ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 6 за 1969 г.

Молчанов А.М.

Нормальная форма нелинейной системы вблизи критической точки

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Молчанов А.М. Нормальная форма нелинейной системы вблизи критической точки // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 1969. № 6. 29 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=1969-6**

Молчанов А. М.

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Институт прикладной математики. Москва
Институт биологической физики. Пущино-на-Оке

Препринт № 6

Москва, 1969 г.

Молчанов, А. М. Нормальная форма нелинейной системы вблизи критической точки : препр. № 6 / Молчанов А. М. ; [ИПМ АН СССР]. – М. : [б. и.], 1969. – 29 с. – Библиогр.: с. 29 (4 назв.).

Реферат

Грубая система, содержащая параметр, может становиться негрубой при критическом значении параметра. Приведение такой системы к обычной (линейной) нормальной форме невозможно без особенностей (типа полюса) в замене переменных.

Показано, что обобщение (нелинейное) понятия нормальной формы позволяет ограничиться гладкими (по независимым переменным и параметру) преобразованиями. Интегрирование предлагаемой нормальной формы сводится к серии квадратур.

Такая постановка задачи вызвана потребностями изучения колебательных биохимических систем, особенно разнообразием типов возбуждения колебаний.

n° 1. Разделение движений

Известные методы асимптотического исследования допускают систематизацию с единой точки зрения – на основе идеи разделения движений.

Пусть дана система, содержащая малый параметр ε,

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{a}(\vec{y}) + \varepsilon\vec{b}(\vec{y}) + \ldots \; . \tag{1}$$

Задача состоит в изучении ее поведения на больших, $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ временах.

Это изучение существенно упрощается, если предварительно совершить две, различных по характеру, замены переменных.

Первая замена переменных – это переход в криволинейную систему координат $\vec{z}$,

$$\vec{y} = \vec{z} + \varepsilon\vec{q}(\vec{z}) + \ldots \; . \tag{2}$$

Вторая замена – переход в движущуюся систему координат $\vec{u}$,

$$\vec{z} = \vec{f}(\vec{u}, t), \tag{3}$$

движение которой происходит согласно «невозмущенному» уравнению

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{a}(\vec{x}), \tag{4}$$

возникающему, если положить $\varepsilon = 0$ в исходном уравнении. Этот второй переход вполне аналогичен переходу из эйлеровой системы координат в лагранжеву.

Если криволинейная система координат выбрана правильно, то уравнение для $\vec{u}$

остается автономным,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \varepsilon\vec{c}(\vec{u}) + \dots\ , \tag{5}$$

а быстрое, со скоростью порядка единицы, движение оказывается исключенным из этого уравнения.

Эволюционное уравнение для $\vec{u}$ описывает медленное движение, вызванное малым возмущением порядка ε.

Быстрое движение $\vec{x}$ целиком определяется невозмущенным уравнением (4) и совсем не содержит малого параметра ε.

Полное движение $\vec{z}$ есть наложение (суперпозиция) быстрого движения,

$$\vec{x} = \vec{f}(\xi, t)\,, \tag{6}$$

и медленного движения $\vec{u}$, которое подставлено вместо начальных данных ξ в решение быстрого уравнения. Этот прием аналогичен методу вариации произвольных постоянных, обобщением которого на нелинейные системы он и является.

Наконец, исходное движение $\vec{y}$ связано с $\vec{z}$ нелинейной (при $\varepsilon \neq 0$) заменой переменных.

n° 2. Выбор системы координат

Если в уравнении (1) совершить произвольную (сначала) замену переменных (2), то получится уравнение для $\vec{z}$,

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \vec{a}(\vec{z}) + \varepsilon\vec{c}(\vec{z}) + \dots\ , \tag{7}$$

главный член которого, конечно, не изменится, а новое «возмущение» выражается через старое по формуле

$$\vec{c}(\vec{z}) = \vec{b}(\vec{z}) - \left[\frac{d\vec{q}}{d\vec{z}}\vec{a} - \frac{d\vec{a}}{d\vec{z}}\vec{q}\right]. \tag{8}$$

Исключим быстрое движение, переходя в движущуюся систему координат

$$\vec{z} = \vec{f}(\vec{u}, t)\,, \tag{9}$$

где функция $\vec{f}$ есть решение невозмущенной системы,

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial t} = \vec{a}(\vec{f})\,, \tag{10}$$

при любом фиксированном значении $\vec{u}$. Разрешая $\vec{u}$ зависеть от t, мы обобщаем метод вариации произвольных постоянных. Подстановка (9) в (7),

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{a}(\vec{f})+\varepsilon\vec{c}(\vec{f})+\ldots, \tag{11}$$

и сокращение главных членов позволяет написать уравнение для $\vec{u}$

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\varepsilon\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}\right)^{-1}\vec{c}\left(\vec{f}\right)+\ldots\ , \tag{12}$$

которое будет, конечно, вообще говоря, содержать t в правой части.

