

Поддержание замкнутых
относительных траекторий
группы спутников
с помощью переброса массы

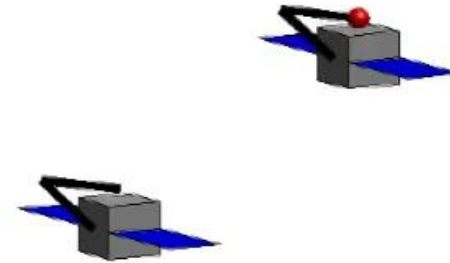
Магистерская диссертация студента МФТИ(ГУ) Шестакова С. А.

Научный руководитель:
Овчинников М. Ю.,
д. ф.-м. н., проф.

Научный консультант:
Иванов Д. С., к. ф.-м. н.

Принцип управления с помощью переброса массы

- Рассматриваются два спутника на близких орбитах – ловящий и бросающий
- В некоторый момент времени бросающий спутник выбрасывает дополнительную массу так, чтобы она попала в ловящий спутник
- Требуется, совершив переброс, достичь желаемой относительной траектории спутников после совершения броска



Постановка задачи

Имеется некоторая конфигурация спутников, не образующая замкнутую группу (расстояние между спутниками растёт неограниченно с течением времени).

Требуется, совершая перебросы, ограничить максимальное расстояние между спутниками, возможно, с осуществлением некоторых дополнительных условий:

- Минимизировать время переброса или энергетические затраты
- Достичь конкретной желаемой относительной орбиты
- Задать движение спутников относительно некоторой опорной системы отсчёта
- Предотвратить столкновение спутников

Уравнения относительного движения, линейная модель

Применяются уравнения Клохесси-Уилтшира:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega\dot{z} = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = 0 \end{cases}$$

Решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x = -3C_1\omega t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_3 \sin \omega t + C_4 \\ y = C_5 \sin \omega t + C_6 \cos \omega t \\ z = 2C_1 + C_2 \sin \omega t + C_3 \cos \omega t \end{cases}$$

$-3C_1\omega t$ - дрейф спутника

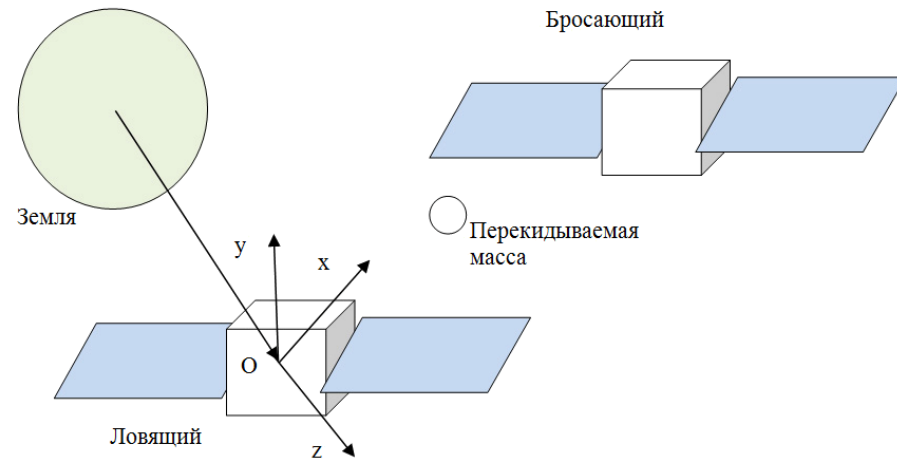


Схема относительного движения
спутников

Осуществление переброса

- Пусть заданы t_e – начало броска и t_m – конец броска
- В момент времени t_e тело отделяется от бросающего спутника, траектория бросающего меняется
- В момент времени t_m тело должно столкнуться с ловящим спутником – решается краевая задача, находится скорость выброса тела из ловящего спутника
- В момент времени t_m тело сталкивается с ловящим спутником, траектория ловящего меняется
- Относительная траектория двух спутников меняется дважды

Два спутника

- Изначально относительная траектория не замкнута – есть относительный дрейф
- После переброса оба спутника получают некоторый одинаковый дрейф относительно ОСК, при этом траектория одного спутника относительно другого замкнута
- Можно совершить переброс, приравнивающий дрейф произвольной величине из диапазона

$$A - B \leq C \leq A + B$$

$$A = \frac{C_c(K_c - 3) + C_t(K_t + 1)}{1 + K_c + K_t} \quad B = \frac{2}{1 + K_c + K_t} \sqrt{(2C_c - z_{c,0})^2 + \frac{\dot{z}_{c,0}^2}{\omega^2}}$$

