



Факультет управления и прикладной математики



Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Динамика и управление движением космических аппаратов

Исследование устойчивости двух околорунных орбит и сравнение затрат топлива на их поддержание

Студент: А.А. Целоусова^{1,2}

Научный руководитель: к.ф.-м.н. М.Г. Широбоков¹

Научный консультант: к.ф.-м.н. С.П. Трофимов¹

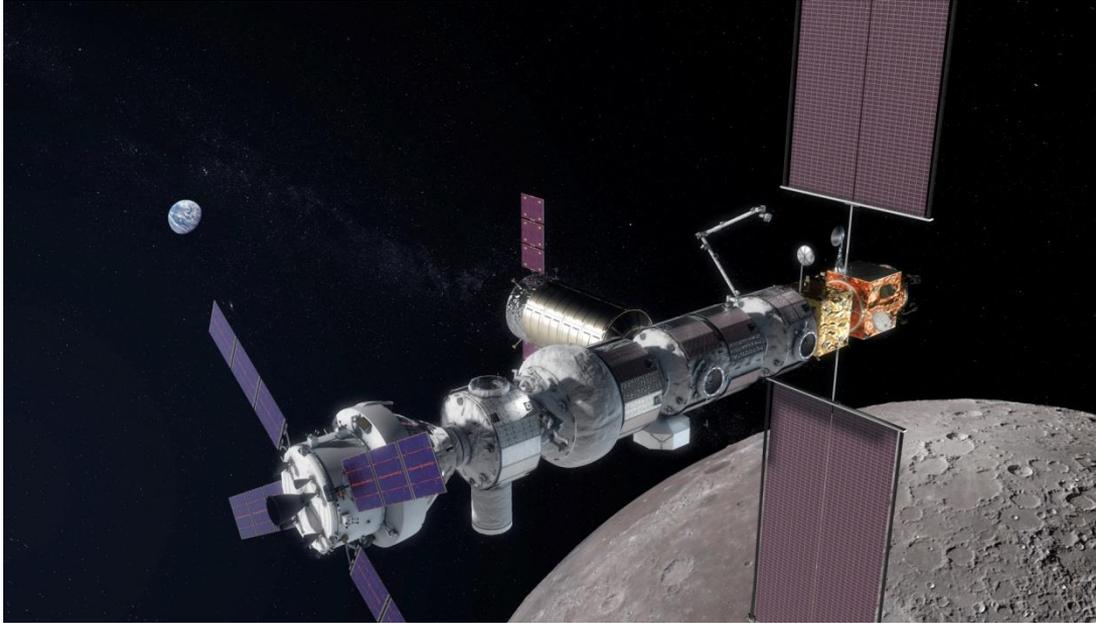
¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

²Московский физико-технический институт

Содержание

- Введение
- Устойчивость высоких почти круговых орбит
- Поддержание высоких почти круговых орбит
- Заключение

Lunar Orbital Platform-Gateway

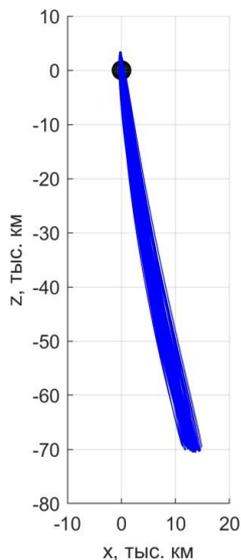
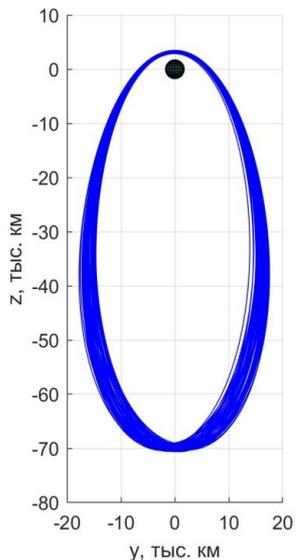


Credit: NASA

- Изучение Луны и дальнего космоса
- Платформа для будущих пилотируемых и роботизированных лунных миссий
- Промежуточный пункт для межпланетных миссий

Почти прямолинейные гало-орбиты

Почти прямолинейные гало-орбиты (Near Rectilinear Halo-Orbits, NRHO) – гало-орбиты системы трех тел Земля – Луна с перицентральной дистанцией менее 20 тыс. км



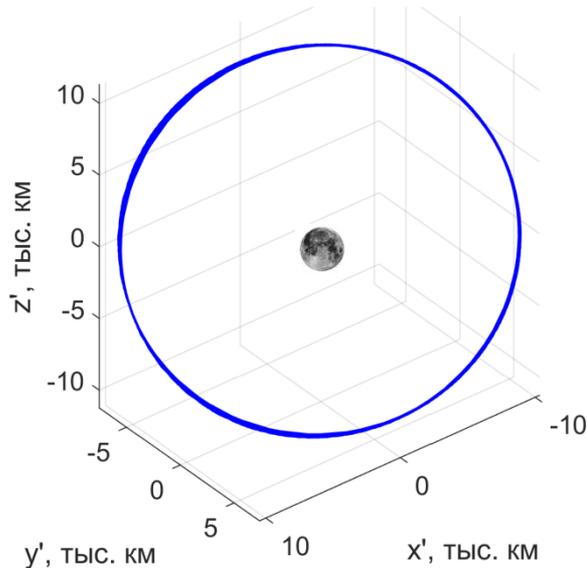
- Хорошие условия освещенности и радиовидимости
- Орбитально неустойчивы, но при достаточно частых коррекциях требуют относительно низких затрат на поддержание
- Условия видимости любого участка на Луне примерно стационарны
- Апоселений расположен над южным полюсом Луны

Южная NRHO-орбита L2 9:2 ($r_p = 3141$ км, $T = 6.652$ дней)

(Стандартная вращающаяся система координат задачи трех тел)

Высокие круговые околополярные орбиты

Высокие почти круговые околополярные орбиты вокруг Луны
рассматриваются в качестве альтернативы NRHO

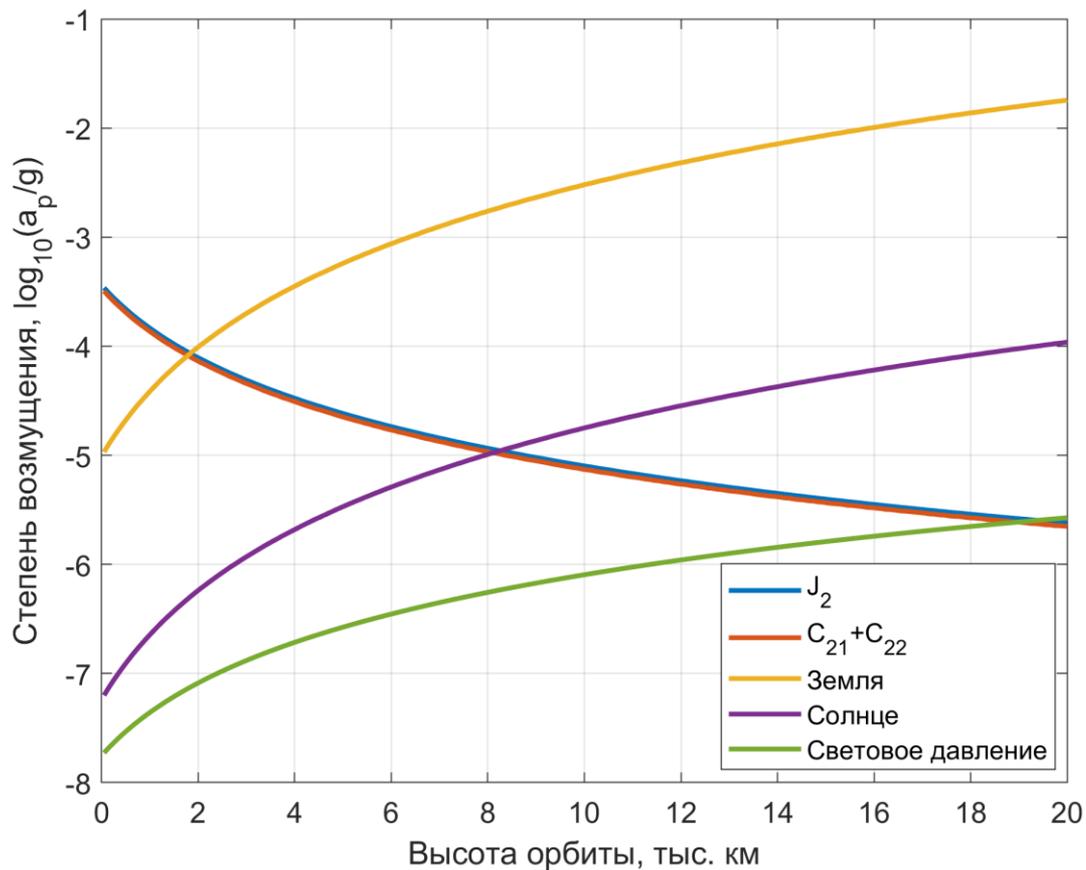


- Условия видимости полярных областей примерно те же, что для NRHO
- В отличие от NRHO такие орбиты являются орбитально устойчивыми
- Затраты на быстрые перелеты с низких околоземных орбит чуть меньше, чем для NRHO