Криволинейную систему координат – то есть, по существу функцию $\vec{q}(\vec{z})$ – нужно выбрать из условия автономности полученного уравнения. Приравнивая нулю частную производную правой части по времени t, получаем:

$$\frac{d\vec{c}}{d\vec{z}}\vec{a}-\frac{d\vec{a}}{d\vec{z}}\vec{c}=0, \tag{13}$$

которое вместе с (8) дает систему уравнений для функций $\vec{q}$ и $\vec{c}$.

Дифференциальные члены в этих уравнениях имеют форму коммутатора векторных полей,

$$\{\vec{v},\vec{w}\}=\frac{d\vec{v}}{d\vec{z}}\vec{w}-\frac{d\vec{w}}{d\vec{z}}\vec{v}=-\{\vec{w},\vec{v}\}. \tag{14}$$

Уравнение (13) означает, поэтому, перестановочность поля скоростей быстрого движения $\vec{a}$ с полем скоростей медленного $\vec{c}$. В частном случае линейных систем это равносильно обычной коммутативности матриц,

$$CA-AC=0. \tag{15}$$

Полезно отметить, что если неподвижная система координат подобрана правильно, то уравнение для $\vec{u}$ получается из уравнения для $\vec{z}$ просто отбрасыванием главного члена. В самом деле, если мы добились автономности уравнения (12), то его правую часть можно вычислить при любом значении t, так как она от t вообще не зависит. Удобнее всего положить $t=0$, когда $\vec{f}$ обращается просто в $\vec{u}$

$$\vec{f}(\vec{u},0)\equiv\vec{u}, \tag{16}$$

ибо первый (векторный) аргумент функции $\vec{f}$ совпадает с начальными данными. Поэтому производная,

$$\left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{u}}\right|_{t=0}=\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{u}}=E, \tag{17}$$

обращается в единичную матрицу, и окончательно имеем:

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\varepsilon\vec{c}(\vec{u})+\ldots\ . \tag{18}$$

Правильнее, поэтому, было бы называть «криволинейными» исходные переменные $\vec{y}$, так как именно они маскируют важнейший факт распадения переменных на быстрые $\vec{x}$ и медленные $\vec{u}$, из которых полное движение $\vec{z}$ получается просто наложением движений.

Полная программа состоит, следовательно, из четырех этапов.

I. Решение невозмущенной системы.

II. Введение неподвижной системы координат, приводящей к разделению движений.

III. Переход в движущуюся систему координат, исключающий быстрое движение и выделяющий эволюционную систему.

IV. Изучение медленного движения.

Каждый из этих этапов допускает различные подходы. Так, например, быстрое движение можно задавать явной функцией времени или (как в методе «быстрой фазы» [1]) системой первых интегралов. «Сепарирующую» систему координат иногда можно найти способом неопределенных коэффициентов. Однако, он годится далеко не всегда. Эволюционную систему в колебательных задачах часто удается найти[1] «осреднением» возмущения по траекториям быстрого движения. Изучение медленного движения также проводится частными методами, зависящими еще и от характера движения – является ли оно колебательным, релаксационным или еще более сложным. Это обилие частных приемов делает насущно необходимой общую точку зрения на методы исследования эволюционирующих систем.

n° 3. Колебательные режимы

Если быстрое движение является колебательным режимом, то изучение эволюции такой системы требует выполнения всей четырехэтапной программы.

Случай одночастотных колебаний

$$f(\vec{w}, t+T) = f(\vec{w}, t)$$

разобран в работе [2]. Там показано, что правую часть эволюционной системы (в первом приближении) можно найти по формуле

$$\vec{c}(\vec{w}) = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{\partial \vec{z}}{\partial \vec{w}}\right)^{-1} \vec{b}(\vec{z})dt\,, \tag{19}$$

[1] Так можно найти только главный член эволюционной системы. Если он, как это бывает, равен нулю, то некритическое «осреднение» приводит к грубым ошибкам.

дающей обобщение метода усреднения на случай произвольной нелинейности. Следует предостеречь от распространенной ошибки в применении метода усреднения. В обычной форме он применим только на первом шаге теории возмущений. При вычислении уже поправки порядка ε^2 нельзя просто усреднить возмущающие члены второго порядка. Необходимо учесть, что переход в криволинейную систему координат также вносит свой вклад во все члены, начиная со второго.

Для биохимических систем существование чисто-периодического невозмущенного движения мало характерно. В этом смысле показательно, что когда Гудвин [3] захотел построить чисто колебательную химическую модель, ему пришлось вводить весьма искусственные предположения. Тем не менее, его модель все равно осталась некорректной, так как его переменные, имеющие смысл концентраций, могут становиться отрицательными.