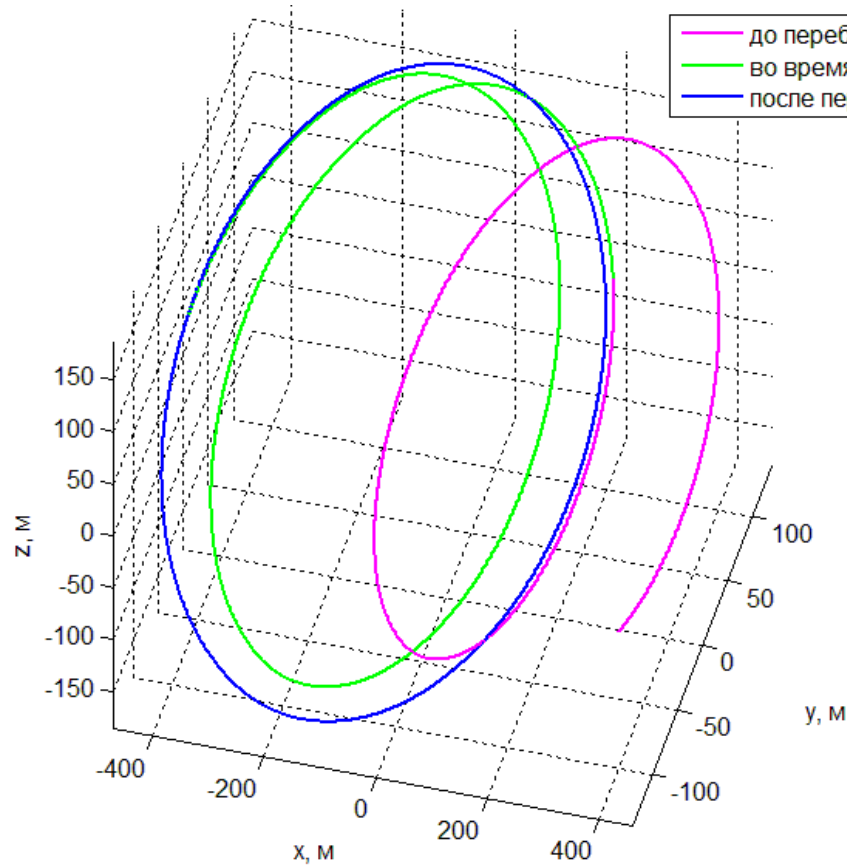
- В случае, если время начала переброса фиксировано, время окончания переброса находится из уравнения

$$\left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) + \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \cdot \frac{x_0 \cos s - 2z_0 \sin s}{8 \sin s - 6s \cos s} = 0$$

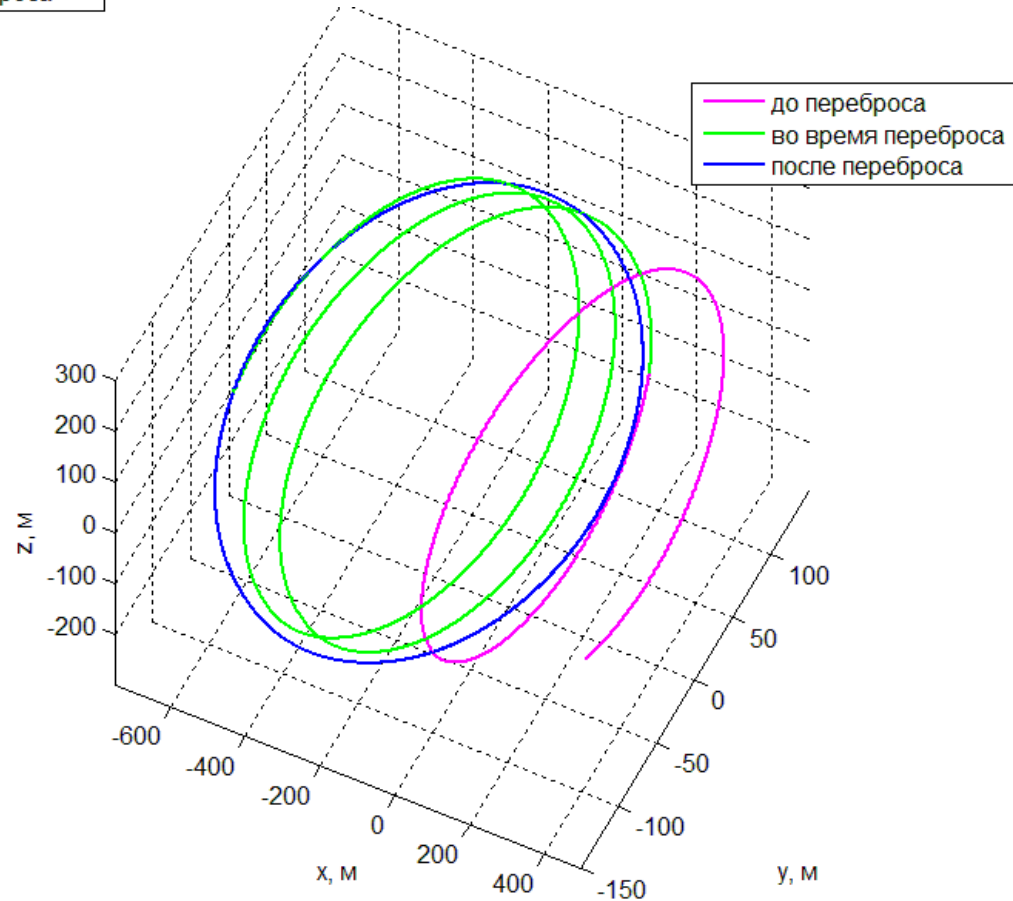
- Если ни начало, ни конец переброса не фиксированы, возможна оптимизационная постановка задачи