Высокая круговая орбита ($h = 10$ тыс. км, $T = 1.33$ дня)

(Селеноцентрическая инерциальная система координат)

Возмущения для орбит разной высоты



Постановка задачи

Исследовать устойчивость орбиты (в смысле эволюции средних орбитальных элементов) со следующими параметрами:

- большая полуось $a = 11\,738$ км (высота 10 тыс. км)
- наклонение $i = 90^\circ$ относительно лунного экватора
- эксцентриситет $e = 0$

При наличии нежелательных вековых дрейфов оценить годовые затраты характеристической скорости на поддержание орбиты

Возмущенная задача двух тел

- Канонические переменные задачи двух тел (элементы Делоне):

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} l \\ g \\ h \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} l \text{ — истинная аномалия} \\ g \text{ — аргумент перицентра} \\ h \text{ — долгота восходящего узла} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} L \\ G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu a} \\ L\sqrt{1-e^2} \\ G \cos i \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}_K = -\frac{\mu^2}{2L^2}$$

- Вращающаяся система координат и учет возмущений от третьего тела:

$$\begin{array}{l} \mathcal{H}_C = -n_E H, \quad \sim \varepsilon \\ \mathcal{H}_{3b} = \frac{kn_E^2 r^2}{2} \{3[\cos \nu + g \cos h - \sin \nu + g \sin h \cos i]^2 - 1\} \quad \sim \varepsilon^2 \end{array} \quad \left| \quad \varepsilon = \frac{n_E}{n} \right.$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_C + \mathcal{H}_{3b} \equiv \mathcal{H}_0 + \varepsilon \mathcal{H}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathcal{H}_2$$

Метод преобразований Ли-Депри

- Каноническое преобразование $\varphi : (y, \mathbf{Y}) \rightarrow (x, \mathbf{X})$

$$\mathcal{H}(x, \mathbf{X}; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_n^0(x, \mathbf{X}) \longrightarrow \mathcal{H}'(y, \mathbf{Y}; \varepsilon) = \sum_{n=0}^k \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_0^n(\mathbf{Y}) + \sum_{n > k} \frac{\varepsilon^n}{n!} \mathcal{H}_0^n(y, \mathbf{Y})$$

- Метод Ли-Депри: $W(x, \mathbf{X}; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} W_{n+1}(x, \mathbf{X})$

$$\begin{array}{l} \mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_W^n(\mathbf{y}) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_{(-W)}^n(\mathbf{x}) \\ \mathbf{X} = \mathbf{Y} + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_W^n(\mathbf{Y}) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{X} + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} L_{(-W)}^n(\mathbf{X}) \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} L_W = \{-; W\}, L_{(-W)} = \{-; -W\} \\ \{-; -\} \text{ – скобки Пуассона} \end{array} \right.$$

Производящую функцию можно найти из рекуррентной формулы

$$\boxed{\mathcal{H}_j^i = \mathcal{H}_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j C_j^k \{\mathcal{H}_{j-k}^{i-1}; W_{k+1}\}} \Leftrightarrow \boxed{\{W_n; \mathcal{H}_0^0\} = \mathcal{Q}_n - \mathcal{H}_0^n} \quad \left| \begin{array}{l} i \geq 1, j \geq 0, C_j^k = \frac{j!}{k!(j-k)!} \\ n \geq 1 \end{array} \right.$$

Двукратно осредненные уравнения движения

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}} = 0, \\ \dot{\bar{e}} = \frac{15kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2}} \bar{e} \sqrt{1 - \bar{e}^2} \sin^2 \bar{i} \sin 2\bar{\omega}, \\ \dot{\bar{i}} = -\frac{15kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{16\mu^{1/2}} \frac{\bar{e}^2}{\sqrt{1 - \bar{e}^2}} \sin 2\bar{i} \sin 2\bar{\omega}, \\ \dot{\bar{\Omega}} = \frac{3kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2} \sqrt{1 - \bar{e}^2}} (5\bar{e}^2 \cos 2\bar{n}_E - 3\bar{e}^2 - 2) \cos \bar{i}, \\ \dot{\bar{\omega}} = \frac{3kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2} \sqrt{1 - \bar{e}^2}} \left[(5 \cos^2 \bar{i} - 1 + \bar{e}^2) + 5 (1 - \bar{e}^2 - \cos^2 \bar{i}) \cos 2\bar{\omega} \right], \\ \dot{\bar{M}} = \frac{\mu^{1/2}}{\bar{a}^{3/2}} - \frac{kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{8\mu^{1/2}} \left[(3\bar{e}^2 + 7) (3 \cos^2 \bar{i} - 1) + 15 (1 + \bar{e}^2) \sin^2 \bar{i} \cos 2\bar{\omega} \right] \end{cases}$$

Первые интегралы:

$$C_1 = (1 - \bar{e}^2) \cos^2 \bar{i},$$

$$C_2 = \bar{e}^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \bar{i} \sin^2 \bar{\omega} \right)$$

Система интегрируется
в квадратурах

При $\bar{i} = 90^\circ \rightarrow C_1 = 0$

Удобно перейти к переменным $\bar{e}_x = \bar{e} \cos \bar{\omega}$, $\bar{e}_y = \bar{e} \sin \bar{\omega}$

Фазовый портрет линеаризованной системы

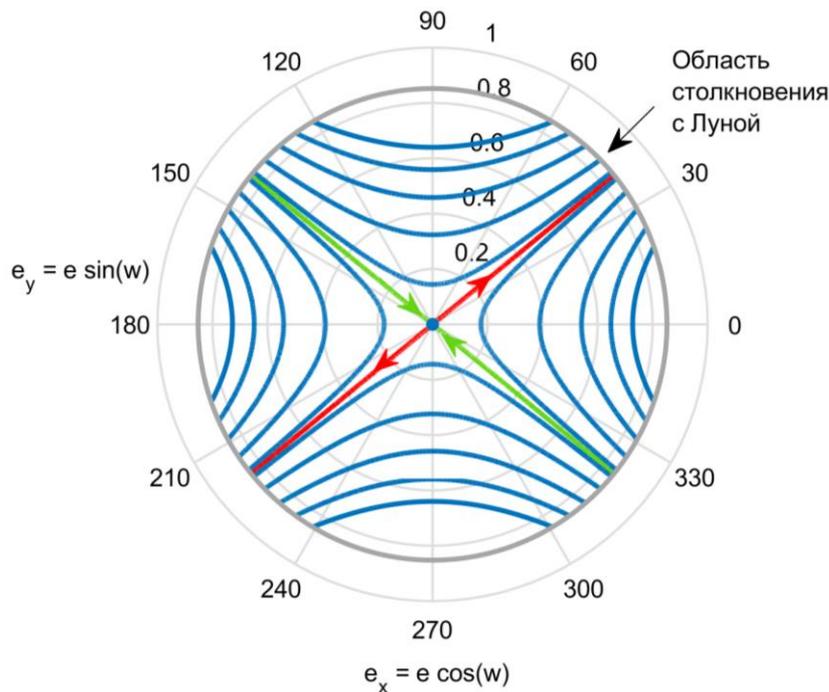
$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_x = 6B\bar{e}_y \sqrt{1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}, \\ \dot{\bar{e}}_y = 4B\bar{e}_x \sqrt{1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2} \end{cases}$$

Характеристические показатели
нулевого положения равновесия:

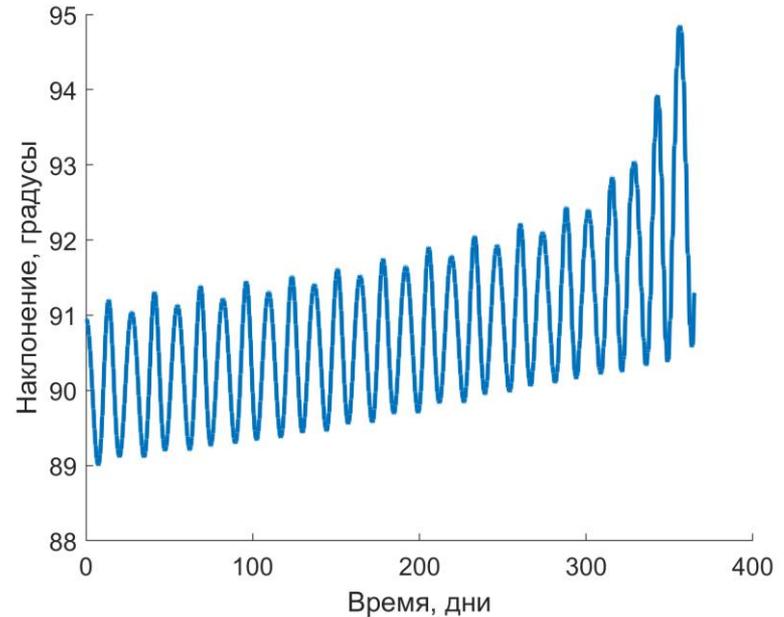
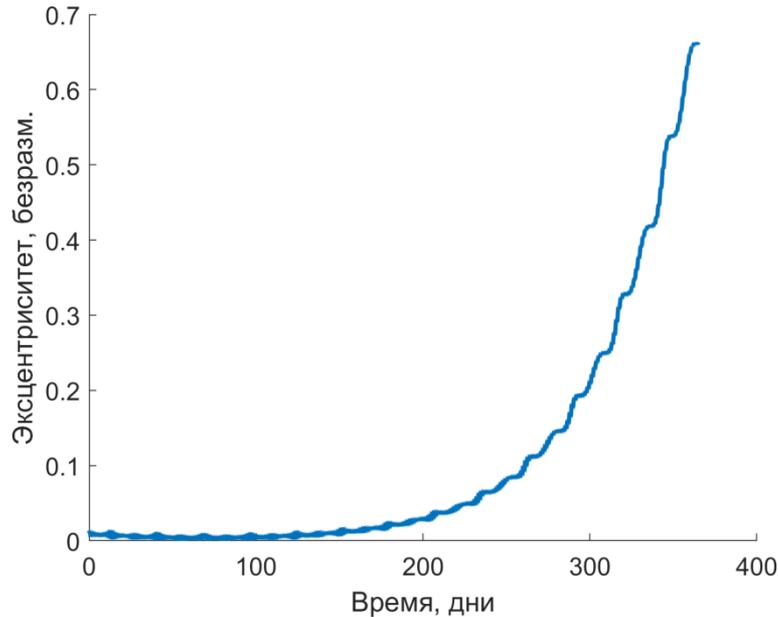
$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{24B} = \pm 2.33 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$$

Характеристическое время системы:

$$1/\lambda_1 = 4.29 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 50 \text{ дней}$$



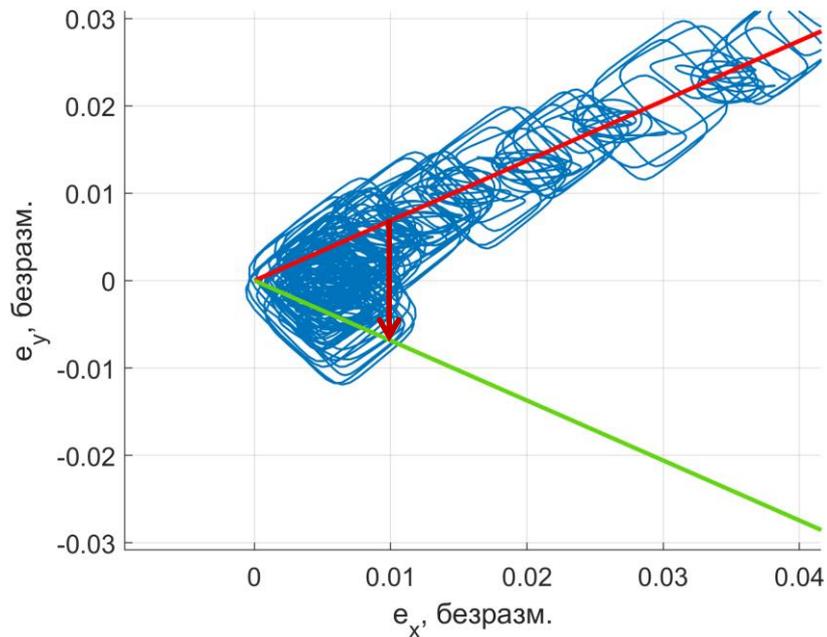
Эволюция оскулирующих элементов орбиты при отсутствии коррекций



Начальные значения оскулирующих элементов:

$a = 11745$ км, $e = 0.01$, $i = 90.95^\circ$, $\Omega = 0^\circ$, $\omega = 342.75^\circ$, $M = 338.22^\circ$

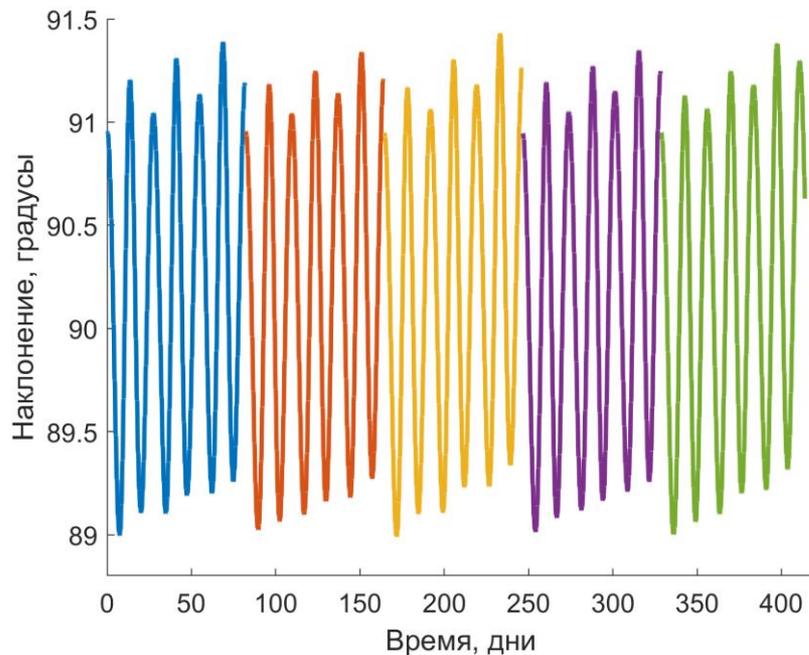
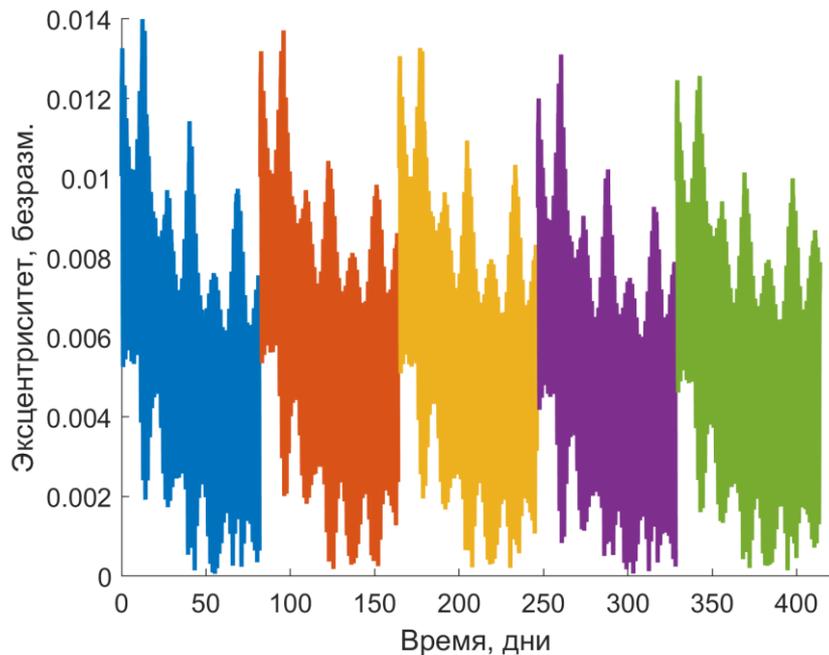
Поддержание высоких почти круговых околополярных орбит