Существует только один пример – система Вольтера – чисто колебательной системы, имеющей простое химическое истолкование, все траектории которой лежат целиком в положительном квадранте. Но именно она и возникает, как показывает более детальный анализ, в результате предельного перехода из настоящей биохимической модели. Для биохимии более типичной ситуацией является возможность существования (да и то не при всех условиях) предельного цикла.

Поэтому стремление понять возникновение колебательных биохимических систем стимулирует постановку вопроса о бифуркационных точках и критических режимах.

Общий подход может выглядеть следующим образом.

Рассмотрим систему, содержащую параметр α. Мы не предполагаем этот параметр малым, его правильное понимание – это концентрация какого-нибудь регулирующего соединения, например, ключевого фермента. Впрочем, это может быть и концентрация субстрата, продукта или отношение этих величин. По счастью, в математической модели нет надобности в излишней конкретизации этого параметра.

Итак, дана система

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{a}(\vec{c}, \alpha). \qquad (20)$$

Предположим, что в интересующей нас области изменения параметра α существует стационарная точка $\vec{c}_0$,

$$\vec{a}(\vec{c}_0, \alpha) = 0\,, \qquad (21)$$

зависящая, вообще говоря, от параметра α

$$\vec{c}_0 = \vec{c}_0(\alpha). \tag{22}$$

Будет ли на самом деле реализован этот стационарный режим зависит от устойчивости точки $\vec{c}_0$. Устойчивость, в свою очередь, определяется свойствами матрицы производной в стационарной точке:

$$A(\alpha) = \left.\frac{d\vec{a}}{d\vec{c}}\right|_{\vec{c}=\vec{c}_0}. \tag{23}$$

Если все собственные числа λ этой матрицы,

$$\det\left|A(\alpha) - \lambda E\right| = 0, \tag{24}$$

имеют отрицательные действительные числа,

$$P(\alpha) = \operatorname{Re}\lambda(\alpha) < 0, \tag{25}$$

то стационарный режим устойчив.

Критическое значение параметра определяется, поэтому, условием обращения в нуль действительной части собственного значения

$$\mathrm{P}(\alpha_{\text{кр}}) = 0. \tag{26}$$

Обычный метод изучения состоит во введении малого параметра

$$\varepsilon = \alpha - \alpha_{\text{кр}}$$

и рассмотрении малой окрестности этого критического значения. Именно при таком подходе, когда в качестве невозмущенной рассматривается система в критической ситуации, она имеет колебательный режим, соответствующий паре чисто мнимых корней. Возможен, однако, и другой подход, позволяющий проследить поведение системы сразу на конечном (хотя, возможно, и небольшом) отрезке изменения параметра.

n° 4. Системы, содержащие параметр

Чтобы выяснить отличие этого нового подхода от обычных, заметим, что схема, изложенная в n° 1, допускает обобщение. Нетрудно проверить, что она останется в силе, если правая часть системы (1), кроме малого параметра ε, содержит еще некоторый параметр α,

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \vec{a}(\bar{y}, \alpha) + \varepsilon\vec{b}(\bar{y}, \alpha) + \ldots . \tag{27}$$

Важно только, чтобы было известно полное решение,

$$\vec{z} = \vec{f}(\vec{u}, t, \alpha), \tag{28}$$

невозмущенной системы,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{a}(\vec{x}, \alpha), \tag{29}$$

во всей интересующей нас области изменения параметра α. Очевидно также, что параметров может быть не один, а два или больше и схема от этого не пострадает.

Главная причина, почему такой подход невозможен в рамках усреднения (и любого другого аналогичного метода) состоит в том, что невозмущенная система будет чисто колебательной (негрубой!) только при исключительных значениях параметра α. А так как метод усреднения годится только для колебательных невозмущенных систем, то приходится ограничиваться малой окрестностью критической точки.

Идея разделения движений на быстрое и медленное развязывает руки в том смысле, что позволяет рассматривать формулу усреднения просто как один из способов решения системы, определяющей эволюционное уравнение. Этот способ очень хорош, когда он пригоден, то есть для периодических (или почти периодических) быстрых движений.

Если же он не пригоден, то еще нет причины опускать руки. Надо поискать другие способы решения системы (8), (13), ибо суть дела именно в ней, а не в частном способе ее решения методом усреднения.

Итак, две идеи составляют существо предлагаемого метода:

1. Расширение класса невозмущенных систем, в качестве которых предлагается рассматривать любые, которые можно решить до конца.
2. Предложение считать основой замену переменных, а не частный способ отыскания такой замены.

Однако решению конкретной задачи общая декларация «о правах любых хорошо решаемых систем» мало помогает. Её нужно дополнить каждый раз конкретным предложением, какую именно систему следует брать в качестве невозмущенной. В основном, конечно, это «задача, решаемая методом размышлений», но можно, все же, указать некоторые общие принципы.

Главная идея – разумный компромисс между требованиями регулярных и критических случаев.

