

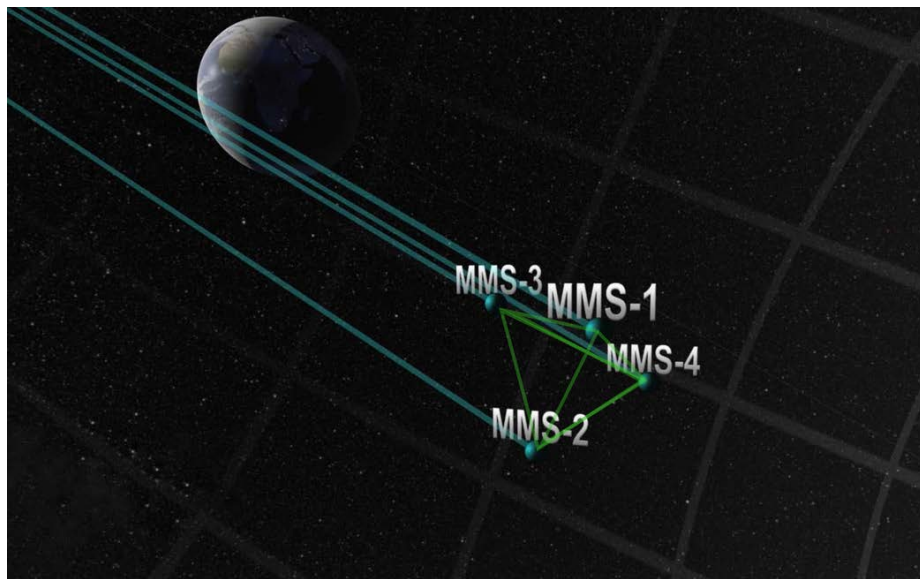


Построение опорных относительных орбит для тетраэдральной конфигурации спутников

Я.В. Маштаков, С.А. Шестаков

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Применение тетраэдральных формаций



Magnetospheric MultiScale



Gravity Recovery and Climate Experiment

Постановка задачи

- Четыре спутника на близких околокруговых орбитах движутся пассивно
- Необходимо задать начальные условия для спутников, чтобы тетраэдр со временем не менял форму и размеры
- Периоды обращения спутников совпадают
- Орбитальная система координат связана с одним из спутников

Уравнения относительного движения

За основу возьмем линейную модель Хилла-Клохесси-Уилтшира:

$$\ddot{x} + 2n\dot{z} = 0,$$

$$\ddot{y} + n^2 y = 0,$$

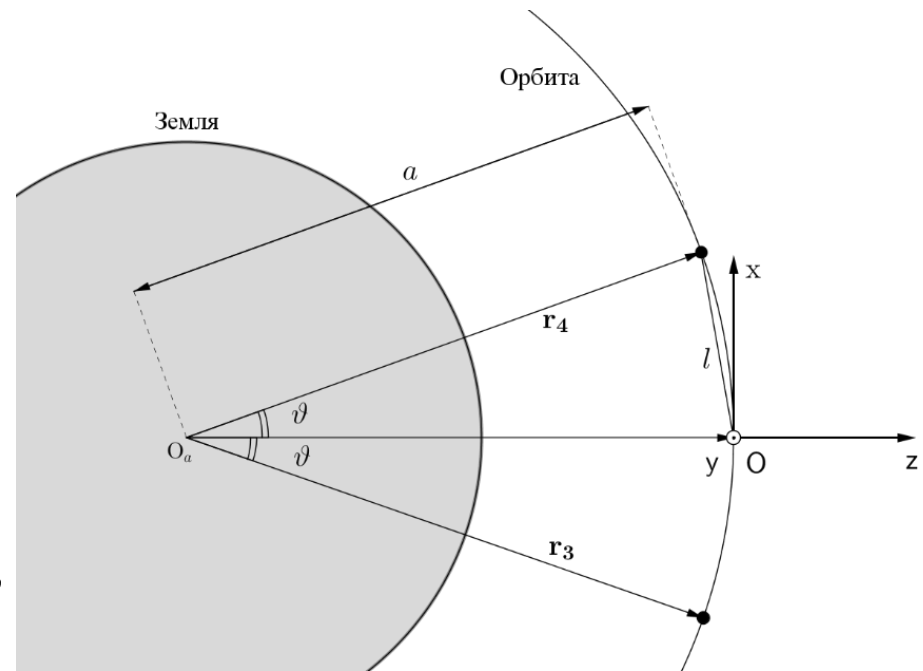
$$\ddot{z} - 2n\dot{x} - 3n^2 z = 0,$$

При отсутствии дрейфа

$$x_i(t) = 2A_i \cos \nu - 2B_i \sin \nu + C_i,$$

$$y_i(t) = D_i \sin \nu + E_i \cos \nu,$$

$$z_i(t) = A_i \sin \nu + B_i \cos \nu.$$



Тетраэдральная конфигурация

- Качество тетраэдра
$$Q = 12 \frac{(3V)^{2/3}}{L}$$
- L --- есть сумма квадратов длин всех рёбер тетраэдра,
 V --- объём тетраэдра

