

12. *Sultanov L. U., Davydov R. L.* Mathematical modeling of large elastic-plastic deformations // *Applied Mathematical Sciences*. — 2014. — No. 60. — P. 2991–2996.
13. *Sultanov L. U.* Mathematical modeling of deformations of hyperelastic solids // *Applied Mathematical Sciences*. — 2014. — V. 8, No. 143. — P. 7117–7124.
14. *Abdrakhmanova A. I., Sultanov L. U.* Numerical modelling of deformation of hyperelastic incompressible solids // *Materials Physics and Mechanics*. — 2016. — V. 26. — Issue 1. — P. 30–32.

## К ЧИСЛЕННОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА–ФРОБЕНИУСА В ЗАДАЧАХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ\*

А. К. Алексеев<sup>1,2</sup>, А. Е. Бондарев<sup>3</sup>

<sup>1</sup>РКК «Энергия», Королев, Московская обл., Россия; <sup>2</sup>МФТИ, Долгопрудный, Московская обл., Россия; <sup>3</sup>ИПМ им. М. В. Келдыша, Москва, Россия

В последнее время набирают активность работы по глобальной линеаризации, основанной на разложении набора временных срезов поля течения по динамическим модам (Dynamic Mode Decomposition (DMD)), например [1, 2]. DMD служит эффективным методом аппроксимации оператора Купмана, который, в свою очередь, является сопряженной формой оператора Перрона–Фробениуса [3, 4]. Оператор Перрона–Фробениуса — это пропагатор обобщенного уравнения Лиувилля (линейного уравнения переноса плотности вероятности в расширенном пространстве), эквивалентного рассматриваемой нелинейной динамической системе. С помощью DMD оператор Купмана достаточно надежно считается для задач аэрогазодинамики [2]. Формально это позволяет рассчитывать оператор Перрона–Фробениуса с очень умеренными затратами вычислительных мощностей [4]. Однако, остается открытым вопрос, как обойти проклятие размерности, типичное для задач, моделирующих перенос плотности вероятности некоторой физической величины. Для оператора Купмана это удается сделать с помощью метода ядра (kernel trick) [5, 6], однако переход от оператора Купмана к оператору Перрона–Фробениуса не является тривиальным с точки зрения размера используемой памяти вследствие прямоугольной формы матриц левых и правых собственных векторов оператора Купмана.

Оператор Перрона–Фробениуса интересен прежде всего с точки зрения задач расчета переноса погрешности данных задачи (uncertainty quantification).

Определенные перспективы применения этого оператора имеются для прогноза погоды на ансамбле [7] с точки зрения перехода от расчета ансамбля решений к расчету плотности распределения решений [8], что могло бы привести к созданию более эффективного алгоритма.

Оператор Перрона–Фробениуса представляет интерес также с точки зрения численного расчета мерозначных решений уравнений газодинамики, перспективных с точки зрения моделирования турбулентности [9]. В отличие от варианта, описанного в [9], этот подход позволяет отказаться от метода Монте-Карло, что также дает надежду на создание более эффективного подхода с численной точки зрения.

Вычислительно дешевый метод расчета уравнения Лиувилля может быть также полезен при поиске и анализе многозначных решений [10].

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №16-01-00553А, №17-01-444А).



Ключевым элементом аппроксимации оператора Перрона–Фробениуса должно служить применение kernel trick (как это происходит для оператора Купмана [5, 6]), однако в настоящее время реализация kernel trick для аппроксимации плотности вероятности отсутствует, что создает определенные вычислительные трудности. В связи с этим рассмотрены дополнительные возможности поиска разреженного базиса с использованием метрики  $L_1$  [11]. Рассмотрен также вариант, связанный с использованием полиномиального хаоса [12, 13].

Естественным направлением развития данного метода может быть также переход от уравнения Лиувилля (достаточно нерегулярного) к уравнению Фоккера–Планка (решения которого достаточно гладкие) [14]. Формально алгоритм определения оператора Перрона–Фробениуса при этом не изменяется, изменения касаются только алгоритма расчета наборов срезов течения.

Тестирование алгоритма аппроксимации оператора Перрона–Фробениуса, соответствующего подходам [4] и [12], проведено на примере модельной задачи о нестационарном взаимодействии недорасширенной сверхзвуковой струи на плоскую поверхность, решаемой с помощью двумерных нестационарных уравнений Эйлера [15].

Расчеты подтверждают возможность аппроксимации оператора Перрона–Фробениуса по набору полей течения в последовательные моменты времени.

