



Модели геомагнитного поля в задачах ориентации искусственных спутников Земли

А.В. Пичужкина, Д.С. Ролдугин

Московский физико-технический институт

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Содержание

- Системы координат
- IGRF (International geomagnetic reference field) и WMM (World magnetic model)
- Дипольная модель
 - Наклонный диполь
 - Прямой диполь
- Осредненная модель
- Сравнение моделей

Системы координат

- $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ – инерциальная система, $O_a Y_1$ направлена в восходящий узел орбиты спутника;
- $O_a J_1 J_2 J_3$ – инерциальная система J2000, $O_a J_1$ направлена в точку весеннего равноденствия эпохи 2000.0;
- $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ – инерциальная система, полученная из системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ поворотом на некоторый угол вокруг оси $O_a Y_1$
- $O_a S_1 S_2 S_3$ – система, связанная с положением орбиты спутника в инерциальном пространстве;
- $O X_1 X_2 X_3$ – орбитальная система координат с центром в центре масс спутника;
- $O x_1 x_2 x_3$ – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Разложение поля в ряд Гаусса: IGRF и WMM

$$V = -R \sum_{i=1}^k \left(\frac{R}{r} \right)^{i+1} \sum_{n=0}^m \left(g_n^m(t) \cos m\lambda_0 + h_n^m(t) \sin m\lambda_0 \right) P_n^m(\cos \vartheta_0), \quad \mathbf{B} = \mu_0 \nabla V$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ КЗ} \cdot \text{М} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{С}^{-2}$$

λ_0 – долгота точки, в которой определяется вектор напряженности

$\vartheta_0 = 90^\circ - \theta_0$, θ_0 – ее широта

r – расстояние от центра Земли

P_n^m – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра

R – средний радиус Земли

Дипольная модель

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_e}{r^5} \mathbf{k} r^2 - 3 \mathbf{k} \mathbf{r} \mathbf{r}$$

Наклонный диполь:

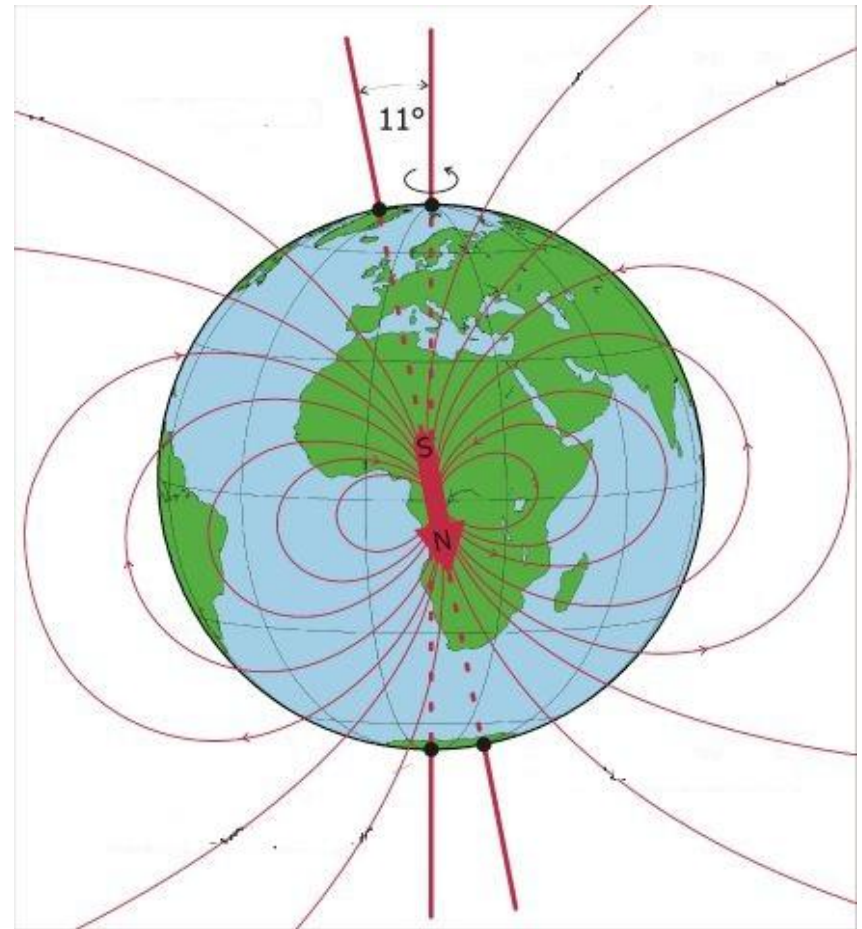
$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 \sin \delta \\ \sin \lambda_0 \sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix}^T$$