Сохранение объёма – сохранение размера

Сохранение качества – сохранение формы, приближённой к правильной

Сохранение объёма

$$\mathbb{V} = \frac{1}{6} \det \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4\| = \frac{1}{6} \det \|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\|$$

$$x_i(t) = 2A_i \cos \nu - 2B_i \sin \nu + C_i,$$

$$y_i(t) = D_i \sin \nu + E_i \cos \nu,$$

$$z_i(t) = A_i \sin \nu + B_i \cos \nu.$$

Подставляя значения для радиус-векторов, получим, что объём представляет собой некоторый тригонометрический полином

$$\begin{aligned} 6\mathbb{V} = & P \sin^3 \nu + Q \cos^3 \nu + R \sin^2 \nu \cos \nu + T \sin \nu \cos^2 \nu + \\ & + U \sin^2 \nu + V \cos^2 \nu + W \sin \nu \cos \nu. \end{aligned}$$

Сохранение объёма

$$6\mathbb{V} = P \sin^3 \nu + Q \cos^3 \nu + R \sin^2 \nu \cos \nu + T \sin \nu \cos^2 \nu + \\ + U \sin^2 \nu + V \cos^2 \nu + W \sin \nu \cos \nu.$$

Полином тождественно постоянен по истинной аномалии тогда и только тогда, когда

$$P = Q = T = W = R = 0, \\ U = V.$$

Пусть $\mathbf{A} = \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$, остальные векторы для констант движения определяются аналогично

$$x_i(t) = 2A_i \cos \nu - 2B_i \sin \nu + C_i, \\ y_i(t) = D_i \sin \nu + E_i \cos \nu, \\ z_i(t) = A_i \sin \nu + B_i \cos \nu.$$

Условия сохранения объёма дают следующие соотношения

$$\mathbf{D} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B}, \\ \mathbf{E} = -b\mathbf{A} + a\mathbf{B},$$

Сохранение формы

$$\begin{aligned}\mathbb{L} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4)^2 + (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)^2 = \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)^2 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)^2 + \mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_3^2.\end{aligned}$$

- Аналогично предыдущему подстановкой получаем тригонометрический полином

$$\mathbb{L} = P \cos^2 \nu + Q \cos \nu \sin \nu + R \sin^2 \nu + T \cos \nu + U \sin \nu + W.$$

- Сохранение качества при условии сохранении объёма

$$Q = T = U = 0,$$

$$P = R.$$

- Расписывая подробно все формулы, получаем соотношения

Сохранение объёма + сохранение качества

$$\mathbf{D} = a\mathbf{A} + b\mathbf{B},$$

$$\mathbf{E} = -b\mathbf{A} + a\mathbf{B},$$

$$3A_1B_1 + 3A_2B_2 + 3A_3B_3 - A_1B_2 - A_1B_3 - A_2B_1 - A_2B_3 - A_3B_1 - A_3B_2 = 0,$$

$$3(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2) + 2(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 - B_1B_2 - B_1B_3 - B_2B_3) = 0,$$

$$C_1(3A_1 - A_2 - A_3) + C_2(3A_2 - A_1 - A_3) + C_3(3A_3 - A_1 - A_2) = 0,$$

$$C_1(3B_1 - B_2 - B_3) + C_2(3B_2 - B_1 - B_3) + C_3(3B_3 - B_1 - B_2) = 0.$$

Система из 10 уравнений относительно 15 переменных, ищем 5-параметрические семейства решений

Ищем частные решения

Частные решения, сохраняющие качество

- Оставим два уравнения

$$3A_1B_1 + 3A_2B_2 + 3A_3B_3 - A_1B_2 - A_1B_3 - A_2B_1 - A_2B_3 - A_3B_1 - A_3B_2 = 0,$$

$$3(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2) + 2(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 - B_1B_2 - B_1B_3 - B_2B_3) = 0,$$

- Сделаем замену переменных

$$A_1 = \alpha \cos \varphi, \quad B_1 = \alpha \sin \varphi,$$

$$A_2 = \beta \cos \psi, \quad B_2 = \beta \sin \psi,$$

$$A_3 = \gamma \cos \theta, \quad B_3 = \gamma \sin \theta,$$

- Основное упрощающее предположение: амплитуды двух спутников равны между собой, положим также одну из фаз равной нулю

$$\beta = \gamma = K \neq 0,$$

$$\alpha = pK,$$

$$\varphi = 0,$$

Частные решения, сохраняющие качество

- После преобразований

$$4\cos\frac{\psi+\theta}{2}\left(p\cos\frac{\psi-\theta}{2}+4\cos\frac{\psi+\theta}{2}-6\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}\right)+$$

$$+12\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}-8-3p^2=0,$$

$$4\sin\frac{\psi+\theta}{2}\left(p\cos\frac{\psi-\theta}{2}+4\cos\frac{\psi+\theta}{2}-6\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos^2\frac{\psi-\theta}{2}\right)=0.$$

$$\sin\frac{\psi+\theta}{2}=0$$

$$\sin\frac{\psi+\theta}{2}\neq 0$$

$$\mathbf{A}=K\begin{pmatrix} p \\ \cos\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=K\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}=c\begin{pmatrix} \frac{2p-4\cos\psi}{3p-2\cos\psi} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

