

# **Организация решения обратных задач при моделировании вязких течений в каналах.**

Александр Бондарев

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

Москва, Россия

bond@keldysh.ru

## **Аннотация**

В работе описан процесс реализации алгоритма решения обратных задач в прототипе программного комплекса ELT, предназначенном для численного моделирования и визуального представления течений вязких теплопроводных сред в каналах с фиксированными граничными условиями. Приведены результаты тестовых расчетов.

## **1. Введение**

Данная работа посвящена реализации алгоритма решения обратных задач в рамках общего проекта, направленного на решение актуальной проблемы – управления свойствами нестационарных вязких теплопроводных течений в каналах и трубках с гибкими стенками с помощью комплексного решения прямых, сопряженных и обратных задач методами численного моделирования и научной визуализации. Данная работа является непосредственным продолжением работ [1,2], содержащих описание основных свойств прототипного варианта программного комплекса ELT, предназначенного для численного моделирования свойств вязких течений в каналах.

Управление свойствами нестационарных вязких теплопроводных течений в каналах и трубках с гибкими стенками является одной из актуальных современных задач. Одной из важных целей подобного управления является выявление закономерностей возникновения различных аномалий в течениях, что имеет важное прикладное значение в ряде задач современных промышленных технологий и в ряде задач прикладной физиологии. Управление свойствами течения достигается с помощью комплексного решения прямых, сопряженных и обратных задач методами численного моделирования и научной визуализации. Об актуальности работы свидетельствует большой интерес, который выражен многочисленными публикациями по данной проблематике в таких журналах как *Computer&Mathematics with Application*, *Computer Methods in Appl.Mech.and Eng.* и др.

Также об актуальности тематики говорят обсуждения на конференциях NHTC ASME и многих других форумах, посвященных теплообмену и решению обратных задач.

В настоящее время существует большой набор численных алгоритмов и методов, который позволяет моделировать практически любой физический процесс в механике сплошных сред и получить соответствующее поле физических параметров. Однако для большей части практических современных задач недостаточно просто получить поле физических величин как решение прямой задачи моделирования. Как правило, необходимо получить некоторое оптимальное решение для практических целей. Поиск такого оптимального решения соответствует решению обратных задач. Иными словами, в практических приложениях недостаточно просто рассчитать поле течения – нужен выбор наилучшего решения и определяющих параметров задачи, формирующих это решение. Так в одних случаях ищется геометрическая форма, обеспечивающая минимальное сопротивление, максимальную подъемную силу и т.д. В других случаях ищутся условия, обеспечивающие управление течением (максимальное смещение, минимальное сопротивление, увеличение или подавление вихрей и т.д.).

В целом обратные задачи в газовой динамике решаются не так интенсивно, как обратные задачи теплопроводности, акустического и электромагнитного зондирования. Основной причиной этому служит то обстоятельство, что задачи газовой динамики в общем случае многомерны по пространству. Т.е. мы должны решать 4D задачи (3D+ время) в вариационной постановке, что требует серьезных вычислительных и временных ресурсов. Также серьезной проблемой является визуальное представление решений обратных задач, как в концептуальном смысле, так и в инструментальном. Тем не менее, бурное современное развитие вычислительных средств и методов позволяет в настоящее время вплотную заниматься этим классом задач математического моделирования.

## **2. Обратные задачи в прикладных исследованиях**

Обратным задачам посвящено достаточное количество работ [3-5]. Используя концепцию и постановку обратных задач, мы можем решать широкий круг проблем. Часто обратные задачи классифицируются аналогично [3,4], как поиски границы, коэффициента, ретроспективные обратные задачи или задачи оптимального проектирования. В общем, в практических целях обратные задачи формулируются следующим образом: найти при каких определяющих параметрах в классе задач будет возникать интересующее практического исследователя явление, независимо от того, как проявляется это явление количественно (достижения некой величиной определенного значения) или качественно (зарождение вихрей, срыв потока и т.д.).

Попробуем формализовать подобную трактовку обратной задачи для общего случая.