Пример переброса между двумя спутниками

Траектории спутников во время переброса



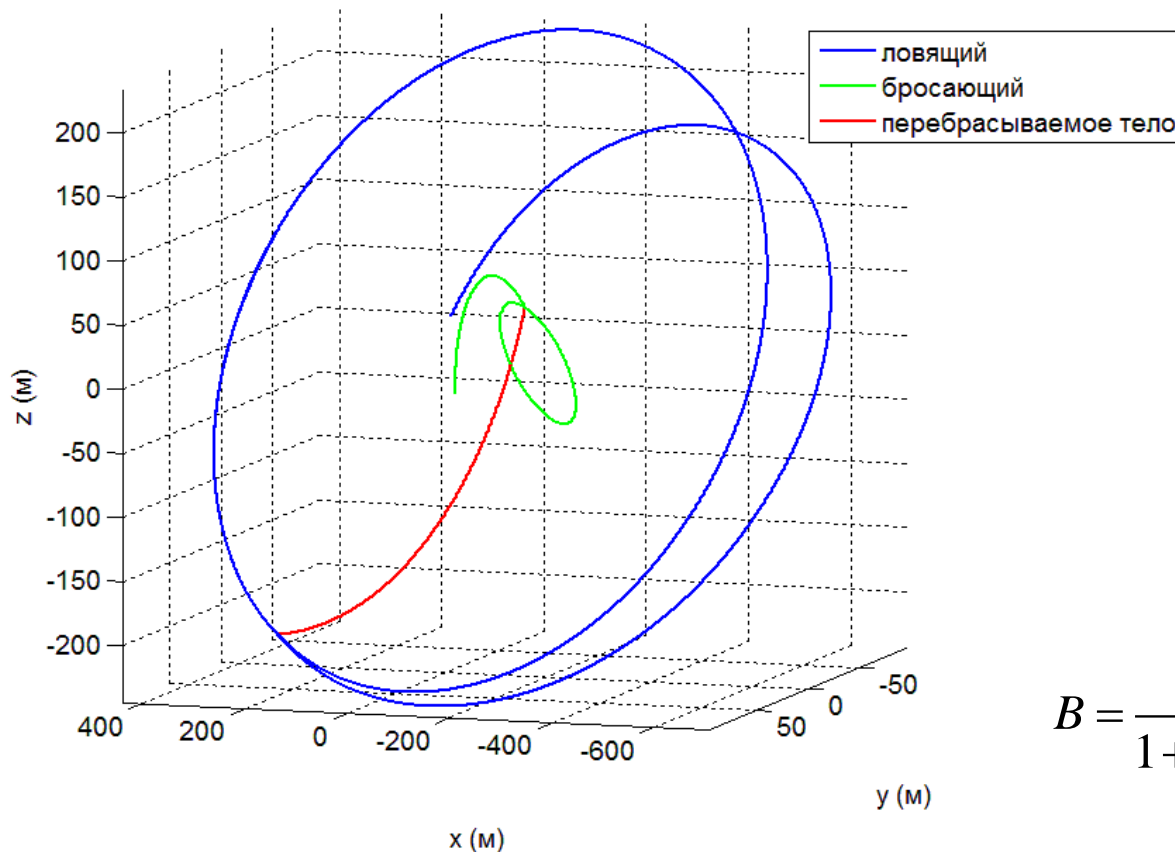
Переброс за один виток



Переброс за два витка

Три спутника, выравнивание дрейфов

Если дрейфы трёх спутников удовлетворяют неравенству, можно совершить переброс, приравнивающий три дрейфа.