$$\delta = 10.26^\circ \quad \lambda_0 = -71.88^\circ$$

Прямой диполь:

$$\mathbf{k} = (0, 0, -1)$$

$$\delta = 0 \quad \lambda_0 = 0$$



Наклонный диполь

описывает поле диполя, наклоненного под углом около 10-12 градусов к оси вращения Земли и направленного антипараллельно ей

$$\mathbf{B}_{ИСК} = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \sin \lambda \sin \delta - 3\xi \cos u \\ -\cos \lambda \sin \delta + 3\xi \cos i \sin u \\ \cos \delta - 3\xi \sin i \sin u \end{pmatrix}$$

$$\delta \approx 10.26^\circ$$

$$\lambda = \omega_3 t + \lambda_0$$

ω_3 – угловая скорость вращения Земли

$$\xi = \cos u \sin \delta \sin \lambda - \sin u \cos i \sin \delta \cos \lambda + \sin u \cos \delta \sin i$$

Прямой диполь

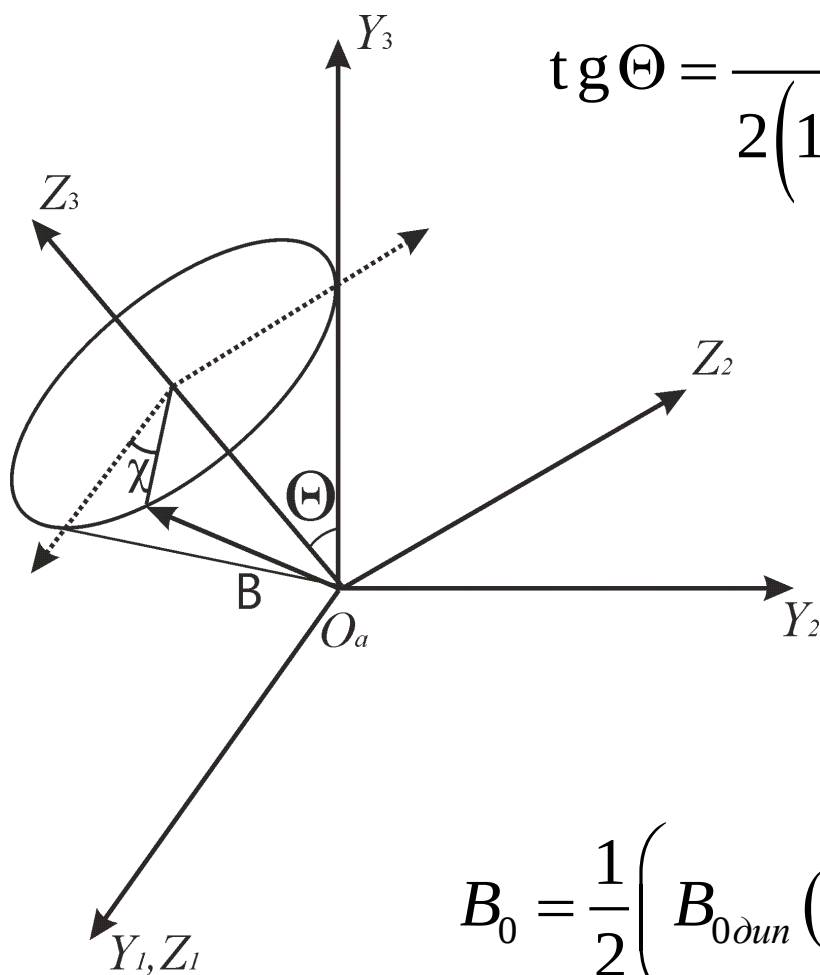
геомагнитное поле моделируется полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения

$$\mathbf{B}_{ИСК} = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \sin i \sin 2u \\ -\frac{3}{2} \sin 2i \sin^2 u \\ 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_{ОСК} = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \cos u \sin i \\ \cos i \\ -2 \sin u \sin i \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \frac{\mu_e}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}, \text{ где } \mu_e = 7.812 \cdot 10^6 \text{ км}^3 \cdot \text{кГ} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$$

Осредненная модель

вектор индукции имеет постоянную длину и равномерно движется по поверхности кругового конуса



