XLII Академические чтения по космонавтике
памяти академика С.П. Королёва
Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана

24 января 2018 г.

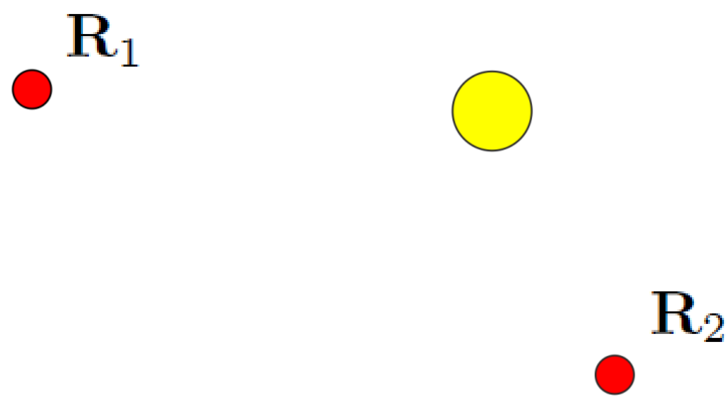
Метод параллельной пристрелки в задачах механики космического полета

Широбоков М.Г.
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Содержание

- Модельная задача
- Модификации метода
- Приложения в механике полета:
  - Построение квазипериодических орбит
  - Адаптация траекторий к эфемеридной модели
  - Решение краевых задач принципа максимума
- Заключение

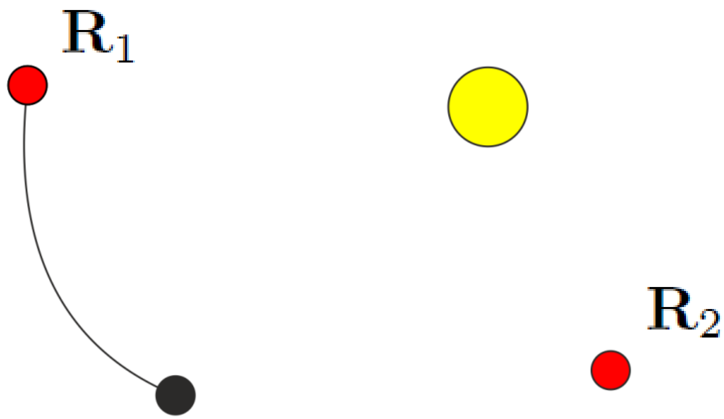
Метод пристрелки



Двухточечная краевая задача

- Методы общего назначения
  - Методы пристрелки (стрельбы)
  - Конечно-разностные методы
- Специальные методы (задача Ламберта в модели 2х тел)

Метод пристрелки



Двухточечная краевая задача

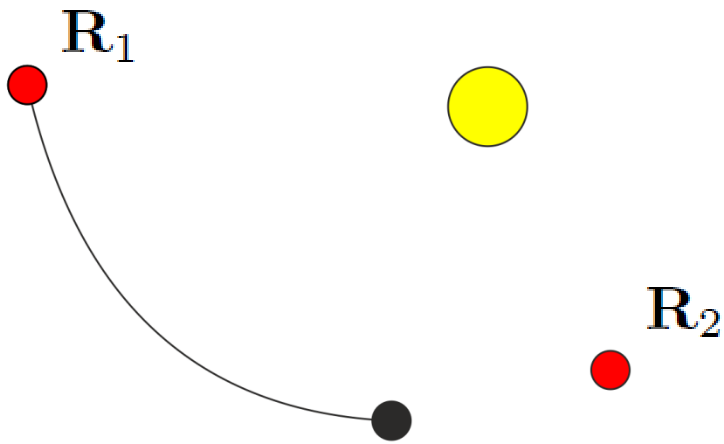
Методы общего назначения

Специальные методы (задача Ламберта в модели 2х тел)

Методы пристрелки (стрельбы)

Конечно-разностные методы

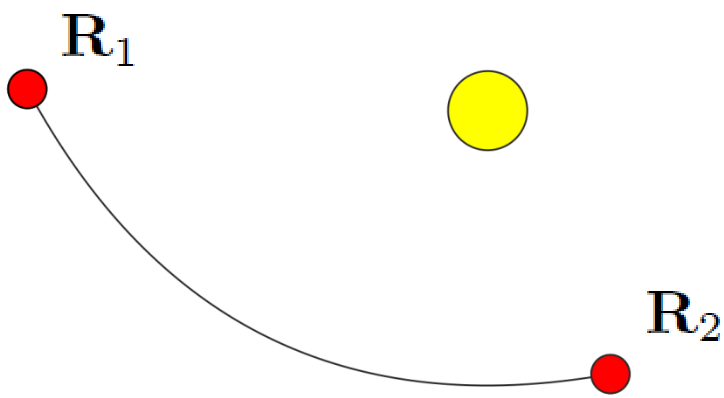
Метод пристрелки



Двухточечная краевая задача

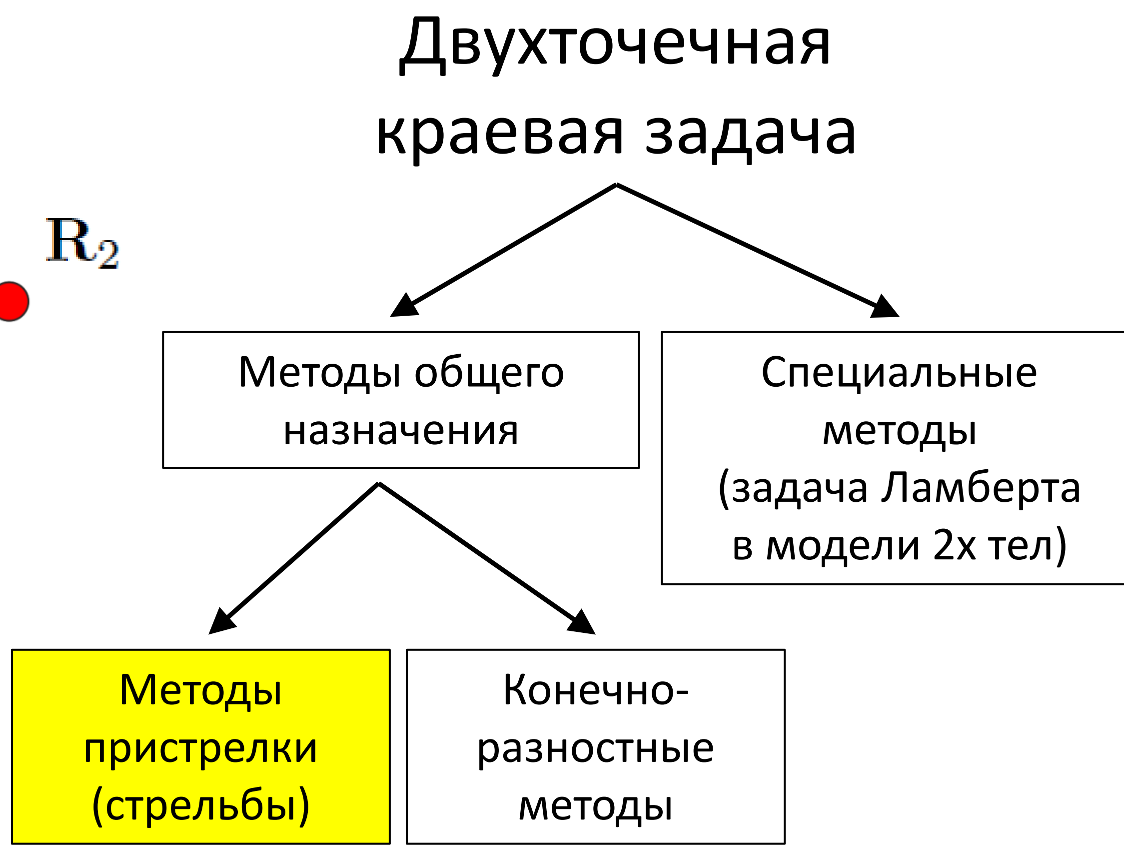
- Методы общего назначения
  - Методы пристрелки (стрельбы)
  - Конечно-разностные методы
- Специальные методы (задача Ламберта в модели 2х тел)

