УДК 519.633 533.5

ОПТИМИЗАЦИЯ ГИБРИДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ И ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Бондарев А.Е.
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва
e-mail: bond@keldysh.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается применение подходов и методов решения обратных задач к оптимизации вычислительных свойств гибридных разностных схем. Применяемый подход основан на многократном решении обратных задач с одновременным построением и визуальным представлением предельных поверхностей для весовых коэффициентов гибридной разностной схемы. Данный подход продемонстрирован на примере конкретной задачи моделирования сверхзвуковых ламинарных и турбулентных течений в дальнем следе.

Ключевые слова: *оптимизация разностных схем обратные задачи, научная визуализация*

1. Введение

Данная работа развивает представленный в [1] подход к применению методов решения обратных задач и визуального построения к нестационарным задачам математической физики и оптимизации применяемых для решения этих задач численных методов.

На современном этапе особое значение приобретают алгоритмы решения обратных задач аэрогазодинамики, имеющих своей целью оптимизацию конструктивных параметров при рассмотрении задач обтекания летательных аппаратов или оптимизацию процессов в рабочих камерах и соплах двигательных установок. Эти задачи предъявляют совершенно новые требования к графическому представлению результатов расчетов, и в целом к роли визуализации в задачах вычислительной аэродинамики. На этом этапе средства и методы визуального представления могут быть успешно применены не только к решению задач математического моделирования, но и к совершенствованию и оптимизации вычислительных методов, применяемых для их решения.

В [1] содержится описание методологического подхода к оптимизации разностных схем, применяющихся для решения конкретных классов задач, с помощью визуального представления параметров, определяющих аппроксимирующие и стабилизирующие свойства гибридных разностных схем. В простейшем случае гибридную схему можно записать как комбинацию GS1 + (1-G)S2, где G – коэффициент гибридности, S1 и S2 – разностные схемы, обладающие различными интересующими исследователя свойствами. Например, S1 – схема первого порядка точности, а S2 – второго порядка и т.п. Большинство применяемых для решения практических задач аэрогазодинамики являются гибридными. Подробное описание и классификация различных типов гибридных разностных схем приведены в [2]. Использование гибридных схем позволяет исследователю использовать наилучшие свойства разных схем. Одновременно необходимо иметь достаточно четкое представление о свойствах и ограничениях коэффициентов гибридности (весовых коэффициентов) для того, чтобы используемое свойство соответствовало физической модели рассматриваемой задачи.

2. Описание методологического подхода для невязкого случая

Основные результаты, изложенные в данном разделе, получены и подробно описаны в [1]. Для разработки и демонстрации методологического подхода выбирается гибридная конечно-разностная WW-схема. Эта неявная безусловно устойчивая схема второго порядка по времени и пространству обладает искусственной вязкостью, позволяющей устранять нефизические осцилляции вблизи разрывов путем выбора весового коэффициента *Sk*. Решается задача моделирования участка течения в дальнем следе за телом. В общем случае в прямоугольной расчетной области рассматривается течение вязкого сжимаемого теплопроводного газа, описываемое полной системой нестационарных уравнений Навье-Стокса. На входной границе задаются распределения газодинамических параметров, полученные из расчетов обтекания осесимметричного тела и участка следа за ним. Основной целью было изучение свойств искусственной вязкости, заложенных в гибридной разностной схеме. С этой целью исследовались свойства *Sk* на примере задачи о течении в дальнем следе и частично определялись существующие для *Sk* ограничения.

Данная задача в данном разделе рассматривается для предельного случая когда число Рейнольдса $Re \to \infty$. В этом случае вместо уравнений Навье-Стокса решается система невязких уравнений Эйлера.