Выравнивание дрейфов

$$A - B \leq C_r \leq A + B$$

$$A = \frac{C_c(K_c - 3) + C_t(K_t + 1)}{1 + K_c + K_t}$$

$$B = \frac{2}{1 + K_c + K_t} \sqrt{(2C_c - z_{c,0})^2 + \frac{\dot{z}_{c,0}^2}{\omega^2}}$$

Оптимальные перебросы

Параметры траектории после переброса – суть функции t_e , t_m

Рассмотрим оптимизационные задачи

Форма траектории наиболее близка к изначальной

$$\Phi_1(t_e, t_m) = (\bar{A} - A)^2 + (\bar{B} - B)^2$$

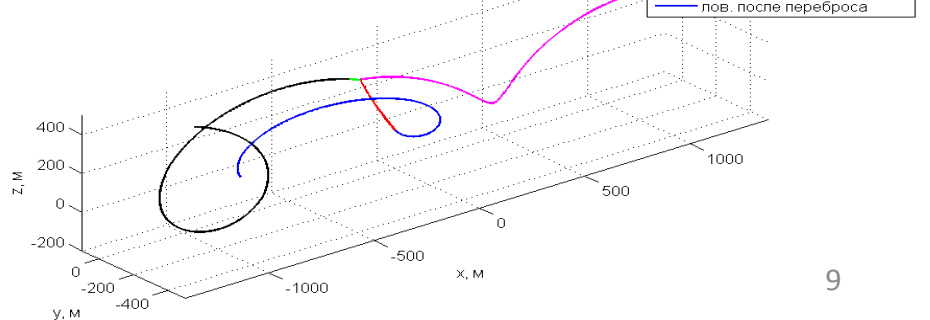
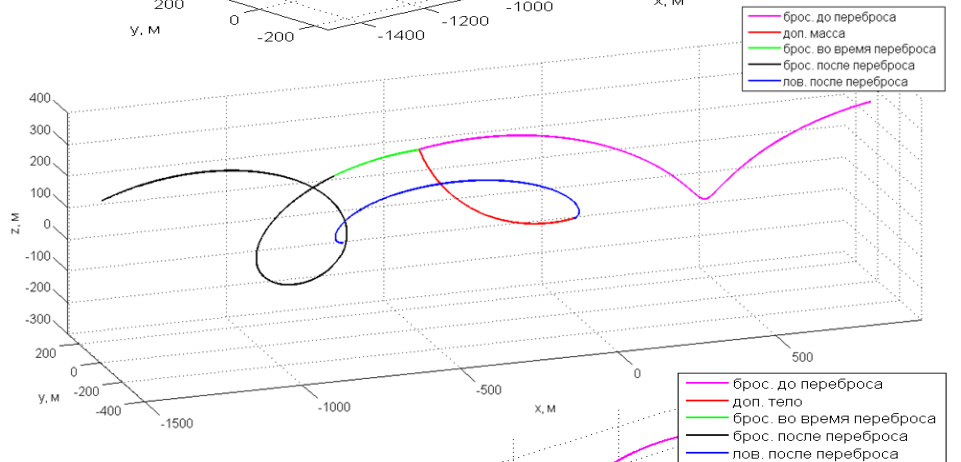
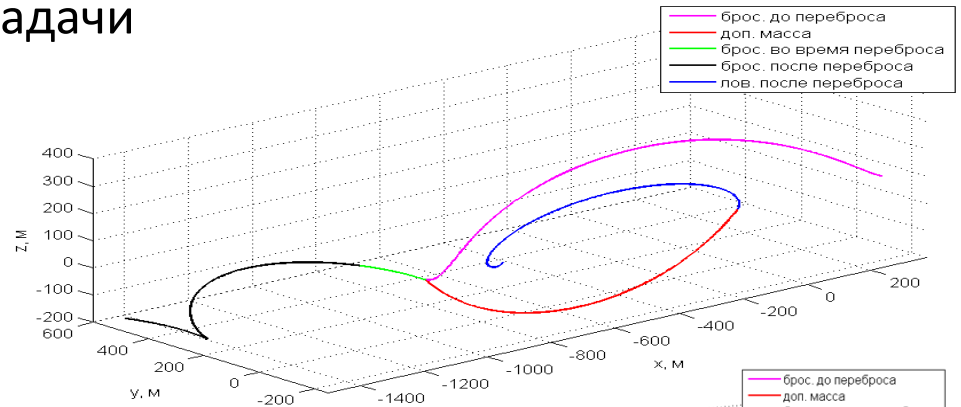
$$A = \sqrt{C_2^2 + C_3^2}, \quad B = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$$

Минимизация скорости броска

$$\Phi_2(t_e, t_m) = \|\delta v\|^2 = \delta \dot{x}^2 + \delta \dot{y}^2 + \delta \dot{z}^2$$

Минимизация времени переброса

$$\Phi_3(t_e, t_m) = t_m - t_e$$



Оптимальные перебросы

Пример: $x_0 = 242 \text{ м}, y_0 = 67 \text{ м}, z_0 = 140 \text{ м},$

$\dot{x}_0 = -0.2244 \text{ м/с}, \dot{y}_0 = 0.11 \text{ м/с}, \dot{z}_0 = 0.11 \text{ м/с},$

$\omega = 0.0011 \text{ с}^{-1}, k = 1/20$

$A = 100.7 \text{ м}, B = 120.4 \text{ м}, C_1 = 76 \text{ м}, |\mathbf{v}| = 1.30 \text{ м/с}$