1. Schmid, Peter J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data // Journal of Fluid Mechanics. — 2010. — V. 656.1. — P. 5–28.
2. Alekseev A. K., Bistriian D. A., Bondarev A. E., Navon I. M. On Linear and Nonlinear Aspects of Dynamic Mode Decomposition // International Journal for Numerical Methods in Fluids. — 2016. — V. 82, Issue 6. — P. 348–371.
3. Lasota A. and Mackey M. C. Chaos, Fractals, and Noise: stochastic aspects of dynamics. — Springer-Verlag, 1994.
4. Klus S., Koltai P., and Schutte Ch. On the numerical approximation of the Perron-Frobenius and Koopman operator, arXiv:1512.05997v3, 2016.
5. Williams M. O., Kevrekidis I. G., and Rowley C. W. A data-driven approximation of the Koopman operator: Extending dynamic mode decomposition // J. Nonlinear Sci. — 2015. — DOI 10.1007/s00332-015-9258-5.
6. Алексеев А. К., Бондарев А. Е. Об устойчивости определения частот при разложении по динамическим модам в задачах вычислительной аэрогазодинамики // Тез. докл. XXI Всеросс. конф. «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», 2016 г., Абрау-Дюрсо. — С. 16–17.
7. Berner J., Ha S. -Y., Hacker J. P., Fournier A., Snyder C. Model uncertainty in a mesoscale ensemble prediction system: Stochastic versus multi-physics representations // Mon. Wea. Rev. — 2011. — V. 139. — P. 1972–1995.
8. Epstein E. Stochastic dynamic prediction // Tellus. — 1969. — V. 21(6). — P. 739–759.
9. Ulrik S. Fjordholm, Siddhartha Mishra, Eitan Tadmor. On the computation of measure-valued solutions // Acta Numerica. — 2016. — P. 567–679.
10. Shi Jin and Stanley J. Osher. A Level Set Method for the Computation of Multivalued Solutions to Quasi-Linear Hyperbolic PDEs and Hamilton-Jacoby Equations // Commun. Math. Sci. — 2003. — V. 1, No. 3. — P. 575–591.
11. Jovanovic M. R., Schmid P. J., and Nichols J. W. Sparsity-promoting dynamic mode decomposition // Phys. of Fluids. — 2014. — V. 26. — P. 024103.
12. Alekseev A. K., Navon I. M., Zelentsov M. E. The Estimation of functional uncertainty using Polynomial Chaos and adjoint equations // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2011. — V. 67, No. 3. — P. 328–341.
13. Ben Adcock, Yi Sui. Compressive Hermite interpolation: sparse, high-dimensional approximation from gradient-augmented measurements, arXiv:1712.06645v1, 2017.



14. *Thuburn J.* Climate sensitivities via a Fokker–Planck adjoint approach // *Q.J.R. Meteorol. Soc.* — 2005. — V. 131. — P. 73–92.
15. *Алексеев А. К., Бондарев А. Е.* К анализу нестационарных течений с помощью разложения по динамическим модам // *Материалы XIX Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМ-СППС'2015), 24–31 мая 2015 г., Алушта.* — М.: Изд-во МАИ, 2015. — С. 34–36.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРОРЫВА НА ВОДОНАПОРНЫХ СООРУЖЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДИКИ КАБАРЕ

*Д. Г. Асфандияров*

*ИБРАЭ РАН, Москва, Россия*

На сегодняшний день вычислительная гидравлика рассматривается как важная технология, которая использует численные методы решения управляющих уравнений и рассматривает связь между полем потока и изменением глубины воды. В результате многолетней практики оценки возможных последствий аварий на гидротехнических сооружениях выработаны определенные требования к качеству моделирования и необходимому кругу моделируемых процессов. Применяемые численные модели должны определять гидрограф излива, динамику изменения уровня воды вниз и вверх по течению с учетом гидравлического сопротивления и неровностей подстилающей поверхности при полном или частичном разрушении водонапорных сооружений, затворов и шлюзов. Применение численного моделирования должно позволить рассчитать границы области затопления, продолжительность затопления и оценить максимальное значение скорости и глубины возникающего при прорыве потока [1].

В качестве расчетных моделей, удовлетворяющих перечисленным требованиям, используются численные схемы на основе уравнений Сен-Венана с высокими требованиями к точности моделирования разрывных решений и решений с большими градиентами. В литературе широко представлены решения различных задач вычислительной гидравлики с использованием данных уравнений на основе метода

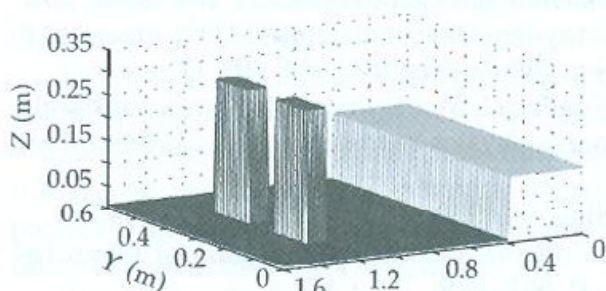


Рис. 1. Схема постановки эксперимента и расчета [2]

конечных разностей, метода конечных элементов, метода характеристик и метода конечных объемов [2].

В данной работе для моделирования прорывных явлений на водонапорном сооружении используется вычислительный метод, основанный на использовании схемы КАБАРЕ [3]. Данная схема относится к классу балансно-характеристических схем, характерной особенностью которых является объединение интегро-интерпо-

ляционного метода, отвечающего за законы сохранения и метода характеристик, позволяющего использовать свойства линеаризованных характеристических уравнений [4].

Для численной верификации предложенного метода используется эксперимент и результаты численного моделирования, представленные в работе [2]. В прямоугольном закрытом резервуаре (рис. 1) размером 1,6 м (длина)  $\times$  0,6 м (ширина)  $\times$  0,6 м (высота), перегородка, расположенная на расстоянии 0,4 м от одной из