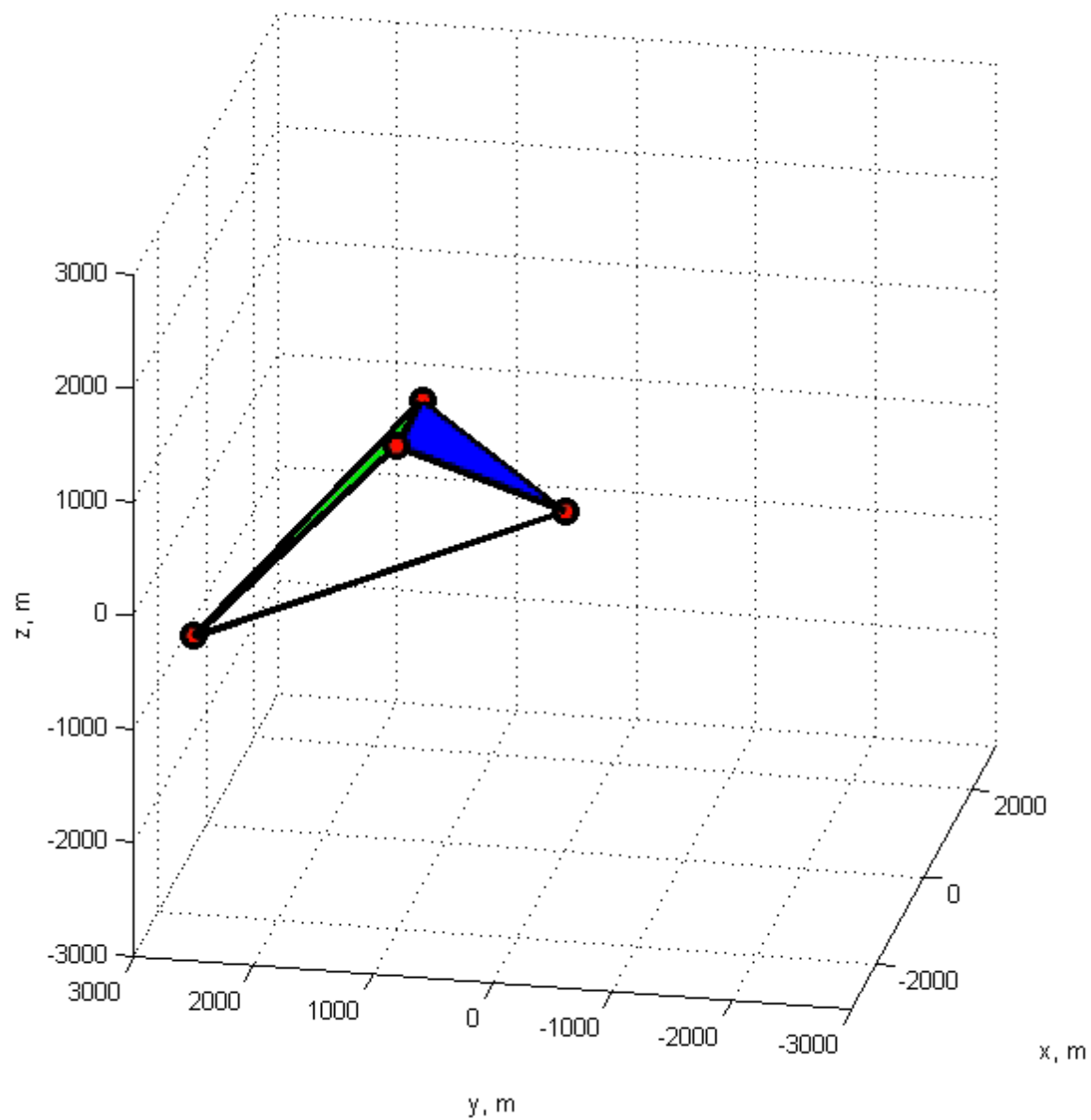
Одинаковая амплитуда

$$\mathbf{A} = K \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = K \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = aK \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + bK \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = -bK \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + aK \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix},$$

