

Е.С.ГРИЧУК¹, М.Г.КУЗЬМИНА², Э.А.МАНЬКИН³

¹ Национальный ядерный университет «МИФИ»
es@t-25.ru

² Институт прикладной математики РАН, Москва
mg.kuzmina@gmail.com

³ Национальный научный центр «Курчатовский Институт»
edman17@mail.ru

ФОТОННЫЕ КВАНТОВЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Системы стохастических осцилляторов предельного цикла используются для построения кластеров перепутанных кубитов, фигурирующих в однонаправленных квантовых вычислениях. Кубит, смоделированный в виде суперпозиции двух осцилляторов, адекватно имитирует как чистые, так и перепутанные по поляризации состояния, описываемые на языке электрического поля квазимонохроматической электромагнитной волны. Кластер из N перепутанных кубитов моделируется суперпозицией $2N$ осцилляторов. Одно-кубитные шлюзы, определяющие результат одно-кубитных измерений, конструируются в виде управления динамикой осцилляторов в дискретные моменты времени. Изменение степени перепутанности кластера, вызванное последовательностью измерений, определяется в терминах изменения матрицы когерентности. Модель предназначена для последующего построения однонаправленных квантовых алгоритмов.

Ключевые слова: однонаправленные квантовые вычисления, стохастические осцилляторы

Введение

Так называемые однонаправленные, или кластерные квантовые вычисления (one-way QC, или cluster QC) были предложены в 2001 году [1-3], и с тех пор активно развиваются, в том числе, экспериментально. Их особенность состоит в том, что последовательность измерений, производимых над первоначально приготовленным кластером кубитов в максимально перепутанном, или сцепленном, состоянии (completely

entangled), явным образом включена в построение квантового вычислительного алгоритма, так что в процессе вычислений происходит необратимая эволюция кластера, сопровождающаяся постепенным уменьшением степени его перепутанности. Выбор последовательности измерений и определяет сам квантовый алгоритм. Таким образом, схемы однонаправленных квантовых вычислений отличается от схем, основанных на моделях традиционных логических квантовых сетей. Их основное достоинство состоит в том, что хотя квантово-механические принципы используются в «приготовлении» перепутанного кластера, само приготовление осуществляется заранее и независимо от последующих преобразований, связанных с вычислениями. Кроме того, при выполнении вычислительных операций могут фигурировать также неунитарные операторы преобразования квантовой системы. Таким образом, можно сказать, что обработка информации при однонаправленных вычислениях фактически осуществляется на классическом уровне. Фотонные однонаправленные вычисления обладают особой привлекательностью по нескольким естественным причинам: а) для фотонных систем характерно возникновение пренебрежимо малой декогерентности в силу практического отсутствия взаимодействия фотонов с оборудованием; б) фотоны легко перемещать на большие расстояния посредством оптических волокон; в) фотонами можно быстро и весьма точно управлять. Все это заставило обратить особое внимание на развитие чисто оптического квантового компьютеринга. В результате в последние годы во многих лабораториях мира были достигнуты большие успехи по экспериментальному созданию кластеров фотонов в перепутанном состоянии и управлению ими. Так, удалось создать четырех-фотонные кластеры и реализовать алгоритмы Дойча и Гровера на двух кубитах [4 - 9]. Для этого необходимо было реализовать шлюзы произвольных однокубитных вращений на сфере Пуанкаре, а также построить реализации шлюзов Адамара и C-NOT. На классических оптических установках были также получены четырех-фотонные перепутанные состояния Гринбергера-Хорне-Цайлингера и шести-фотонные перепутанные состояния Дике [10]. Следствием этих результатов являются весьма интересные возможности воплощения сетевых квантовых протоколов.

Следует отметить, что вычислительные принципы схем однонаправленных квантовых вычислений наиболее близки к вычислительным принципам открытых нейронных сетей (feed-forward networks).

