

Разработка программного комплекса для численного моделирования и визуального представления вязких теплопроводных течений в каналах с фиксированными граничными условиями.

Александр Бондарев

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Москва, Россия

bond@keldysh.ru

Аннотация

В работе описаны основные свойства программного комплекса для решения задач численного моделирования и визуального представления течений вязких теплопроводных сред в каналах с фиксированными граничными условиями. Рассматриваются различные типы задания граничных и начальных условий. Приведены результаты тестовых расчетов.

Ключевые слова: вязкие теплопроводные течения, программный комплекс

1. Введение

Данная работа посвящена начальной фазе общего проекта, направленного на решение актуальной проблемы – управления свойствами нестационарных вязких теплопроводных течений в каналах и трубках с гибкими стенками с помощью комплексного решения прямых, сопряженных и обратных задач методами численного моделирования и научной визуализации. Разрабатываемые подходы, методы и алгоритмы позволят получать принципиально новые результаты, используемые для решения технологических инженерных задач в широком диапазоне применения.

Управление свойствами нестационарных вязких теплопроводных течений в каналах и трубках с гибкими стенками является одной из актуальных современных задач. Одной из важных целей подобного управления является выявление закономерностей возникновения различных аномалий в течениях, что имеет важное прикладное значение в ряде задач современных индустриальных технологий и в ряде задач прикладной физиологии. Управление свойствами течения достигается с помощью комплексного решения прямых, сопряженных и обратных задач методами численного моделирования и научной визуализации. Об актуальности работы свидетельствует большой интерес, который выражен многочисленными публикациями по данной проблематике в таких журналах как *Computer&Mathematics with Application*, *Computer Methods in Appl.Mech.and Eng.* и др.

Также об актуальности тематики говорят обсуждения на конференциях NHTC ASME и многих других форумах, посвященных теплообмену и решению обратных задач.

Данная работа относится к начальной стадии проекта - разработке программных средств для решения прямых задач моделирования течения вязких теплопроводных сред в каналах с фиксированными граничными условиями.

Вязкие теплопроводные течения являются объектом изучения на протяжении многих десятилетий. Основные принципы и положения, посвященные этим течениям, достаточно полно изложены в [1-3]. Основная задача, решаемая на данной стадии проекта, - разработка программных средств моделирования и визуализации течений в канале, позволяющих получать результаты количественно и качественно согласующимися с известными решениями и закономерностями, изложенными в вышеупомянутых работах.

2. Математическая модель

В общем случае математическая задача о движении сплошной среды с учетом эффектов вязкости, теплопроводности и сжимаемости сводится к решению полной системы нестационарных уравнений Навье-Стокса. Для двумерного случая эта система записывается в декартовой ($j=0$) или цилиндрической ($j=1$) системе координат следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \left(v - \frac{1}{Re_{\infty} \rho} j \bar{a}_2 \frac{\mu}{y} \right) \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \frac{1}{Re_{\infty} \rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \bar{a}_1 \mu \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{a}_2 \mu \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \right\} + \vec{F} \quad (2.1) \text{ где}$$

$\vec{f} = (\rho, u, v, T)$ - вектор искомых газодинамических функций.

$$\bar{a}_1 = \left(0, \frac{4}{3}, 1, \frac{\gamma}{Pr} \right) ; \quad \bar{a}_2 = \left(0, 1, \frac{4}{3}, \frac{\gamma}{Pr} \right) ; \quad \vec{F} = (F_{\rho}, F_u, F_v, F_T)$$

$$F_{\rho} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\rho v}{y} j ;$$

$$F_u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial y} - j \left[\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu v}{y} \right) - \frac{\mu}{y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} \frac{1}{Re_{\infty} \rho} ;$$

$$F_v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - j \frac{2}{3} \frac{v}{y} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + 2 \frac{\mu}{y} \right) \right\} \frac{1}{Re_{\infty} \rho} ;$$

$$F_T = -(\gamma - 1)T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{v}{y} \right) + \\ + \frac{M_\infty^2 \gamma (\gamma - 1) \mu}{Re_\infty \rho} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + j \left(\frac{v}{y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + j \frac{v}{y} \right)^2 \right\}$$

Здесь x, y - декартовы ($j = 0$) или цилиндрические ($j = 1$) координаты, t - время, u, v - составляющие компоненты вектора скорости, ρ - плотность, P - давление, T - температура, γ - соотношение удельных теплоемкостей, μ - коэффициент динамической вязкости, λ - коэффициент теплопроводности. (При записи уравнения энергии считается, что $\lambda = \mu$).