Форма траектории наиболее близка к изначальной

$t_e = 4380 \text{ с}, t_m = 5286 \text{ с}, \Delta t = 906 \text{ с}$

$|\mathbf{v}| = 1.3 \text{ м/с}, \Delta A = 0.5 \text{ м}, \Delta B = 4.6 \text{ м}$

Минимизация скорости броска

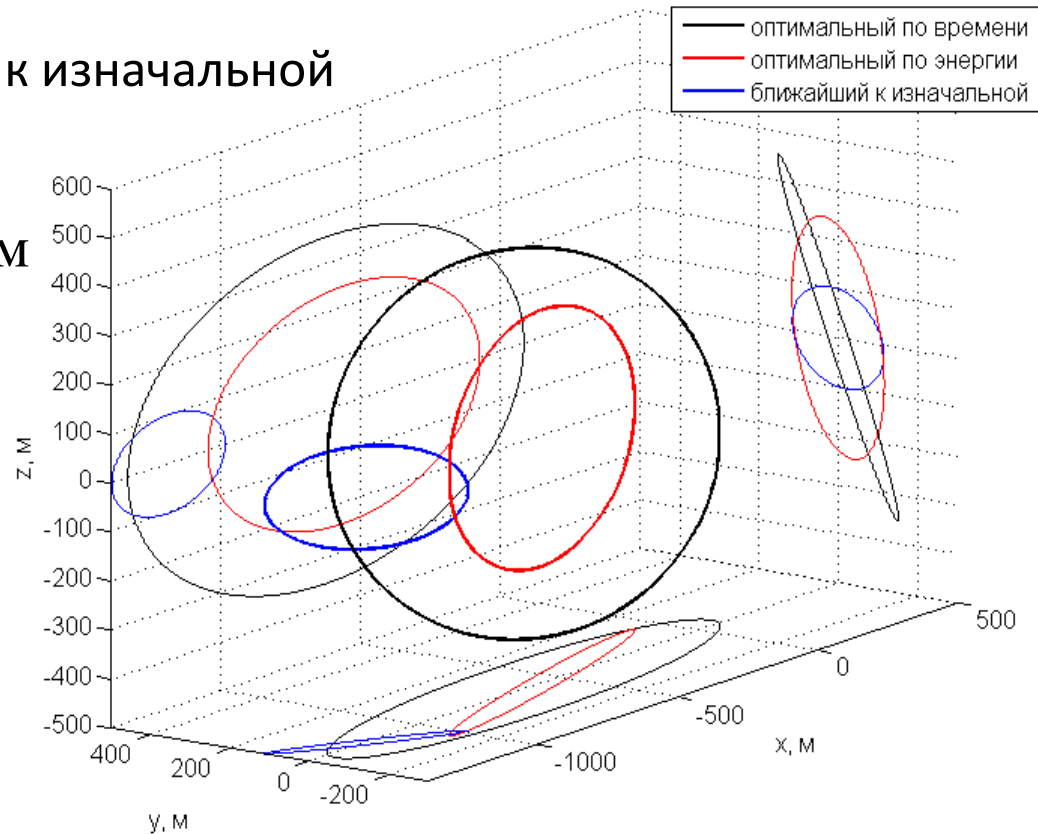
$t_e = 1806 \text{ с}, t_m = 2424 \text{ с}, \Delta t = 618 \text{ с}$

$|\mathbf{v}| = 1.25 \text{ м/с}$

Минимизация времени переброса

$t_e = 925 \text{ с}, t_m = 1025 \text{ с}, \Delta t = 100 \text{ с}$

$|\mathbf{v}| = 2.86 \text{ м/с}$



Влияние ошибок осуществления переброса

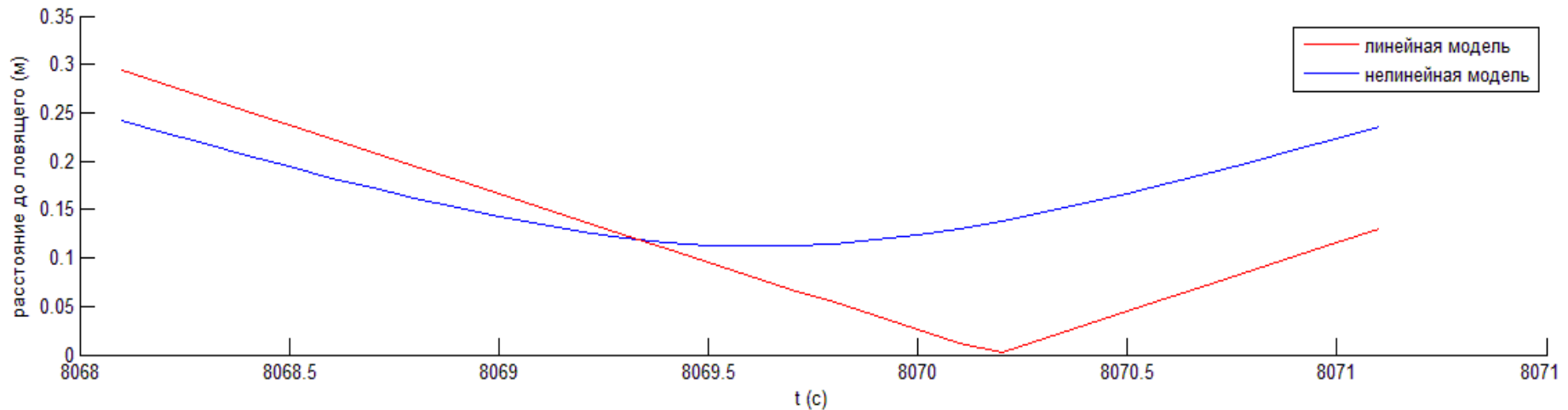
- Относительная скорость выброса отличается от предполагаемой: $\delta \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}_v$
- Отделение дополнительного тела произошло в момент времени $t_e + \boldsymbol{\varepsilon}_t$