- Номинальные оскулирующие элементы соответствуют устойчивому многообразию двукратно осредненных уравнений
- С некоторой периодичностью двухимпульсная коррекция

$$J(\Delta v_1, \Delta v_2) = \Delta v_1 + \Delta v_2 \longrightarrow \min$$

Эволюция оскулирующих элементов при применении алгоритма поддержания



Периодичность коррекций: 81.966 дней

Оценки затрат характеристической скорости в зависимости от периодичности коррекций

Периодичность коррекций, дни	Средние затраты характеристической скорости, м/с/год	Среднеквадратичное отклонение затрат характеристической скорости, м/с/год
54.644	25.088	3.656
81.966	20.547	1.785
109.288	22.190	3.941
136.610	23.923	3.480
163.932	30.528	5.648

Ошибка по положению (3σ): 1 км, по скорости: 1 см/с, относительная ошибка по величине импульса: 1%, по направлению импульса 3° , минимальный импульс: 1.5 мм/с

Соответствующие затраты характеристической скорости для NRHO L_2 9:2: 0.246 ± 0.024 м/с/год

Заключение

- Высокие круговые околополярные орбиты высотой 10 тыс. км неустойчивы: их эксцентриситет в некоторый момент начинает неограниченно расти, в то время как большая полуось в среднем не меняется, что в конечном итоге приводит к столкновению КА с Луной.
- На основании анализа динамики двукратно осредненной системы предложен и реализован алгоритм поддержания таких орбит с учетом навигационных ошибок и ошибок исполнения маневров.
- Годовые затраты характеристической скорости на поддержание составили более 20 м/с, что на один-два порядка выше, чем для почти прямолинейной гало-орбиты L_2 9:2.
- В то же время высокие круговые орбиты можно корректировать раз в несколько месяцев, в то время как почти прямолинейные гало-орбиты необходимо корректировать не реже, чем 1-2 раза в неделю.

- Выступления:

- 59-я Всероссийская научная конференция МФТИ (*Диплом победителя*)
- 60-я Всероссийская научная конференция МФТИ (*Диплом победителя*)
- 61-я Всероссийская научная конференция МФТИ (*Диплом победителя*)
- XLI Академические чтения по космонавтике – 2017, МГТУ им. Баумана
- XLIII Академические чтения по космонавтике – 2019, МГТУ им. Баумана
- XII Летняя Школа "Компьютерные технологии анализа инженерных проблем механики"-2018, НИИ механики МГУ
- IAA SciTech Forum 2018, RUDN University

- Стипендии:

- Повышенная Государственная Академическая Стипендия (ПГАС)

- Публикации:

- Целоусова А.А., Ширококов М.Г., Трофимов С.П. «Сравнение двух прямых методов оптимизации межпланетных траекторий», Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 98. 24 с.
- Trofimov S.P., Tselousova A.A. Shirobokov, M.G. "Two direct low thrust trajectory optimization techniques," Journal of Computer and Systems Sciences International, 2018, Vol. 57, No. 6, pp. 989–1000.
- Trofimov S., Shirobokov M., Tselousova A., Ovchinnikov M. "Transfers between near-rectilinear halo orbits and the Moon," Proceedings of the 69-th international Astronautical Congress, Paper IAC-18.C1.8.10.
- Tselousova A., Shirobokov M., Trofimov S. "High-altitude near-circular orbits for a lunar orbital station," Proceedings of the IAA SciTech Forum 2018, Paper AAS SciTech-062.

- Участие в грантах, контрактах:

- Грант РФФ № 17-71-10242, грант РФФ № 19-11-00256, контракт с ПАО «РКК «Энергия»

Backup

Устойчивость окололунных орбит

Устойчивые (замороженные) орбиты – орбиты, у которых отсутствует вековой дрейф эксцентриситета, наклона и аргумента перицентра

Уравнения движения и системы координат

- **Selenocentric Celestial Reference System (SCRS):**
селеноцентрическая прямоугольная декартова система координат, оси которой максимально близки к осям экваториальной системы эпохи J 2000
- **Mean-Earth/Mean-Rotation System (MER):**
селеноцентрическая вращающаяся система координат, привязанная к средней оси вращения Луны и среднему земному (ориентированному на Землю) меридиану

Уравнения движения записываются в SCRS в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \mu_E \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_E}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^3} + \frac{\mathbf{r}_E}{|\mathbf{r}_E|^3} \right), \end{cases}$$

\mathbf{r} и \mathbf{v} – радиус-вектор и скорость КА,
 μ – гравитационный параметр Луны,
 μ_E – гравитационный параметр Земли,
 \mathbf{r}_E – радиус-вектор Земли.

Двукратно осредненные уравнения движения (2)

$$\bar{i} = 90^\circ \rightarrow \dot{\bar{i}} = 0$$



Система ОДУ второго порядка для \bar{e} и $\bar{\omega}$



Замена переменных: $\bar{e}_x = \bar{e} \cos \bar{\omega}$, $\bar{e}_y = \bar{e} \sin \bar{\omega}$



$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_x = \frac{9kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{4\mu^{1/2}} \bar{e}_y \sqrt{1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2}, \\ \dot{\bar{e}}_y = \frac{3kn_E^2 \bar{a}^{3/2}}{2\mu^{1/2}} \bar{e}_x \sqrt{1 - \bar{e}_x^2 - \bar{e}_y^2} \end{cases}$$

Двукратно осредненная модель движения

М.Л. Лидов [1962], Y. Kozai [1963]:

Уравнения в оскулирующих элементах в предположении, что спутник испытывает возмущения только от третьего тела и это возмущающее тело движется по круговой орбите вокруг центрального, были дважды усреднены:

1. По орбитальному движению космического аппарата (средней аномалии)
2. По орбитальному движению возмущающего тела вокруг центрального (долготе восходящего узла)

Алгоритм поддержания высоких круговых орбит

- Выбор средних элементов орбиты на устойчивом многообразии
- Вычисление соответствующих начальных данных для оскулирующих элементов орбиты
- Оптимальная в плане затрат топлива двухимпульсная коррекция с некоторой периодичностью
- Импульсы одной коррекции выдаются в пределах одного витка КА по орбите
- После подачи второго импульса происходит нацеливание на номинальные оскулирующие элементы в лунной системе координат (MER): $e_{x_0}, e_{y_0}, a_0, M_0, i_0$

τ - момент времени, вблизи которого осуществляется коррекция,
 T - период орбиты, t_1, t_2 - времена подачи импульсов $\Delta v_1, \Delta v_2$

Задача нелинейного программирования:

$$J(\Delta v_1, \Delta v_2) = \Delta v_1 + \Delta v_2 \rightarrow \min$$

Ограничения типа
неравенства:

$$\tau - T/2 + t_1 \leq 0,$$

$$t_2 \geq t_1,$$

$$t_2 - \tau - T/2 \leq 0,$$

Ограничения
типа равенства:

$$e_x(t_2) = e_{x_0},$$

$$e_y(t_2) = e_{y_0},$$

$$a(t_2) = a_0,$$

$$M(t_2) = M_0,$$

$$i(t_2) = i_0,$$

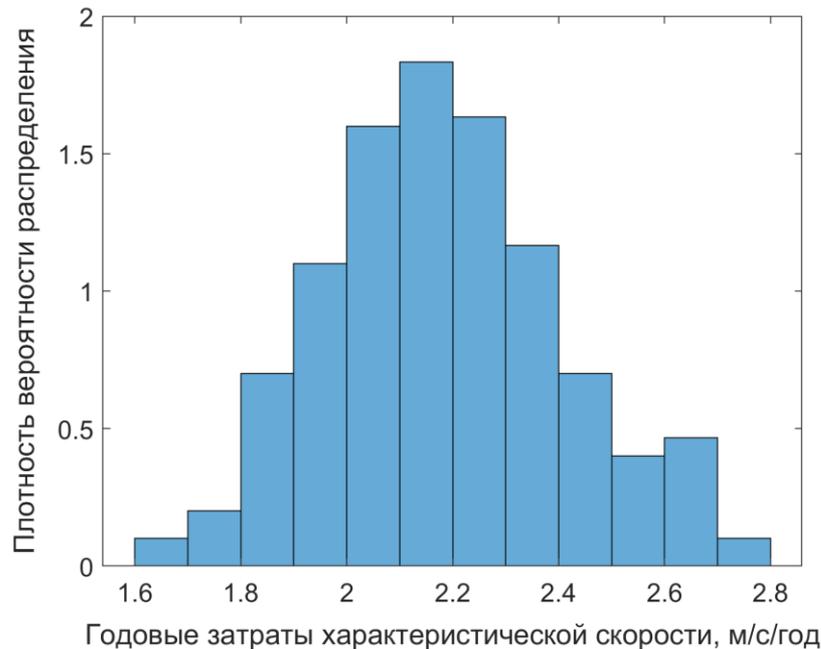
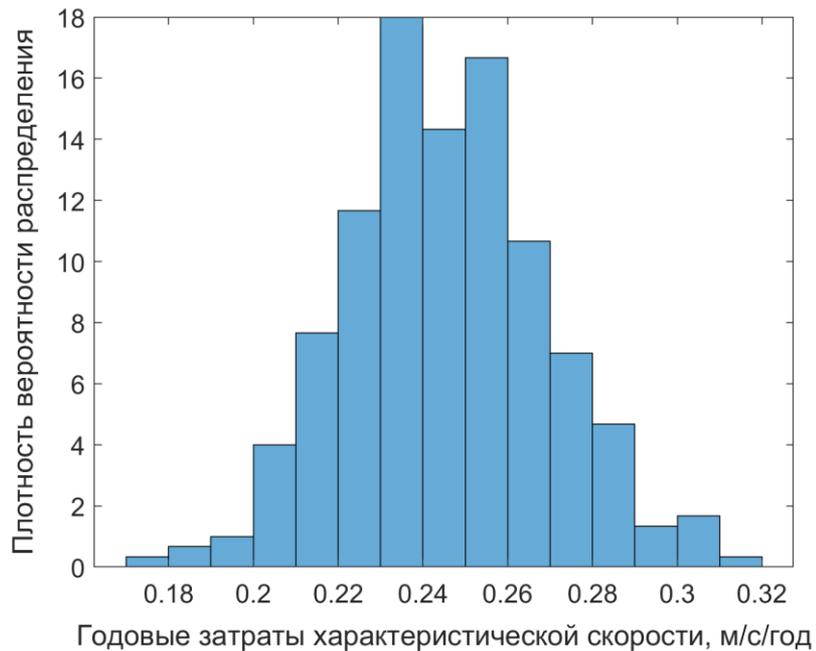


Постановка задачи 2

Оценить годовые затраты характеристической скорости на поддержание орбиты с параметрами

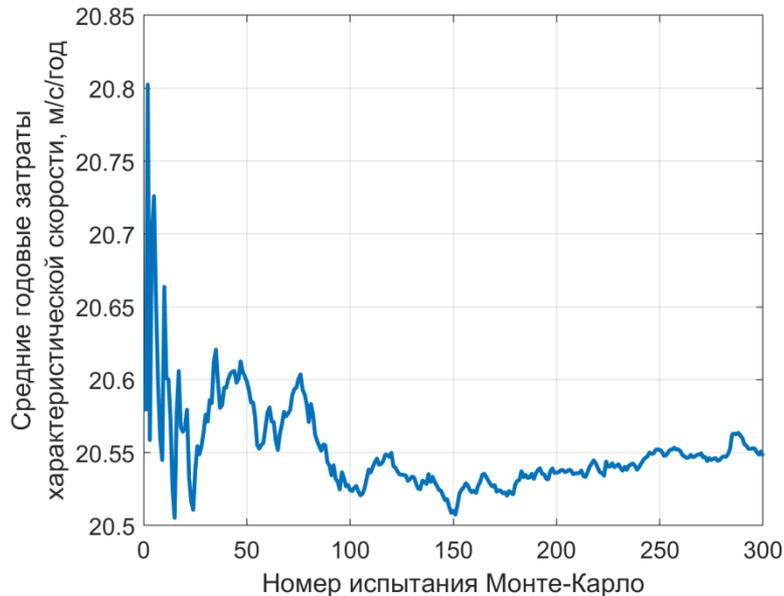
- большая полуось $a = 11\,738$ км (высота 10 тыс. км)
 - наклонение $i = 90^\circ$ (MER)
 - эксцентриситет $e = 0.01$ в точке выхода на орбиту
 - долгота восходящего узла (ДВУ) Ω равна 0 в точке выхода (MER)
 - аргумент перицентра ω в точке выхода выбирается так, чтобы увеличить время существования орбиты без коррекций
- Дата выхода КА на орбиту: 01.01.2028
- На КА действуют центральные гравитационные поля Земли и Луны
- Эфемериды JPL DE430

Оценки затрат характеристической скорости для южной NRHO L2 9:2

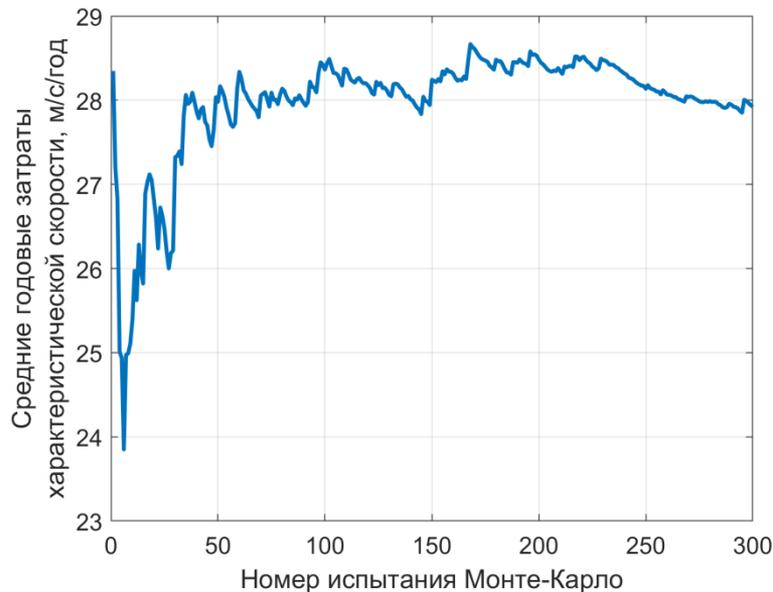


Ошибка по положению (3σ): 10 км, по скорости: 10 см/с, относительная ошибка по величине импульса: 3%, по направлению импульса 3° , минимальный импульс: 1.5 мм/с

Оценки затрат характеристической скорости на поддержание высокой околополярной почти круговой орбиты

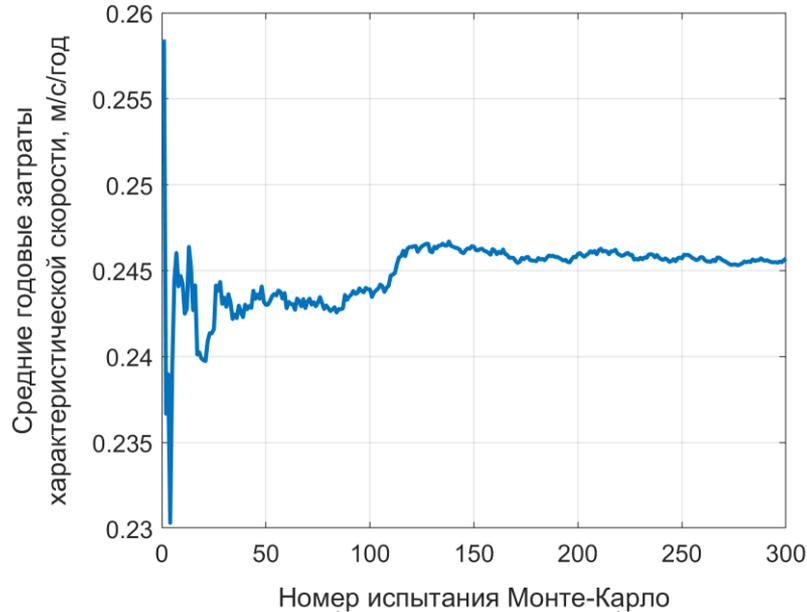


Ошибка по положению (3σ): 1 км, по скорости: 1 см/с, относительная ошибка по величине импульса: 1%, по направлению импульса 1° , минимальный импульс: 1.5 мм/с