Система (2.1) записана в безразмерной форме, переход к которой осуществляется путем отнесения размерных величин к характерным геометрическим размерам и величинам в набегающем потоке. Также по характерным размерам и параметрам набегающего потока определяются характерные числа задачи, такие как число Маха M_∞ , число Рейнольдса Re_∞ , число Прандтля Pr .

Система (2.1) замыкается соотношениями для коэффициентов вязкости и теплопроводности $\lambda = \mu = \mu(T)$ и уравнением состояния в безразмерной форме $P = \frac{\rho T}{\gamma M_\infty^2}$.

При решении задач в качестве определяющих газодинамических функций выбираются P, u, v, T .

3. Метод решения

Задача решается в предположении, что для каждой из искомым газодинамических функций P, u, v, T соответствующее уравнение системы (2.1) является определяющим. Каждое из уравнений (2.1) представляется в общем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = c \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial f}{\partial x} \right) + e \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) + H \quad (3.1), \text{ где}$$

a, b, c, d, e, g - соответствующие коэффициенты. В H включаются члены со смешанными производными, а также члены с производными по тем функциям, для которых данное конкретное уравнение из (2.1) не является определяющим.

Для решения системы уравнений (2.1) используется метод переменных направлений. Для примера приведем запись уравнений, рассматриваемых для направления вдоль оси X :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} - c \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial f}{\partial x} \right) = A \quad ; \quad A = -b \frac{\partial f}{\partial y} + e \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{\partial f}{\partial y} \right) + H \quad (3.2)$$

Для решения подобных уравнений по каждому координатному направлению в программном комплексе реализованы общие алгоритмы применения неявных конечно-разностных схем, разрешаемых путем скалярной прогонки. Таким образом, программный комплекс позволяет обеспечить численную реализацию большинства неявных конечно-разностных схем первого и второго порядка аппроксимации по времени и пространству, записанных на соответствующем сеточном шаблоне, согласно [4,5]. Также программный комплекс позволяет обеспечить численную реализацию многих гибридных конечно-разностных схем, описанных в [6]. Гибридные конечно-разностные схемы являются согласно [6] в общем случае линейными комбинациями разностных схем, обладающих разными вычислительными свойствами, и применяются с тем, чтобы максимально удовлетворить потребности вычислителя.

При проведении тестовых расчетов применялась гибридная неявная конечно-разностная схема, подробно представленная в [7,8,9]. Данная конечно-разностная схема на каждом направлении обладает вторым порядком аппроксимации по времени и пространству с добавочным членом, выполняющим функции искусственной вязкости. Управление искусственной вязкостью осуществляется с помощью весовых коэффициентов. Применяемая схема является безусловно устойчивой. Учет нелинейности коэффициентов организован с помощью экстраполяции нелинейных коэффициентов по предыдущим временным слоям.

4. Граничные условия

Для общей постановки задачи используется несколько разных типов граничных условий. В программном комплексе эти граничные условия реализуются по модульному принципу. В блоке граничных условий GRUS программные модули расположены по принципу: каждому типу граничных условий соответствует свой отдельный программный модуль. Это позволяет пользователю в управляющем блоке UPR легко присваивать различные типы граничных условий геометрическим границам в соответствии с конкретными задачами.

В данный период в блоке граничных условий реализованы следующие типы граничных условий:

- а) для входной границы канала:
 - условие задания характерного набегающего потока

$$u_{zp} = U_{\infty}(y, t), \quad v_{zp} = 0, \quad P_{zp} = P_{\infty}, \quad T_{zp} = T_{\infty}(y, t)$$

Эти условия задаются с помощью известных аналитических и экспериментальных зависимостей;

- условия в набегающем потоке, полученные из других расчетов

$$u_{zp} = U(y, t), \quad v_{zp} = V(y, t), \quad P_{zp} = P(y, t), \quad T_{zp} = T(y, t)$$

Эти условия нужны для того, чтобы полученные в предыдущих расчетах профили газодинамических величин задать в качестве граничных условий на входной границе.