$$a = 0, \quad b = \pm\sqrt{5}, \quad c = \pm K\sqrt{10}$$

$$\mathbb{Q}_{\max} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$



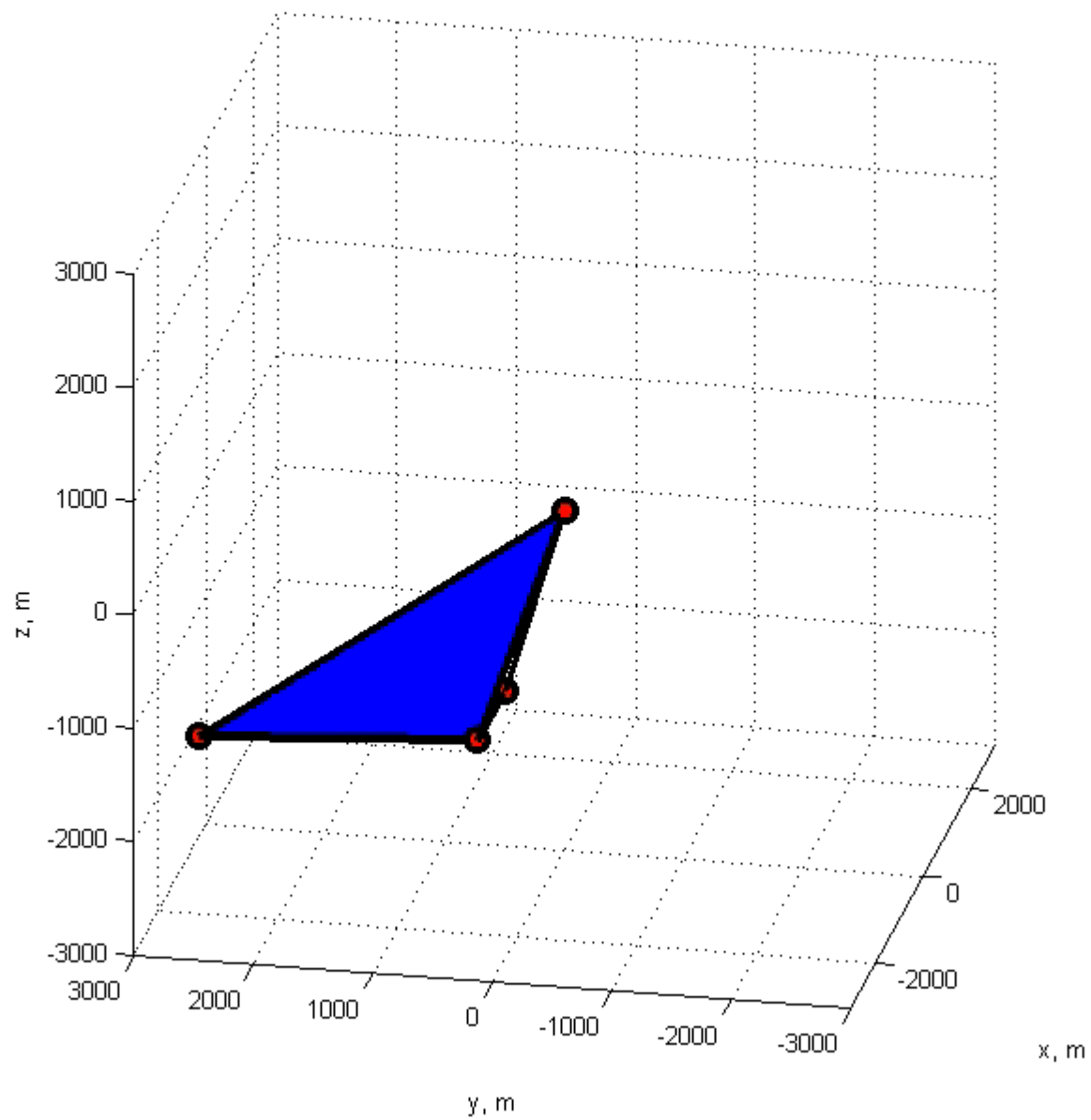
Одинаковая амплитуда

$$\mathbf{A} = K \begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = K \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{11}/6 \\ \sqrt{11}/6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = aK \begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix} + bK \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{11}/6 \\ \sqrt{11}/6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = -bK \begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 1 \end{pmatrix} + aK \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{11}/6 \\ \sqrt{11}/6 \end{pmatrix},$$