Метод пристрелки

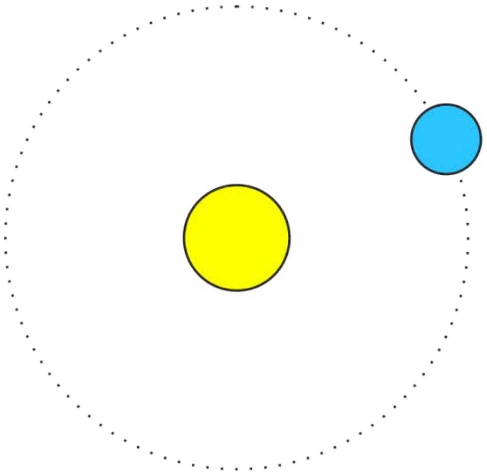


$$\mathbf{r}(t_2; \mathbf{v}_1) = \mathbf{R}_2$$

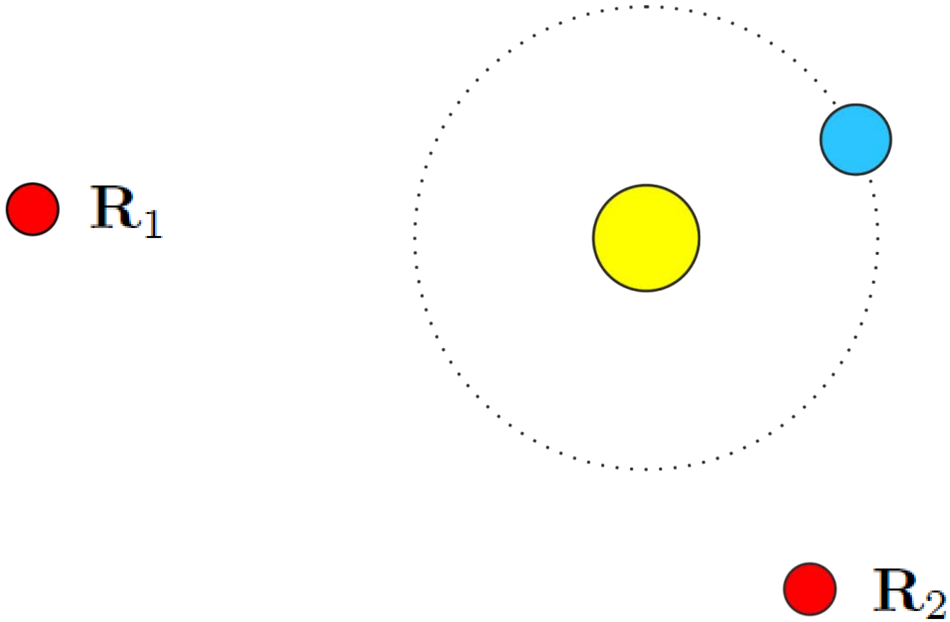
3 переменные
3 уравнения



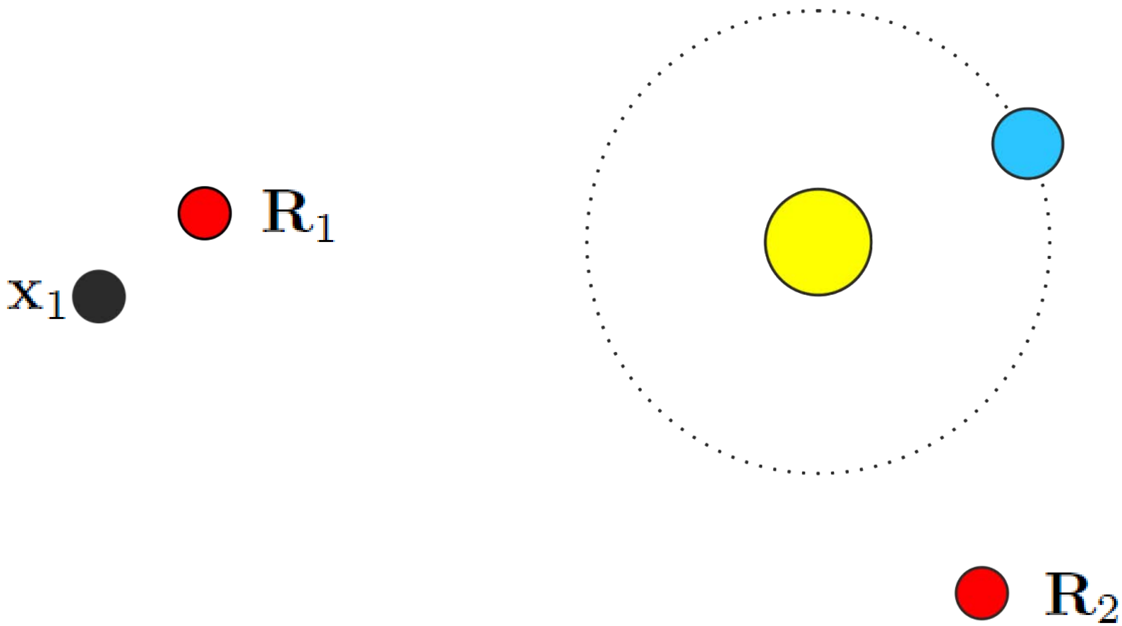
Метод параллельной пристрелки



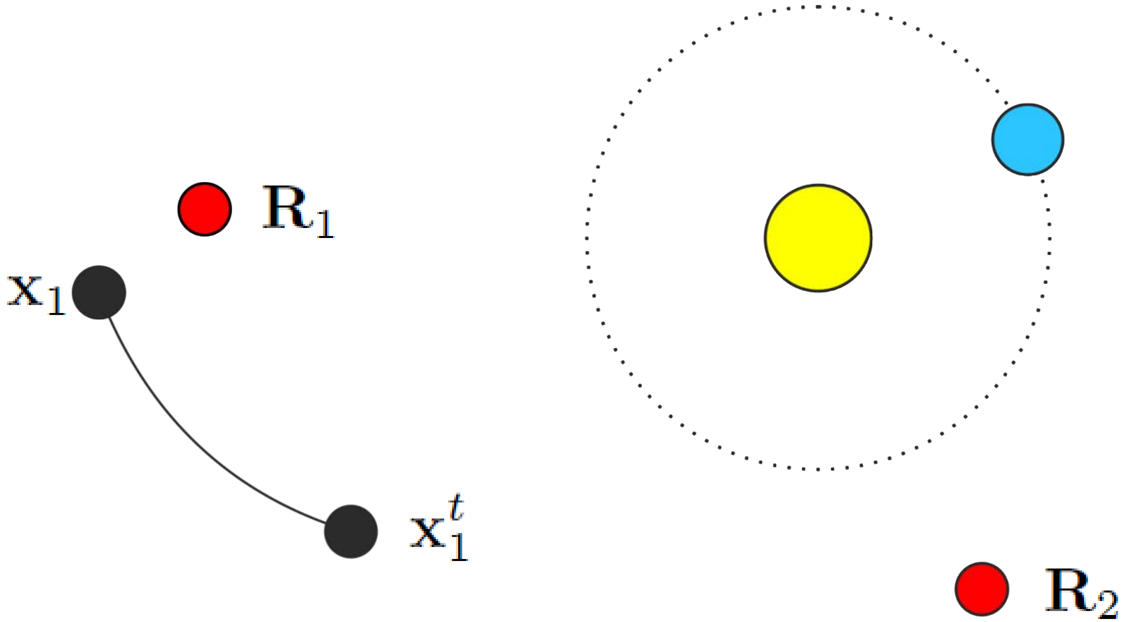
Метод параллельной пристрелки



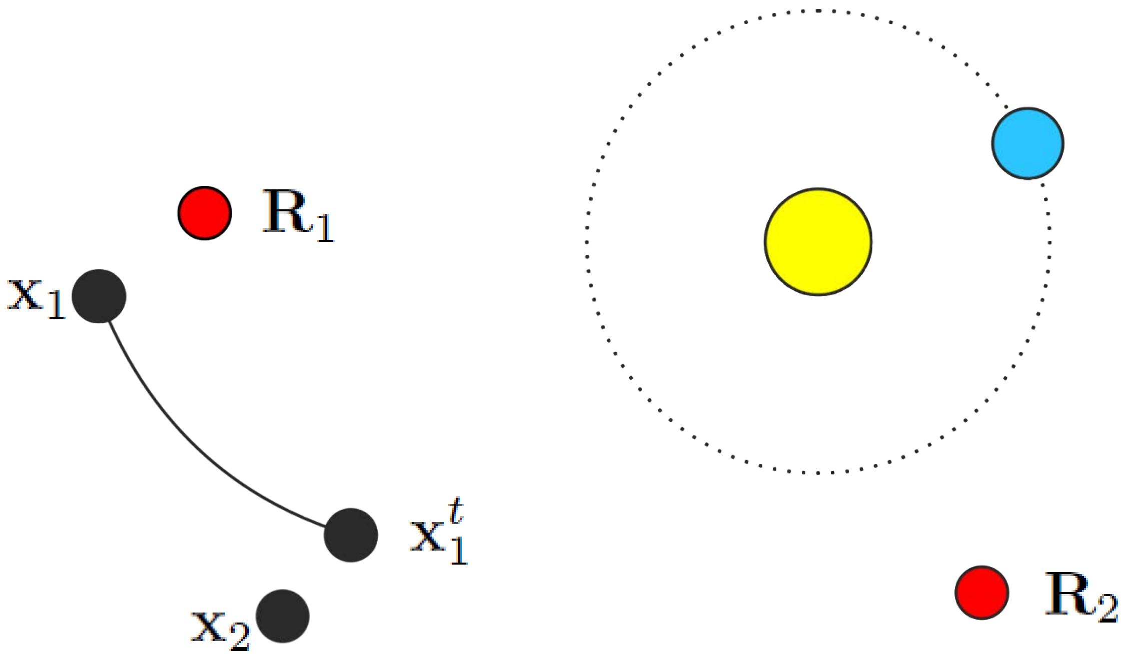
Метод параллельной пристрелки



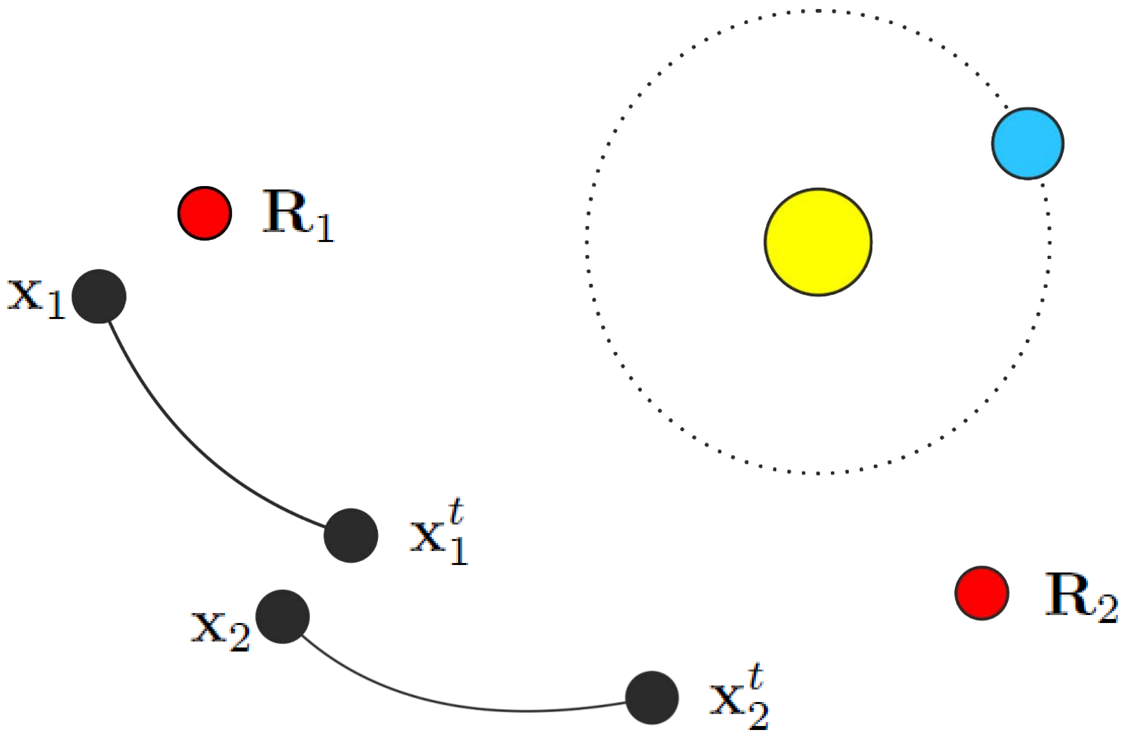
Метод параллельной пристрелки



