

Уравнения для координат линии получим интегрированием (1) с помощью метода Симпсона для интеграла с переменным верхним пределом:

$$x(s, \mathbf{a}) = \frac{s}{6m} \left( 1 + \cos \theta(s, \mathbf{a}) + 4 \sum_{i=1}^m \cos \theta \left( \frac{s}{2m} (2i-1), \mathbf{a} \right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \cos \theta \left( \frac{s}{m} i, \mathbf{a} \right) \right);$$

$$y(s, \mathbf{a}) = \frac{s}{6m} \left( \sin \theta(s, \mathbf{a}) + 4 \sum_{i=1}^m \sin \theta \left( \frac{s}{2m} (2i-1), \mathbf{a} \right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sin \theta \left( \frac{s}{m} i, \mathbf{a} \right) \right).$$

Идентификацию параметров проводим минимизацией функционала ошибки  $J = \sum_{i=1}^M (x(s_i, \mathbf{a}) - x_i)^2 + \sum_{i=1}^M (y(s_i, \mathbf{a}) - y_i)^2$ , включающего данные наблюдений  $\{x_i, y_i\}_{i=1}^M$ .

Ниже приведен результат моделирования в случае, когда к (3) применяется наша модификация [1–4] неявного метода Эйлера, а получившееся нелинейное уравнение решается с помощью нейронной сети.

Заметим, что никакой подбор коэффициентов уравнения (2) не позволяет получить решение также или лучше соответствующее экспериментальным данным. Методы, изложенные в [1–4] и в данной работе имеет смысл применять для быстрого построения математической модели приемлемой точности при не самом удачном выборе физической модели и соответствующих ей дифференциальных уравнений за счет подбора настраиваемых параметров для удовлетворения экспериментальным данным.

1. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. — 2016. — V. 158. — URL: <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206>.
2. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Bolgov Ivan, Kaverzneva Tatyana, Kolesova Svetlana, Lazovskaya Tatyana, Lukinskiy Evgeniy, Petrov Alexey, Filkin Vladimir. Multilayer neural network models based on experimental data for processes of sample deformation and destruction // Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25–26, 2016. — P. 6–14. — URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf> — Scopus.
3. Tarkhov Dmitry, Shershneva Ekaterina. Approximate analytical solutions of mathieu's equations based on classical numerical methods // Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25–26, 2016. — P. 356–362. — URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf> — Scopus.
4. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Shemyakina Tatyana. Approximate analytical solutions of ordinary differential equations // Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25–26, 2016. — P. 393–400. — URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf>.

## АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЛВЕРАМИ ПАКЕТА ORENFOAM\*

*Е. Д. Бирюков, М. С. Копылов, А. Е. Кувшинников*

*ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, Россия*

Вопрос сравнения точности и эффективности различных численных методов решения задач в аэродинамике является крайне важным в наше время, когда

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-31-00320-мол\_а).

Таблица 1

## Граничные условия

	<b>p</b>	<b>T</b>	<b>U</b>
inlet	101325	300	Mach 2–Mach 3
outlet	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
axis	empty	empty	empty
top	zeroGradient	zeroGradient	zeroGradient
cone	zeroGradient	zeroGradient	slip
front	wedge	wedge	wedge
back	wedge	wedge	wedge

Таблица 2

Отклонение от точного решения,  $U = 2M$ 

Cone angel	<b>rCF</b>	<b>pCF</b>	<b>sF</b>	<b>rPF</b>
10	<b>0.006090</b>	0.006973	0.010153	0.010341
15	<b>0.012654</b>	0.014446	0.019646	0.020645
20	<b>0.016623</b>	0.019353	0.022283	0.024951
25	<b>0.018678</b>	0.020948	0.020779	0.025426
30	<b>0.020695</b>	0.023130	0.025614	0.023267
35	<b>0.032486</b>	0.038658	0.074849	0.043179