$$a = 0, b = \pm\sqrt{5}, c = \pm K\sqrt{10}/3$$

$$\mathbb{Q}_{max} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$



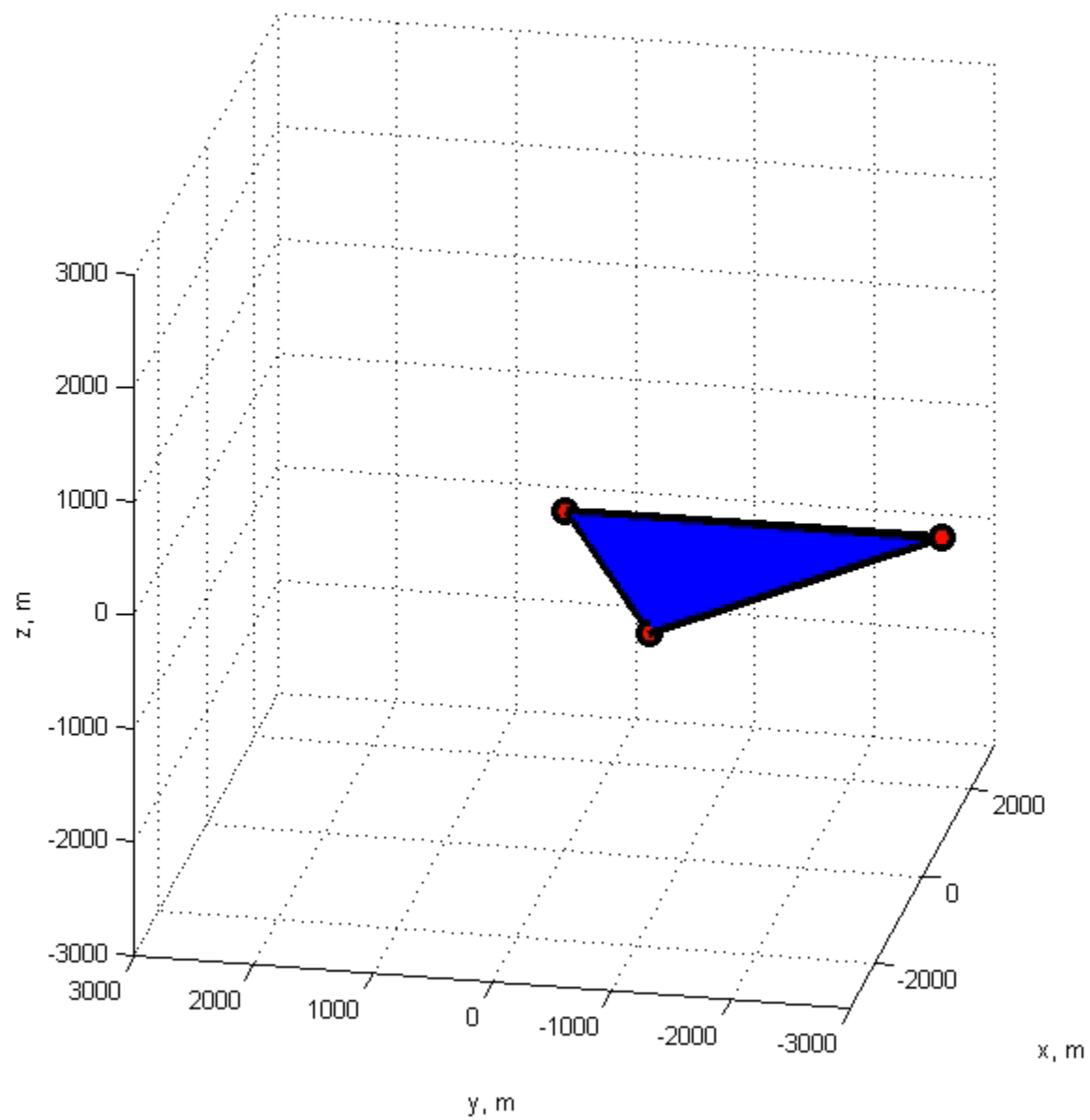
Одна нулевая амплитуда

$$\mathbf{A} = K \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = K \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