Будем исходить из предположения, что решение выбранной задачи из определенного класса задач формируется в процессе математического моделирования и определяется конечным набором определяющих параметров задачи, которые условно можно разделить на три группы:  $A = (a_1, \dots, a_n)$  - параметры, характеризующие физические свойства задачи и относящиеся к выбранной математической модели;  $B = (b_1, \dots, b_m)$  - параметры, характеризующие численный метод реализации математической модели;  $C = (c_1, \dots, c_l)$  - параметры, относящиеся к организации процесса расчета. На основе выбранной математической модели, численного метода и способа организации расчета в процессе расчета вырабатывается численное решение  $F = F(A, B, C) = F(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$ .

Введем понятие функционала событий. В качестве функционала событий будем рассматривать функционал  $\Phi(F(A, B, C))$ , который на решении задачи принимает, подобно логической переменной два значения: 1 – если, событие, интересующее исследователя наступило (независимо от рода события – достижение величиной определенного значения, появление в потоке новой качественной структуры и т.п.) и 0 – если событие не наступило.

$$\Phi(F(A, B, C)) = 0 - \text{событие не наступило} \quad (2.1)$$

$$\Phi(F(A, B, C)) = 1 - \text{событие наступило.}$$

Представляя  $\Phi(F(A, B, C))$  как  $\Phi(F(A, B, C)) = \Phi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$ , можно в общем случае сформулировать обратную задачу следующим образом:

найти все значения определяющих параметров  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$ , при которых выполняется условие  $\Phi(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l) = 1$  (2.2)

Рассматривая  $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$  как набор базисных векторов, можно представить пространство определяющих параметров  $L(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_l)$ , имеющее размерность  $(n + m + l)$ . Тогда в общем случае обратную задачу можно сформулировать так:

найти в пространстве  $L$  все подобласти  $L^*$ , для которых выполняется  $\Phi(L^*) = 1$ .

Следует отметить, что подобная постановка имеет важное значение с точки зрения выработки визуальной концепции и применения методов научной визуализации для построения визуального представления решений обратных задач.

### 3. Реализация алгоритма решения обратных задач

Реализация алгоритма решения обратных задач в программном комплексе ELT проводится в полном соответствии с общей формулировкой решения обратных задач, изложенной в предыдущем параграфе. Основную роль при программной реализации алгоритма решения обратных задач играют два программных блока: блок ANALYSER и блок UPR.

Блок ANALYSER получает из решения прямой задачи полную информацию о полях всех газодинамических величин, полях их первых и вторых производных, достраивает необходимую информацию и проводит анализ решения, проверяя выполнение условия (2.2). Полученный результат передается в управляющий решением обратной задачи блок UPR. В блоке UPR проводится решение вариационной задачи по выбранному определяющему параметру, до тех пор, пока не будет выполнено условие (2.2). Также блок UPR отвечает за изменение других выбранных определяющих параметров с выбранным шагом и организацию многократного расчета обратных задач с целью получения зависимости того параметра, относительно вариации которого решается обратная задача, от других выбираемых пользователем параметров. Поясним на примере. Допустим, мы имеем 5 важных определяющих параметров задачи  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ . Пусть обратная задача решается относительно вариации параметра  $f_1$  до получения значения  $f_1^*$ , при котором выполнено условие (2.2), а все остальные параметры фиксированы. Блок UPR организует многократный расчет обратных задач, варьируя оставшиеся определяющие параметры  $f_2, f_3, f_4, f_5$  с выбранным шагом в пределах их области изменения. Это позволяет получать зависимости типа  $f_1^*(f_2, f_3, f_4, f_5)$ . В данном примере число определяющих параметров может быть и более 5, но следует учитывать возникающие ограничения на мощность вычислительных ресурсов и время расчета.

Здесь возникают интересные задачи с точки зрения построения концепций и выработки методов научной визуализации. Легко представить визуально в виде поверхности зависимость типа  $f_1^*(f_2, f_3)$ , уже гораздо сложнее организовать визуальное представление области пространства  $f_1^*(f_2, f_3, f_4)$ . Правильная и доступная зрителю организация визуализации зависимостей от более чем трех параметров является предметом разработок и исследований в задачах научной визуализации.