Состояния поляризации на языке случайного электрического поля

Поток квазимонохроматического света, распространяющийся в направлении \mathbf{k} , квантово-механически описывается как статистический ансамбль фотонов с импульсом $\mathbf{p} = (ch\omega/c) \cdot \mathbf{k}$ и состоянием поляризации, определяемым двумерным вектором поляризации \mathbf{e} единичной длины, лежащим в плоскости, ортогональной \mathbf{k} . Общее (смешанное) состояние потока описывается матрицей плотности $\hat{\rho}$, удовлетворяющим условиям $\det \hat{\rho} \geq 0$, $Tr \hat{\rho} = 1$. В базисе эрмитовых матриц Паули $\{\hat{I}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$, матрица $\hat{\rho}$ представляется в виде

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{I} + p_x \hat{\sigma}_x + p_y \hat{\sigma}_y + p_z \hat{\sigma}_z), \quad (1)$$

где в качестве коэффициентов разложения фигурируют параметры Стокса p_x, p_y, p_z . Из условия $\det \hat{\rho} \geq 0$ следует неравенство для параметров Стокса $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq 1$. Чистые состояния характеризуются условием $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1$ и образуют сферу Блоха (называемую сферой Пуанкаре в оптике, рис. 1). Параметры Стокса характеризуют ансамбль с точки зрения его представления в виде суперпозиции двух под-ансамблей в чистых состояниях с поляризациями \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y . В случае когерентной суперпозиции под-ансамблей мы имеем поток полностью поляризованных фотонов, в случае некогерентной суперпозиции - поток неполяризованных фотонов и в промежуточном случае частично когерентной суперпозиции - поток частично поляризованных фотонов.

Эквивалентным описанием является описание такого ансамбля как пакета квазимонохроматических электромагнитных волн с поперечным вектором электрического поля, расположенным в плоскости, ортогональной \mathbf{k} [15, 16]. В фиксированной пространственной точке вектор электрического поля можно записать в виде

$$\mathbf{E}(t) = (E_x e^{i\alpha} \cdot \mathbf{e}_x + E_y e^{i(\alpha+\delta)} \cdot \mathbf{e}_y) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{k} = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (2)$$

Для адекватного описания состояния поляризации электромагнитной волны вектор электрического поля нужно рассматривать как двумерный стационарный случайный процесс. Пусть $\bar{\mathbf{E}}$ - среднее для случайного

процесса $\mathbf{E}(t)$, $\tilde{\mathbf{E}}(t) = \mathbf{E}(t) - \bar{\mathbf{E}}(t)$ - флуктуация электрического поля. Для стационарного случайного процесса средние совпадают с временными средними, поэтому

$$\bar{\mathbf{E}}(t) = \langle \mathbf{E}(t) \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^T \mathbf{E}(t) dt. \quad (3)$$

Пусть $\hat{D}(\tau) = [D_{mn}(\tau)]$, $D_{mn}(\tau) = \langle E_m(t+\tau) E_n^*(t) \rangle$ - корреляционная матрица процесса $\mathbf{E}(t)$. Имеется следующая связь между матрицей когерентности \hat{J} потока квазимонохроматической электромагнитной волны

$$\hat{J} = [J_{mn}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{pmatrix}, \quad (4)$$

и корреляционной матрицей \hat{D} :

$$J_{mn} = D_{mn}(0) = \langle E_m \rangle \langle E_n \rangle + \tilde{D}_{mn}(0) \quad (5)$$

Матрица когерентности связана с параметрами Стокса, которые в оптике обозначаются как I (интенсивность), Q , U , V :

$$\begin{aligned} I &= J_{11} + J_{22}, & Q &= J_{11} - J_{22}, \\ U &= J_{12} - J_{21}, & V &= -i(J_{12} - J_{21}), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} I &= \langle E_x \rangle^2 + \langle E_y \rangle^2, & Q &= \langle E_x \rangle^2 - \langle E_y \rangle^2, \\ U &= 2\langle E_x E_y \cos \delta \rangle, & V &= 2\langle E_x E_y \sin \delta \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Параметры Стокса определяют форму и ориентацию эллипса поляризации полностью поляризованной компоненты световой волны

$$\chi = \frac{1}{2} \arctg \frac{U}{Q} \quad \beta = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{V}{(Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}} \right) \quad (7)$$

На сфере Пуанкаре точка $P = (\theta, \varphi)$ со сферическим углом (широтой) $\theta = 2\beta$ и азимутальным углом (долготой) $\varphi = 2\chi$ соответствует состоянию поляризации с эллипсом (χ, β) (см. рис. 1)