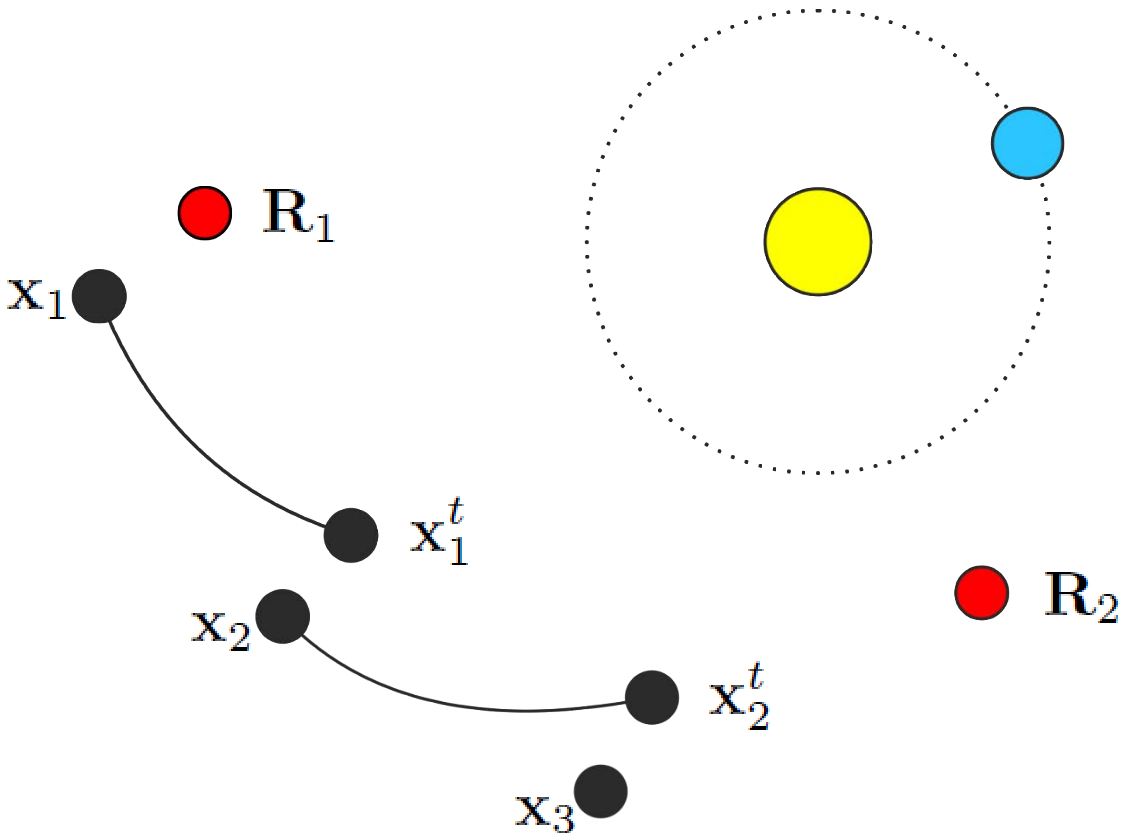
Метод параллельной пристрелки



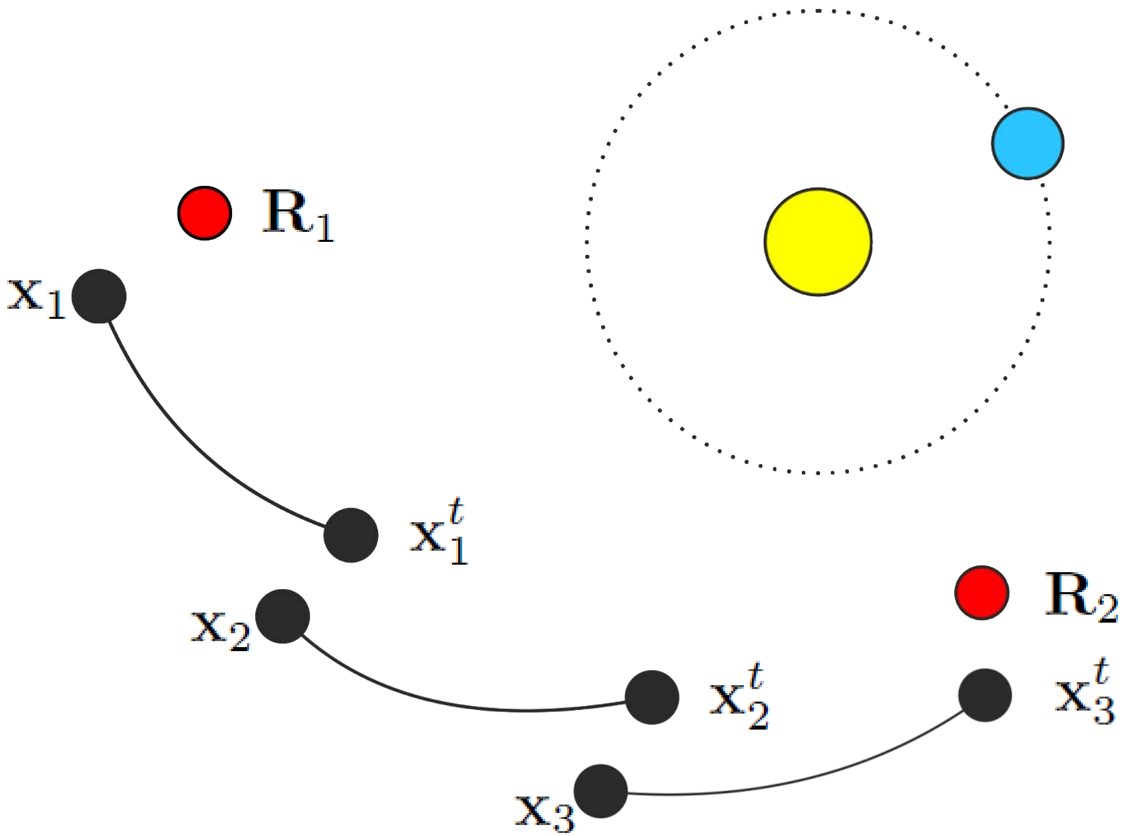
Метод параллельной пристрелки



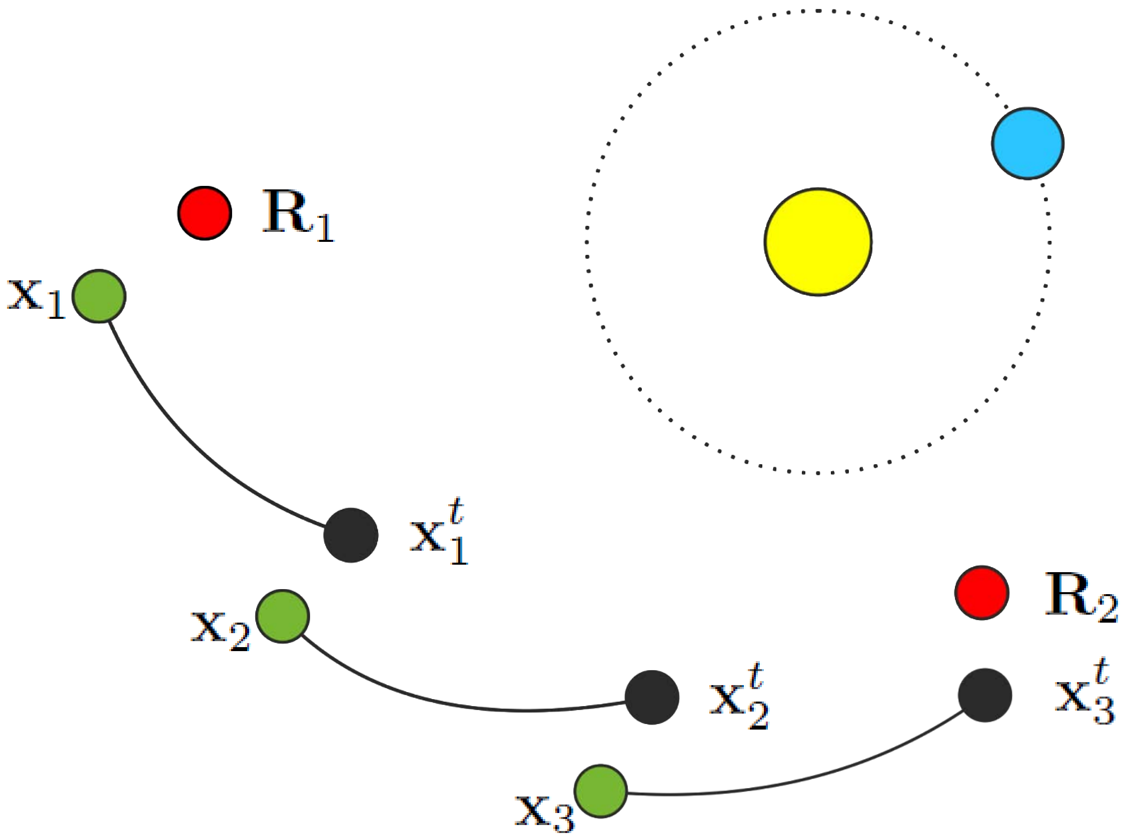
Метод параллельной пристрелки



Метод параллельной пристрелки



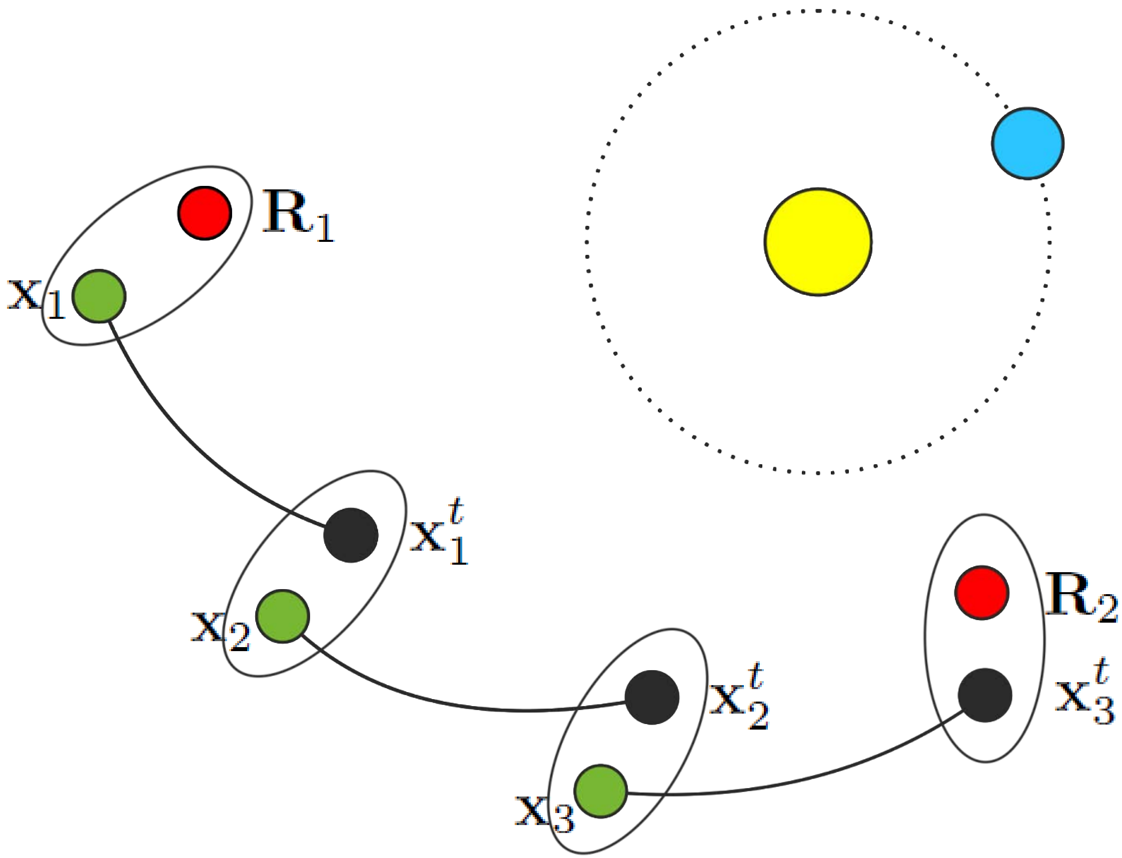
Метод параллельной пристрелки



Переменные

$\mathbf{x}_1, \ \mathbf{x}_2, \ \mathbf{x}_3$

Метод параллельной пристрелки



Переменные

$$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_3$$

Уравнения:

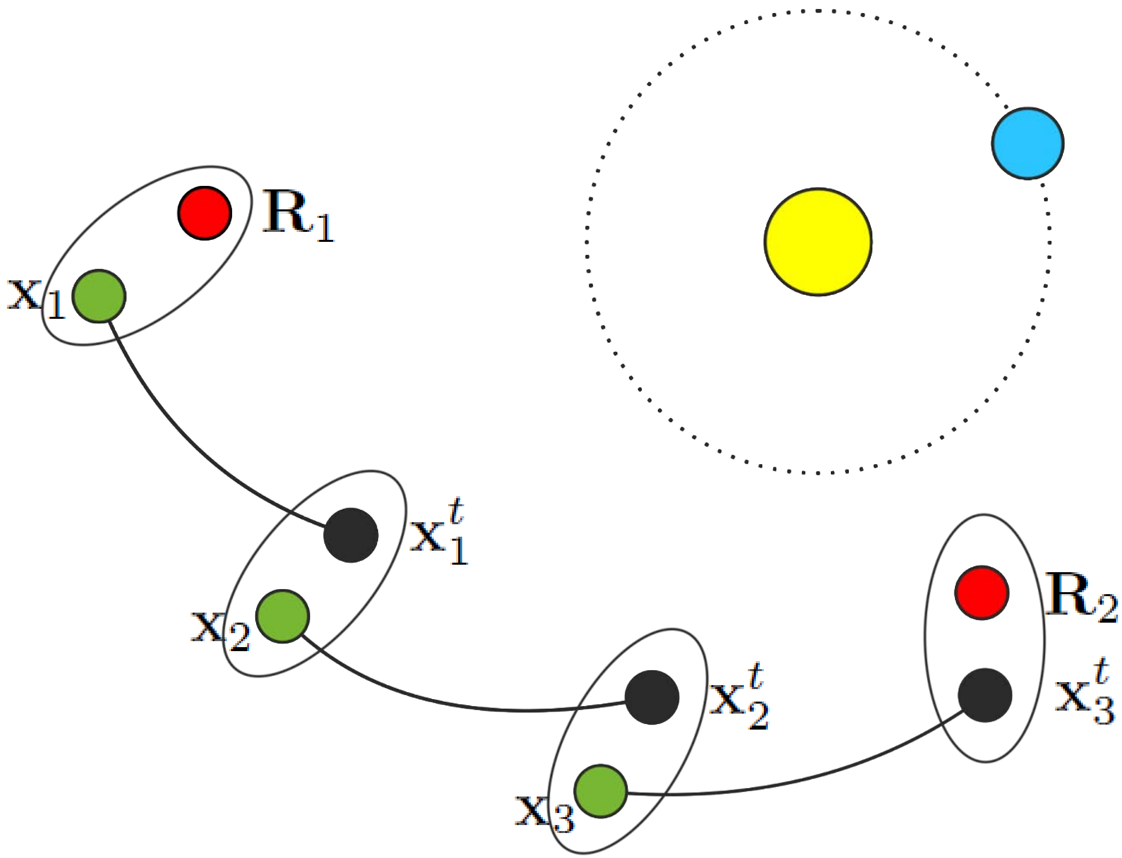
$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_1 = 0$$

$$\mathbf{x}_1^t(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_2 = 0$$

$$\mathbf{x}_2^t(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_3 = 0$$

$$\mathbf{r}_3^t(\mathbf{x}_3) - \mathbf{R}_2 = 0$$

Метод параллельной пристрелки



Переменные

$$\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \mathbf{x}_3$$

Уравнения:

$$\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_1 = 0$$

$$\mathbf{x}_1^t(\mathbf{x}_1) - \mathbf{x}_2 = 0$$

$$\mathbf{x}_2^t(\mathbf{x}_2) - \mathbf{x}_3 = 0$$

$$\mathbf{r}_3^t(\mathbf{x}_3) - \mathbf{R}_2 = 0$$

В случае введения N вспомогательных точек:
6N переменных, 6N уравнений

Вариация моментов времени

- Переменные: $\mathbf{x}_1, \ \ldots, \ \mathbf{x}_N, \ t_1, \ \ldots, t_N$
- Уравнения:

Вариация моментов времени

- Переменные: $\mathbf{x}_1, \ \ldots, \ \mathbf{x}_N, \ t_1, \ \ldots, t_N$
- Уравнения:

$$\mathbf{x}_k^t - \mathbf{x}_{k+1} = 0, \quad k = 1, \ldots, N-1$$

Вариация моментов времени

- Переменные: $\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_N,\ t_1,\ \ldots, t_N$
- Уравнения:

$$\mathbf{x}_k^t - \mathbf{x}_{k+1} = 0, \quad k = 1, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = 0$$

Вариация моментов времени

- Переменные: $\mathbf{x}_1, \ \ldots, \ \mathbf{x}_N, \ t_1, \ \ldots, t_N$
- Уравнения:

$$\mathbf{x}_k^t - \mathbf{x}_{k+1} = 0, \quad k = 1, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = 0$$

$$t_N - t_1 = \Delta t$$

Вариация моментов времени

- Переменные: $\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_N,\ t_1,\ \ldots, t_N$
- Уравнения:

$$\mathbf{x}_k^t - \mathbf{x}_{k+1} = 0, \quad k = 1, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = 0$$

$$t_N - t_1 = \Delta t \qquad t_1 = T$$

Вариация моментов времени

- Переменные: $\mathbf{x}_1,\ \ldots,\ \mathbf{x}_N,\ t_1,\ \ldots, t_N$
- Уравнения:

$$\mathbf{x}_k^t - \mathbf{x}_{k+1} = 0, \quad k = 1, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = 0$$

$$t_N - t_1 = \Delta t \qquad t_1 = T \qquad t_{k+1} - t_k = \Delta t$$

Вариация моментов времени

- Переменные: $\mathbf{x}_1, \ \ldots, \ \mathbf{x}_N, \ t_1, \ \ldots, t_N$
- Уравнения:

$$\mathbf{x}_k^t - \mathbf{x}_{k+1} = 0, \quad k = 1, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) = 0$$

$$\mathbf{h}(t_1, \ldots, t_N) = 0$$

Негладкие траектории и ограничения в виде неравенств

- Иногда нас могут интересовать траектории, негладкие в координатном пространстве (разрыв значений скорости)
- Уравнения:

Негладкие траектории и ограничения в виде неравенств

- Иногда нас могут интересовать траектории, негладкие в координатном пространстве (разрыв значений скорости)
- Уравнения:

$$\mathbf{r}_k^t - \mathbf{r}_{k+1} = 0$$

Негладкие траектории и ограничения в виде неравенств

- Иногда нас могут интересовать траектории, негладкие в координатном пространстве (разрыв значений скорости)
- Уравнения:

$$\mathbf{r}_k^t - \mathbf{r}_{k+1} = 0$$

$$|\Delta \mathbf{v}_k| \leq \Delta v_{\max}$$

Негладкие траектории и ограничения в виде неравенств

- Иногда нас могут интересовать траектории, негладкие в координатном пространстве (разрыв значений скорости)
- Уравнения:

$$\mathbf{r}_k^t - \mathbf{r}_{k+1} = 0$$

$$|\Delta \mathbf{v}_k|^2 \leq \Delta v_{\max}^2$$

Негладкие траектории и ограничения в виде неравенств

- Иногда нас могут интересовать траектории, негладкие в координатном пространстве (разрыв значений скорости)
- Уравнения:

$$\mathbf{r}_k^t - \mathbf{r}_{k+1} = 0$$

$$|\Delta \mathbf{v}_k|^2 = \Delta v_{\max}^2 - \beta_k^2$$

β_k – новая переменная

Решение уравнения сшивки

- Вектор переменных:

$$\mathbf{s} = [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N,\ t_1, \ldots, t_N,\ \beta_1, \ldots, \beta_r]$$

- Вектор невязок:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = [\mathbf{x}_1^t - \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_{N-1}^t - \mathbf{x}_N,\ \mathbf{g}(\mathbf{s})]$$

- Шаг метода Ньютона:

$$0 = \mathbf{F}(\mathbf{s}_k + \Delta\mathbf{s}_k) \approx \mathbf{F}(\mathbf{s}_k) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \Delta\mathbf{s}_k$$

Решение минимальной нормы

- Уравнение заменяется оптимизационной задачей

$$|\Delta \mathbf{s}_k| \to \min, \quad \mathbf{F}(\mathbf{s}_k) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \Delta \mathbf{s}_k = 0$$

- Решение этой задачи известно:

$$\Delta \mathbf{s}_k = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\right)^T\right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{s}_k)$$

Решение минимальной нормы

- Уравнение заменяется оптимизационной задачей

$$|\Delta \mathbf{s}_k| \to \min, \quad \mathbf{F}(\mathbf{s}_k) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \Delta \mathbf{s}_k = 0$$

- Решение этой задачи известно:

$$\Delta \mathbf{s}_k = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\right)^T + \lambda \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{s}_k)$$

Решение минимальной нормы

- Уравнение заменяется оптимизационной задачей

$$|\Delta \mathbf{s}_k| \to \min, \quad \mathbf{F}(\mathbf{s}_k) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}} \Delta \mathbf{s}_k = 0$$

- Решение этой задачи известно:

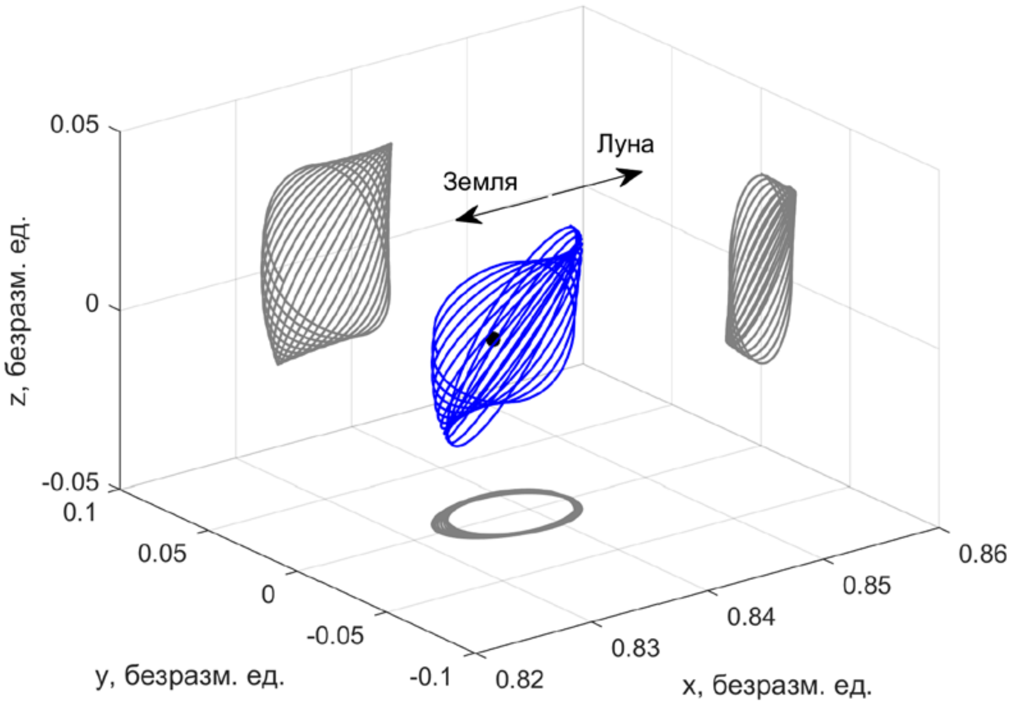
$$\Delta \mathbf{s}_k = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{s}}\right)^T + \lambda \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{s}_k)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}_k + \Delta \mathbf{s}_k) > \mathbf{F}(\mathbf{s}_k) \;\Rightarrow\; \lambda \leftarrow \lambda \cdot 10$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}_k + \Delta \mathbf{s}_k) \le \mathbf{F}(\mathbf{s}_k) \;\Rightarrow\; \lambda \leftarrow \lambda / 10$$

Приложение 1
Построение орбит Лиссажу (1)

- Орбиты Лиссажу – это ограниченные незамкнутые орбиты вокруг точек коллинеарных точек в задаче трех тел



Приложение 1
Построение орбит Лиссажу (1)

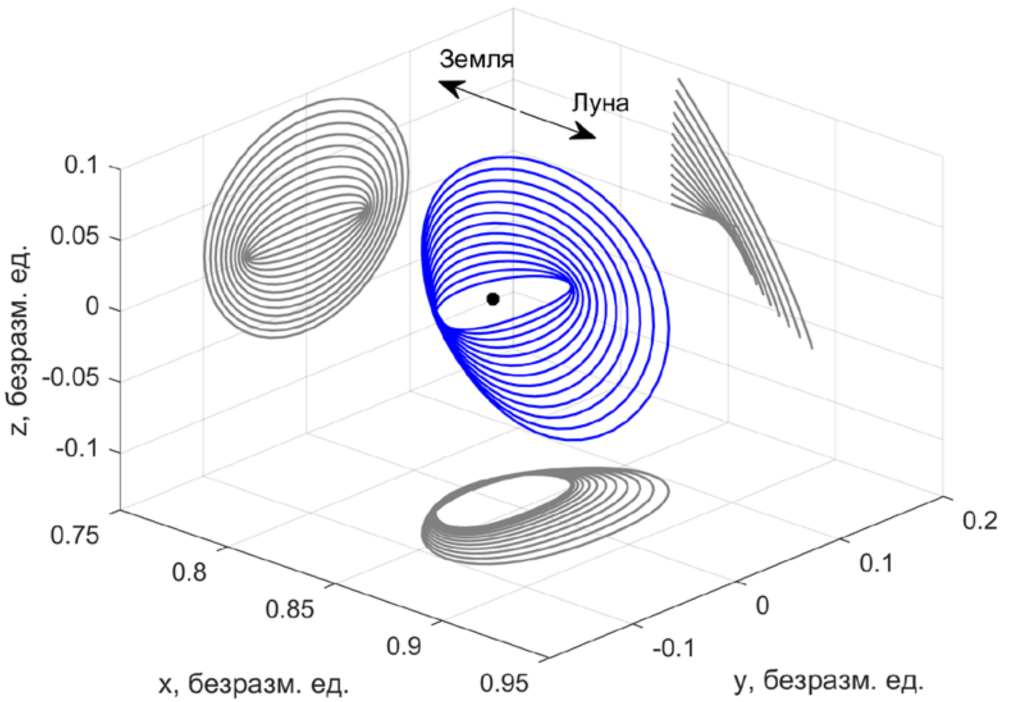
- Орбиты Лиссажу – это ограниченные незамкнутые орбиты вокруг точек коллинеарных точек в задаче трех тел
- Нет аналитики!
- Орбиты непереодические!
- Орбиты Лиссажу – неустойчивые!
- Орбиту невозможно проинтегрировать на достаточно большом интервале времени!

Приложение 1
Построение орбит Лиссажу (2)

- Задав размеры орбит, вычислить приближенные значения фазовых векторов на орбите с помощью **рядов Линдштедта-Пуанкаре**
- Вычисленные точки использовать в качестве **начального приближения** для последующей процедуры параллельной пристрелки
- Обеспечить **всюду гладкость** траектории
- Сходимость за **5-7 итераций**, точность – порядка машинного нуля

Приложение 2
Адаптация гало-орбит к эфемеридной модели (1)

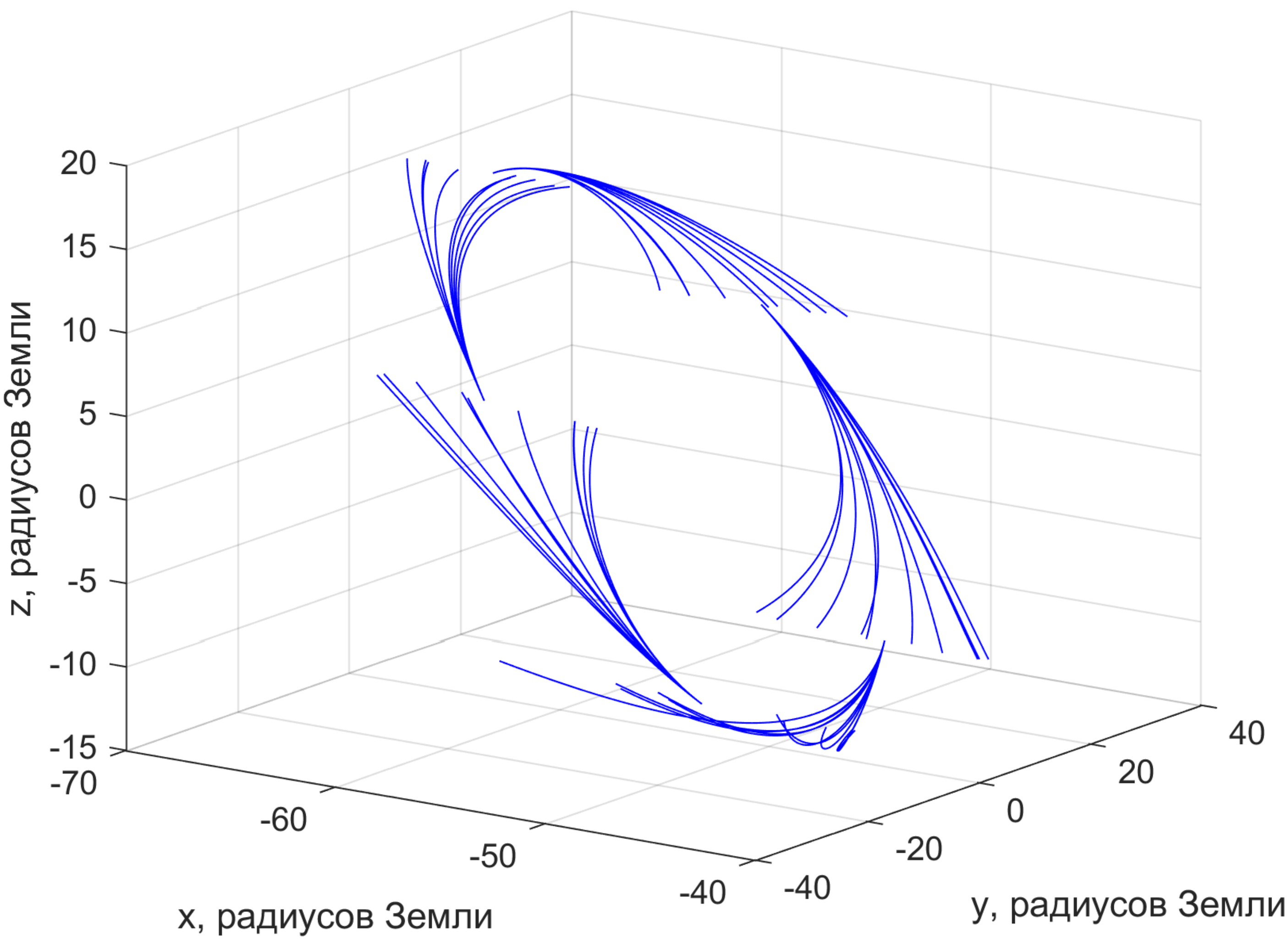
- Гало-орбиты – это пространственные периодические орбиты вокруг коллинеарных точек либрации, получающиеся продолжением по энергии из плоских решений Ляпунова



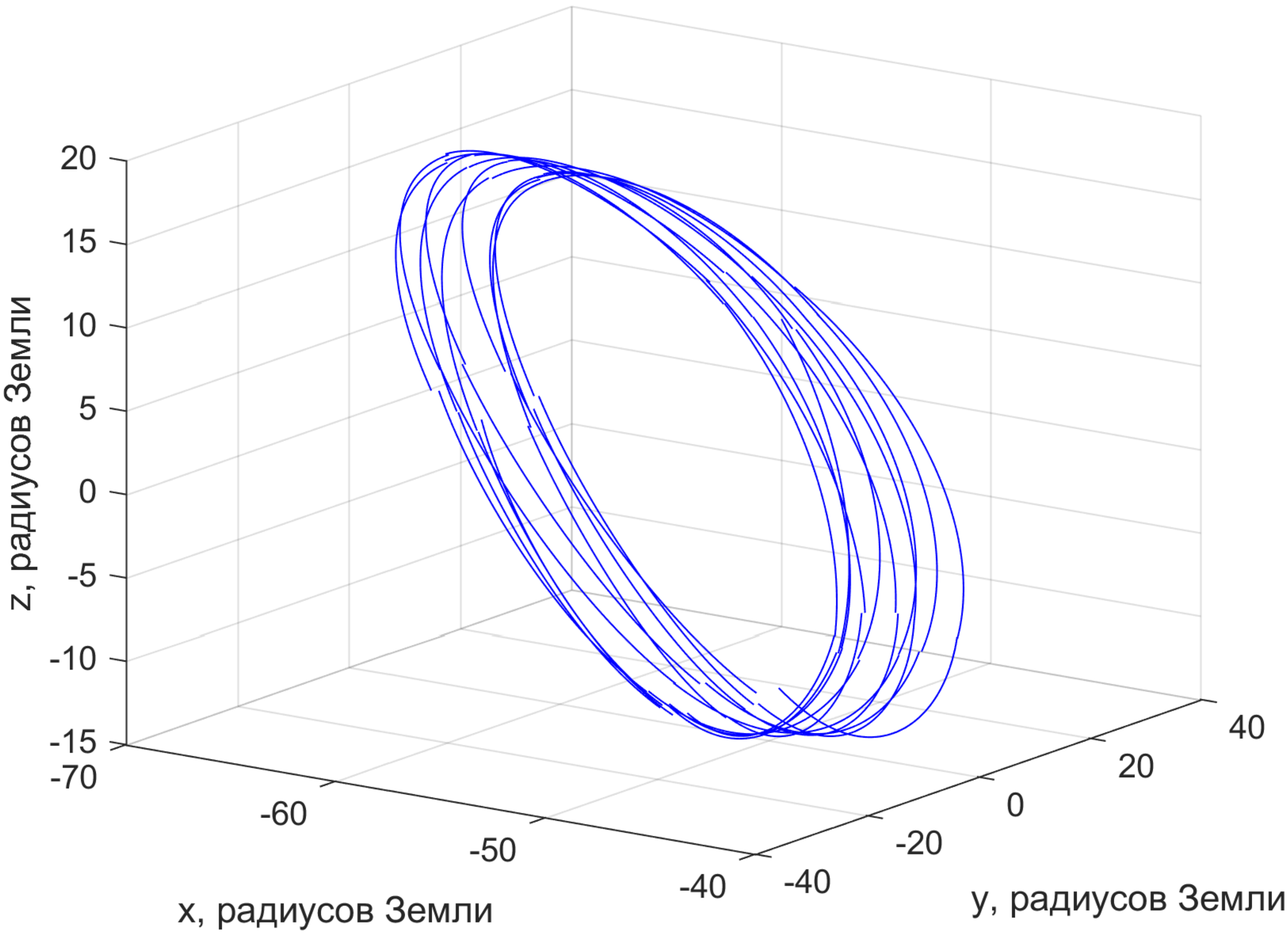
Приложение 2
Адаптация гало-орбит к эфемеридной модели (2)

