} \tag{7}$$

Это решение сохраняет профиль и только перемещается (вдоль частиц) со скоростью *D*.

Вводя переменное ξ, бегущее вместе с волной,

$$\xi = x - Dt \, , \tag{8}$$

сводим задачу к отысканию решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} O = -D \frac{d\rho}{d\xi} + \frac{d(\rho u)}{\partial d}, \\ \frac{d}{d\xi}(\mu \frac{du}{d\xi}) = -D \frac{d(\rho u)}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}(\rho + \rho u^2), \\ \frac{d}{d\xi}(\lambda \frac{dT}{d\xi} + \mu u \frac{du}{d\xi}) = -D \frac{d}{d\xi} \rho(e + \frac{u^2}{2}) + \frac{d}{d\xi}\left[\rho u(e + \frac{u^2}{2}) + \rho u \right]. \end{cases} \tag{9}$$

Система допускает понижение порядка, так как каждое уравнение есть равенство двух полных производных. Интегрируя, получаем систему

$$\begin{cases} O = \rho(u - D) - C_1, \\ \mu \frac{du}{d\xi} = p + \rho(u - D)u - C_2, \\ \lambda \frac{dT}{d\xi} + \mu u \frac{du}{d\xi} = pu + \rho(u - D)(e + \dfrac{u^2}{2}) - C_3, \end{cases} \tag{10}$$

двух дифференциальных и одного конечного уравнения. Эта система зависит от четырех произвольных параметров C_1, C_2, C_3 и *D*. Следовательно через каждую точку u_0, ρ_0, T_0 пространства проходит однопараметрическое семейство решений. В этом проще всего убедиться, определяя постоянные C_1, C_2, C_3 из условия, что заданная точка u_0, ρ_0, T_0 была стационарной точкой системы (10)

$$\begin{cases} C_1 = \rho_0(u_0 - D), \\ C_2 = p_0 + \rho_0(u_0 - D)u_0, \\ C_3 = p_0 u_0 + \rho_0(u_0 - D)(e_0 + \dfrac{u_0^{\,2}}{2}). \end{cases} \tag{11}$$

Из этих равенств видно, что при любом *D* точка u_0, ρ_0, T_0 является концом траектории системы (10). Другой конец траектории соответствует другому корню u_1, ρ_1, T_1 системы

$$\begin{cases} \rho_1(u_1 - D) = \rho_0(u_0 - D), \\ p_1 + \rho_1(u_1 - D)u_1 = p_0 + \rho_0(u_0 - D)u_0, \\ p_1u_1 + \rho_1(u_1 - D)(e_1 + \frac{u_1^2}{2}) = p_0u_0 + \rho_0(u_0 - D)(e_0 + \frac{u_0^2}{2}), \end{cases} \qquad (12)$$

определяющему еще одну стационарную точку системы (10).

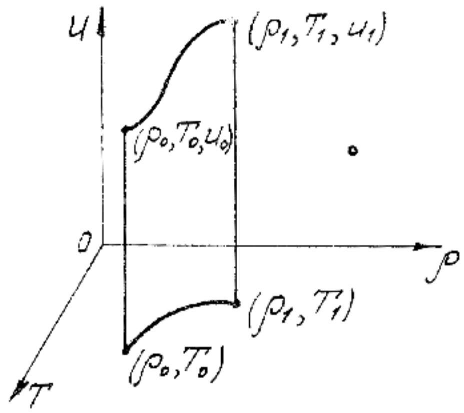

Рис. 1. Ударная волна – кривая в фазовом пространстве u, ρ, T

При изменении точки u, ρ, T от u_0, ρ_0, T_0 до u_1, ρ_1, T_1 переменная ξ успевает пройти всю действительную ось от $-\infty$ до $+\infty$. Различным значениям D соответствуют различные концы u_1, ρ_1, T_1, в то время как точка u_0, ρ_0, T_0 остается фиксированной.

Традиционно рассматривается не вся кривая в трехмерном пространстве, а только ее проекция на плоскость термодинамических переменных ρ, T. В этом случае геометрическое место «вторых» концов траектории называется «адиабатой Гюгонио» или «ударной адиабатой».