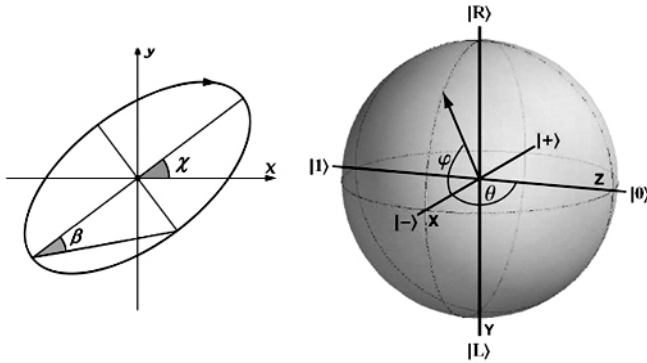


Рис. 1 Эллипс поляризации и сфера Пуанкаре

Кубит как суперпозиция двух стохастических осцилляторов

Мы строим модель кубита как суперпозицию двух идентичных осцилляторов предельного цикла с хаотически модулированным размером предельного цикла и частотой. Предельными циклами осцилляторов являются окружности радиусов ρ_1 и ρ_2 , возмущенные стационарными случайными процессами с нулевым средним. Аналогичным образом возмущены собственные частоты осцилляторов. Систему двух (несвязанных) уравнений, управляющих динамикой кубита, можно записать в виде

$$\dot{z}_{1,2} = [\tilde{\rho}_{1,2}^2 + i\tilde{\omega}_{1,2} - |z_{1,2}|^2]z_{1,2} \quad (8)$$

где $z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}$, а радиусы предельных циклов $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_2$ и собственные частоты $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ определены соотношениями

$$\tilde{\rho}_{1,2} = \rho_{1,2} + \xi_{1,2}(t), \quad \tilde{\omega}_{1,2} = \omega_{1,2} + \eta_{1,2}(t), \quad (9)$$

где $\xi_{1,2}(t)$ и $\eta_{1,2}(t)$ - стационарные случайные процессы с нулевым средним. ОДЕ для функций $u = 2^{-1/2}(z_1 + z_2)$ и $v = 2^{-1/2}(z_1 - z_2)$,

определяющие динамику суперпозиций колебаний осцилляторной пары, легко получается из уравнений для $z_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 0.5\{[\tilde{\rho}_1^2 + i\tilde{\omega}_1 - 0.5|u+v|^2](u+v) + [\tilde{\rho}_2^2 + i\tilde{\omega}_2 - 0.5|u-v|^2](u-v)\} \\ \dot{v} &= 0.5\{[\tilde{\rho}_1^2 + i\tilde{\omega}_1 - 0.5|u+v|^2](u+v) - [\tilde{\rho}_2^2 + i\tilde{\omega}_2 - 0.5|u-v|^2](u-v)\} \end{aligned} \quad (10)$$

На рис. 2 представлены типичные картины суперпозиции колебаний пары двух осцилляторов при $\rho_1 = \rho_2$, $\omega_1 = -\omega_2$, что соответствует суперпозициям пары циркулярно поляризованных фотонов в состояниях правой и левой циркулярной поляризации.

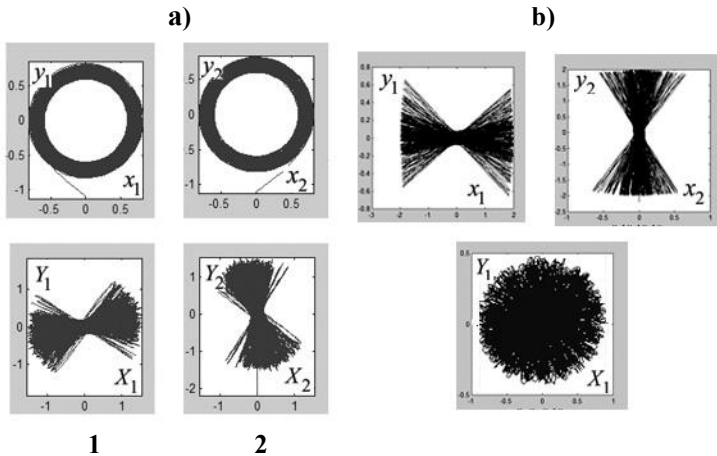


Рис. 2 Состояния поляризации кубита:

а) линейная поляризация: 1- состояние $|H\rangle$ (горизонтальная линейная поляризация); а) - состояние $|V\rangle$ (вертикальная линейная поляризация); б) неполяризованное (перепутанное по поляризации) состояние, полученное в результате некогерентной суперпозиции фотонов в двух взаимно ортогональных состояниях линейной поляризации.