С целью анализа численного решения введем понятие «решения без осцилляций». Выберем решение, где не возникает нефизических осцилляций, и проанализируем количество локальных экстремумов в счетной области, обозначив это количество как *Fe*. Пусть *F(Sk,Nx,Ny)* - функционал, характеризующий количество локальных экстремумов в счетной области в зависимости от выбора веса *Sk* и сеточного разбиения (при условии равномерного разбиения) по соответствующим направлениям *Nx* и *Ny*. Тогда задача формулируется так: определить при каких значениях *Sk* для каждого набора *(Nx,Ny)* сеточного разбиения выполняется

$$F(Sk, Nx, Ny) = Fe \qquad (2.1)$$

Схема расчета выглядит следующим образом. При $Re \to \infty$ для каждого сеточного разбиения *(Nx,Ny)* решается прямая задача моделирования течения в дальнем следе с помощью WW- схемы при некотором заданном начальном значении *Sk*. В счетной области определяется значение *F(Sk,Nx,Ny)* - количество локальных экстремумов. Далее решается классическая обратная задача путем вариации *Sk* до выполнения условия (2.1). Одновременно проводится в режиме online визуальное представление *Sk* в виде поверхности *S* = Sk(Nx,Ny)* предельных весовых коэффициентов. При выборе веса *Sk* < *S** для каждого варианта *(Nx,Ny)* в численном решении возникают нефизические осцилляции.

Пример полученной в результате расчетов поверхности значений предельных весовых коэффициентов *S* = Sk(Nx,Ny)* представлен на рис.1. Визуальный анализ полученной в расчетах поверхности предельных весовых коэффициентов позволяет согласно [1] применить к поверхности преобразование $A = S^* Ny / Nx^2$. Вид преобразованной предельной поверхности представлен на рис.2. Из вида преобразованной поверхности следует, что для *(Nx,Ny)* при условии $Nx \approx Ny$ выполняется *A=const*. Следовательно, значения предельного веса *Sk*, при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться при $Nx = 1/h_x$, $Ny = 1/h_y$ как

$$S^* = h_y const / h_x^2 \qquad (2.2)$$

Наиболее сильные отклонения от полученной зависимости наблюдаются там, где соотношение между размерами вычислительной ячейки наиболее велико, что согласуется с результатами [4].

3. Применение к ламинарным сверхзвуковым вязким течениям

Рассматриваемый подход и результаты предыдущего раздела применяются к ламинарным сверхзвуковым вязким течениям, где число *Re* служит одним из основных определяющих параметров задачи. Учитывая результаты, полученные для невязкого случая, положим $Nx \approx Ny = N$. Нас интересует поведение коэффициента *Sk* в зависимости от изменения параметров *N* и *Re*. Тогда, сохраняя введенное в предыдущем разделе понятие «решения без осцилляций», задача формулируется как определение при каких значениях *Sk* для каждого набора *(N,Re)* сеточного разбиения выполняется

$$F(Sk, N, Re) = Fe \qquad (3.1)$$

Аналогично предыдущему разделу для каждого набора *(N,Re)* решается прямая задача моделирования течения в дальнем следе с помощью WW- схемы при некотором заданном начальном значении *Sk*. В счетной области определяется значение *F(Sk,N,Re)* - количество локальных экстремумов. Решается обратная задача путем вариации *Sk* до выполнения условия (3.1). Одновременно проводится в режиме online визуальное представление *Sk* в виде поверхности $S^* = Sk(N,Re)$. Полученная в результате расчетов поверхность S^* представлена на рис.3. Эти же данные представлены в виде изолиний на рис.4. Здесь и далее по оси *Y* отмечены координаты после преобразования $Y=lgRe$. Аналогично разделу 2 применяется преобразование данных $A=S^*/N$. Вид поверхности после применения преобразования представлен на рис.5,6 в виде преобразованной предельной поверхности и изолиний соответственно. Данные на рис. 5,6 свидетельствуют о том, что для каждого набора значений *(N,Re)* при условии $lgRe < 3.5$ выполняется соотношение $A=const$. Следовательно, значения предельного веса *Sk*, при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться как $S^*=N\ const$ или $S^*=const/h$ с учетом $N=1/h$.

