Молчанов А.М.

Об одном классе уравнений с переменными коэффициентами

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Молчанов А. М.

Институт прикладной математики, Москва
Институт биологической физики, Пущино-на-Оке

Препринт № 4

Москва, 1969 г.

Молчанов, А. М. Об одном классе уравнений с переменными коэффициентами : препр. № 4 / Молчанов А. М. ; [ИПМ АН СССР]. – М. : [б. и.], 1969. – 8 с.

п. 1. Построение примера

При изучении систем с переменными коэффициентами исследователь часто испытывает потребность в достаточно богатом классе примеров, на которых можно было бы без труда проверять гипотезы, возникающие в процессе изучения.

Ниже предложен простой класс уравнений, зависящий от пяти параметров, который позволяет строить многие полезные примеры.

Рассмотрим два матричных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dU}{dt} = \Omega U \tag{1}$$

$$\frac{dS}{dt} = AS \tag{2}$$

и напишем уравнение для произведения

$$X = US \tag{3}$$

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dU}{dt} S + U \frac{dS}{dt} = \Omega US + UAS = (\Omega + UAU^{-1})X\ . \tag{4}$$

Итак, X удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX}{dt} = P(t)X\ , \tag{5}$$

где

$$P(x) = \Omega + U(t)AU^{-1}(t)\,. \tag{6}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}\ . \tag{7}$$

Тогда

$$U(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\omega t & -\mathrm{Sin}\omega t \\ \mathrm{Sin}\omega t & \mathrm{Cos}\omega t \end{pmatrix} \tag{8}$$

и несложные выкладки показывают, что

$$P(t)=\begin{pmatrix} \alpha \mathrm{Cos}^2\omega t+\delta Sin^2\omega t-(\beta+\gamma)\mathrm{Sin}\,\omega t\mathrm{Cos}\omega t & (\alpha-\delta)\mathrm{Sin}\,\omega t\mathrm{Cos}\omega t+\beta \mathrm{Cos}^2\omega t-\gamma\,\mathrm{Sin}^2\,\omega t-\omega \\ (\alpha-\delta)\mathrm{Sin}\,\omega t\,\mathrm{Cos}\,\omega t-\beta\,\mathrm{Sin}^2\,\omega t+\gamma \mathrm{Cos}^2\omega t+\omega & \alpha\,\mathrm{Sin}^2\,\omega t+\delta \mathrm{Cos}^2\omega t+(\beta+\gamma)\mathrm{Sin}\,\omega t\mathrm{Cos}\omega t \end{pmatrix} \quad (9)$$

Резюме

Система

$$\frac{dX}{dt}=P(t)X\ , \qquad (10)$$

где матрица *P(t)* задается формулой (9), имеет решение

$$X=US\ , \qquad (11)$$

причем

$$U=e^{\Omega t}=\begin{pmatrix} \mathrm{Cos}\omega t & -\mathrm{Sin}\,\omega t \\ \mathrm{Sin}\,\omega t & \mathrm{Cos}\omega t \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

а

$$S=e^{At}, \qquad (13)$$

так как матрицы Ω и A постоянны.

Замечание 1

Матрица *P(t)* имеет постоянные собственные значения. В самом деле, формулу (6) можно переписать в виде:

$$P=U(\Omega+A)U^{-1} \qquad (14)$$

так как матрица Ω перестановочна с U. Следовательно, матрица P имеет собственные значения, совпадающие с собственными значениями постоянной матрицы B

$$B=A+\Omega=\begin{pmatrix} \alpha & \beta-\omega \\ \gamma+\omega & \delta \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} &\det(P-\lambda E)=\det(UBU^{-1}-\lambda UU^{-1})=\det[U(B-\lambda E)U^{-1}]= \\ &=\det U\cdot\det(B-\lambda E)\det U^{-1}=\det(B-\lambda E) \end{aligned}\ . \qquad (16)$$

Замечание 2

Метод построения уравнений с переменными коэффициентами легко обобщается на случай матриц более высокого порядка.

