

6. ГЛАДКОЕ ВОСПОЛНЕНИЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Значения функции, заданной на сетке, известны лишь в узлах сетки. Для определения значений функции в точках, не являющихся узлами сетки, применяются различные методы интерполяции, которые позволяют восполнить функцию. В главе рассматриваются два способа восполнения и интерполяции функций двух переменных, основанные на методах В.С. Рябенского [13] и Х.Акима [14]. Функция, заданная на прямоугольной сетке, восполняется либо в совокупности точек, расположенных на плоскости произвольным образом, либо в узлах новой, более частой сетки, полученной из исходной делением интервалов между каждой парой соседних точек по осям X и Y на равные отрезки. Аппроксимация производится кусочно-многочленными функциями гладкости 0, 1, 2, 3 (метод В. С. Рябенского) или бикубическими многочленами (метод Х Акима).

К сожалению, не удалось провести сравнение этих двух методов, не совсем даже ясны критерии такого сравнения. По-видимому, только опыт позволит судить о том, какой из двух методов более предпочтителен в той или иной задаче.

6.1. Восполнение функций двух переменных, основанное на методе В. С. Рябенского

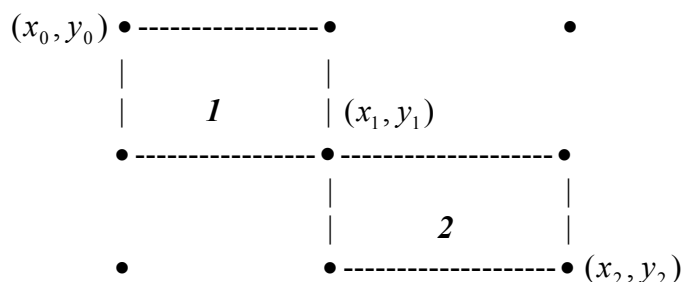
Пусть некоторая функция двух переменных определена на прямоугольной неравномерной сетке, заданной декартовым произведением двух одномерных сеток $\{x_k\}$ и $\{y_l\}$, где

$$\begin{aligned}\{x_k\} &= \{x_0, x_1, \dots, x_n \mid x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1}\}, \\ \{y_l\} &= \{y_0, y_1, \dots, y_m \mid y_{j-1} \leq y_j \leq y_{j+1}\}.\end{aligned}$$

Задача гладкого восполнения этой функции состоит в доопределении сеточной функции во всем прямоугольнике, обрамляющем сетку, до некоторой кусочно-многочленной функции заданной гладкости. В этом параграфе представлена программная реализация метода восполнения сеточной функции двух переменных для степеней гладкости p , равных 0, 1, 2, 3 (т. е. восполнение производится полиномами 1-й, 2-й, 3-й или 4-й степеней). Этот метод является частным случаем более общего метода, разработанного В. С. Рябенским [13].

Восполнение реализовано в программах SMTBVF, SMTSIM, SMTONE, которые позволяют аппроксимировать функцию с указанной степенью гладкости. Программы SMTSIM и SMTONE восполняют функцию с гладкостью единица. Они отличаются друг от друга формой задания исходных данных и получаемых результатов. В то же время их отличие от SMTBVF состоит в том, что в этих программах произведена *симметризация* области аппроксимации. Поясним, что это означает.

Для восполнения сеточной функции двух переменных на прямоугольнике $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, где $0 \leq i < n$, $0 \leq j < m$, необходимы значения функции в $(p+2)^2$ точках (см. [1, и, 13]). Пусть гладкость равна 1, тогда для восполнения будет использоваться область сетки, состоящая из 9 точек, как показано на рисунке.



Функцию по этим точкам можно вычислять в прямоугольнике **1** (параметр S , который определяет точки сетки, используемые при локальном восполнении, равен 0) и в прямоугольнике **2** ($S = 1$) [1, и]. Таким образом, видно, что для нечетной степени гладкости область аппроксимации всегда несимметрична, как бы мы ни выбирали параметр S . Следовательно, возникает зависимость *запаздывающая* или *опережающая* (см. пример 1 в 6.3). Симметризация же позволяет ликвидировать этот недостаток. Функция вычисляется два раза в каждой точке, при $S = 0$ и $S = 1$, и берется полусумма двух результатов (здесь учитываются уже не 9 точек, а 14). Потери времени при этом не слишком большие, а качество аппроксимации улучшается.