Предположим, что манипулятор способен поймать массу в пределах шара радиуса $R=1\text{м}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v \leq 0.59 \text{ см/с}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \leq 1.13 \text{ с}$$

- Ошибка модели: нелинейные члены центрального потенциала



Учёт второй гармоника

Основной недостаток уравнений Клохесси-Уилтшира — низкая точность на больших промежутках времени, вызванная влиянием членов второго порядка, гармоника J2 и эллиптичности опорной орбиты.

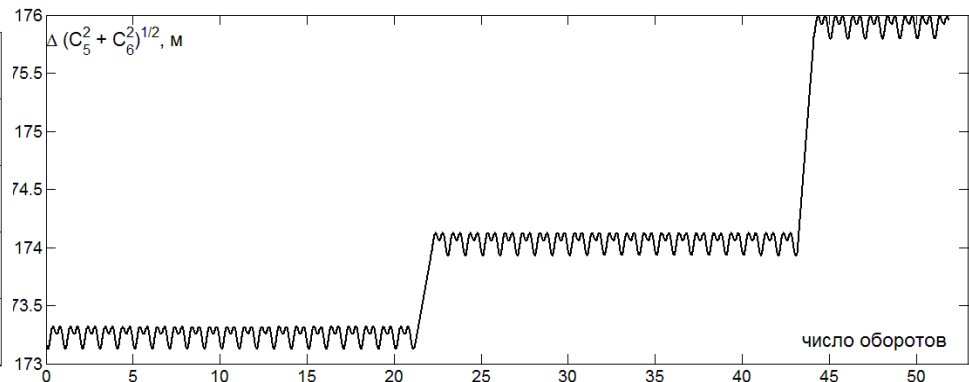
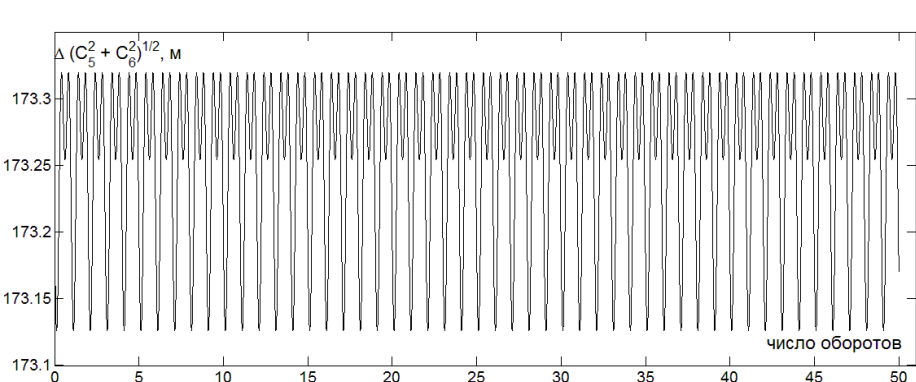
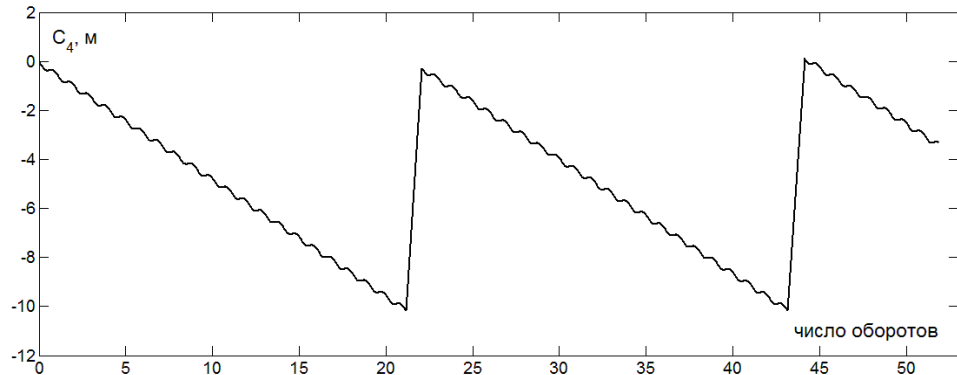
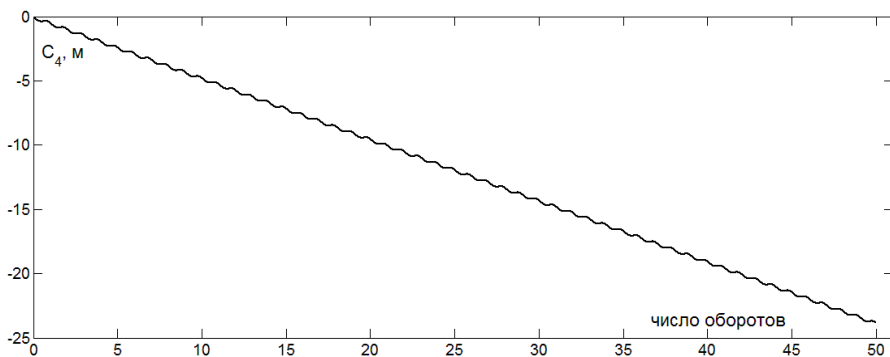
$$\text{Уравнения Швайгарда-Седвика} \quad \begin{cases} \ddot{x} + A\dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + q^2 y = 2lq \cos(qt + \phi), \\ \ddot{z} - A\dot{x} - Bz = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{A}{a^3} (A\dot{x}_0 + Bz_0) \sin at + \frac{A\dot{z}_0}{a^2} (\cos at - 1) - \frac{B}{a^2} (\dot{x}_0 + Az_0)t, \\ y = \left(lt + \frac{y_0}{\sin \phi} \right) \sin(qt + \phi), \\ z = \frac{A}{a^2} (\dot{x}_0 + Az_0) + \frac{\dot{z}_0}{a} \sin at - \frac{1}{a^2} (A\dot{x}_0 + Bz_0) \cos at, \end{cases}$$