$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2 \left(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i} \right)}$$

$$\mathbf{B}_{OCK} = B_0 \begin{pmatrix} \sin i \cos u \\ \cos i \\ -\sin i \sin u \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{ИСК} = B_0 \begin{pmatrix} \sin \Theta \sin \chi \\ \sin \Theta \cos \chi \\ \cos \Theta \end{pmatrix}$$

$$B_0 = \frac{1}{2} \left(B_{0\partial un} (0) + B_{0\partial un} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\mu_e}{2r^3} \left(1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i} \right)$$

Сравнение

Осредненная модель

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{2r^3} \left(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{2r^3} \left(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2\Theta \\ 1 - 2\sin^2 \Theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{2r^3} \left(1 + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Прямой диполь

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}\sin 2i \\ 1 - 3\sin^2 i \end{pmatrix}$$

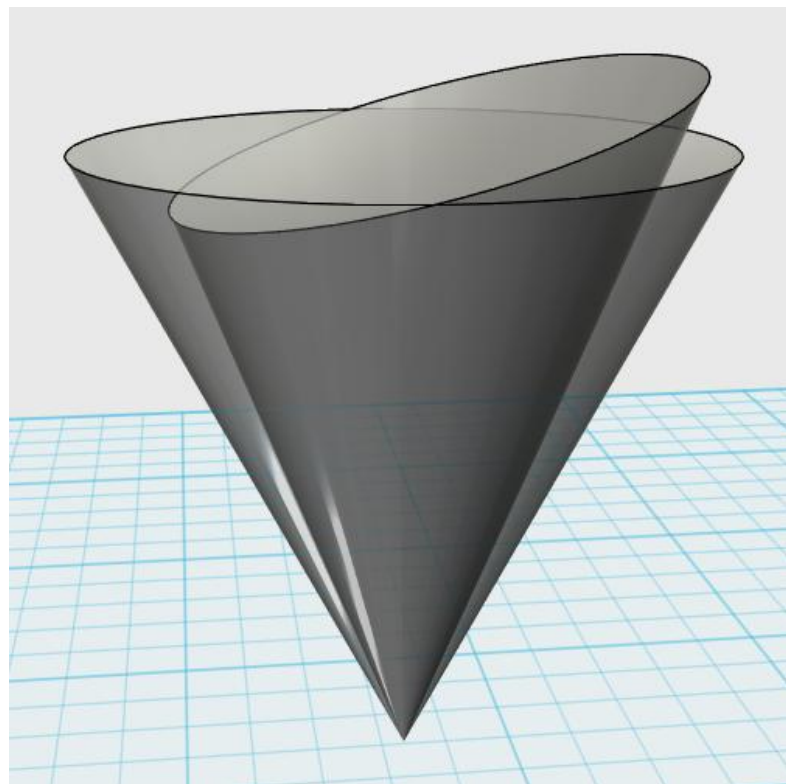
$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u = 0$$