В регулярных точках система является грубой и замена переменных позволяет полностью[2] элиминировать возмущение. Однако сама замена переменных,

[2] Это аналог общего принципа относительности – любое поле сил можно заменить эквивалентным гравитационным полем, то есть движением в криволинейной метрике.

$$\vec{x} = \vec{z} + \varepsilon\vec{q}(\vec{z},\alpha) + \ldots \qquad (30)$$

не является гладкой по параметру α. Критические значения параметра α являются вместе с тем особыми точками функции $\vec{q}(\vec{z},\alpha)$, которая обращается в бесконечность в этих точках.

Возникает, поэтому, естественная мысль, не стремиться к экстремизму грубых систем – убрать всякое возмущение и совсем не иметь эволюционной системы. Разумнее выглядит более гибкая тактика – элиминировать все, какие только можно, члены возмущения гладкой заменой переменных. Те же члены, которые гладкой заменой убрать нельзя, включить в эволюционную систему. Трудность реализации этой программы состоит в неоднозначности определения «неистребимых» членов, так как негладкость функции $\vec{q}$ проявляется лишь в критических точках. Тем не менее, в интересующем нас сейчас случае, такую программу можно довести до конца.

n° 5. Метод неопределенных коэффициентов

Задача о рождении предельного цикла может быть решена разными способами. Технически наиболее прямым является способ неопределенных коэффициентов, восходящий еще к Дюлаку [4]. Это построение тем более целесообразно, что позволяет установить глубокое родство таких понятий как «резонанс» и «разделение движений» на основе простой идеи – заменой переменных истребить побольше членов в уравнении. Подобная постановка вопроса возможна далеко не всегда («много» или «мало» слагаемых в функции общего вида, в экспоненте или тангенсе?), однако для многочленов, которые определяют структуру уравнений вблизи стационарной точки, это вполне осмысленно. Итак, пусть дана система в концентрациях,

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \vec{a}(\vec{c},\alpha), \qquad (31)$$

и $\vec{c}_0$ стационарная точка этой системы,

$$\vec{a}(\vec{c}_0,\alpha) = 0\,. \qquad (32)$$

Рассмотрим окрестность стационарной точки «в микроскоп, увеличивающий в $1/\varepsilon$ раз»,

$$\vec{c} = \vec{c}_0(\alpha) + \varepsilon\vec{x}\,. \qquad (33)$$

Запишем новую систему в координатной форме, считая $\vec{x}$ столбцом, компоненты которого занумерованы верхним индексом[3] к

[3] Традиционный символ «альфа» уже использован не менее традиционным образом – для обозначения параметра.

$$\frac{dx^\kappa}{dt} = a^\kappa_\beta x^\beta + \varepsilon a^\kappa_{\beta\gamma} x^\beta x^\gamma + \varepsilon^2 a^\kappa_{\beta\gamma\delta} x^\beta x^\gamma x^\delta + \dots . \tag{34}$$

Полученная система имеет, как и следовало ожидать, весьма специальный вид. Её правые части разложены[4] в ряды по однородным многочленам, для которых понятие числа членов имеет точный смысл.

Следующий шаг – замена переменных, переход в криволинейную систему координат:

$$x^\kappa = q^\kappa_\beta y^\beta + \varepsilon q^\kappa_{\beta\gamma} y^\beta y^\gamma + \varepsilon^2 q^\kappa_{\beta\gamma\delta} y^\beta y^\gamma y^\delta + \dots \; . \tag{35}$$

Наша задача – подобрать коэффициенты q^κ_β, $q^\kappa_{\beta\gamma}$ и т.д., таким образом, чтобы в правых частях системы уравнений для y,

$$\frac{dy^\kappa}{dt} = b^\kappa_\beta y^\beta + \varepsilon b^\kappa_{\beta\gamma} y^\gamma + \varepsilon^2 b^\kappa_{\beta\gamma\delta} y^\beta y^\gamma y^\delta + \dots \tag{36}$$

осталось как можно меньше членов. Задача непростая, но ее, к счастью, можно решать постепенно, так как на каждом шаге теории возмущений члены более высокого порядка не имеют значения.

n° 6. Первый шаг замены переменных

В главном члене, например, можно рассматривать только линейное преобразование,

$$x^\kappa = q^\kappa_\beta y^\beta , \tag{37}$$

надлежащим выбором которого можно оставить всего n диагональных элементов в матрице b^κ_β,

$$b^\kappa_\beta = \begin{cases} \lambda_{(\kappa)} & \kappa = \beta \\ 0 & \kappa \neq \beta \end{cases} \tag{38}$$

вместо n^2 элементов, имеющихся в матрице a^κ_β.