4. Результаты расчетов для турбулентного течения

Построение предельной поверхности весовых коэффициентов для турбулентного течения на участке дальнего следа за телом проводится полностью аналогично разделу 3. Для моделирования турбулентного течения применяется полуэмпирическая модель [3], хорошо зарекомендовавшая себя в практических приложениях к подобным течениям.

Общая схема расчетов аналогична представленной в предыдущем разделе для ламинарных вязких течений. В результате расчетов получаем поверхность $S^*=Sk(N,Re)$ предельных весовых коэффициентов для турбулентного случая, изображенную в виде поверхности на рис.7 и в виде изолиний на рис.8. Из рис.7,8 следует, что для турбулентного случая значение S^* практически не зависит от числа *Re*., что согласуется с известными экспериментальными данными. Аналогично предыдущему разделу применяется преобразование данных, представленных на рис.5,6. Это преобразование выглядит как $A = S^*/N^2$. Аналогично предыдущему разделу значения предельного веса *Sk*, при котором не возникает нефизических осцилляций, может определяться как

$$S^* = const / h^2 \qquad (4.1)$$

5. Заключение

Задача оптимизации и управления вычислительными свойствами гибридных конечно-разностных схем является как весьма актуальной и интересной с практической точки зрения, так и достаточно трудоемкой.

Развитие вычислительных средств и появление возможности параллельных расчетов позволяют теперь проводить анализ вычислительных свойств конечно-разностных схем с применением подобного подхода.

Применение изложенного выше вычислительного подхода может быть полезно для практических задач, используемых в индустриальных проектах. Здесь можно выделить два основных направления применения подобного подхода.

1. Контроль, оптимизация и управление вычислительными свойствами применяемых конечно-разностных схем в зависимости от выбранных групп геометрических и физических параметров задачи.

2. Построение взаимозависимостей определяющих параметров задачи и их визуальное представление.

С помощью вышеизложенного способа можно быстро и эффективно анализировать свойства гибридных разностных схем, что важно для верификации результатов математического моделирования. Концептуальный подход к анализу свойств разностной схемы заключается в сочетании решения обратной задачи для каждого набора определяющих параметров с одновременным визуальным построением предельных весовых поверхностей. Данный подход имеет важное методологическое значение, т.к. позволяет эффективно изучать и представлять свойства гибридных разностных схем в процессе их конструирования.

Литература

[1]А.Е. Бондарев Применение методов визуализации для оптимизации конечно-разностных схем// Научная визуализация в прикладных задачах: Сб. науч. тр. – М.:Изд.МГУ, 2003. – С. 34 – 39.

[2]А.Г.Куликовский, Н.В.Погорелов, А.Ю.Семенов «Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений»М,Физматлит, 2001,608 с.

[3]Е.Н.Бондарев,И.Д.Лисичко «Распространение недорасширенной турбулентной струи в спутном сверхзвуковом потоке» Изв.АН СССР, «Механика жидкости и газа», N4, 1974, сс.36-41.

[4]Н.А.Черанева «Неявная разностная схема на неравномерной сетке для решения уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа» Сб. «Численные методы в аэродинамике» Вып.4, НИВЦ МГУ, Изд.МГУ, 1980, сс. 3-19.

