64-я научная конференция МФТИ
29 ноября – 3 декабря 2021 года, Москва

Невырожденное Фурье-представление функции управления орбитальным движением космического аппарата для оптимизации перелётов с малой тягой

К.С. Суслов[1], М.Г. Широбоков[2]

[1]Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)

[2]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Содержание

- Введение, проблематика и цель работы
- Физическая модель
- Метод Хадсон–Ширса
- Переход к равноденственным элементам
- Результаты
- Выводы

Введение и проблематика

- В настоящее время высок интерес к исследованию окололунного пространства с использованием малых аппаратов
- Для перелётов на окололунные орбиты аппараты оснащаются двигателями малой тяги или солнечным парусом, а траектории представляют собой многовитковую спиральную скрутку
- Эвристический метод: управление состоит из нескольких этапов
    1. Против скорости аппарата во вращающейся системе координат для уменьшения интеграла Якоби
    2. Вдоль нормали к плоскости орбиты
    3. Против скорости аппарата в инерциальной системе координат в окрестности перицентра орбиты
- Принцип Максимума Понтрягина: функция программного управления

Цель работы

- Цель работы – получить алгоритм поиска оптимальной функции управления с обратной связью и возможностью адаптации к сложной динамической модели
- В 2009 году Д. Хадсон и Д.Ширс разработали методику проектирования оптимального управления, основанную на представлении функции управления в виде тригонометрических рядов Фурье по эксцентрической аномалии и усреднении уравнений движения в вариациях классических орбитальных элементов по средней аномалии [1, 2]
- Проблема метода – вырождение классических орбитальных элементов
- Решение – переход к равноденственным элементам

[1] Hudson, J.S., Scheeres, D.J. Reduction of Low-Thrust Continuous Controls for Trajectory Dynamics // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2009. Vol. 32, No. 3, pp. 780–787.
[2] Hudson, J.S., Scheeres, D.J. Orbital Targeting Using Reduced Eccentric Anomaly Low-Thrust Coefficients // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34, No. 3, pp. 820–831.

Физическая модель

Задача двух тел с возмущениями

Возмущение – реактивное ускорение

$$
\begin{cases}
\dfrac{da}{dt} = 2\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}\left(S\dfrac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin\vartheta + T\dfrac{a^2\sqrt{1-e^2}}{a(1-e\cos E)}\right) \\
\dfrac{de}{dt} = \sqrt{\dfrac{a}{\mu}}\sqrt{1-e^2}\big(S\sin\vartheta + T(\cos\vartheta + \cos E)\big) \\
\dfrac{di}{dt} = \sqrt{\dfrac{a}{\mu}}\dfrac{1-e\cos E}{\sqrt{1-e^2}}W\cos(\vartheta+\omega) \\
\dfrac{d\Omega}{dt} = \sqrt{\dfrac{a}{\mu}}\dfrac{1-e\cos E}{\sqrt{1-e^2}}W\sin(\vartheta+\omega) \\
\dfrac{d\omega}{dt} = \sqrt{\dfrac{a}{\mu}}\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(-S\cos\vartheta + T\left(1+\dfrac{1-e\cos E}{1-e^2}\right)\sin\vartheta\right) - \cos i\,\dfrac{d\Omega}{dt} \\
\dfrac{dM}{dt} = n - 2\sqrt{\dfrac{a}{\mu}}(1-e\cos E)S - \sqrt{1-e^2}\left(\dfrac{d\omega}{dt}+\dfrac{d\Omega}{dt}\right) + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\left(\dfrac{i}{2}\right)\dfrac{d\Omega}{dt}
\end{cases}
$$

$$
\mathbf{F} = S\,\hat{\mathbf{r}} + W\,\hat{\mathbf{w}} + T\,(\hat{\mathbf{w}}\times\hat{\mathbf{r}}), \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \qquad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{|\mathbf{r}\times\mathbf{v}|}
$$