На рис. 2 показаны проекции траектории четырехмерной динамической системы (10) на плоскости (X_1, Y_1) , $X_1 = \text{Re}(u)$, $Y_1 = \text{Im}(u)$ (кривые 1) и (X_2, Y_2) , $X_2 = \text{Re}(v)$, $Y_2 = \text{Im}(v)$ (кривые 2). Траектории моделируют

поведение вектора электрического поля \mathbf{E} электромагнитной волны, являющейся суперпозицией двух противоположно циркулярно поляризованных волн. Рис. 2 а) соответствует суперпозиции при условии, что случайные процессы $\xi_{1,2}(t)$ и $\eta_{1,2}(t)$ взаимно коррелированы. В этом случае в результате суперпозиции получается линейно поляризованная волна (линейно поляризованный фотон). На рис. 2 б) представлен результат некогерентной суперпозиции линейно поляризованных волн во взаимно ортогональных состояниях поляризации (процессы $\xi_{1,2}(t)$ и $\eta_{1,2}(t)$ некоррелированы). Результат суперпозиции - неполяризованная световая волна (перепутанное по поляризации состояние фотона).

Одно-кубитные шлюзы

Одно-кубитные шлюзы должны определяться линейными операторами, изменяющими поляризацию фотонных кубитов. То есть, они должны имитировать действие линейно-оптических приборов, изменяющих поляризацию квазимонохроматических световых потоков. К таким приборам относятся фазосдвигатели (фазовые пластинки), поляризаторы, разделители. Каждый из оптических приборов характеризуется $2D$ линейным оператором (называемым матрицей Джонса), вычисляемым в надлежащих базисах. Например, линейный поляризатор преобразует пучок с произвольной поляризацией в пучок с вполне определенной линейной поляризацией. Пусть $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ - действительный базис, в котором определен вектор \mathbf{E} падающего пучка и β - угол наклона плоскости поляризации поляризатора относительно направления \mathbf{e}_x . Тогда вектор электрического поля пропущенного пучка можно записать как $\mathbf{E}' = \hat{A}\mathbf{E}$, где матрица Джонса идеального линейного поляризатора имеет вид [15, 16]

$$\hat{A}_{LP} = C \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ \cos \beta \sin \beta & \cos^2 \beta \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица Джонса фазосдвигателя (компенсатора) обычно определяется в комплексном базисе $\{\mathbf{e}^+, \mathbf{e}^-\}$, $\mathbf{e}^\pm = (1/\sqrt{2})(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)$ и может быть записана в виде

$$\hat{A}_c = \begin{pmatrix} \cos(\delta/2) & \pm \sin(\delta/2) \\ \mp \sin(\delta/2) & \cos(\delta/2) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

В рамках модели действие любого оператора Джонса на осцилляторный кубит реализовано посредством включения надлежащего свободного члена \mathbf{F} в уравнения для кубита. Функция \mathbf{F} «включается» в уравнения динамики в заданный момент времени $t = t_0$. Результат «действия» идеального линейного поляризатора на динамическое поведение линейно поляризованного осцилляторного кубита показан на рис. 3.

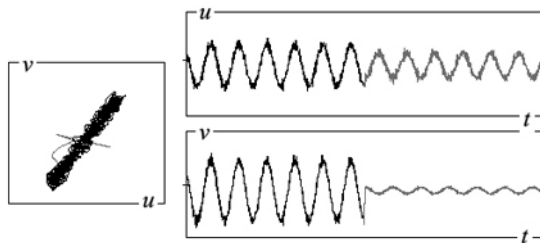


Рис. 3. Моделирование пропускания линейно поляризованного кубита через идеальный линейный поляризатор.

Для кубита, находящегося в чистом состоянии (полная поляризация) изменение состояния под действием шлюзов можно также увидеть, определяя поворот точки P , изображающей состояние поляризации на сфере Пуанкаре. Для кубита в состоянии частичной поляризации изменение состояния определяется вычислением параметров Стокса.

Таким образом, мы видим, что одно-кубитные шлюзы, соответствующие измерениям, определяющим однонаправленный квантовый алгоритм, допускают классическую формулировку.

Перепутанные состояния. Анализ степени перепутанности.