Программа SMTBVF(LP, LX, LY, X,Y, Z, N, U,V,W) восполняет с гладкостью 0, 1, 2 или 3 функцию двух переменных, заданную на прямоугольной неравномерной сетке, в точках, которые могут произвольным образом располагаться внутри прямоугольника, обрамляющего сетку. Программа имеет следующие параметры:

LP - целое число от нуля до трех, задающее гладкость восполнения;

LX, LY - число точек сетки по осям X и Y ($LX \geq LP + 2$), ($LY \geq LP + 2$);

X, Y - массивы координат точек сетки по осям X и Y , расположенных в возрастающем порядке;

Z - двумерный массив значений функции в узлах сетки (размером (LX, LY));

N - число точек, в которых восполняется функция ($N \geq 1$);

U, V - массивы X - и Y -координат точек, в которых восполняется функция;

W - массив значений функции в точках $(U(I), V(I))$, $I = 1, 2, \dots, N$ (длины N).

В программе параметр W является выходным.

Программа SMTSIM(LX, LY, X,Y, Z, N, U, V, W) восполняет со степенью гладкости единица сеточную функцию двух переменных, заданную на прямоугольной сетке. Совокупность точек, в которых определяется функция, может располагаться внутри прямоугольника, обрамляющего сетку, произвольным образом. В программе используется симметризация. Параметры программы имеют то же значение, что и одноименные параметры предыдущей программы.

Программа SMTONE(LX, LY, X,Y, Z, MX, MY, NU, NV,U, V, W) восполняет с гладкостью единица функцию двух переменных, заданную на прямоугольной неравномерной сетке. Восполнение производится в точках новой сетки, полученной делением интервалов между каждой парой соседних точек исходной сетки по осям X и Y на равные отрезки. Параметры программы следующие:

LX, LY - число точек исходной сетки по осям X и Y ($LX \geq 3$, $LY \geq 3$);

X, Y - массивы координат точек исходной сетки по осям X и Y , расположенных в возрастающем порядке;

Z - двумерный массив значений функции в узлах исходной сетки (размером (LX, LY));

MX, MY - число подынтервалов между каждой парой соседних точек исходной сетки по осям X и Y ;

NU - число точек новой сетки по оси X , равное $(LX - 1) * MX + 1$;

NV - число точек новой сетки по оси Y , равное $(LY - 1) * MY + 1$;

U, V - массивы X - и Y -координат новой сетки;

W - двумерный массив значений функции в узлах новой сетки (размером (NU, NV)).

В программе параметры U, V и W являются выходными.

В программе SMTBVF используется служебная программа OPER.

Программа OPER(LRP1, K, X, RZ) вычисляет коэффициенты (массив RZ длины LRP1) разностных отношений определенного вида [см.1, и], заданных на K -ом элементе сетки, описываемой массивом X.

6.2. Восполнение функций двух переменных по методу Х. Акима

Пусть на плоскости XY определена прямоугольная область $[a, b] \times [c, d]$, а на ней двумерная прямоугольная сетка, заданная декартовым произведением двух одномерных сеток $\{x_k\}$, $k = 0, \dots, n$ и $\{y_l\}$, $l = 0, 1, \dots, m$. Восполнение сеточной функции $Z(x_k, y_l)$

внутри прямоугольников $[x_k, x_{k+1}] \times [y_l, y_{l+1}]$, где $0 \leq k < n$, $0 \leq l < m$, производится с помощью бикубических многочленов вида

$$p_3(x, y) = \sum_{i,j=0}^3 a_{ij} x^i y^j,$$

причем результат такого восполнения будет гладким (т. е. непрерывны сама функция $p_3(x, y)$ и ее первые частные производные) не только внутри прямоугольников сетки, но и в узлах сетки, а также вдоль сторон прямоугольников сетки, т.е. во всей области аппроксимации. Более подробные сведения о методе можно найти в [14].

Этот метод восполнения реализован в программах ITPLBV и SFCFIT, которые отличаются друг от друга заданием исходных данных и видом получаемых результатов. SFCFIT вычисляет значения функции на сетке более мелкой, чем исходная, а ITPLBV находит значения функции в заданной совокупности точек, принадлежащих области.

Программа ITPLBV(LX, LY, X, Y, Z, N, U, V, W) восполняет функцию двух переменных $Z(X, Y)$, заданную на прямоугольной неравномерной сетке, в указанной совокупности точек, принадлежащих области. Программа имеет следующие параметры:

LX, LY - число точек сетки по осям X и Y ($LX \geq 2$, $LY \geq 2$);

X, Y - массивы координат точек сетки по осям X и Y , расположенных в возрастающем порядке;

Z - двумерный массив значений функции $Z(X, Y)$ в узлах сетки (размером (LX, LY));

N - число точек, в которых восполняется функция $Z(X, Y)$, ($N \geq 1$);

U, V - массивы X - и Y -координат точек, в которых восполняется функция Z ;

W - массив значений функции в точках (U(I), V(I)), $I = 1, 2, \dots, N$ (длины N).

В программе параметр W является выходным.