Подобная организация многократного расчета обратной задачи очень хорошо укладывается в идеологию построения многопроцессорных параллельных расчетов. Логично использовать принцип «одна задача – один процессор». Параллельный подход

позволяет резко ускорить процесс расчета и сделать его гораздо более эффективным с точки зрения конкретных практических приложений.

#### 4. Результаты расчетов

Для проверки работоспособности программного комплекса ELT был проведен ряд стандартных тестовых расчетов прямых задач [1]. В качестве тестов рассматривались варианты течений канале с фиксированными граничными условиями в широком диапазоне чисел  $M_\infty$  и  $Re_\infty$ . В качестве математической модели согласно [1] использовалась полная система нестационарных уравнений Навье-Стокса, описывающая движение вязкого теплопроводного сжимаемого газа.

При проведении тестовых расчетов применялась гибридная неявная конечно-разностная схема, подробно представленная в [10,11]. Данная конечно-разностная схема на каждом направлении обладает вторым порядком аппроксимации по времени и пространству с добавочным членом, выполняющим функции искусственной вязкости. Управление искусственной вязкостью осуществляется с помощью весовых коэффициентов. Применяемая схема является безусловно устойчивой. Учет нелинейности коэффициентов организован с помощью экстраполяции нелинейных коэффициентов по предыдущим временным слоям.

Практически все тесты показали хорошую согласованность с известными аналитическими и экспериментальными зависимостями и численными экспериментами [8,9].

Следует заметить, что тестовые расчеты показали необходимость при применении гибридных неявных конечно-разностных схем для оптимизации вычислительных свойств и точного определения границ весовых коэффициентов в рассматриваемом классе задач применять численно-визуальный методологический подход, подробно описанный в [6,7]. Данный подход предполагает решение обратной задачи с целью определения минимального значения весового коэффициента  $S_k$ , отвечающего за управление искусственной вязкостью и обеспечивающего отсутствие нежелательных осцилляций [8,9]. Реализация алгоритма решения обратной задачи апробировалась именно в этой постановке. Заметим, что это обеспечивает дополнительную пользу с точки зрения комплексного тестирования программного комплекса ELT, так как в работах [6,7] настойчиво рекомендуется проводить подобное исследование для каждого рассматриваемого класса задач.

В блоке ANALYSER проводился анализ полей первых и вторых производных с целью контроля условия, чтобы количество локальных экстремумов  $n$ , не превышало некоторого

заданного значения  $n,^*$ . В блоке UPR проводилось решение вариационной задачи с целью минимизации  $S_k$  вплоть до нарушения условия  $n, \leq n,^*$ . Одновременно в блоке UPR проводилась организация многократного расчета обратных задач путем вариации с выбранным шагом таких определяющих параметров задачи как числа Маха  $M_\infty$  и Рейнольдса  $Re_\infty$  с целью получения зависимости  $S_k = S_k(M_\infty, Re_\infty)$ .

Проведенные расчеты позволили провести построение поверхности  $S_k = S_k(M_\infty, Re_\infty)$  и дали возможность получать зависимости типа  $S_k = S_k(M_\infty)$  и  $S_k = S_k(Re_\infty)$  при фиксированном втором параметре.

На рис.1 представлена зависимость  $S_k(M_\infty)$  при фиксированном числе  $Re_\infty=1000$ .

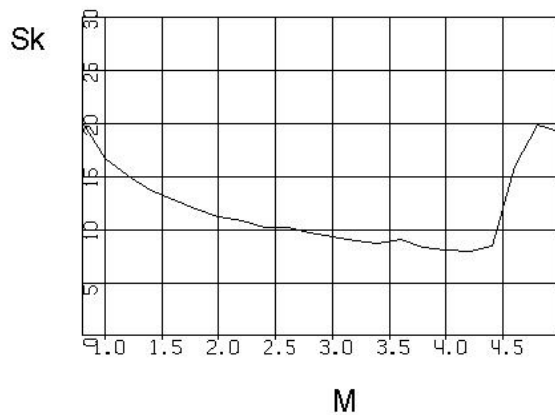


Рис.1.

На рис. 2 представлена зависимость  $S_k = S_k(Re_\infty)$  при фиксированном значении  $M_\infty=3$ .