- Рассчитать гало-орбиту стандартными средствами (**методы дифференциальной коррекции и продолжения**) в рамках круговой ограниченной задачи трех тел
- Используя данные эфемерид главных тел перевести фазовые точки на **нескольких периодах орбиты** в инерциальную систему координат
- Применить метод параллельной пристрелки, обеспечив **всюду гладкость** траектории

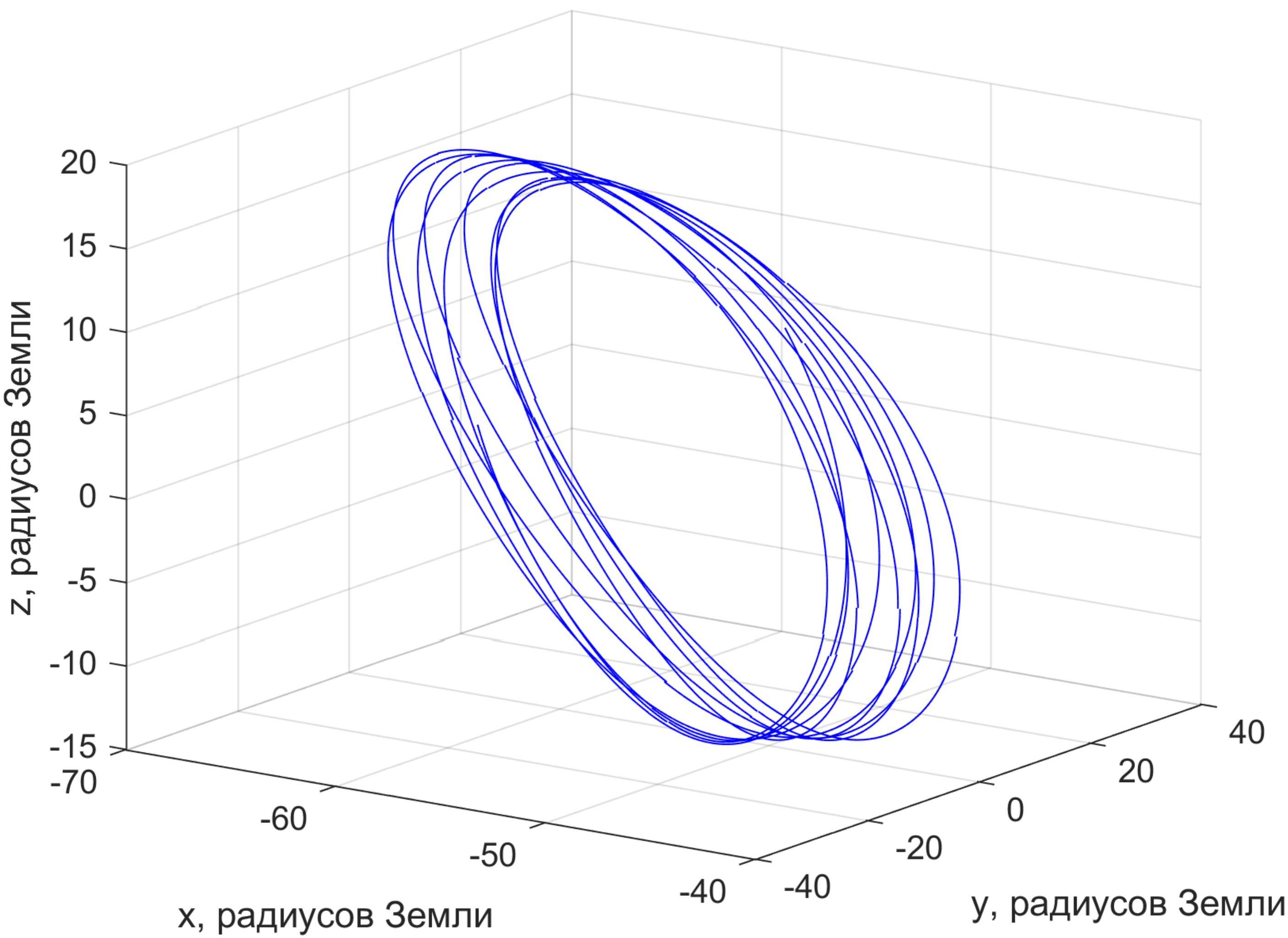
Приложение 2
Адаптация орбит к эфемеридной модели (3)



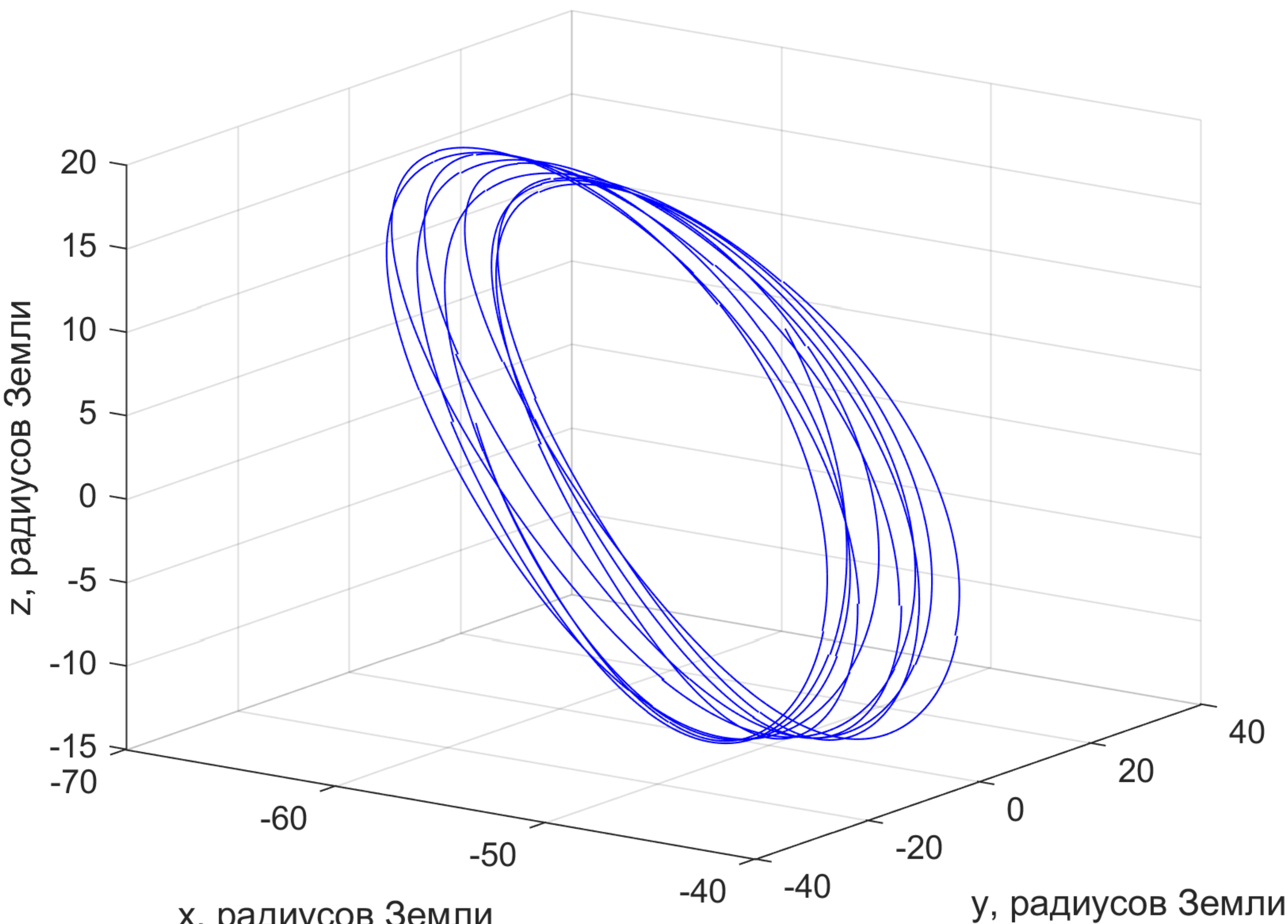
Приложение 2
Адаптация орбит к эфемеридной модели (3)