Таблица 3

Отклонение от точного решения,  $U = 3M$ 

Cone angel	<b>rCF</b>	<b>pCF</b>	<b>sF</b>	<b>rPF</b>
10	<b>0.015309</b>	0.019537	0.027152	0.027177
15	<b>0.024608</b>	0.030041	0.047813	0.041444
20	<b>0.030440</b>	0.035858	0.070564	0.045760
25	<b>0.032486</b>	0.038658	0.074849	0.043179
30	<b>0.034040</b>	0.040603	0.077408	0.040006
35	<b>0.026334</b>	0.029821	0.044853	0.027077

число подобных методов увеличивается с каждым годом. Было предложено взять известную задачу с аналитическим решением и на ее базе сравнить несколько численных методов. Выбор пал на задачу сверхзвукового обтекания конуса, у которой существует табличное решение [1].

Для сравнения из программного пакета OpenFOAM были выбраны 4 солвера.

1) rhoCentralFoam — использует центрально-противопотоковой схеме, которая является комбинацией центрально-разностной и противопотоковой схем [2]. Суть центрально-противопотоковых схем состоит в специальном выборе контрольного объема, содержащего области двух типов: вокруг граничных точек — первый тип; вокруг центральной точки — второй тип. Границы контрольных объемов первого типа определяются при помощи локальных скоростей распространения возмущений. Преимущество указанных схем состоит в том, что, применяя соответствующую

щую технику уменьшения численной вязкости, можно добиться хорошей разрешимости и для разрывных решений — ударных волн в газовой динамике — и для решений, где основную роль играют вязкие явления.