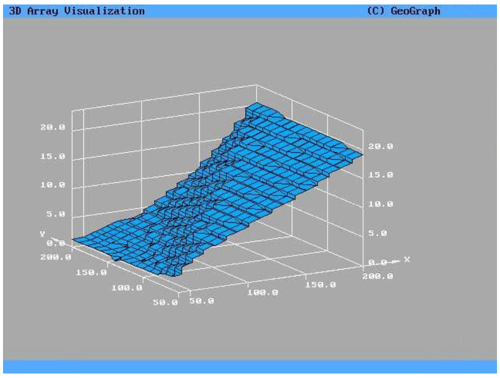

Рис.1

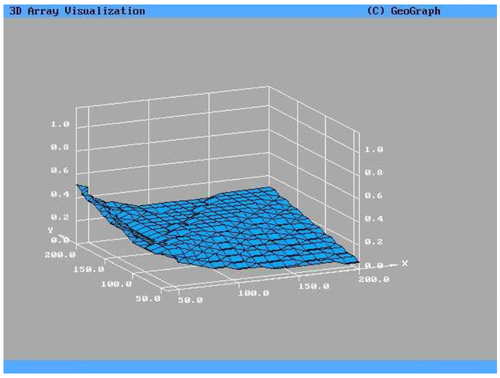

Рис.2

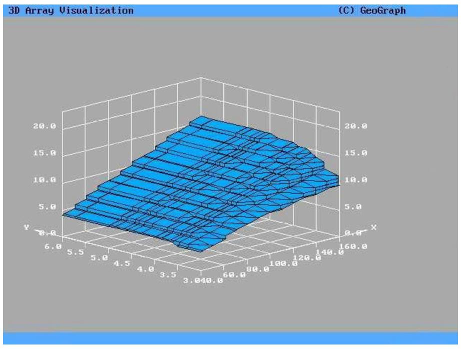

Рис.3

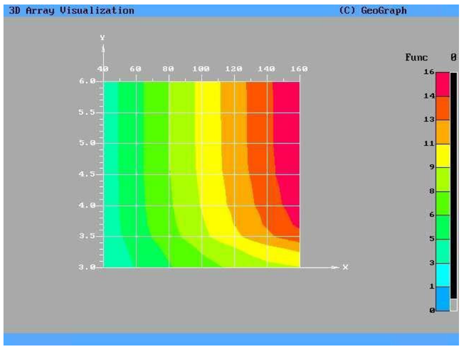

Рис.4

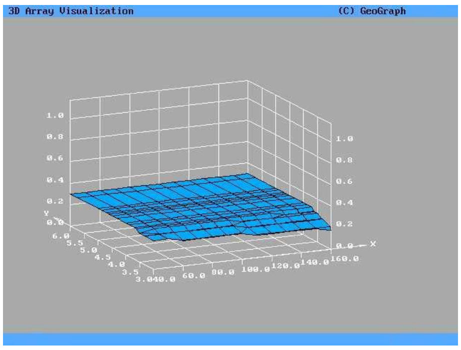

Рис.5

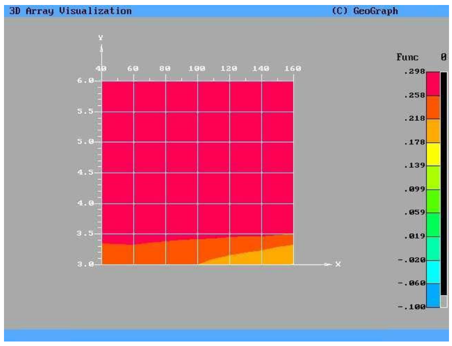

Рис.6

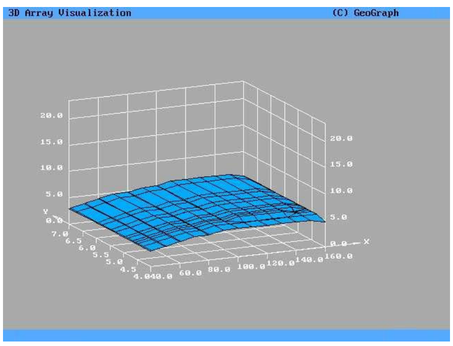

Рис.7

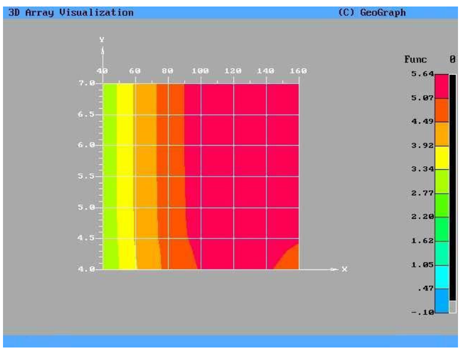

Рис.8