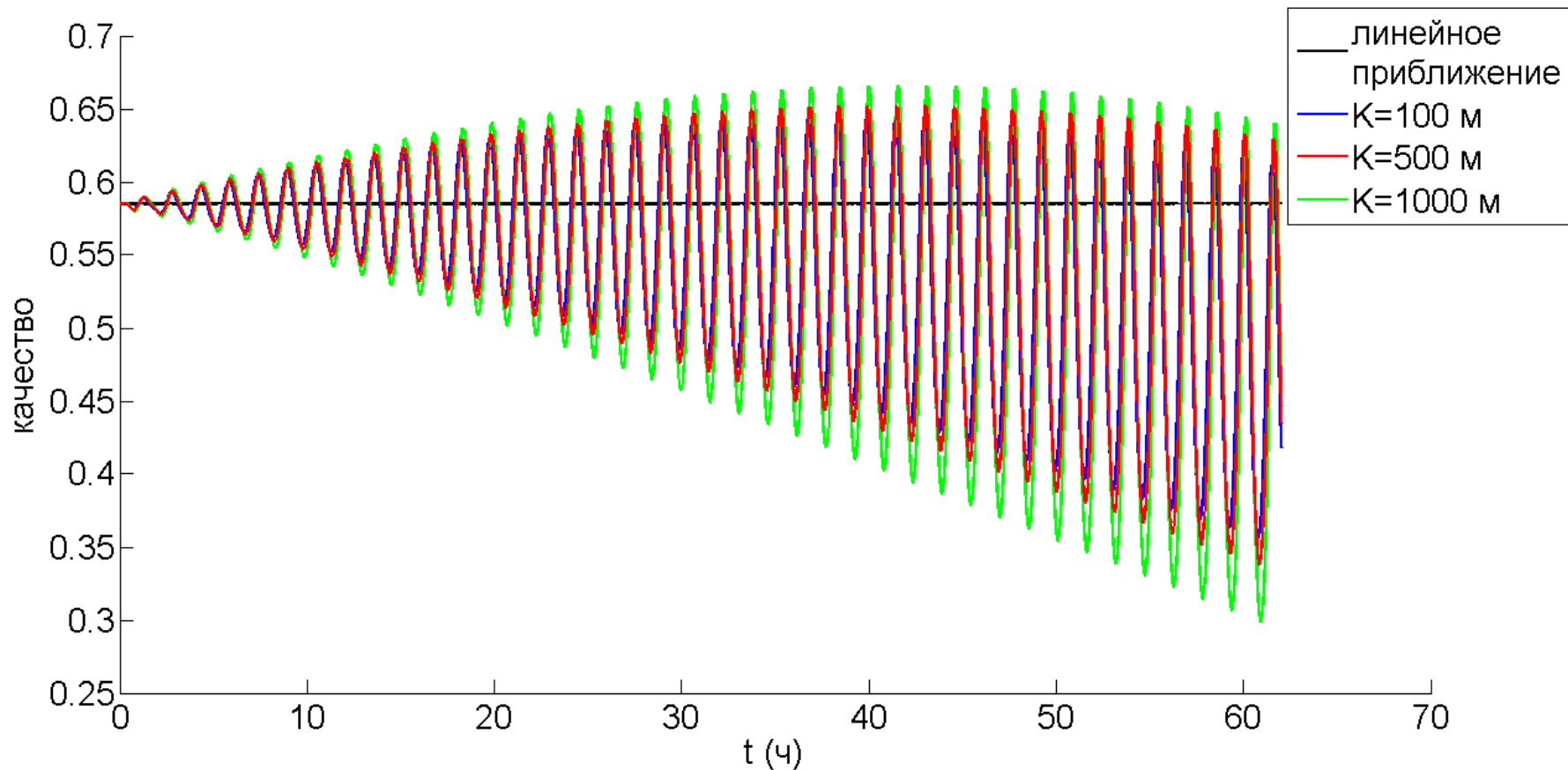
$$\mathbf{D} = aK \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} + bK \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = -bK \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/3 \end{pmatrix} + aK \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$a = 0, \quad b = \pm\sqrt{5}, \quad c = \pm K\sqrt{\frac{5}{3}}$$

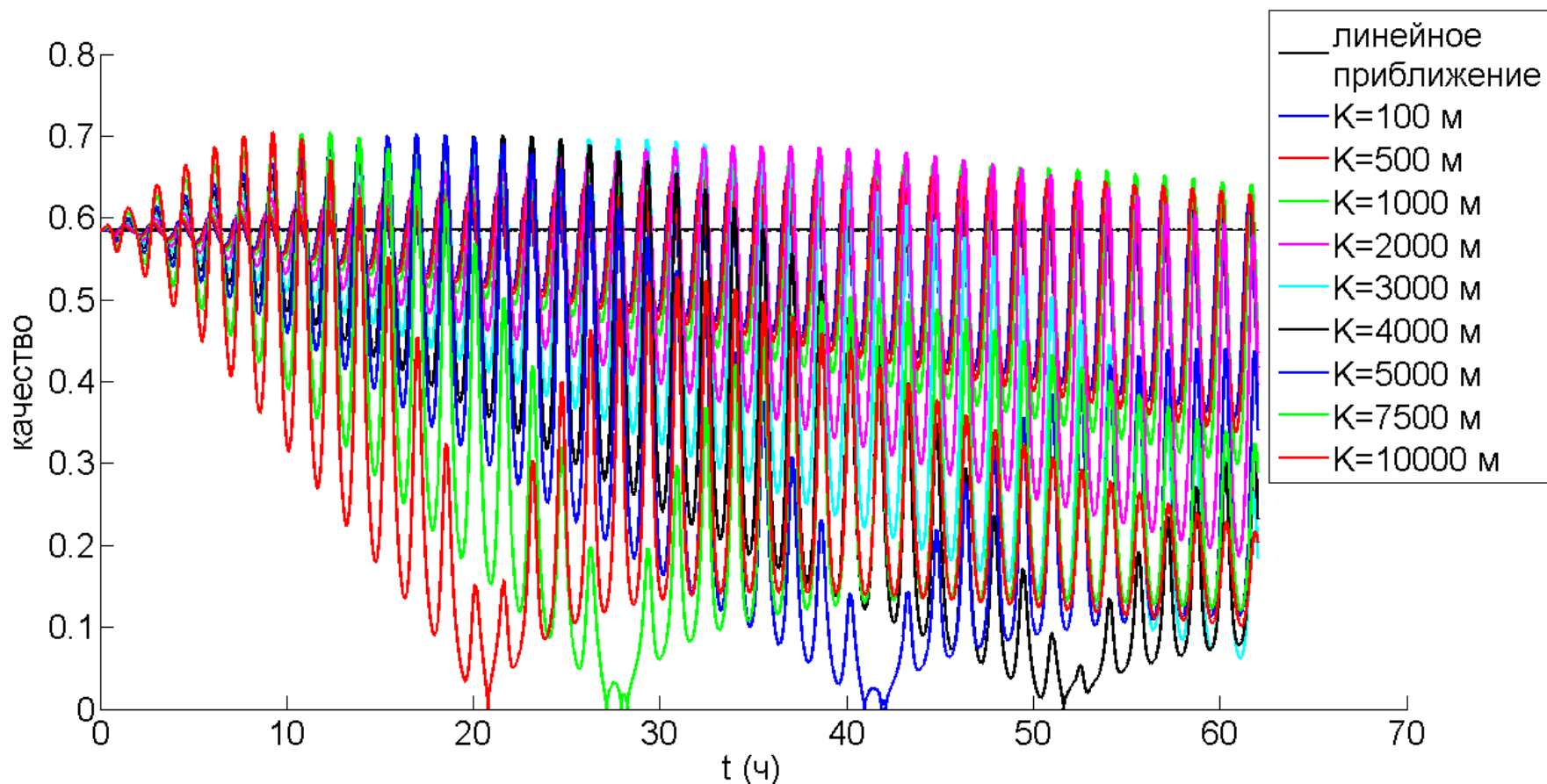
$$\mathbb{Q}_{\max} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$