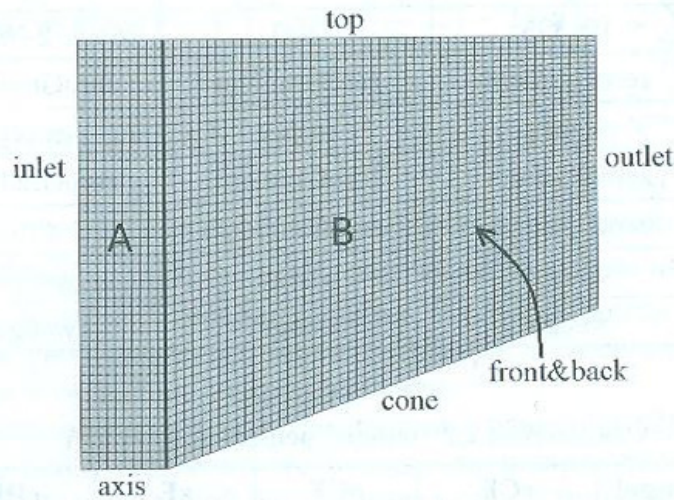


Рис. 1. Расчетная область

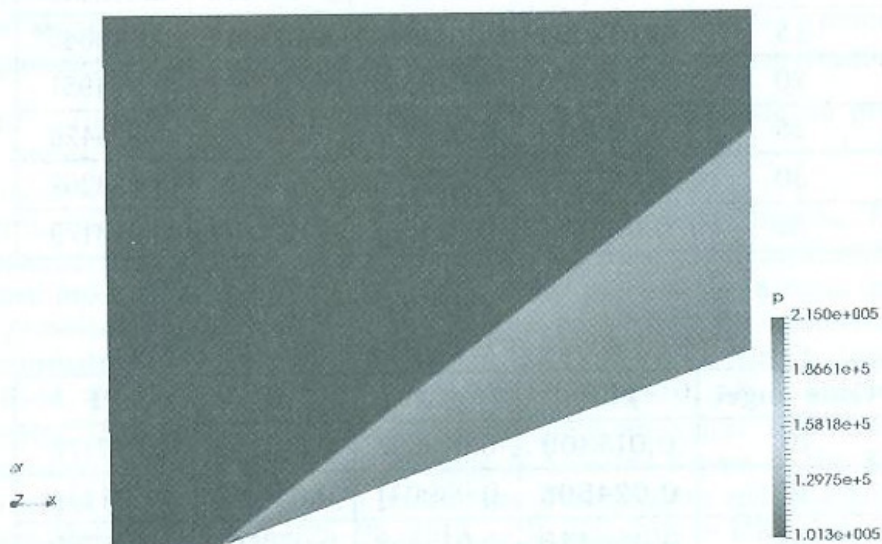


Рис. 2. Поле давления

2) `sonicFoam` — основан на алгоритме PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operator) [3]. Основная идея метода PISO заключается в том, что для расчета давления используются два разностных уравнения для поправки поля давления, полученных из дискретных аналогов уравнений моментов и неразрывности. Такой подход связан с тем, что скорректированные первой поправкой скорости могут не удовлетворять уравнению неразрывности, поэтому вводится второй корректор, который позволяет вычислить скорости и давления, удовлетворяющие линеаризованным уравнениям количества движения и неразрывности.

3) `rhoPimpleFoam` — основан на алгоритме PIMPLE, который является комбинацией алгоритмов PISO и SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) [4]. К алгоритму PISO добавляется внешний цикл, благодаря которому метод становится итерационным и позволяет считать с числом Куранта, большим 1.

4) `pisoCentralFoam` — комбинация центрально-противопотоковой схемы с алгоритмом PISO [5].

Расчеты для всех солверов проводились с помощью программного пакета OpenFOAM версии 2.3.0.

На рис. 1 представлена расчетная область. Постановка граничных условий представлена в табл. 1. Стоит заметить, что для моделирования осесимметричной геометрии в пакете OpenFoam используется специальное условие «wedge» (передняя «front» и задняя «back» границы). Для оси «axis» в пакете OpenFoam также вводится специальное граничное условие «empty». Это условие задается в случаях, когда вычисления в заданном направлении не проводятся. Скорость звука 347,25 м/с.

На рис. 2 представлено поле установившегося течения для давления при использовании солвера rhoCentralFoam.

В таблицах 2 и 3 приведены результаты расчетов в форме аналога нормы L2 для давления:

$$\frac{\sqrt{\sum_m |y_m - y_m^{exact}|^2 V_m}}{\sqrt{\sum_m |y_m^{exact}|^2 V_m}},$$

где  $y_m$  — давление в ячейке, полученное численным моделированием,  $y_m^{exact}$  — давление, полученное интерполированием табличных значений из [1] на ячейки сетки,  $V_m$  — объем ячейки для угла полураствора  $\beta = 10-35^\circ$  с шагом 5 и чисел Маха  $M = 2, 3$ .

Представленные в таблицах 2 и 3 результаты показывают, что солвер rhoCentralFoam обладает наименьшей погрешностью в задаче сверхзвукового обтекания конуса. Проведенное сравнение полезно при выборе солвера для моделирования задач обтекания удлиненных тел вращения.

1. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом / К.П. Бабенко, Г.П. Воскресенский, А.Н. Любимов, В.В. Русанов. — М.: Наука, 1964. — 505 с.
2. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations // J. Comput. Phys. — 2000. — V. 160. — P. 241–282.
3. Issa R. Solution of the implicit discretized fluid flow equations by operator splitting. // J. Comput. Phys. — 1986. — V. 62, Issue 1. — P. 40–65.
4. Patankar S. V., Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1972. — V. 15, Issue 10. — P. 1787–1806.
5. Kraposhin M., Boutrikova A., Strijhak S. Adaptation of Kurganov–Tadmor numerical scheme for applying in combination with the PISO method in numerical simulation of flows in a wide range of Mach numbers // Procedia Computer Science. — 2015. — V. 66. — P. 43–52.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА НА ПРИМЕРЕ СОЛВЕРА RHOCENTRALFOAM ПАКЕТА OPENFOAM\*

Е. Д. Бирюков, М. С. Копылов, А. Е. Кувшинников

ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, Россия

В настоящее время существует потребность в построении вычислительной технологии, которая была бы своего рода эталоном для решения задач обтекания удлиненных тел вращения (УТВ) и помогала настраивать параметры как численных

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-31-00320-мол\_а).