б) для выходной границы канала :

- условие типа линейной экстраполяции (или «мягкие» граничные условия)

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial \vec{n}^2} = 0, \quad \vec{f} = (P, u, v, T);$$

- условия «сноса» по течению

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \vec{f} = (P, u, v, T);$$

- условия входного потока на выходной границе

$$u_{zp} = U_{\infty}(y, t), \quad v_{zp} = 0, \quad P_{zp} = P_{\infty}, \quad T_{zp} = T_{\infty}(y, t).$$

в) для оси симметрии канала – условие симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = v_{zp} = \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0;$$

г) для стенки канала:

- условие прилипания для стенки с постоянной температурой

$$u_{zp} = v_{zp} = \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = 0, \quad T_{zp} = const;$$

- условие прилипания для теплоизолированной стенки

$$u_{zp} = v_{zp} = \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0;$$

- условие прилипания для стенки с теплоотводом или подводом тепла;

$$u_{zp} = v_{zp} = \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial T}{\partial \vec{n}}(x, t).$$

Дальнейшие типа граничных условий могут добавляться в блок граничных условий в виде отдельных программных модулей по мере разработки. В настоящее время вопросы подвижности границ, а также вопросы моделирования граничных условий эластичности и частичной проницаемости границ находятся в стадии разработки.

5. Начальные условия

Блок задания начальных условий построен по модульному принципу аналогично блоку задания граничных условий. В данный период реализованы следующие типы задания начальных условий:

- условия покоя

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) = 0, \quad P(x, y, t) = P_{\infty}, \quad T(x, y, t) = T_{\infty}(y, t)$$

Это т.н. «плохие» начальные условия. Они нужны для того, чтобы контролировать и тестировать процессы эволюции и установления течения.

- условия «сноса»

$$u(x, y, t) = U_{\infty}(y, t), \quad v(x, y, t) = 0, \quad P(x, y, t) = P_{\infty}, \quad T(x, y, t) = T_{\infty}(y, t)$$

Эти начальные условия представляют собой «снос» граничных условий на входной границе вниз по потоку на все поле течения.

- условия импорта поля течения из других расчетов или экспериментов

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad P = P(x, y, t), \quad T = T(x, y, t)$$

6. Средства анализа и визуального представления решения

В программном комплексе предусмотрен блок анализа решения ANALYSER. Его основная роль предназначена для решения обратных и сопряженных задач. На данном этапе он используется для контроля качества решения. Данный блок контролирует локальные экстремумы, анализируя поля первых и вторых производных определяющих газодинамических величин в расчетной области.

В настоящее время для рабочего контроля решения также используются инструменты визуализации, позволяющие получать распределения величин P, u, v, T как вдоль выбираемых пользователем линий, так и во всей расчетной области. Эти инструменты рабочего визуального контроля реализованы с помощью системы ГРАФОР [10]. В работе использовалась современная версия [11,12] реализованная на базе Windows на основе системы Microsoft Fortran Power Station 4.0 и Microsoft Developer Studio. Учитывая, что текущая версия описываемого программного комплекса также реализована под Microsoft Fortran Power Station 4.0, это довольно удобно.

Вопрос выбора платформы и системы визуализации для проекта в целом находится в настоящее время в стадии обсуждения и разработки.

7. Проведение тестовых расчетов

Для проверки работоспособности программного комплекса был проведен ряд стандартных тестовых расчетов. В качестве тестов рассматривались варианты течений в широком диапазоне чисел M_{∞} и Re_{∞} . Проверялись все вышеописанные типы задания

граничных условий и начальных условий в счетной области. В первую очередь контролировалась физичность результатов и их количественное и качественное соответствие известным решениям из [1,2,3]. Практически все тесты показали хорошую согласованность с известными аналитическими и экспериментальными зависимостями [1,2,3].

Приведем пример результатов для случая ламинарного течения при $M_\infty = 3$ и $Re_\infty = 1000$. На рис.1 представлены линии постоянных значений числа Маха для установившегося течения.

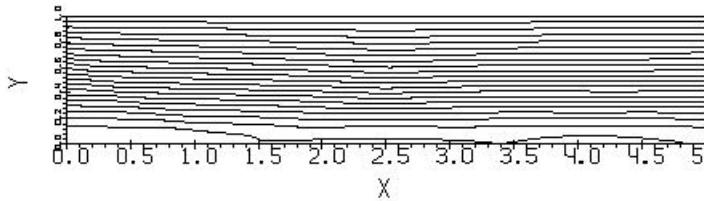


Рис.1.

На рис.2 представлены линии постоянных значений температуры для установившегося течения.