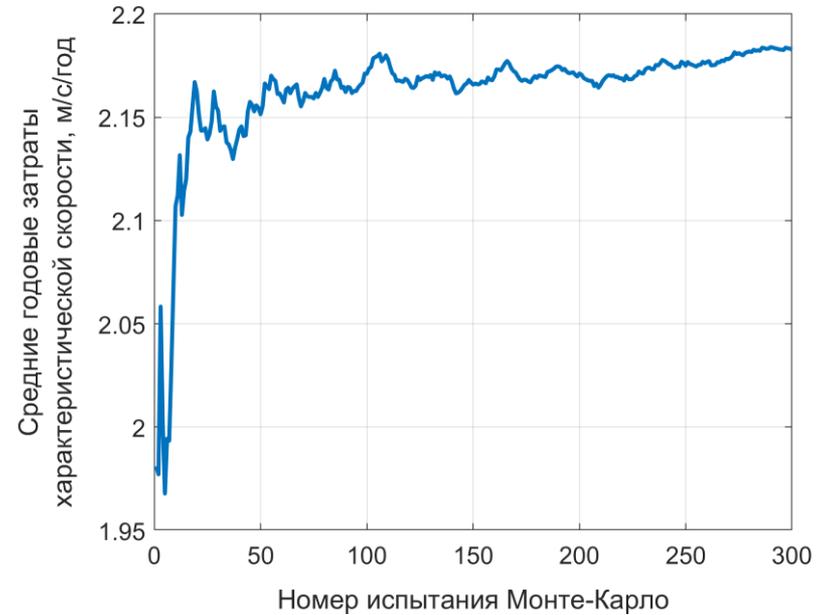


Ошибка по положению (3σ): 10 км, по скорости: 10 см/с, относительная ошибка по величине импульса: 3%, по направлению импульса 3° , минимальный импульс: 1.5 мм/с

Оценки затрат характеристической скорости на поддержание южной NRHO L2 9:2



Ошибка по положению (3σ): 1 км, по скорости: 1 см/с, относительная ошибка по величине импульса: 1%, по направлению импульса 1° , минимальный импульс: 1.5 мм/с



Ошибка по положению (3σ): 10 км, по скорости: 10 см/с, относительная ошибка по величине импульса: 3%, по направлению импульса 3° , минимальный импульс: 1.5 мм/с

Затраты на поддержание и перелеты с низких околоземных орбит

	Высокие круговые орбиты вокруг Луны	NRHO-орбиты
Годовые затраты на поддержание	Более 20 м/с	Менее 2.5 м/с
Затраты на быстрые двухимпульсные перелеты с околоземных орбит	3.79 – 3.89 км/с	3.93 – 4.02 км/с

Радиовидимость и освещенность высоких круговых орбит в сравнении с NRHO-орбитами

	Высокие круговые орбиты вокруг Луны	NRHO-орбиты
Освещенность	Геометрические свойства орбит не позволяют полностью избежать затмений земной и лунной тенью	Для резонансных орбит можно подобрать начальную фазу так, чтобы избежать тени Земли и Луны на протяжении долгого времени
Радиовидимость лунной поверхности	Все точки лунной поверхности наблюдаемы с некоторой периодичностью	Условия видимости любого участка на Луне примерно стационарны
Радиовидимость станции на орбите с поверхности Земли	Паузы в радиовидимости возникают при пролете станции за Луной	Всегда есть прямая видимость станции хотя бы с одного из пунктов дальней космической связи

Поддержание высоких круговых орбит (2)

τ - момент времени, вблизи которого осуществляется коррекция

T - период орбиты

t_1, t_2 - времена подачи импульсов $\Delta v_1, \Delta v_2, t_1, t_2 \in [\tau - T/2; \tau + T/2]$

$$J(\Delta v_1, \Delta v_2) = |\Delta v_1| + |\Delta v_2| \longrightarrow \min$$

$$\Delta v_i = \sqrt{\Delta v_R^2 + \Delta v_T^2 + \Delta v_W^2}, i = \overline{1, 2}$$

Ограничения:

$$e_x(t_2) = e_{x0}$$

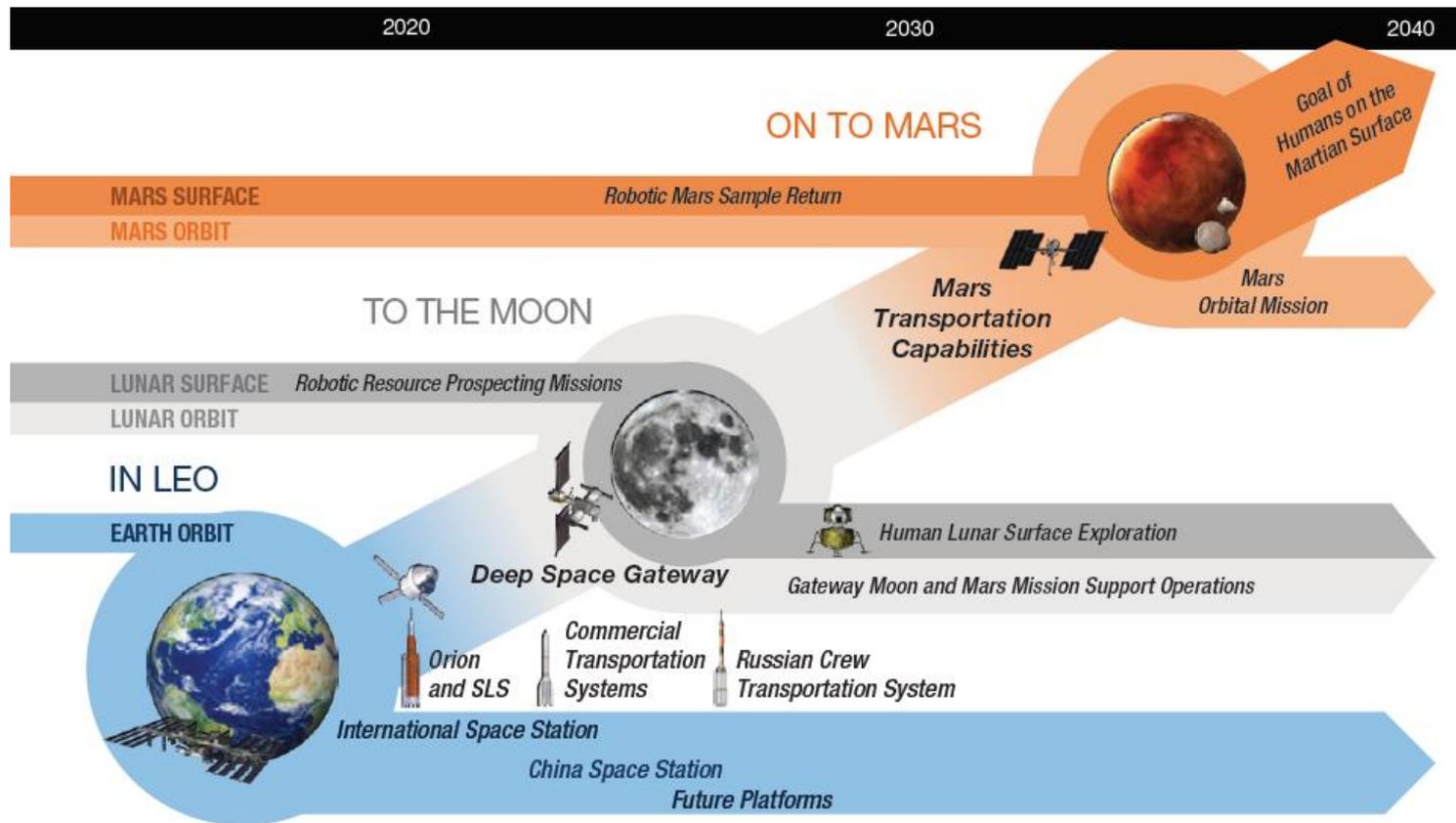
$$e_y(t_2) = e_{y0}$$

$$a(t_2) = a_0$$

$$\vartheta(t_2) = \vartheta_0$$

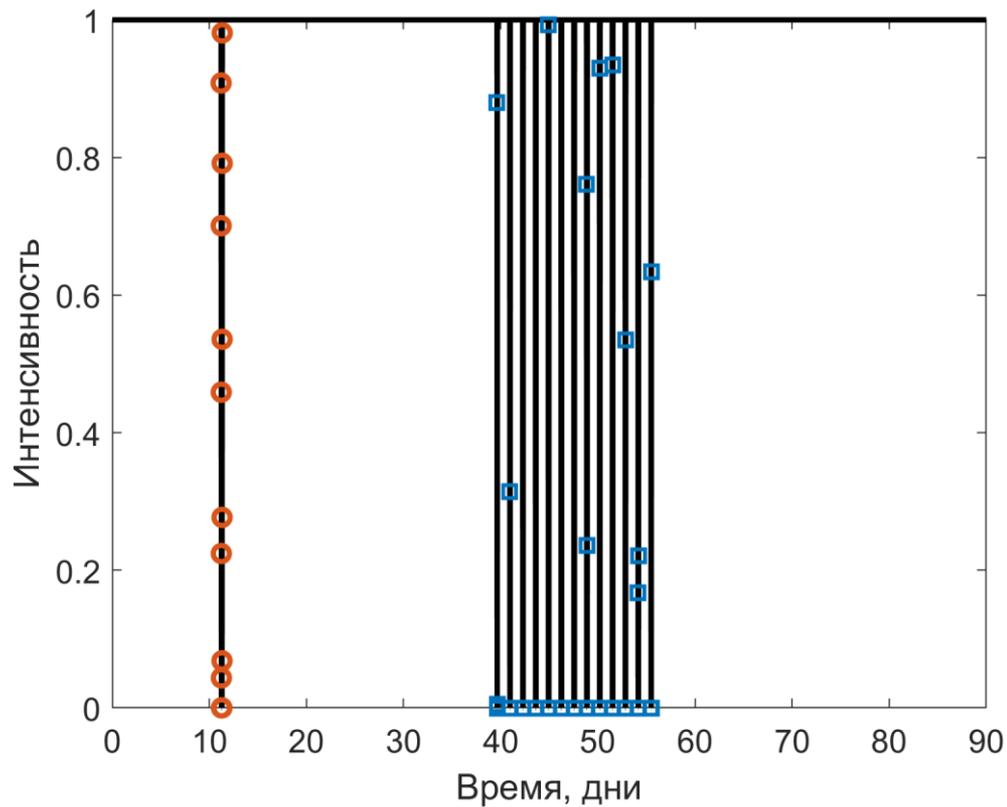
$$i(t_2) = i_0$$

Планы освоения космоса

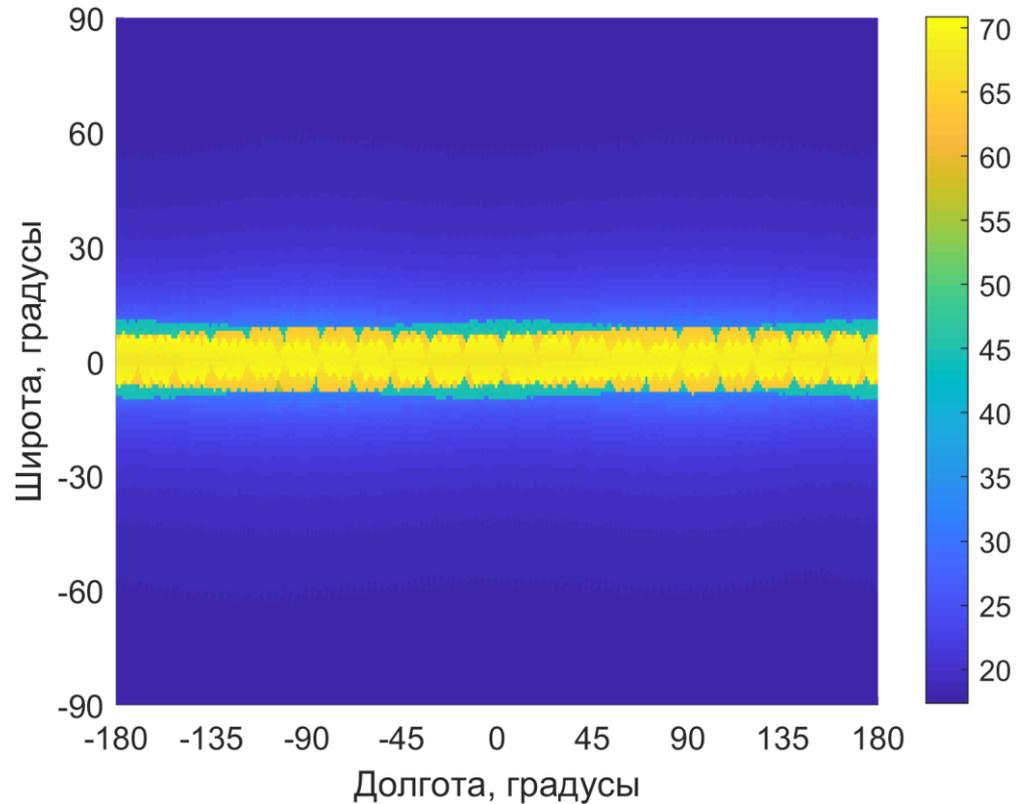


Credit: International Space Exploration Coordination Group

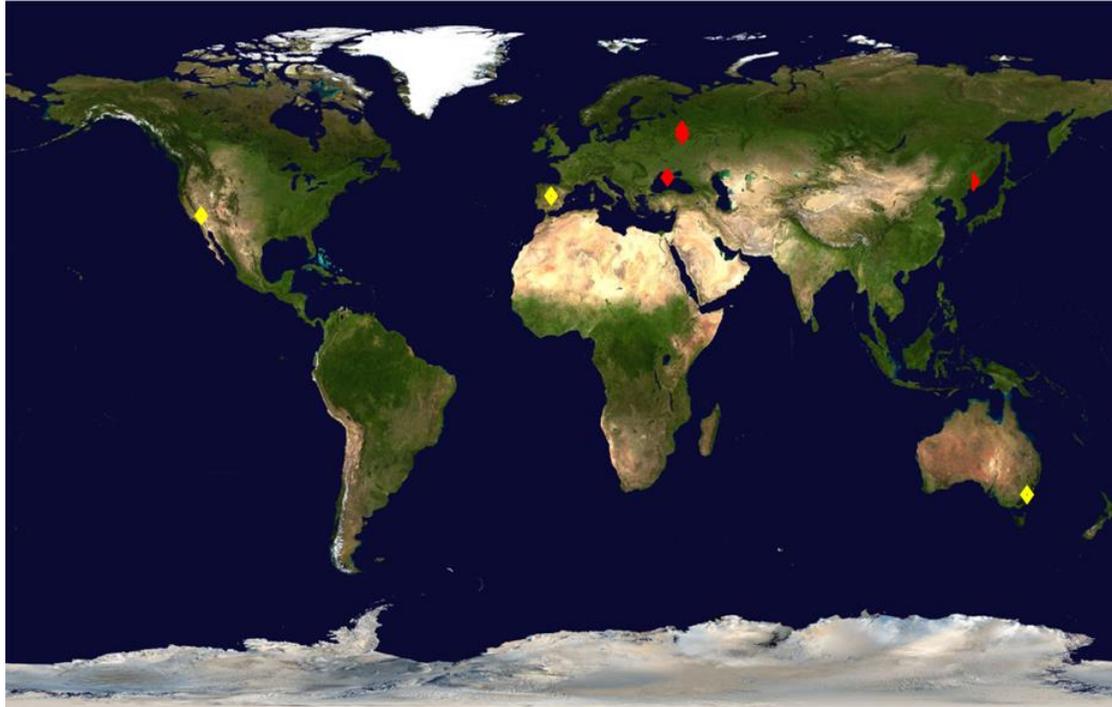
Освещенность



Радиовидимость поверхности Луны

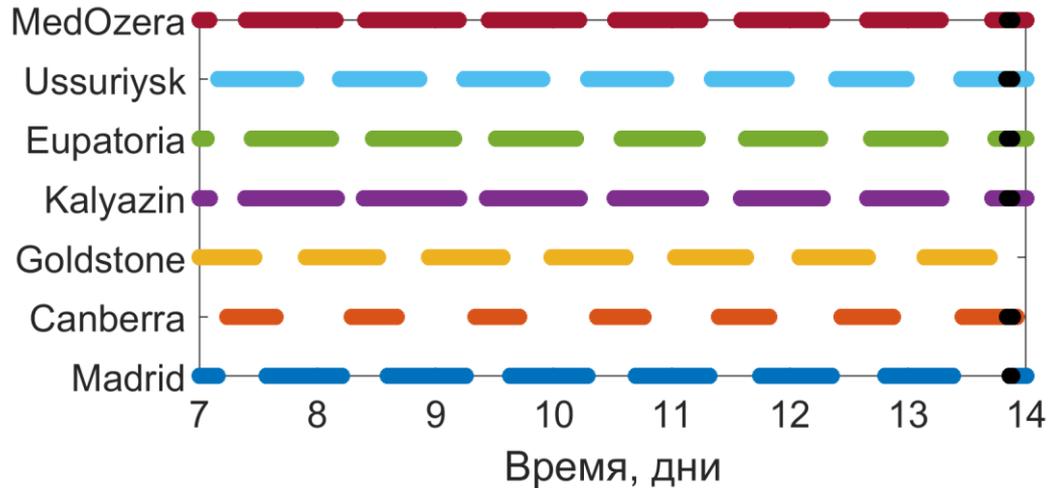


Рассматриваемые центры дальней космической связи



Российские центры дальней космической связи (красный) и комплексы NASA Deep Space Network (желтый)