Построение алгоритмов однонаправленных вычислений требует управления кластерами кубитов, «приготовленных» в перепутанном

состоянии. В нашем случае когерентными состояниями являются состояния кубитов, для которых вектор электрического поля \mathbf{E} имеет стохастическую динамику с вполне определенным ненулевым средним. Примером является поле линейно поляризованного кубита (см. Рис. 2а) Перепутанными состояниями соответствуют векторы электрического поля неполяризованных и частично поляризованных кубитов. Как показывают результаты теоретического анализа перепутанных квантовых состояний [11 - 14], одним из наиболее важных свойств так называемого полностью перепутанного состояния (completely entangled), является его максимально возможная симметрия. Такой симметрией (по отношению к вращениям и отражениям в плоскости, ортогональной \mathbf{k}) как раз обладает электрическое поле неполяризованного кубита. Поэтому именно неполяризованная волна соответствует кубиту в полностью перепутанном состоянии. Частично поляризованную волну естественно считать соответствующей кубиту в частично перепутанном состоянии. Полная информация о произвольном состоянии поляризации (четыре действительных параметра), содержится в матрице когерентности (4). Эквивалентная информация содержится в параметрах Стокса (6), являющимися действительными линейными комбинациями матрицы когерентности. В рамках модели поляризационные характеристики вычисляются согласно (6). Адекватной характеристикой степени перепутанности состояния, отражающей корреляционные свойства случайного электрического поля $\mathbf{E}(t)$, естественно считать $e = 1 - p$, где $p = (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2} / I$ - степень поляризации.

Заключительные замечания

Построенная осцилляторная модель позволяет изучать когерентные и некогерентные суперпозиции из заданного числа осцилляторов-кубитов (включая перепутанные состояния различной степени перепутанности), моделировать измерения одиночных кубитов и вычислять корреляционную матрицу кластера кубитов, определяющую степень когерентности состояния. Модель предназначена для построения алгоритмов однонаправленных квантовых вычислений и изучения их возможностей в вычислительных экспериментах. Планируется попытка построения алгоритма Гровера в рамках модели, который считается идеально подходящим для однонаправленных схем квантовых вычислений.

Список литературы

1. R.Raussendorf and H.J.Breigel, "A one way quantum computer", *Phys. Rev. Lett.* V.86, p.5188, 2001.
2. R.Raussendorf and H.J.Breigel, "Computational model underlying the one-way quantum computer", *Quant. Inf. Comp.*, v.6, p. 443, 2002; *quant-ph/0108063* (2001).
3. R.Raussendorf and H.J.Breigel, Computational model underlying the one-way quantum computer: concepts and summary", in: Th.Beth and G. Leuch, *Quantum Information processing*, Wiley-VCH, 2003.
4. G. Vallone, E. Pomarico, F. De Martini, and P. Mataloni, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 160502, (2008).
5. R. Prevedel, C. Brukner, M. Aspelmeyer, T.D. Jennewein and A. Zeilinger, "Photonic entanglement as a resource in quantum computing and quantum communication", *J. Opt. Soc. Am. B* **24**, 241-248 (2007)
6. M.S. Tame, R. Prevedel, M. Paternostro, P. Böhni, M.S. Kim and A. Zeilinger, "Experimental Realization of Deutsch's Algorithm in a One-way Quantum Computer", *Phys. Rev. Lett.* **98**, 140501 (2007)
7. R. Prevedel, M.S Tame, A. Stefanov, M. Paternostro, M.S. Kim and A. Zeilinger, "Experimental demonstration of decoherence-free one-way information transfer", *Phys. Rev. Lett.* **99**, 250503 (2007)
8. G. Vallone, E. Pomarico, F. De Martini, P. Mataloni, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 160502, (2008).
9. G.Vallone, E.Pomarico, F. De Martini, P.Mataloni, "One-way computation with two-photon multicubic cluster states", *Phys. Rev. A*, v. 78, 04235 (2008)
10. R. Prevedel, G. Cronenberg, M.S Tame, M. Paternostro, P. Walther, M.S. Kim, A.Zeilinger, "Experimental realization of Dicke states of up to six qubits for multiparty quantum networking", [arXiv:0903.2212](https://arxiv.org/abs/0903.2212), *Phys. Rev. Lett.*, in press (2009)
11. A.A. Klyachko, Coherent states, entanglement and geometric invariant theory, [arXiv:quant-ph/020601v1](https://arxiv.org/abs/quant-ph/020601v1), 3June 2002
12. A.A. Klyachko and A.S. Shumovsky, *J. Phys: Conf. Series*, (2006)
13. A.A. Klyachko, B. Oztop, and A.S. Shumovsky, *Appl.Phys. Lett.* **88**, 124102 (2006).
14. R. Horodecki, et al., *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
15. R.M.A.Azzam, N.M.Bashara, "Ellipsometry and polarized light", North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New-York, Oxford, 1977.
16. L.Mandel, E.Wolf, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, 1995.