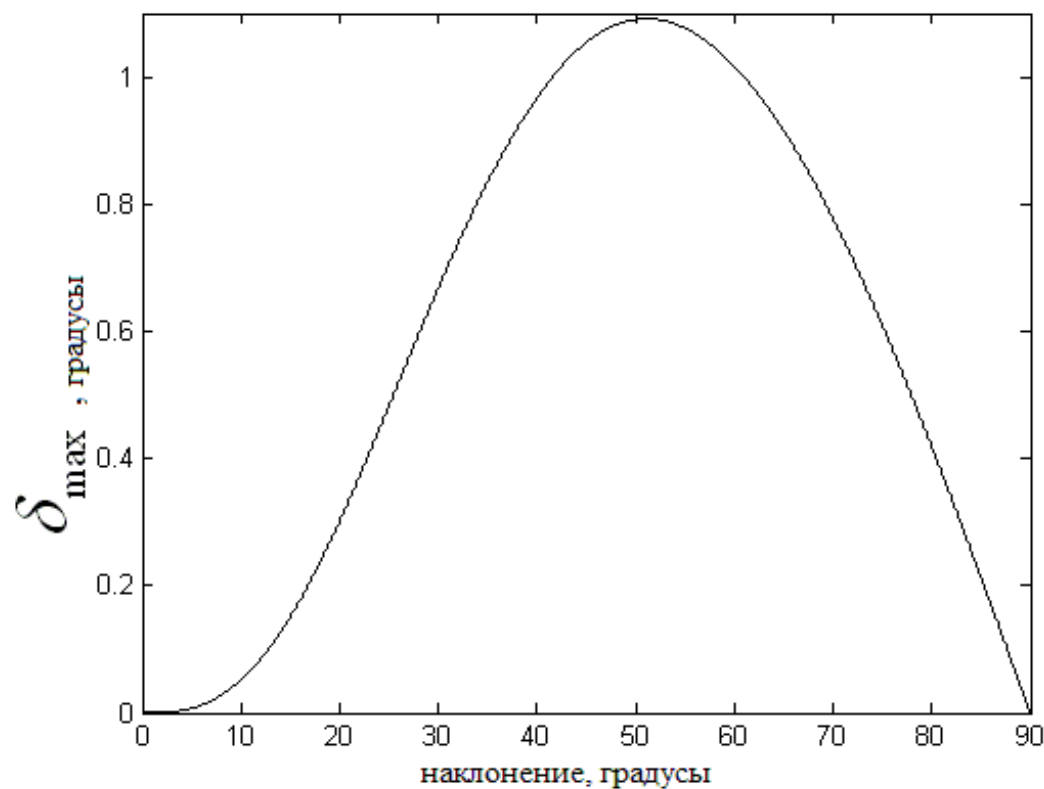
$$u = \frac{\pi}{2}$$

$$u = \pi$$

Сравнение конусов



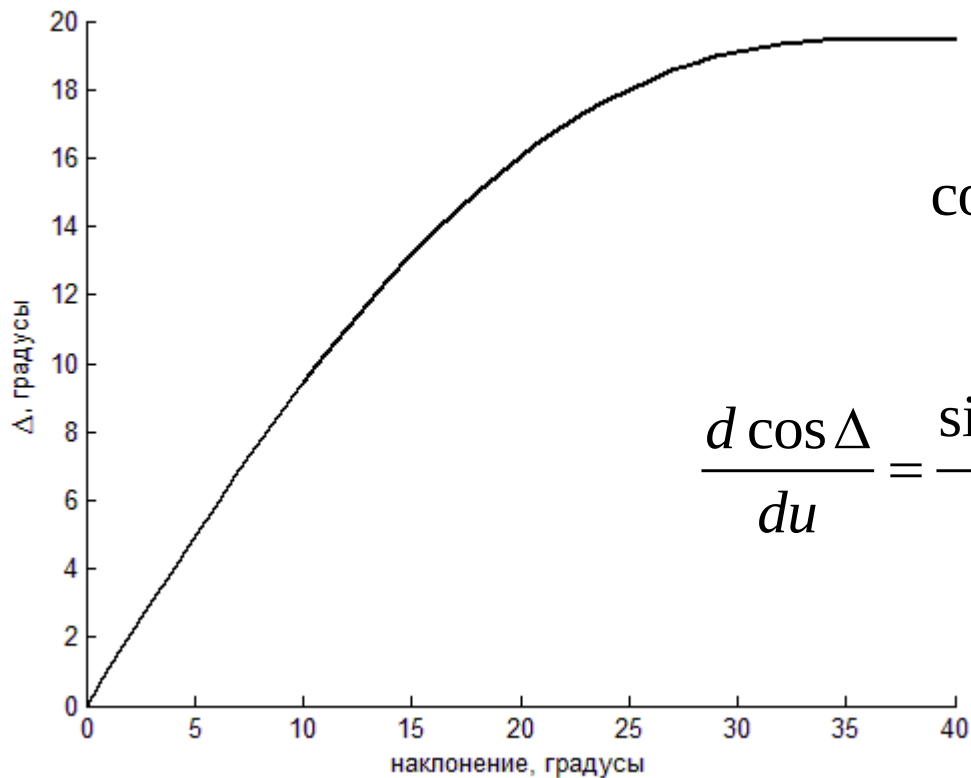
Конусы прямого диполя
и осредненного поля



Максимальное отклонение
вектора геомагнитной индукции
в дипольной модели от конуса
осредненной модели

Движение вектора индукции

Угловое расстояние Δ между векторами геомагнитной индукции в модели прямого диполя и осредненной при движении спутника по орбите



$$\cos \Delta = \frac{1 + \sin^2 i \sin^2 u}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}}$$

$$\frac{d \cos \Delta}{du} = \frac{\sin^2 i \sin u \cos u (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1)}{(1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}$$

Спасибо за внимание