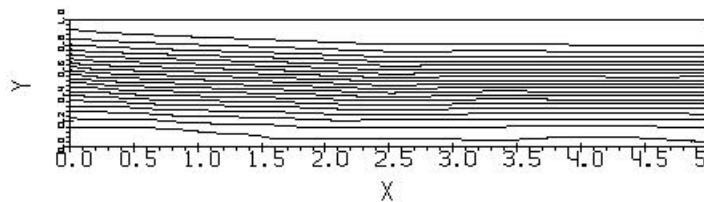


Рис.2.

На рисунках 3, 4, 5 представлены распределения по направлению Y величин u, P, T соответственно. Это распределения газодинамических величин на выходе из канала.

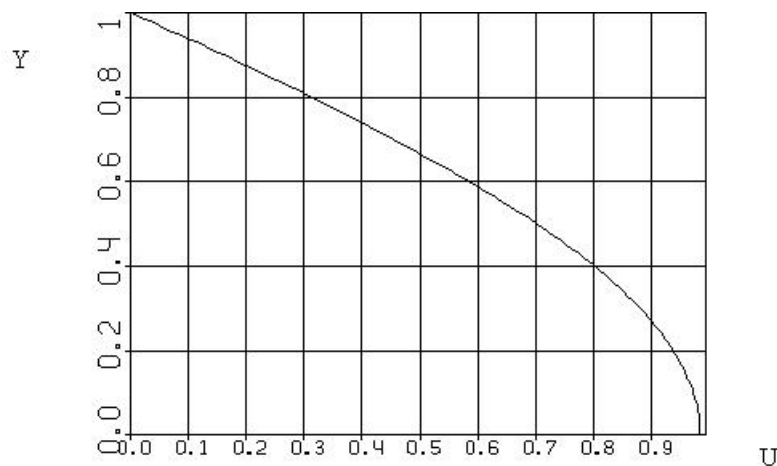


Рис.3.

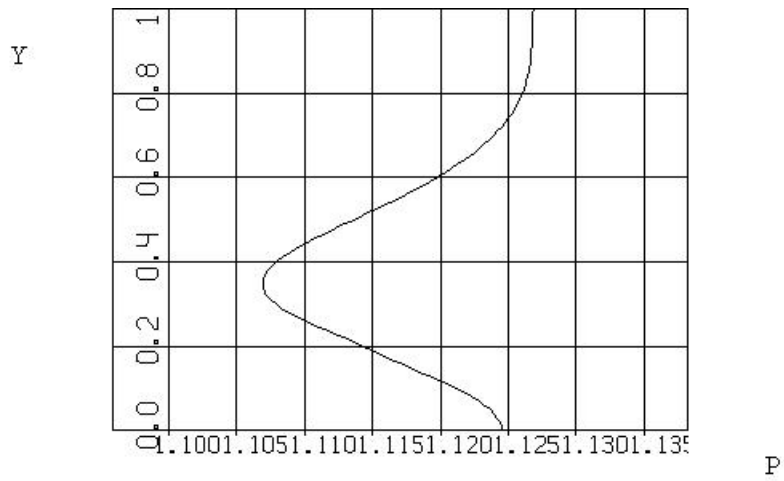


Рис.4

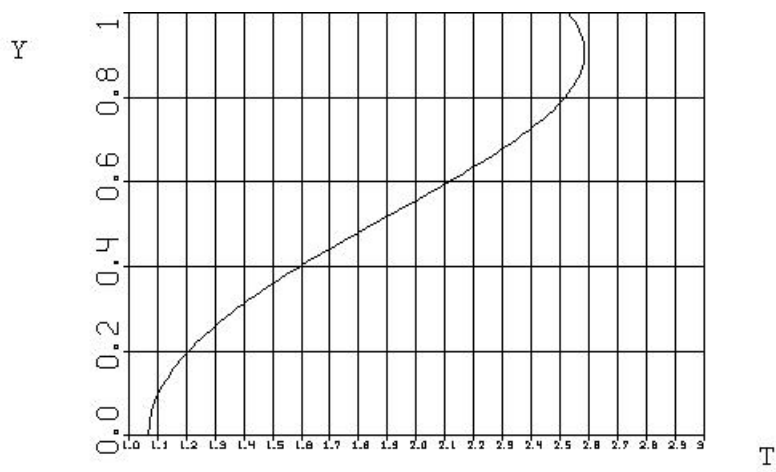


Рис.5

На рисунке 6 представлено распределение давления вдоль стенки канала.