Учёт второй гармоник

Даже при обеспечении дрейфа равным, спутники расходятся из-за различных наклонений орбиты

Если спутники разлетелись дальше критического значения, проводим переброс, рассчитанный по невозмущённой модели



Результаты

- С помощью переброса массы можно решать задачи достижения желаемой траектории
- Получен алгоритм поддержания заданной относительной орбиты
- Рассмотрены и решены оптимизационные задачи минимизации заданных функционалов
- Исследована точность алгоритма и влияние ошибок исполнения маневра
- Рассмотрена и решена задача поддержание ограниченной траектории с учётом влияния второй гармоники гравитационного поля Земли

- Публикации:

- D. Ivanov, S. Shestakov, M. Ovchinnikov. Satellite Formation Flying Control by Mass Exchange // Acta Astronautica. 2013. –V. 102 – 2014. – P.392-401
- S. Shestakov, D. Ivanov, M. Ovchinnikov. Formation Flying Momentum Exchange Control by Separate Mass // Journal of Guidance, Control, and Dynamics, doi:10.2514/1.G001137
- Опубликовано 2 препринта в ИПМ им. М. В. Келдыша РАН
- Результаты работы доложены на 6 конференциях, в том числе
 - Диплом за лучший молодежный доклад на 7th International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying, 13-15 March, 2013, Lisbon, Portugal
 - Доклад Orbital Dynamics of Formation Flying Under Mass-Exchange Novel Control на 65th IAC, Toronto, Canada, 29 sep - 3 oct 2014
 - Доклад на 8th International Workshop on Satellite Constellations and Formation Flying, 8-10 June 2015, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands

- Гранты:

- (2014-2016) Грант РФ N 14-11-00621 "Разработка новых динамических моделей и алгоритмов управления орбитальным и вращательным движением малых космических аппаратов для перспективных миссий к Луне, планетам и малым телам Солнечной системы", исполнитель;
- (2014-2015) Грант РФФИ N 14-01-31313_мол_а "Исследование относительного движения малых спутников в групповом полете и разработка алгоритмов для перспективных системы управления с минимальным расходом рабочего тела", исполнитель;
- (2013-2014) Грант РФФИ N 12-01-33045_мол_а_вед "Перспективные алгоритмы и методы их реализации для управления угловым и орбитальным движением малых космических аппаратов в одиночном и групповом полетах", исполнитель;

- Контракты:

- (2014) "Разработка и оценка методов решения задачи расчета точки падения по данным РЛС "Резонанс-НЭ", контракт с НПО Резонанс, исполнитель
- (2014-2015) "Разработка алгоритмов управления систем ориентации и стабилизации космических аппаратов с нежесткими крупногабаритными элементами конструкции", контракт с ОАО ИСС им. М.Ф. Решетнёва, исполнитель.