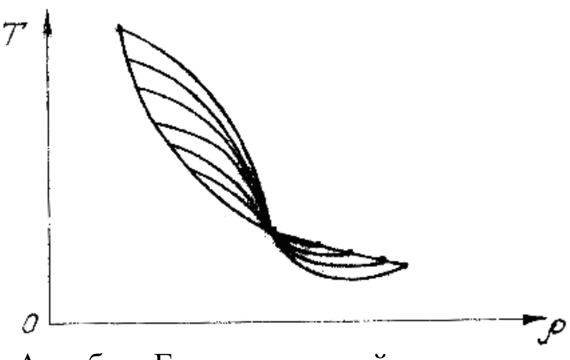

Рис. 2. Адиабата Гюгонио и семейство ударных волн.

Изучаемая точка u_0, ρ_0, T_0 может быть началом или концом траектории. Это зависит от величины D скорости ударной волны. Если скорость волны больше скорости звука в изучаемой точке, то эта точка является концом траектории. Если меньше, то началом. Критическому значению

$$D = c \tag{13}$$

соответствует совпадение конца траектории с ее началом (точка 0 на рис. 2) и вырождение ударной волны в звуковую.

п. 3. Аналитическое решение

Структура адиабаты Гюгонио, описанная выше, и приводимая в каждом учебнике по гидромеханике, основана, в сущности, только на изучении малой окрестности звуковой волны. Она несомненно верна, как это показывает теория возмущений, для слабых ударных волн. Какова структура адиабаты Гюгонио в целом – этот вопрос остается открытым.

В случае идеального газа Becker [2], на основании найденного им аналитического решения, подтвердил справедливость указанных представлений в целом. Однако уравнение состояния идеального газа

$$p = R\rho T\,, \tag{14}$$

имеет слишком частный вид, чтобы можно было экстраполировать полученные результаты на общий случай.

К счастью, метод Becker'a допускает существенное обобщение, позволяющее надеяться на получение достаточно полной качественной картины.

К изложению этого обобщения мы сейчас и переходим.

Для дальнейшего удобнее переписать систему (10), введя новое переменное *w*,

$$w = u - D\,, \tag{15}$$

физический смысл которого очевиден. Это скорость в той системе координат, в которой ударная волна неподвижна. Несложные выкладки приводят к следующей системе

$$\begin{cases} \rho w = m \\ \mu \dfrac{dw}{d\xi} = p + \rho w^2 - P \\ \lambda \dfrac{dT}{d\xi} + \mu w \dfrac{dw}{d\xi} = \rho w \left(e + \dfrac{w^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} - E \right) \end{cases}. \tag{16}$$

Величины *m, P,* и *E* – новые произвольные постоянные связаны со старыми C_1, C_2, C_3 и *D* соотношениями:

$$\begin{cases} m = C_1, \\ P = C_2 - DC_1, \\ E = \dfrac{C_3}{C_1} + \dfrac{D^2}{2} - \dfrac{C_2 D}{C_1}. \end{cases} \tag{17}$$

Внимательный анализ работы Becker'а показывает, что ее основную идею можно сформулировать следующим образом:

Предположим, что существует функция $\underline{F(w,\rho,T)}$ такая, что уравнение для этой функции в силу изучаемой системы имеет вид:

$$\frac{dF}{d\xi} = AF \tag{18}$$

Тогда равенство,

$$F(w,\rho,T)=0, \tag{19}$$

дает частное решение изучаемой системы при условии, конечно, что удается проинтегрировать оставшиеся $(n-1)$ уравнений. В нашем случае, когда система всего лишь второго порядка, равенство (19) полностью определяет кривую в фазовом пространстве w,ρ,T (разумеется, вместе с соотношением $\rho w = m$). После этого отыскание зависимости величин w,ρ и T от переменной ξ сводится к одной квадратуре. Стоит подчеркнуть близость сформулированной идеи к идее первого интеграла. Если коэффициент $A \equiv 0$, то уравнение (18) как раз и дает первый интеграл. Первый интеграл найти труднее, но зато он и дает однопараметрическое семейство решений и позволяет понизить порядок системы.

Соотношение типа (18) дает более частные сведения – всего лишь одно частное решение, но зато можно надеяться получить его в большем числе случаев.