Радиовидимость с поверхности Земли



Периоды радиовидимости КА на высокой круговой орбите с высотой перицентра 10 тыс. км, наклоном 60° и начальной датой 01.01.2028 из разных центров дальней космической связи

Поддержание неустойчивых орбит вблизи коллинеарных точек либрации

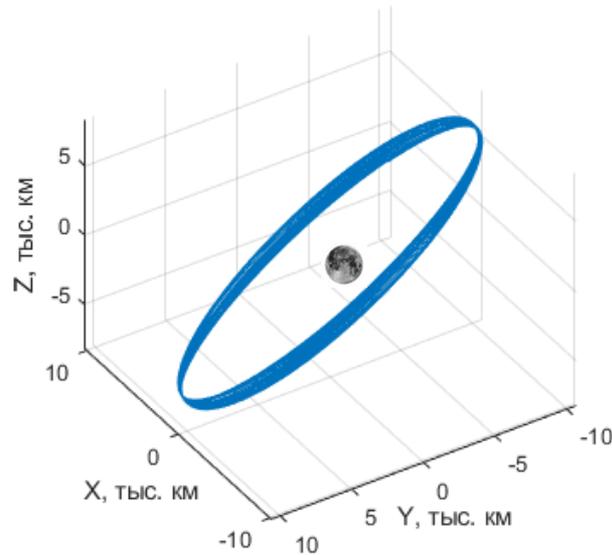


Теория динамических систем и дифференциальная геометрия:
основаны на расчете характеристик неустойчивости



Общая теория управления

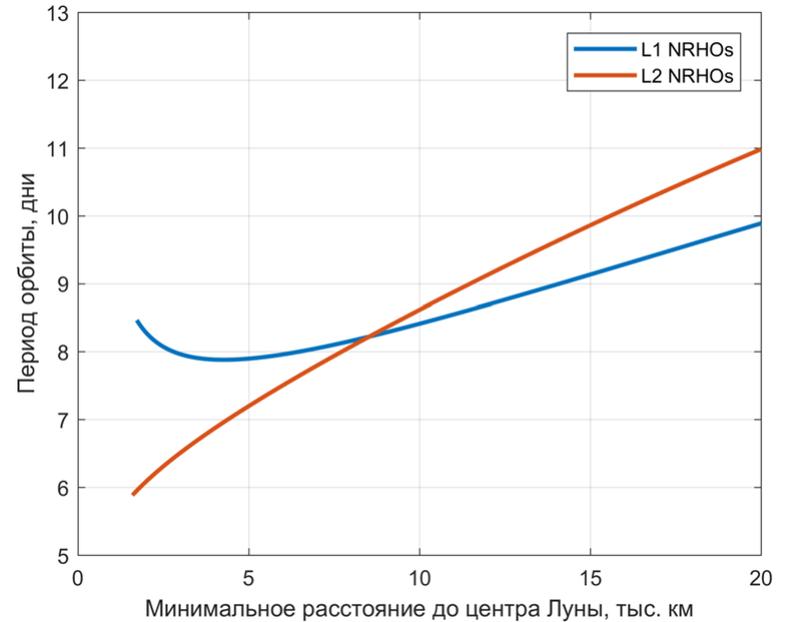
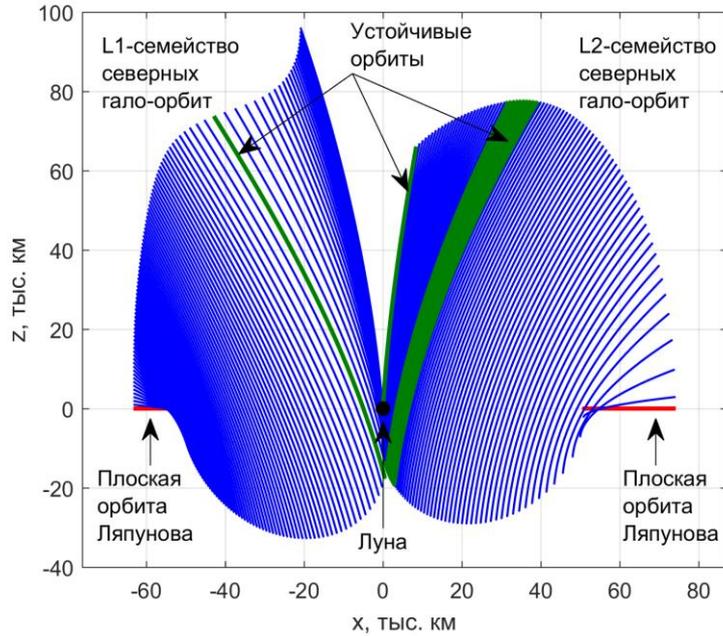
Высокие круговые орбиты



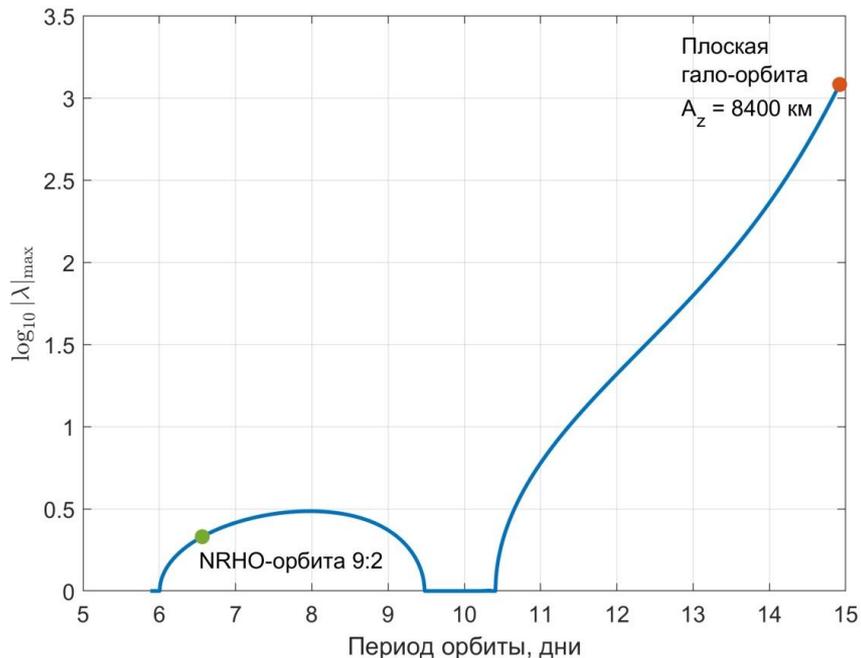
Высокая круговая, $h = 10$ тыс. км

Высокие круговые полярные орбиты вокруг Луны (высота 10 тыс. км) рассматриваются в качестве альтернативы NRHO-орбитам

Семейство гало-орбит



Устойчивость почти прямолинейных гало-орбит



$M = \Phi(T)$, T - период орбиты

$$\dot{\Phi}(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{nom}(t)} \Phi(t), t \in [0, T],$$

$$\Phi(0) = \mathbf{E}_{6 \times 6}$$

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{nom}(t)$ - периодическое решение

$f(\mathbf{x})$ - правая часть нелинейной

системы $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$