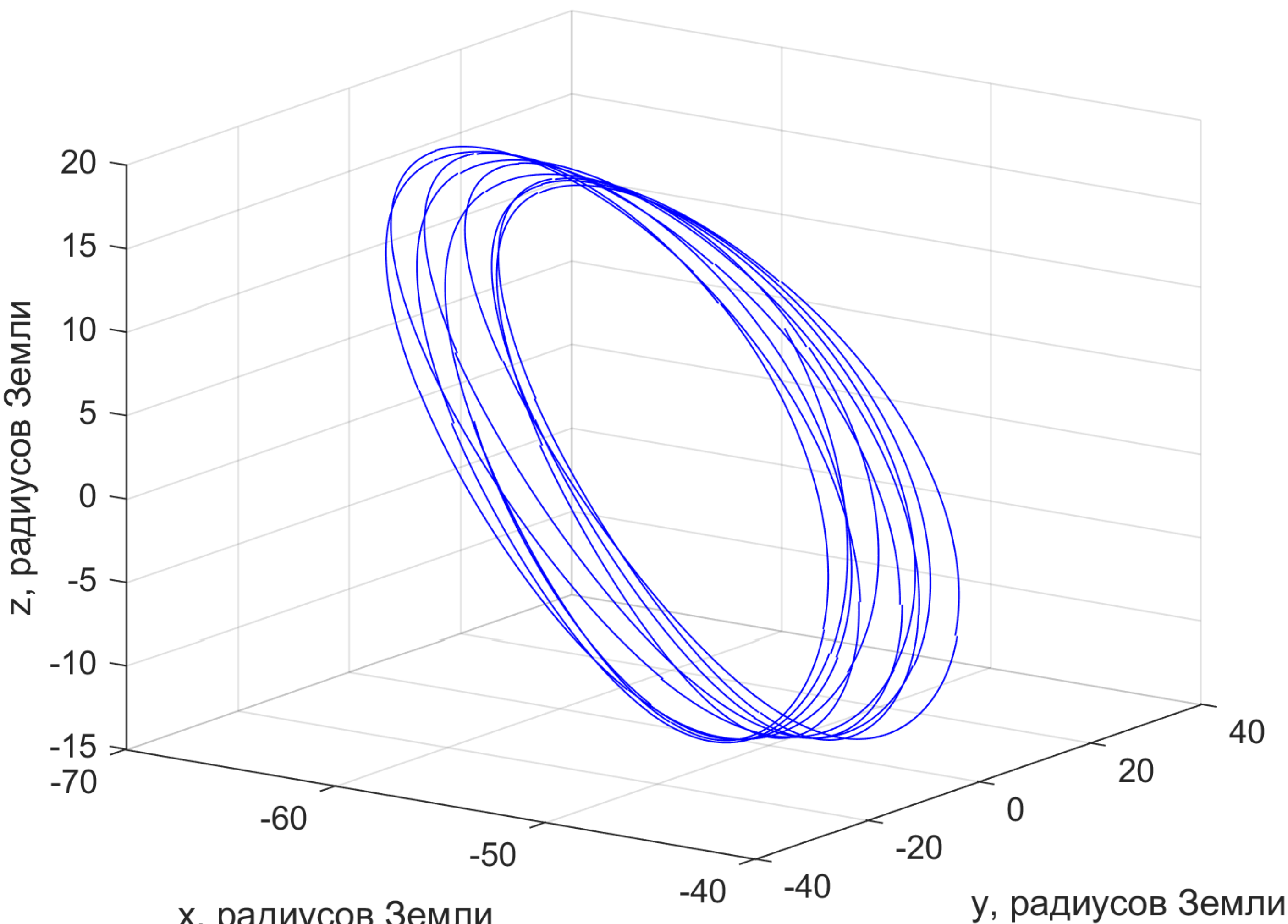
Приложение 2
Адаптация орбит к эфемеридной модели (3)



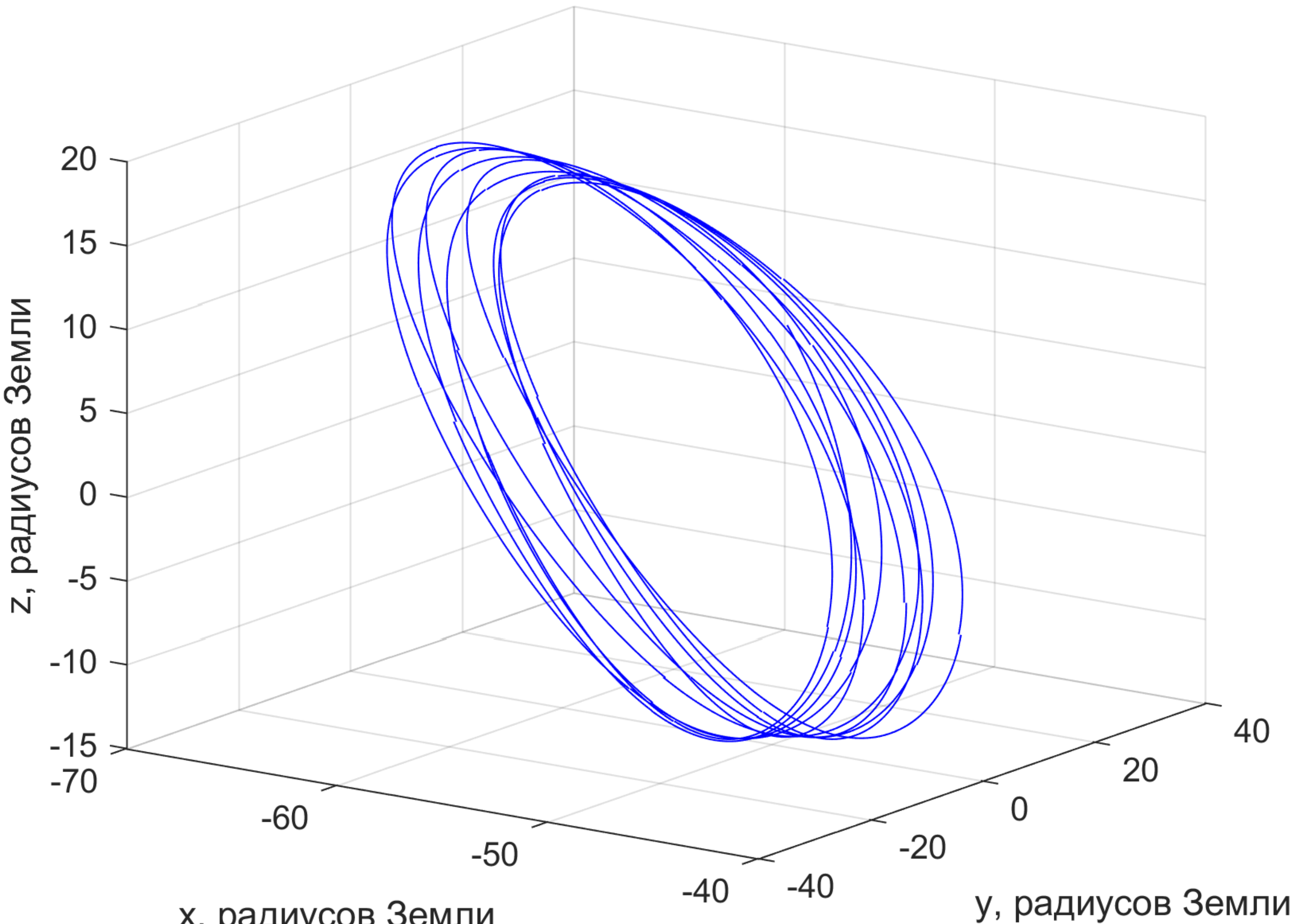
Приложение 2
Адаптация орбит к эфемеридной модели (3)



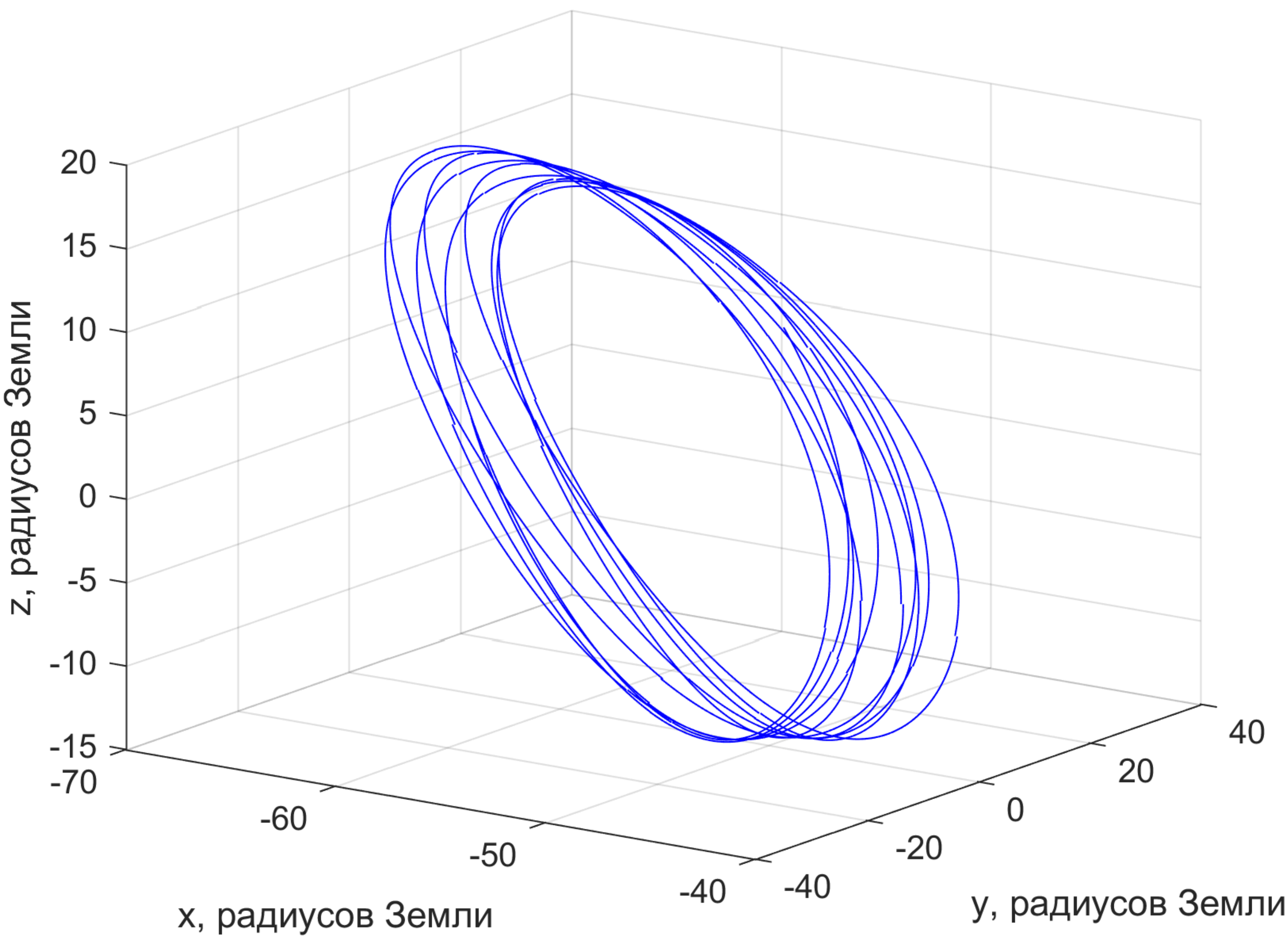
Приложение 2
Адаптация орбит к эфемеридной модели (3)



Приложение 2
Адаптация орбит к эфемеридной модели (3)