Сам Becker не сформулировал в достаточной общности идею частного решения, и нашел, поэтому, решение задачи об ударной волне только для случая идеального газа. Между тем обобщение возникает уже при попытке найти функцию F в виде

$$F = e + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} - E. \tag{20}$$

Найдем условия, при которых эта функция удовлетворяет, в силу системы (16), уравнению типа (18). Из последнего уравнения системы (16) вытекает, что для этого достаточно выполнения тождества

$$d(e + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho}) \equiv w dw + \frac{\lambda}{\mu} dT. \tag{21}$$

Так как переменное w выпадает из этого соотношения, то вопрос относится только к термодинамическим величинам. При каких условиях имеет место соотношение:

$$d(e+\frac{p}{\rho})=\frac{\lambda}{\mu}dT. \qquad (22)$$

В термодинамике при изучении различных вопросов используют различные пары переменных. Для наших целей наиболее удобная пара ρ, T – давление, температура. Из равенства (22) немедленно находим, что

$$e+\frac{p}{\rho}=e_0(T), \qquad (23)$$

так как правая часть не содержит дифференциала dp и, следовательно, функция $e+\frac{p}{\rho}$ зависит только от T и не зависит от давления. Формально это вытекает из двух соотношений для частных производных,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial T}(e+\dfrac{p}{\rho})=\dfrac{\lambda}{\mu}, \\ \dfrac{\partial}{\partial p}(e+\dfrac{p}{\rho})=0, \end{cases} \qquad (24)$$

которые эквивалентны одному соотношению в дифференциалах (22).

Кроме соотношения (23), полученного из условия существования частного решения, термодинамические величины всегда связаны основным термодинамическим тождеством

$$de=TdS-pdv, \qquad (25)$$

где v – удельный объем, связанный с плотностью ρ соотношением

$$v=-\frac{1}{\rho}.$$

Термодинамическое тождество можно переписать иначе

$$TdS=d(e+pv)-vdp. \qquad (27)$$

Если же учесть полученное выше соотношение (23), то получится

$$Tds=de_0(T)-vdp=\frac{de_0}{dT}dT-vdp. \qquad (28)$$

Разделив на T, получим

$$dS=\frac{1}{T}\frac{de_0}{dT}dT-\frac{v}{T}dp. \qquad (29)$$

Условие, что множители при dT и dp являются частными производными, можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{T}\frac{de_0}{dT}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{v}{T}\right), \tag{30}$$

откуда вытекает, что отношение $\frac{v}{T}$ не зависит от *T*, так как левая часть равенства равна нулю, так как e_o зависит только от *T*.

Итак,

$$\frac{v}{T} = \varphi(p), \tag{31}$$

где $\varphi(p)$ – произвольная функция своего аргумента. Иначе этот результат можно записать в форме

$$p = f(\rho T), \tag{32}$$

где f также произвольная функция своего аргумента, на место которого надлежит подставить произведение плотности на температуру.

Это несложное рассуждение позволяет найти общий вид уравнений состояния, допускающих аналитическое решение задачи об ударной волне.

Однако соотношениями (23) и (32) не исчерпываются условия, при которых существует аналитическое решение.

Из основного соотношения (22) вытекает также, что

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\partial}{\partial T}(e + pv)\bigg|_p . \tag{33}$$

Однако из термодинамики известно, что величина, стоящая справа в этом равенстве, есть ничто иное, как удельная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_p = \frac{\partial}{\partial T}(e + pv)_p = T\frac{\partial S}{\partial T}\bigg|_p . \tag{34}$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda}{\mu} = C_p, \tag{35}$$

откуда вытекает безразмерное соотношение

$$\frac{\lambda C_p}{\mu} = 1. \tag{36}$$

С учетом соотношений (4) и (5) получаем условие на число Прандтля

$$p_r = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{3}{4}\frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{3}{4}, \tag{37}$$

которое, как уже говорилось выше, выглядело бы значительно более естественно, если бы определение критерия Прандтля было выбрано более удачно:

$$\tilde{p}_r = \frac{\mu c_p}{\lambda} = 1 \tag{38}$$

Подробное исследование полученного решения, а также построение решения в крайних ситуациях, когда $\lambda = 0$ или $\mu = 0$, выходит за рамки данной работы.

Литература

1. Молчанов А. М. Малые возмущения в гидромеханике с диссипацией. Препринт ИМП № 19. Москва 1969 г.
2. R. Becker. Stopwelle und Detonation. Zeitschrift für Physik, 8, 321-362 (1921-22).

Электронную версию препринта подготовили:
Н. В. Михайлова, Н. М. Панкратова, И. В. Флоринский
(Институт математических проблем биологии РАН)

Редактирование не проводилось (за исключением опечаток)

Проект «Электронные ИПМ-препринты А. М. Молчанова»
Координатор проекта: И. В. Флоринский
iflorinsky@yahoo.ca

Пущино
2012