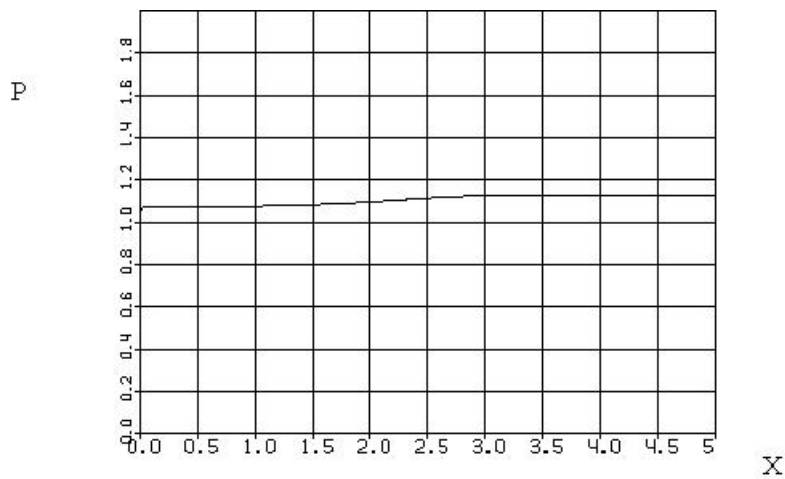


Рис. 6

Пример этих данных показывает, что результаты расчетов хорошо согласуются с известными аналитическими и эмпирическими зависимостями из [1,2,3]. Полученные в

тестовых расчетах данные также хорошо согласуются с результатами расчетов, приведенных в [5,15].

Следует заметить, что тестовые расчеты показали необходимость при применении гибридных неявных конечно-разностных схем для оптимизации вычислительных свойств и точного определения границ весовых коэффициентов в рассматриваемом классе задач применять численно-визуальный методологический подход, подробно описанный в [13,14].

Применение подобного подхода позволит резко повысить эффективность применения программного комплекса к конкретным классам задач.

8. Заключение

Разработан первый вариант прототипа программного комплекса для решения прямых задач моделирования течения вязких теплопроводных сред в каналах с фиксированными граничными условиями. Данный прототип является начальной фазой общего проекта, направленного на решение актуальной проблемы – управления свойствами нестационарных вязких теплопроводных течений в каналах и трубках с гибкими стенками с помощью комплексного решения прямых, сопряженных и обратных задач методами численного моделирования и научной визуализации. Проведено тестирование и численное обоснование на известных решениях. Тестирование показало достаточно хорошее согласование с известными качественными и количественными параметрами подобных течений. В перспективе рассматривается разработка алгоритмов подвижности границ, а также граничных условий эластичности и частичной проницаемости границ.

Список литературы

- [1] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Наука, 1974, 711 с.
- [2] Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М., Наука, 1976, 888 с.
- [3] Бондарев Е.Н., Дубасов В.Т., Рыжов Ю.А., Свирщевский С.Б., Семенчиков М.В. Аэрогидромеханика. М., Машиностроение, 1993, 608 с.
- [4] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., Наука, 1980, 352 с.
- [5] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М., Наука, 1984, 288 с.
- [6] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М., Физматлит, 2001, 608с.
- [7] Бондарев А.Е. Численное решение уравнения Бюргерса в области высоких градиентов. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, М., N12, 1990, 13с.

[8] Бондарев А.Е. Разработка метода численного исследования отрывных течений вязкого газа. Отчет ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, М., N170-90, 1990, 16с.

[9] Бондарев А.Е. Оптимизация вычислительных свойств гибридных разностных схем с помощью методов визуального представления для ламинарных и турбулентных течений в дальнем следе. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, М., N21, 2007, 21с.

[10] Баяковский Ю.М., Галактионов В.А., Михайлова Т.Н. «ГРАФОР. Графическое расширение Фортрана» М., Наука, 1985.

[11] Базаров С.Б., Баяковский Ю.М. «Комплекс графических программ ГРАФОР в среде WINDOWS» Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 30, 2000, 10 с.

[12] Базаров С.Б., Баяковский Ю.М., Сейдалиева Ф.Ф., Скачков А.Ю. «Адаптация комплекса графических программ ГРАФОР в операционных системах WINDOWS и LINUX» Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 27, 2002, 16 с.

[13] Бондарев А.Е. Применение методов научной визуализации для оптимизации вычислительных свойств конечно-разностных схем. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 79, 2006, 17 с.

[14] Бондарев А.Е. Применение методов научной визуализации для оптимизации вычислительных свойств конечно-разностных схем. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 79, 2006, 17 с.

[15] Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М., Научный мир, 2007, 352 с.