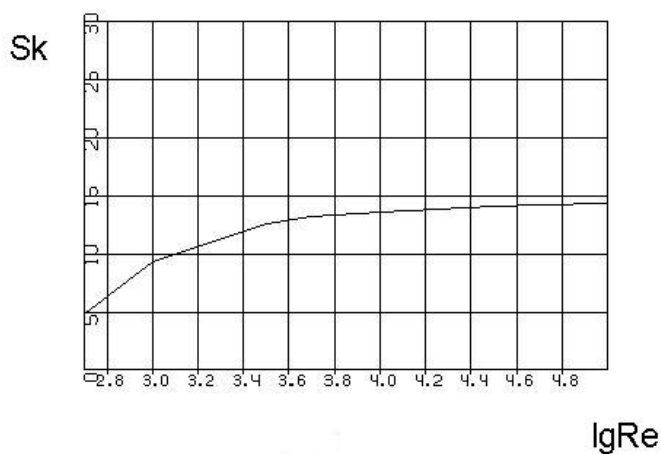


Рис.2.

Таким образом, проведенное тестирование показало хорошую работу алгоритма решения обратных задач и позволило получить ограничения для весового коэффициента

разностной схемы для широкого диапазона чисел  $M_\infty$  и  $Re_\infty$  в таком классе задач как течения в канале с фиксированными граничными условиями.

## 5. Заключение

Разработан и реализован алгоритм решения обратных задач в программном комплексе ELT. Данный прототипный программный комплекс является начальной фазой общего проекта, направленного на решение актуальной проблемы – управления свойствами нестационарных вязких теплопроводных течений в каналах и трубках с гибкими стенками с помощью комплексного решения прямых, сопряженных и обратных задач методами численного моделирования и научной визуализации. Описана общая формулировка решения обратных задач в прикладных исследованиях. В рамках общей формулировки реализован и описан алгоритм решения обратных задач. Проведено и описано тестирование алгоритма. Проведенное тестирование показало хорошую работу алгоритма решения обратных задач. Решенные в процессе тестирования обратные задачи позволили получить в качестве решения четкие ограничения для весового коэффициента разностной схемы для широкого диапазона чисел  $M_\infty$  и  $Re_\infty$  в таком классе задач как вязкие теплопроводные течения в канале.

## Список литературы.

- [1] Бондарев А.Е., Галактионов В.А. Разработка программного комплекса для решения задач численного моделирования и визуального представления течений вязких теплопроводных сред в каналах с фиксированными граничными условиями. Отчет ИПМ им.Келдыша РАН, N 08-020-02, 2008, 12 с.
- [2] Бондарев А.Е., Галактионов В.А. Решение обратных задач в программном комплексе ELT для численного моделирования и визуального представления течений вязких теплопроводных сред в каналах. Отчет ИПМ им.Келдыша РАН, N 08-021-02, 2008, 10 с.
- [3] Алифанов О.М. Обратные задачи в теплопередаче. М, Машиностроение, 1988.
- [4] Beck J.V., Blackwell B., St.Clair C. Inverse Heat Conduction. Ill-posed Problems. John Wiley&Sons, USA, N.Y., 1985
- [5] Alekseev A.K., Bondarev A.E. On Inverse Problems for 3D Time-Dependent Free Convection Heat Transfer // Proc. National Heat Transfer Conference, Oregon, USA, Vol.10, 1995, pp.112-122.

[6] Бондарев А.Е. Применение методов научной визуализации для оптимизации вычислительных свойств конечно-разностных схем. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 79, 2006, 17 с.

[7] Бондарев А.Е. Оптимизация вычислительных свойств гибридных разностных схем с помощью методов визуального представления для ламинарных и турбулентных течений в дальнем следе. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 21, 2007, 21 с.

[8] Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М., Наука, 1984, 288 с.

[9] Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М., Научный мир, 2007, 352 с.

[10] Бондарев А.Е. Численное решение уравнения Бюргерса в области высоких градиентов. Препринт ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, М., N12, 1990, 13с.

[11] Бондарев А.Е. Разработка метода численного исследования отрывных течений вязкого газа. Отчет ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, М., N170-90, 1990, 16с.