Краевая задача

Для осуществления переброса необходимо чтобы перебрасываемая масса столкнулась с ловящим спутником:

t_e – начало броска, t_m – конец броска

$$\mathbf{r}_s(\mathbf{r}_{0,s}, \mathbf{v}_{0,s}, t_e, t_m) = \mathbf{r}_c(\mathbf{r}_{0,c}, \mathbf{v}_{0,c}, t_0, t_m)$$

Индекс «s» обозначает перебрасываемую массу, индекс «с» – ловящий спутник

Указание моментов времени t_e, t_m полностью определяет переброс, скорость выброса массы ($u = \omega(t_m - t_e)$, $\Delta = 3u \sin u - 8(1 - \cos u)$):

$$\delta \dot{x} = -\dot{x}_0 - 2z_0\omega + \frac{1}{\Delta}[x_0\omega \sin u + 2z_0\omega(\cos u - 1)],$$

$$\delta \dot{y} = -\dot{y}_0 - y_0\omega \operatorname{ctg} u,$$

$$\delta \dot{z} = -\dot{z}_0 - \frac{1}{\Delta}[2x_0\omega(1 - \cos u) + z_0\omega(3u \cos u - 4 \sin u)].$$

Уравнения для констант траектории после переброса для бросающего спутника

$$C_{1,t} = (k+1) \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega} + 2z_0 \right) + \frac{k}{\Delta} [2z_0(1 - \cos u) - x_0 \sin u]$$

$$C_{2,t} = \frac{\sin \omega t_e}{\Delta} [4kz_0(1 - \cos u) - 3kz_0 u \sin u + 2kx_0 \sin u] + \frac{\cos \omega t_e}{\Delta} [2kx_0(1 - \cos u) + 3kz_0 u \cos u - 4kz_0 \sin u] +$$

$$+(k+1) \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos \omega t_e - \left(2 \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \sin \omega t_e \right)$$

$$C_{3,t} = \frac{\sin \omega t_e}{\Delta} [2kx_0(1 - \cos u) + 3kz_0 u \cos u - 4kz_0 \sin u] - \frac{\cos \omega t_e}{\Delta} [4kz_0(1 - \cos u) - 3kz_0 u \sin u + 2kx_0 \sin u] +$$

$$+(k+1) \left(\frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t_e + \left(2 \frac{\dot{x}_0}{\omega} + 3z_0 \right) \cos \omega t_e \right)$$

$$C_{4,t} = x_0 - 2(k+1) \frac{\dot{z}_0}{\omega} + 3(k+1) \left(2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \omega t_e -$$

$$-\frac{1}{\Delta} [4kx_0(1 - \cos u) + 3k\omega t_e x_0 \sin u - 8kz_0 \sin u + 6k\omega t_m z_0 \cos u - 6k\omega t_e z_0]$$

$$C_{5,t} = y_0 \sin \omega t_e + (k+1) \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t_e + ky_0 \cos \omega t_e \operatorname{ctg} u$$

$$C_{6,t} = y_0 \cos \omega t_e - (k+1) \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t_e - ky_0 \sin \omega t_e \operatorname{ctg} u$$

Влияние ошибок осуществления переброса

Относительная скорость выброса отличается от предполагаемой: $\delta \mathbf{v} + \boldsymbol{\varepsilon}_v$

Эллипсоид ошибок при этом:

$$R^2 \omega^2 = A \varepsilon_x^2 + B \varepsilon_y^2 + C \varepsilon_z^2 + 2D \varepsilon_x \varepsilon_z$$

$$A = 8(1 - \cos u) + 12 \sin u (\sin u - 2u) + 9u^2$$

$$B = \sin^2 u$$

$$C = 5 + 3 \cos^2 u - 8 \cos u$$

$$D = 6(\sin u - u)(\cos u - 1)$$

Предположим, что манипулятор способен поймать массу в пределах шара радиуса $R=1\text{м}$

Для оптимизационной задачи $\varepsilon_v \leq 0.59 \text{ см/с}$

Влияние ошибок осуществления переброса

Отделение дополнительного тела произошло в момент времени $t_e + \varepsilon_t$

В расчётный момент столкновения разница между требуемым положением отделяемой массы и истинным положением $\Delta R_t = (\Delta X_t, \Delta Y_t, \Delta Z_t)$

В линейном приближении

$$\Delta X_t = \omega \varepsilon_t \left(6z_0(\cos u - 1) - \frac{\dot{x}_0}{\omega}(3 - 4\cos u) - 2\frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin u + \frac{2z_0(1 - \cos u) - x_0 \sin u}{\Delta} \right)$$

$$\Delta Y_t = \omega \varepsilon_t \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos u + y_0 \frac{\cos^2 u}{\sin u} \right)$$

$$\Delta Z_t = \omega \varepsilon_t \left(3z_0 \sin u + 2\frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin u + \frac{\dot{z}_0}{\omega} \cos u + \frac{z_0(3u - 4\sin u) - 2x_0(1 - \cos u)}{\Delta} \right)$$