Программа SFCFIT(LX, LY, X, Y, Z, MX, MY, NU, NV, U, V, W) восполняет функцию двух переменных $Z(X, Y)$, заданную на прямоугольной неравномерной сетке, в узлах новой сетки, полученной из исходной делением интервалов между каждой парой соседних точек исходной сетки по осям X и Y на равные отрезки. Программа имеет следующие параметры:

LX, LY - число точек исходной сетки по осям X и Y ;

X, Y - массивы координат точек исходной сетки по осям X и Y , расположенных в возрастающем или убывающем порядке;

Z - двумерный массив значений функции $Z(X, Y)$ в узлах сетки (размером (LX, LY));

MX, MY - число подынтервалов между каждой парой точек исходной сетки по осям X и Y ($MX \geq 2$, $MY \geq 2$);

NU - число точек новой сетки по оси X , равное $(LX - 1) * MX + 1$;

NV - число точек новой сетки по оси Y , равное $(LY - 1) * MY + 1$;

U, V - массивы X - и Y -координат новой сетки;

W - двумерный массив значений функции в узлах новой сетки (размером (NU, NV)).

В программе параметры U, V, W являются выходными.

6.3. Примеры

1. На рис. 6.1 изображена поверхность, которая восполнялась программами:

а) SMTSIM (с симметризацией); б) SMTBVF (без симметризации). Заметен эффект “запаздывания”. В программе рисования восполнение производилось следующей последовательностью инструкций:

```
DIMENSION X(11),Y(9), Z(11,9), U(2091),V(2091),W(2091)
```

```
.....
```

```
CALL SMTSIM(11, 9, X, Y, Z, 2091,U,V,W)
```

```
.....
```

```
CALL SMTBVF(1, 11, 9, X, Y, Z, 2091,U,V,W)
```

2. На рис. 6.2 приведены проекции поверхности, описываемой функцией, восполнение которой производилось с разными степенями гладкости: 1 (рис. 6.2, а) и 3 (рис. 6.2, б).

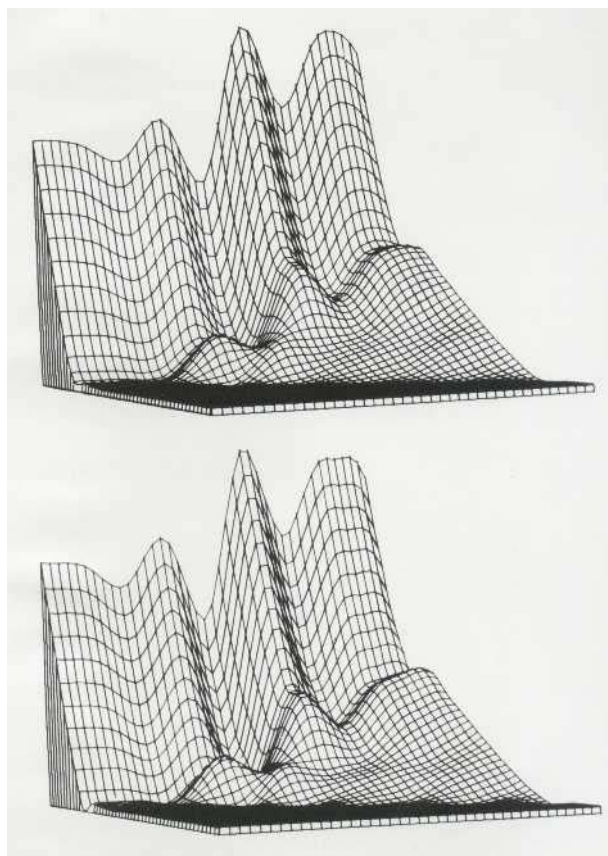


Рис. 6.1. Изображение поверхности, которая восполнялась с гладкостью 1:
а) с симметризацией области аппроксимации; б) без симметризации