«Наведение порядка» в линейных членах затрагивает, конечно, все последующие члены. Трехиндексные, четырехиндексные и т.д. величины преобразуются, как им положено, по правилам тензорного исчисления:

---

[4] Подразумевается «правило Эйнштейна» – суммирование по каждому индексу, входящему в данное слагаемое дважды.

$$b^{\kappa}_{\beta\gamma} = r^{\kappa}_{\kappa'} a^{\kappa'}_{\beta'\gamma'} q^{\beta'}_{\beta} q^{\gamma'}_{\gamma}, \qquad b^{\kappa}_{\beta\gamma\delta} = r^{\kappa}_{\kappa'} a^{\kappa'}_{\beta'\gamma'\delta'} q^{\beta'}_{\beta} q^{\gamma'}_{\gamma} q^{\delta'}_{\delta}, \ldots \tag{39}$$

где матрица r означает обратную («контравариантную») к матрице q. Коэффициенты линейного преобразования, вообще говоря, комплексны, так как в интересующем нас случае, по крайней мере, пара собственных значений (по которым происходит потеря устойчивости) обязательно будет парой комплексно-сопряженных чисел. «Действительное происхождение» коэффициентов $b^{\kappa}_{\beta\gamma}$ сохраняется в их комплексной сопряженности

$$b^{\kappa^*}_{\beta^*\gamma^*} = \overline{b^{\kappa}_{\beta\gamma}}, \quad b^{\kappa^*}_{\beta^*\gamma^*\delta^*} = \overline{b^{\kappa}_{\beta\gamma\delta}}, \ \ldots \tag{40}$$

для сопряженных индексов.

Биохимики не должны пугаться «мнимости» – переменные типа y <u>не являются концентрациями</u>. Именно поэтому[5] они описывают <u>кинетику</u> процесса точнее и глубже.

n° 7. Второй шаг

Следующий этап – «исправление» квадратичных членов, при котором линейные члены мы уже не трогаем, а кубичные – еще не трогаем:

$$y^{\kappa} = z^{\kappa} + \varepsilon q^{\kappa}_{\beta\gamma} z^{\beta} z^{\gamma}. \tag{41}$$

В новых уравнениях

$$\frac{dz^{\kappa}}{dt} = c^{\kappa}_{\beta} z^{\beta} + \varepsilon c^{\kappa}_{\beta\gamma} z^{\beta} z^{\gamma} + \varepsilon^2 c^{\kappa}_{\beta\gamma\delta} z^{\beta} z^{\gamma} z^{\delta} + \ldots \tag{42}$$

главные члены остались неизменными,

$$c^{\kappa}_{\beta} = b^{\kappa}_{\beta}, \tag{43}$$

а в квадратичных членах добавились слагаемые, линейны относительно коэффициентов замены переменных:

$$c^{\kappa}_{\beta\gamma} = b^{\kappa}_{\beta\gamma} + b^{\mu}_{\beta} q^{\kappa}_{\mu\gamma} + b^{\mu}_{\gamma} q^{\kappa}_{\beta\mu} - b^{\kappa}_{\mu} q^{\mu}_{\beta\gamma}. \tag{44}$$

В замене переменных мы «не трогали кубичные члены». Однако изменение этих членов в уравнениях происходит независимо от наших пожеланий:

---

[5] Аналогичная ситуация в электротехнике. Действительный переменный ток – всего лишь «проекция на вольтметр» комплексного постоянного тока, подобно тому, как синусоидальный колебательный процесс есть всего лишь проекция вращения по окружности.

$$c^{\kappa}_{\beta\gamma\delta} = b^{\kappa}_{\beta\gamma\delta} + \frac{1}{3}\left[b^{\kappa}_{\mu\beta}q^{\mu}_{\gamma\delta} + b^{\kappa}_{\mu\beta}q^{\mu}_{\delta\gamma} + b^{\kappa}_{\mu\gamma}q^{\mu}_{\delta\beta} + b^{\kappa}_{\mu\gamma}q^{\mu}_{\beta\delta} + b^{\kappa}_{\mu\delta}q^{\mu}_{\gamma\beta} + b^{\kappa}_{\mu\delta}q^{\mu}_{\beta\gamma}\right] - \frac{1}{3}\left[c^{\mu}_{\beta\gamma}q^{\kappa}_{\mu\delta} + c^{\mu}_{\gamma\beta}q^{\kappa}_{\mu\delta} + c^{\mu}_{\gamma\delta}q^{\kappa}_{\mu\beta} + c^{\mu}_{\delta\gamma}q^{\kappa}_{\mu\beta} + c^{\mu}_{\gamma\beta}q^{\kappa}_{\mu\gamma} + c^{\mu}_{\beta\delta}q^{\kappa}_{\mu\gamma}\right]. \quad (45)$$

Эти громоздкие формулы выписаны еще и для того, чтобы показать, как трудно работать без диагональности. Эта громоздкость слишком дорогая цена за желание иметь дело только с действительными числами.