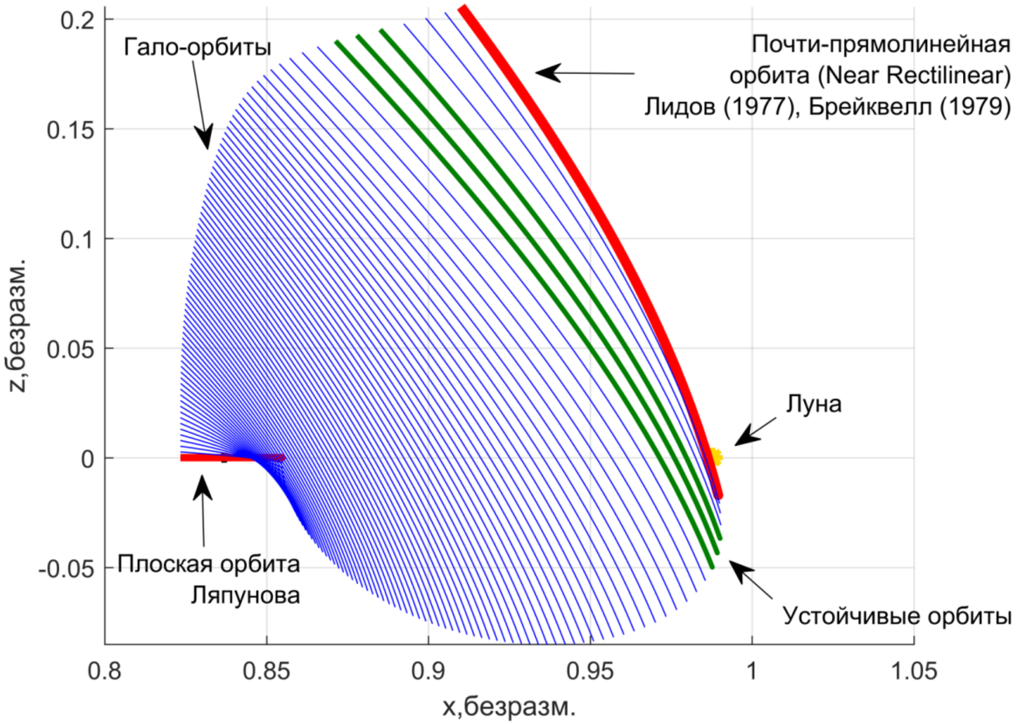


Приложение 2
Адаптация орбит к эфемеридной модели (3)

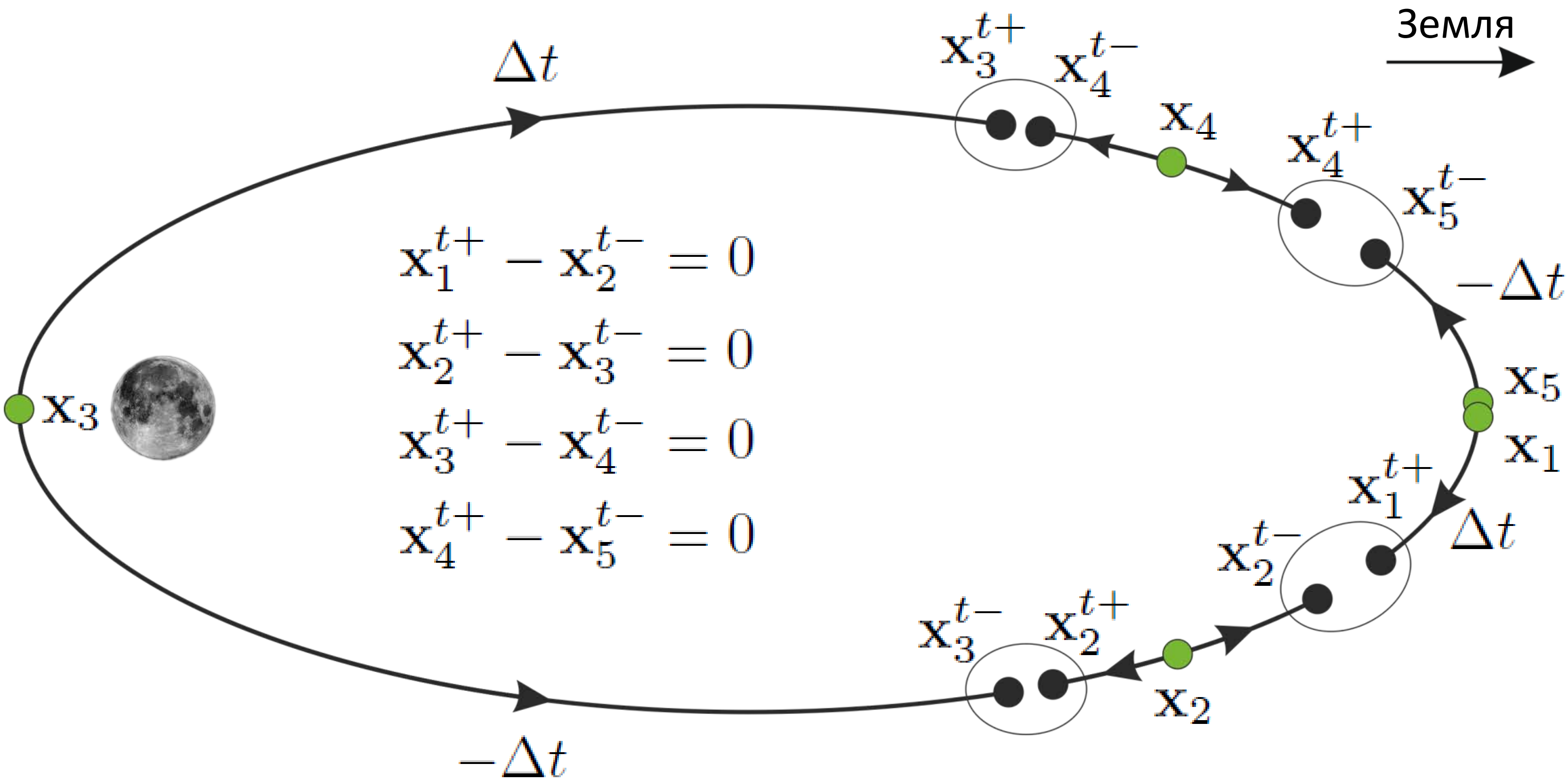


Приложение 3
Построение почти-прямолинейных орбит

- Почти-прямолинейные орбиты – это орбиты из семейства гало-орбит с низким периселением (высота порядка 2-6 тыс. км)



Двунаправленный метод параллельной пристрелки



$$\mathbf{x}_1^{t+} - \mathbf{x}_2^{t-} = 0$$
$$\mathbf{x}_2^{t+} - \mathbf{x}_3^{t-} = 0$$
$$\mathbf{x}_3^{t+} - \mathbf{x}_4^{t-} = 0$$
$$\mathbf{x}_4^{t+} - \mathbf{x}_5^{t-} = 0$$

$$\Delta t = P/8$$

Приложение 4
Поиск оптимальных по времени многовитковых траекторий (1)

- Даны две высокие околоземные орбиты с известными параметрами
- Найти (квази-)оптимальное по быстродействию управление для многовиткового перелета между орбитами
- Траекторию получить в рамках эфемеридной модель движения тел Солнечной системы с учетом сил давления света

Приложение 4
Поиск оптимальных по времени многовитковых траекторий (2)

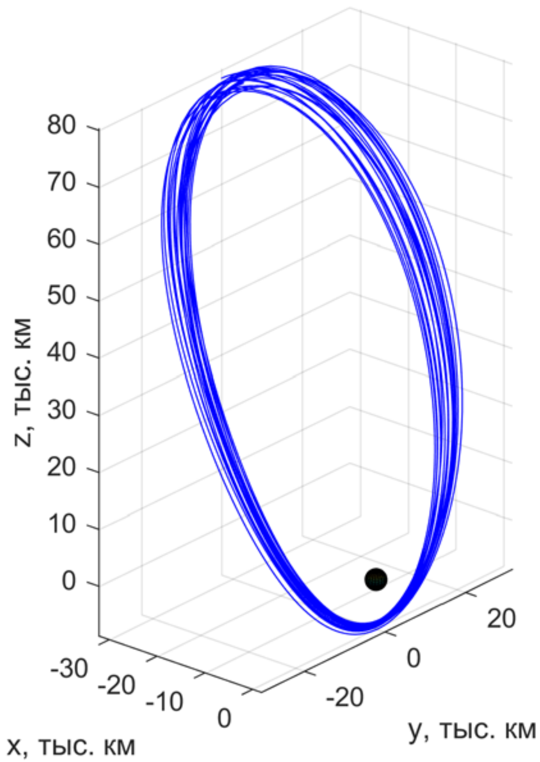
- Спроектировать траекторию в рамках модели задачи двух тел с использованием зарекомендовавших себя **методов продолжения**
- Выбрать точки-узлы на траектории перелета, они служат начальным приближением для последующего уточнения методом пристрелки
- Потребовать **всюду непрерывность** траектории с ограниченными невязками по скорости, а программное управление оставить **тем же**
- **Скорректировать непрерывное управление** на основании значений разрыва скорости

Заключение

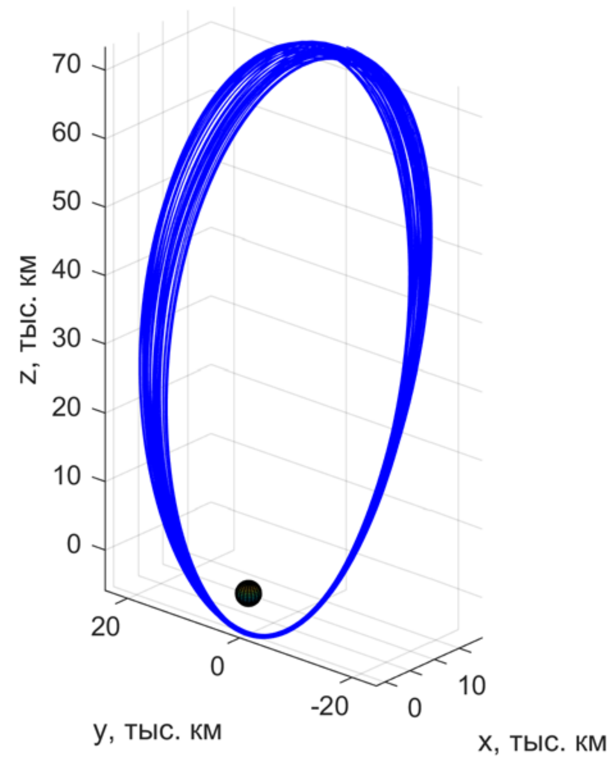
- Метод параллельной пристрелки – гибкий и легко программируемый инструмент проектирования траекторий в задачах с иерархией моделей
- Метод параллельной пристрелки используется для решения краевых задач и задач построения номинальных траекторий в случаях с неустойчивой, хаотической динамикой
- Метод параллельной пристрелки с успехом может использоваться для адаптации оптимальных траекторий к моделям с возмущениями

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00621).

Почти-прямолинейные орбиты



Орбита из семейства северных гало-орбит от точки L1



Орбита из семейства северных гало-орбит от точки L2