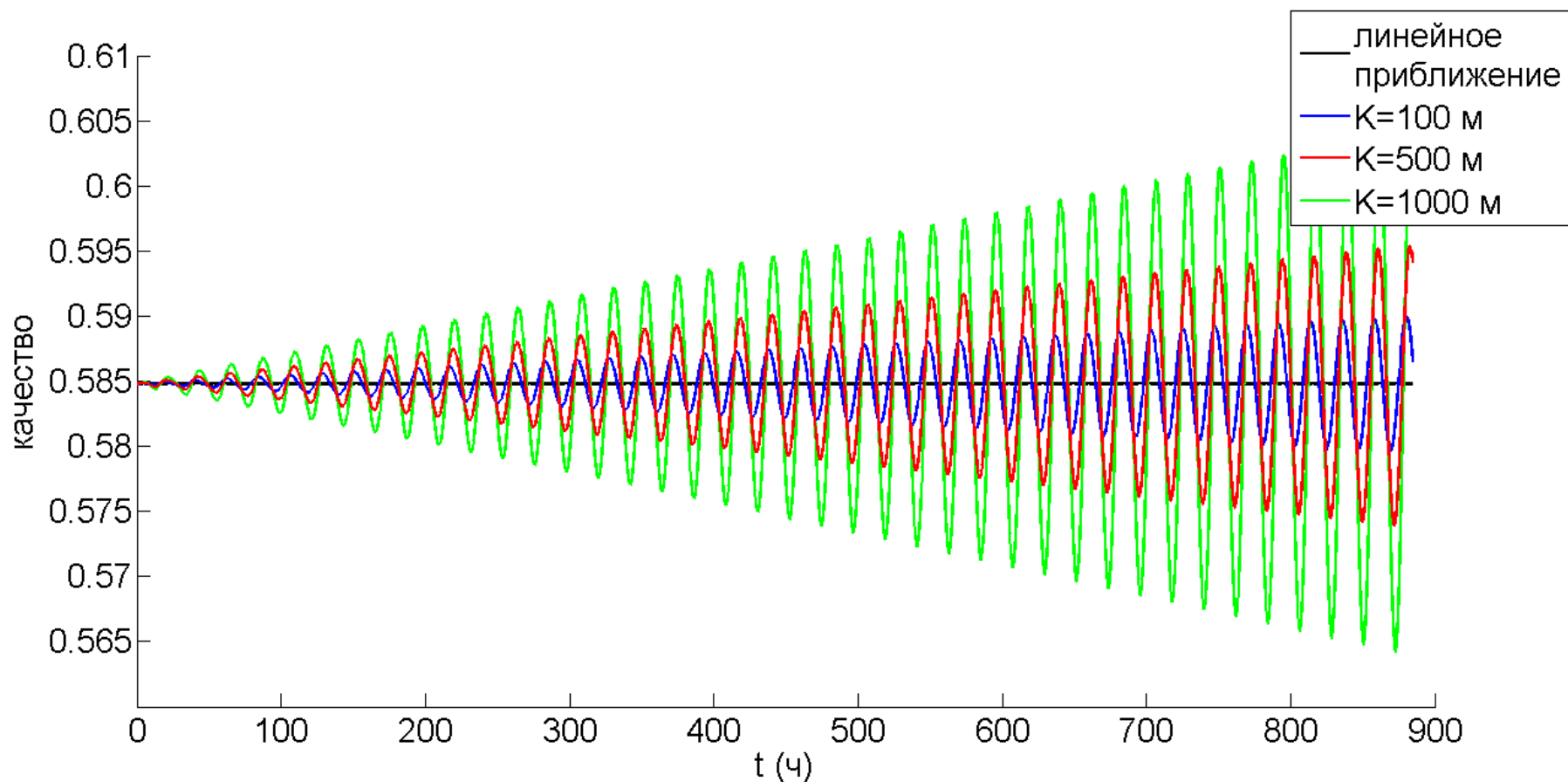
Эволюция качества, $e=0$, $R=6800$ км



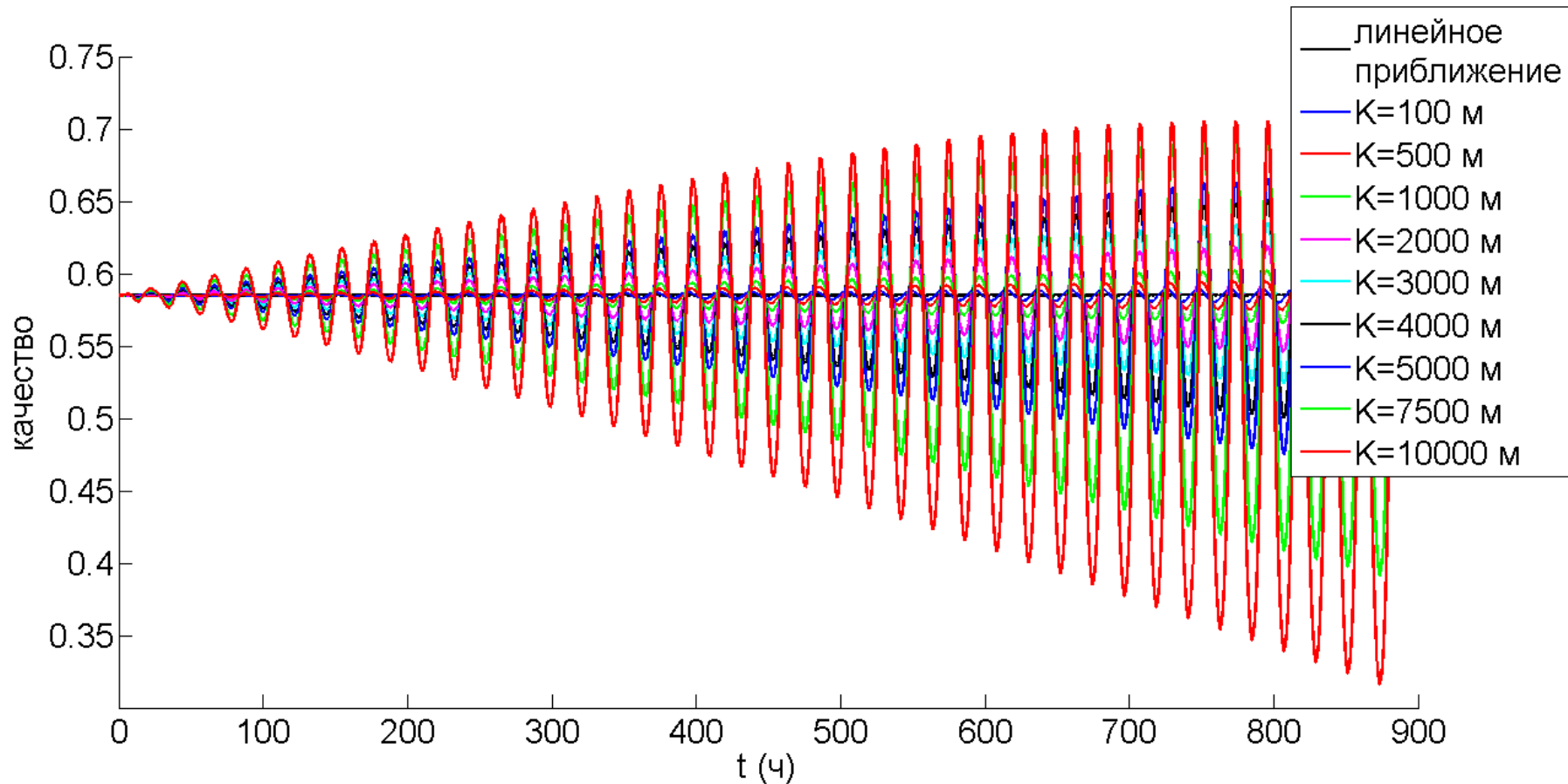
Эволюция качества, $e=0$, $R=6800$ км



Эволюция качества, $e=0$, $R=40000$ км



Эволюция качества, $e=0$, $R=40000$ км



Заключение

- Найдены условия, обеспечивающие постоянство размера и формы тетраэдра в линейной модели
- При упрощающем предположении о равенстве амплитуд двух спутников найдены все возможные семейства орбит, удовлетворяющие поставленной задаче
- Приведено сравнение поведения качества тетраэдра для некоторых частных случаев амплитуд

Работа поддержана грантом РФФИ No 16-01-00739.