Если же не испугаться выхода в комплексную область и считать матрицу b^{κ}_{β} диагональной, то выражения[6] для коэффициентов существенно упрощаются:

$$c^{\kappa}_{\beta\gamma} = b^{\kappa}_{\beta\gamma} + q^{\kappa}_{\beta\gamma}[\lambda_{(\beta)} + \lambda_{(\gamma)} - \lambda_{(\kappa)}]. \quad (46)$$

Строение этих соотношений следует рассматривать, как награду за решительность. Стремление «всего лишь» к математической красоте приводит к весьма содержательному следствию. Запутанная система (44) распадается на $\frac{n^2(n-1)}{2}$ независимых соотношений, которые показывают, что квадратичные члены можно «истребить» полностью,

$$c^{\kappa}_{\beta\gamma} = 0, \quad (47)$$

полагая

$$q^{\kappa}_{\beta\gamma} = -\frac{b^{\kappa}_{\beta\gamma}}{\lambda_{(\beta)} + \lambda_{(\gamma)} - \lambda_{(\kappa)}}. \quad (48)$$

Кубичные члены (которым, судя по всему, уготована судьба квадратичных) вычисляются по формулам (45) с учетом диагональности и только что найденных значений:

$$c^{\kappa}_{\beta\gamma\delta} = b^{\kappa}_{\beta\gamma\delta} - \frac{2}{3}\sum_{\mu}\left[\frac{b^{\kappa}_{\mu\beta}b^{\mu}_{\beta\gamma}}{\lambda_{(\beta)} + \lambda_{(\gamma)} - \lambda_{(\mu)}} + \frac{b^{\mu}_{\mu\beta}b^{\kappa}_{\gamma\delta}}{\lambda_{(\gamma)} + \lambda_{(\delta)} - \lambda_{(\mu)}} + \frac{b^{\mu}_{\delta\beta}b^{\kappa}_{\delta\beta}}{\lambda_{(\delta)} + \lambda_{(\beta)} - \lambda_{(\mu)}}\right]. \quad (49)$$

n° 8. Третий шаг

Для уничтожения кубичных членов вводится, вполне аналогично предыдущему, кубичная замена переменных:

$$z^{\kappa} = w^{\kappa} + \varepsilon q^{\kappa}_{\beta\gamma\delta}w^{\beta}w^{\gamma}w^{\delta} \quad (50)$$

[6] Чтобы избежать противоречия с удобным правилом Эйнштейна, приходится индекс собственных чисел заключать в скобки – характерная негибкость тензорного исчисления в нелинейных выкладках.

со свободными, пока, коэффициентами. Коэффициенты получающихся уравнений для w^κ,

$$\frac{dw^\kappa}{dt} = b^\kappa_\beta w^\beta + \varepsilon^2 k^\kappa_{\beta\gamma\delta} w^\beta w^\gamma w^\delta + \ldots \tag{51}$$

в равной мере зависят как от «кинетики» (исходная система), так и от «морфологии» (нелинейные координаты):

$$k^\kappa_{\beta\gamma\delta} = c^\kappa_{\beta\gamma\delta} + q^\kappa_{\beta\gamma\delta}\left[\lambda_{(\beta)} + \lambda_{(\gamma)} + \lambda_{(\delta)} - \lambda_{(\kappa)}\right]. \tag{52}$$

Можно, поэтому, обратить в нуль и эти коэффициенты, если положить (полное отделение «кинетики» от «морфологии»):

$$q^\kappa_{\beta\gamma\delta} = -\frac{c^\kappa_{\beta\gamma\delta}}{\lambda_{(\beta)} + \lambda_{(\gamma)} + \lambda_{(\delta)} - \lambda_{(\kappa)}}. \tag{53}$$

n° 9. Анализ

В результате получена, как будто, цепочка формул

$$\left.\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{c}_0(\alpha) + \varepsilon\vec{x} \\ x^\kappa &= q^\kappa_\beta y^\beta \\ y^\kappa &= z^\kappa + \varepsilon q^\kappa_{\beta\gamma} z^\beta z^\gamma \\ z^\kappa &= w^\kappa + \varepsilon^2 q^\kappa_{\beta\gamma\delta} w^\beta w^\gamma w^\delta \end{aligned}\right\}, \tag{54}$$

выражающая (с точностью до ε^3) исходные концентрации c через решения линейной диагональной системы уравнений (51):

$$w^\kappa_{(t)} = w^\kappa_0 e^{\lambda_{(\kappa)} t}. \tag{55}$$

<u>Однако в этой цепочке есть слабое звено.</u>

Некоторые из коэффициентов замены переменных могут (а в задаче о критической точке и рождении предельного цикла обязательно будут) обращаться в бесконечность. Происходит это, конечно, из-за обращения в нуль знаменателя:

$$\lambda_{(\beta)} + \lambda_{(\gamma)} + \lambda_{(\delta)} - \lambda_{(\kappa)} = 0. \tag{56}$$

Соответствующие члены в уравнении можно охарактеризовать, в зависимости от подхода, по крайней мере тремя разными способами.

<u>Во-первых, это члены «неистребимые»</u>. Из формулы (52) видно, что каждый такой член остается неизменным при любой замене переменных.