п. 2. Противоречащий пример к методу «замороженных коэффициентов»

В технических работах популярен так называемый «метод замороженных коэффициентов». Он состоит в том, что в системе вида (10) фиксируют аргумент матрицы P и исследуют на устойчивость полученную систему с постоянными коэффициентами

$$\frac{dY}{dt} = P(t_0)Y\,. \qquad (17)$$

Если при всех значениях параметра t_0 система (17) оказывается устойчивой, отсюда заключают об устойчивости системы (10).

Покажем, что это заключение незаконно.

Рассмотрим следующий пример:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (18)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Тогда матрица B имеет треугольный вид:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

и её собственные числа отрицательны. Так как собственные числа $P(t)$ совпадают с собственными числами B, то все системы (17) при любых значениях t_0 будут устойчивы.

Между тем система (10) неустойчива, так как её решение есть произведение унитарной матрицы U на решение системы (2), которая в нашем примере неустойчива,

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0; \qquad \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0\,, \qquad (21)$$

так как её характеристическое уравнение имеет два корня разных знаков

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -4\,. \qquad (22)$$

Идея примера очевидна. «Метод замороженных коэффициентов» накладывает ограничения (в нашем случае) только на матрицу B. Если вращение Ω не очень велико, то системы A и B одновременно устойчивы или неустойчивы. Однако при большой скорости вращения система A может потерять устойчивость. В нашем примере оказалось достаточно угловой скорости 2.

Ясно, что можно построить много разных примеров и даже найти условия –

достаточно малая скорость вращения, при которых устойчивость системы A вытекает из устойчивости B.

п. 3. Противоречащий пример к схеме усреднения

Встречается еще одна ошибка. Двойственным к «методу замороженных коэффициентов» является метод усреднения, при котором систему с периодическими коэффициентами заменяют усредненной системой

$$\frac{dZ}{dt} = C_Z , \tag{23}$$

где

$$C = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt , \tag{24}$$

и судят об устойчивости (10) по устойчивости (23).

Приведем простой пример неустойчивой системы (10), усредненная система которой имеет матрицу C равной нулю. Усредняя по периоду T,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{25}$$

матрицу $P(t)$, получаем

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha+\delta}{2} & \dfrac{\beta-\gamma}{2} - \omega \\ \dfrac{\gamma-\beta}{2} + \omega & \dfrac{\alpha+\delta}{2} \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Рассмотрим теперь матрицу A вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \kappa+\omega \\ \kappa-\omega & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Это значит, что параметры α, κ и ω произвольны, а величины β, γ и δ выражаются через них:

$$\beta = \kappa+\omega; \quad \gamma = \kappa-\omega; \quad \delta = -\alpha . \tag{28}$$

Любая матрица A вида (27) порождает матрицу $P(t)$, среднее от которой равно нулю.

Устойчивость системы (5) определяется устойчивостью системы (2), так как решения X и S отличаются только унитарным множителем U. Собственные значения матрицы A

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \kappa+\omega \\ \kappa-\omega & -\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2-\alpha^2-\kappa^2+\omega^2 = 0 \tag{29}$$

всегда имеют разные знаки:

$$\lambda_1 = \sqrt{\alpha^2+\kappa^2-\omega^2}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{\alpha^2+\kappa^2-\omega^2} \ . \tag{30}$$

Поэтому, если корни действительны, то система обязательно неустойчива.

Интересно, что в этом примере высокая скорость вращения делает вывод об устойчивости правильным, так как корни λ_1 и λ_2 становятся чисто мнимыми. Поэтому «метод замороженных коэффициентов» и «метод усреднения», употребляемые без надлежащей осторожности, приводят к ошибкам в дополнительных (противоположных) условиях.

Электронную версию препринта подготовили:
Г. Р. Смирнова, Т. Б. Лузянина, И. В. Флоринский
(Институт математических проблем биологии РАН)

Редактирование не проводилось (за исключением опечаток)

Проект «Электронные ИПМ-препринты А. М. Молчанова»
Координатор проекта: И. В. Флоринский
iflorinsky@yahoo.ca

Пущино
2012