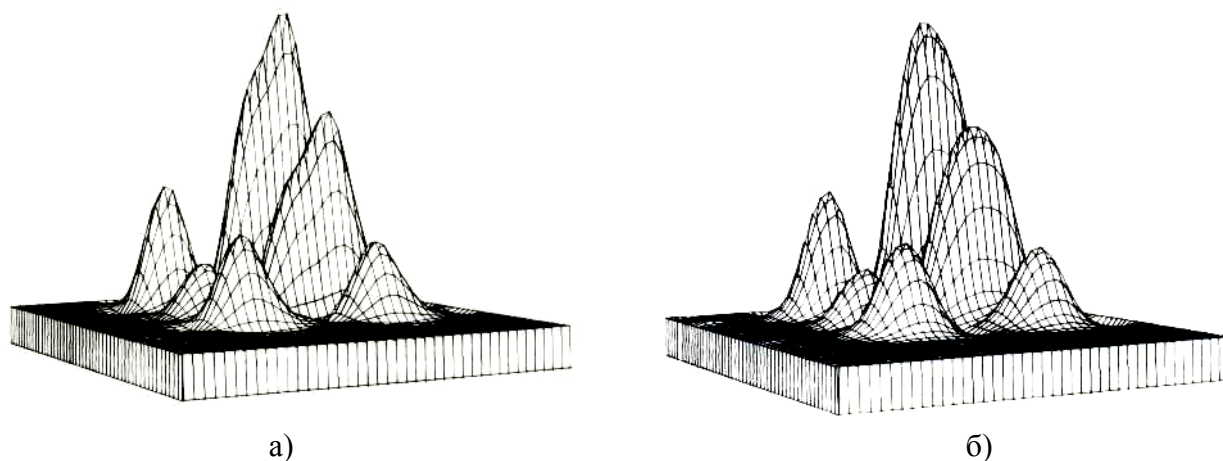


Рис. 6.2. Проекция поверхности, восполненной с разными степенями гладкости:
а) с гладкостью 1, б) с гладкостью 3

3. На рис. 6.3 изображены проекции поверхности, заданной на сетке 11×9 и восполненной на сетке 51×41 программами: ITPLBV (рис. 6.3, а) и SMTBVF с гладкостью 1 (рис. 6.3, б). На участках резких перепадов значений функции заметно отличие восполненных значений.

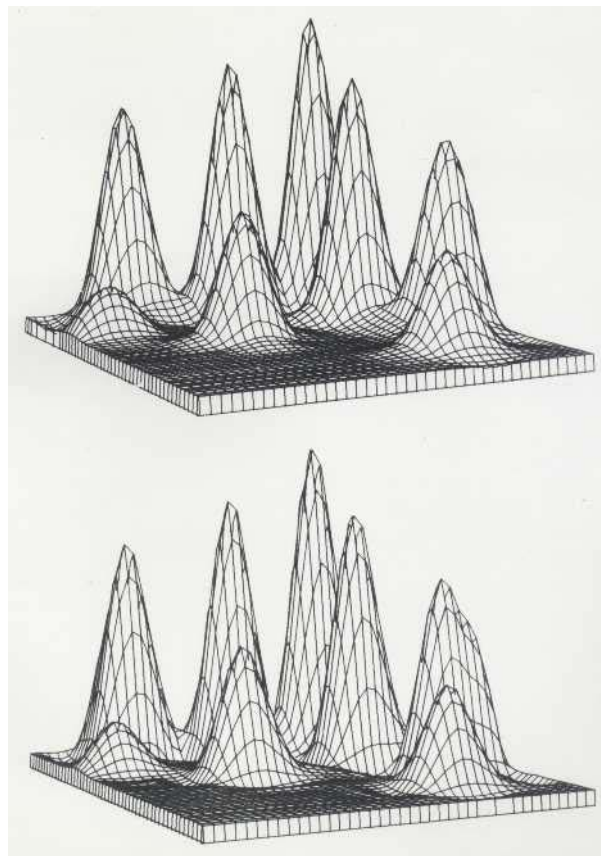


Рис. 6.3. Изображения поверхности, восполненной: а) по методу Х.Акима;
б) по методу В.С. Рябенского с гладкостью 1

4. Программы восполнения широко применяются при построении изолиний и проекций поверхностей. Примером может служить рис. 6.4, на котором изображена некоторая "искусственная" поверхность, а также соответствующие ей линии уровня. В последующих главах можно найти дополнительные примеры применения программ восполнения функций двух переменных.

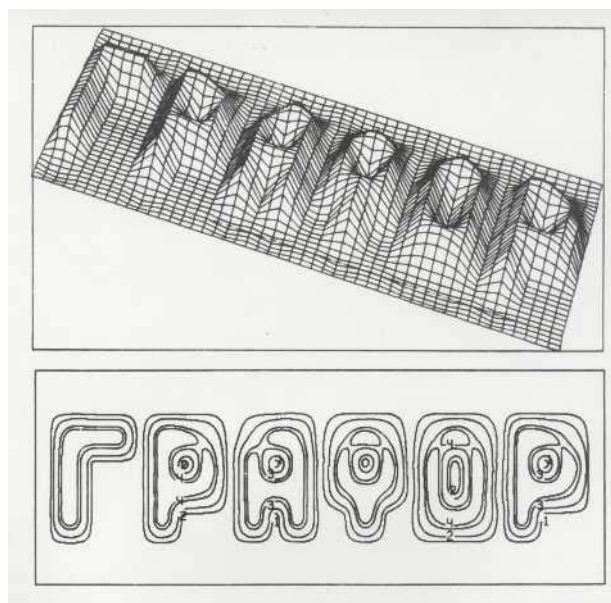


Рис. 6.4. Поверхность и соответствующая ей карта изолиний.
При их построении использовались программы восполнения