Во-вторых, эти члены являются резонансными[7]. Действительно, член $w^{\beta} w^{\gamma} w^{\delta}$, при подстановке в него решения невозмущенной системы, имеет ту же временную зависимость,

$$w^{\beta} w^{\gamma} w^{\delta} \sim e^{\left[\lambda_{(\beta)}+\lambda_{(\gamma)}+\lambda_{(\delta)}\right]t}, \tag{57}$$

что и главный член

$$w^{\kappa} \sim e^{\lambda_{(\kappa)}t}. \tag{58}$$

Резонансность нужно, конечно, понимать в широком смысле совпадения экспонент, включающем традиционную колебательную резонансность – совпадение частот при отсутствии затухания (или раскачки).

В-третьих, эти члены коммутируют с быстрым движением.

Некоторая абстрактность этой точки зрения вынуждена. Только такая форма понимания допускает обобщение на произвольные нелинейные системы.

У читателя может (точнее говоря, должен) возникнуть вопрос. Почему разговор о полюсах затеян только в связи с кубичными членами? Ведь резонанс квадратичных членов,

$$\lambda_{(\beta)} + \lambda_{(\gamma)} - \lambda_{(\kappa)} = 0 \tag{59}$$

уже на втором шаге заводит в такой же тупик.

Формально, это совершенно правильно. Однако, наша задача – изучение критической ситуации, когда стационарный режим теряет устойчивость. Условие критичности можно записать в виде:

$$2p = \lambda_{(\nu)} + \lambda_{(\nu^*)} = 0, \tag{60}$$

означающем, что действительная часть ν-го собственного значения (и сопряженного) обращается в нуль. Поэтому резонанс второго порядка, вообще говоря, несовместный с условием критичности, не будет иметь место.

Иное дело резонансы третьего порядка. Целая серия этих резонансов,

$$\lambda_{(\kappa)} + \lambda_{(\nu)} + \lambda_{(\nu^*)} - \lambda_{(\kappa)} = 0, \tag{61}$$

является тождественным следствием условия критичности. Аналогичные резонансы есть в пятом порядке

$$\lambda_{(\kappa)} + \lambda_{(\nu)} + \lambda_{(\nu)} + \lambda_{(\nu^*)} + \lambda_{(\nu^*)} - \lambda_{(\kappa)} = 0. \tag{62}$$

Обобщение очевидно.

[7] Любопытно, что старое «небесно-механическое» название таких членов – «секулярные», то есть вековые, сближает, по крайней мере филологически, эту точку зрения с первой.

n° 10. Кинетическая модель

Неразумность нашей попытки истребить все без разбора члены третьего порядка разъяснена нам природой просто и убедительно – обращением в бесконечность замены переменных. Примем этот урок к сведению и совсем не будем трогать[8] опасные резонансные члены. Это приведет, конечно, к усложнению системы уравнений для w, но зато замена переменных будет безукоризненной,

$$q^{\kappa}_{\kappa\nu\nu^*} = 0\,, \tag{63}$$

да и все равно иначе нельзя.

Итак, цепочка (54) остается в силе, но приводит она к системе, в которой, кроме линейных, нужно оставить еще и резонансные[9] члены. Несложный анализ дает следующий результат:

$$\frac{dw}{dt} = \left(\lambda + \varepsilon^2 k |w|^2\right) w + \ldots, \tag{64}$$

$$\frac{dw^{(\kappa)}}{dt} = \left[\lambda_{(\kappa)} + \varepsilon^2 k_{(\kappa)} |w|^2\right] w^{\kappa} + \ldots, \tag{65}$$

где критическое собственное значение λ и соответствующее (комплексное) переменное w написаны без индекса. Мы видим, что дело сводится к интегрированию одного первого уравнения. Если решение первого уравнения известно, то остальные интегрируются в квадратурах:

$$w^{(\kappa)}(t) = w_0^{(\kappa)} e^{\int_0^t \left[\left[\lambda_{(\kappa)} + \varepsilon^2 k_{(\kappa)} |w|^2\right] + \ldots\right] dt}\,. \tag{66}$$

n° 11. Резюме и обобщение

Предыдущие рассмотрения показывают, что задачу изучения критической точки системы можно разбить на две совершенно разные задачи:

1. Строение, морфология системы.
2. Поведение, кинетика системы.

Первая задача состоит в построении цепочки преобразований (54). Она существенно зависит от специфики системы, но является задачей чисто алгебраической

[8] Это простейшая возможность. Резонансные члены необходимо сохранить целиком только в одной критической точке.

[9] Во избежание недоразумений подчеркнем, что резонансными эти члены становятся при одном – единственном, критическом значении параметра. Тем не менее, они оставлены неистреблёнными и при всех остальных значениях параметра.

и не требует интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Вторая задача, напротив, совершенно не зависит от свойств и происхождения (механика, физика, биохимия) системы, так как сводится к изучению универсального уравнения (64).

Эта задача может быть полностью разобрана в общем виде. Целесообразно, даже, изучить несколько более общую систему, возникающую при учете четвертого и пятого порядка теории возмущений. Ключевое уравнение в пятом порядке вполне аналогично уже найденному, но записать его удобнее в иной форме:

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon w) = \varepsilon w\left(\lambda + k|\varepsilon w|^2 + \ell|\varepsilon w|^4\right). \tag{67}$$

n° 12. Решение в замкнутой форме

При выводе уравнения наиболее естественна комплексная форма. Но это вовсе не означает, что она удобна для изучения. Напротив, возврат к действительным переменным, только не к декартовым, а к обобщенным полярным,

$$\varepsilon w = z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\varphi}{2}}, \tag{68}$$

приводит к отщеплению уравнения для одного только z:

$$\frac{dz}{dt} = pz + qz^2 + az^3. \tag{69}$$

Уравнение для φ,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \mu z + \nu z^2, \tag{70}$$

также содержащее только z, позволяет одной квадратурой,

$$\varphi = \int \frac{\omega + \mu z + \nu z^2}{pz + qz^2 + az^3} dz, \tag{71}$$

выразить φ через z.

После того, как действительное (в обеих смыслах этого слова) ключевое уравнение для z получено, можно, конечно, спрятать концы в воду, отделив во всех формулах цепочки преобразований действительные части от мнимых. Прагматисты могут считать, что в результате некой математической эквилибристики (длиной в 37 формул) из «химически (или физически) осмысленной» системы (31) извлечено ключевое уравнение (69), которое и надо изучать. Это тоже возможная точка зрения.

Уравнение для z допускает интегрирование в элементарных функциях. В этом смысле предложенная схема ничуть не хуже частного метода для грубых систем, приводящего к линейному уравнению. В нашем случае, разделяя переменные, сводим решение к отысканию квадратуры

$$\int \frac{dz}{z\left(p+qz+az^2\right)} = 2t + c\,. \tag{72}$$

Разложение на элементарные дроби дает равенство,

$$\frac{1}{2p}\ln\frac{z^2}{p+qz+az^2} - \frac{q}{2p}\int\frac{dz}{p+qz+az^2} = 2t + c\,, \tag{73}$$

в котором выделен интеграл, принимающий в зависимости от знака дискриминанта

$$\Delta = 4ap - q^2 \tag{74}$$

разные формы:

$$\int\frac{dz}{az^2+qz+p} = 2\int\frac{d\left(2az+q\right)}{\left(2az+q\right)^2+4ap-q^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ap-q^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2az+q}{\sqrt{4ap-q^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{q^2-4ap}}\ln\dfrac{\dfrac{2az+q}{\sqrt{q^2-4ap}}-1}{\dfrac{2az+q}{\sqrt{q^2-4ap}}+1} \end{cases}. \tag{75}$$

Полученный результат лишний раз доказывает, что формальное решение, даже если его удается найти, не является пределом мечтаний. Найденные функции имеют особенность при $z=0$, а также в точках, где знаменатель обращается в нуль. Но именно эти точки наиболее интересны, так как соответствуют стационарным точкам уравнения (69), то есть предельным циклам исходной системы. Следовательно, самые существенные черты явления внешне выглядят, как досадные помехи в аналитическом решении.

Еще более поучительна зависимость от параметров. Формулы полностью лишаются смысла при слиянии корней квадратного трехчлена, когда

$$4ap - q^2 = 0 \tag{76}$$

или при совпадении одного из корней этого трехчлена с тождественным нулевым корнем, когда

$$p = 0\,. \tag{77}$$

Появление условия критичности понятно. Интереснее равноправие этого условия с условием кратности. Некоторое размышление показывает, что это тоже понятно. Оба условия дают границу устойчивости. Одно – для предельного цикла, другое – для вырожденного предельного цикла (стационарной точки исходной системы). Любопытно, однако, что этого естественного равноправия в исходной постановке задачи не было. Приходится признать, что уравнения, как нередко бывает, оказались «чуточку умнее». Это замечательное свойство математики скучно называют (возможно из неосознанной зависти) «аналитическим продолжением».

Литература

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. Молчанов А. М. Сборник «Колебательные процессы в биологических и химических системах». Москва, 1967.
3. Гудвин Б. Временная организация клетки. М. «Мир», 1966.
4. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М. Л., Гостехиздат, 1949.

Электронную версию препринта подготовили:

Г. Р. Смирнова, Т. Б. Лузянина, Ю. М. Апонин, И. В. Флоринский

(Институт математических проблем биологии РАН)

Редактирование не проводилось (за исключением опечаток)

Проект «Электронные ИПМ-препринты А. М. Молчанова»

Координатор проекта: И. В. Флоринский

iflorinsky@yahoo.ca

Пущино

2012