Метод Хадсон–Ширса

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k^R \cos E + \beta_k^R \sin E \right), \qquad R \in \{S, W, T\}$$

$$\mathbf{x} = (a, e, i, \Omega, \omega, M)^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \alpha_i^S, \beta_i^S, \alpha_i^W, \beta_i^W, \alpha_i^T, \beta_i^T\right), \qquad i = \overline{0, +\infty}$$

$$\bar{\dot{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos E) \dot{\mathbf{x}} dE \quad \rightarrow \quad \bar{\dot{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})$$

$\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_0^S, \alpha_1^S, \alpha_2^S, \beta_1^S, \alpha_0^W, \alpha_1^W, \alpha_2^W, \beta_1^W, \beta_2^W, \alpha_0^T, \alpha_1^T, \alpha_2^T, \beta_1^T, \beta_2^T\right)^{\mathrm{T}}$ - 14 параметров

Модельная задача оптимального перелёта

Дано:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\big(\mathbf{x}(t), E, \mathbf{F}(\mathbf{x}, E)\big), \mathbf{x_0} = \mathbf{x}(\mathbf{0}), \mathbf{x}_t = \mathbf{x}\big(T_f\big)$$

$$\mathbf{x}(t) = \big(a(t), e(t), i(t), \Omega(t), \omega(t)\big)^{\mathrm{T}}$$

Найти:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) : J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{F}^2(\mathbf{x}, E)dE \to min$$

Применение метода Хадсон–Ширса к задаче оптимального перелёта

Задача оптимизации:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathrm{G}(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_{\mathbf{0}}, \mathbf{x}\left(T_f\right) = \mathbf{x}_t$$

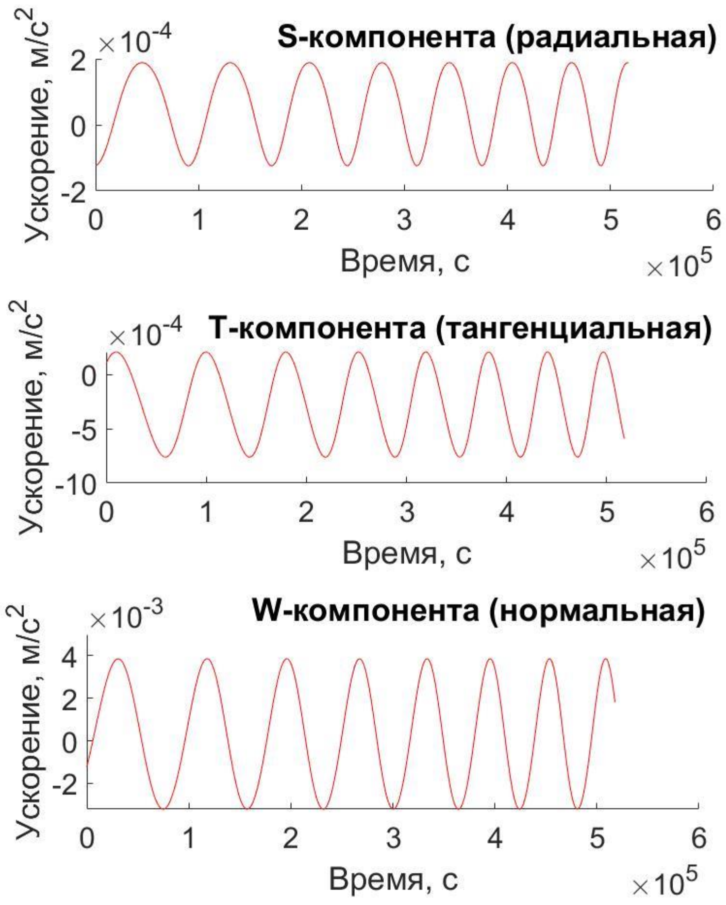
$$\mathbf{x}_f(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^{T_f} \mathrm{G}\big(\mathbf{x}(t)\big)\boldsymbol{\alpha}\, dt$$

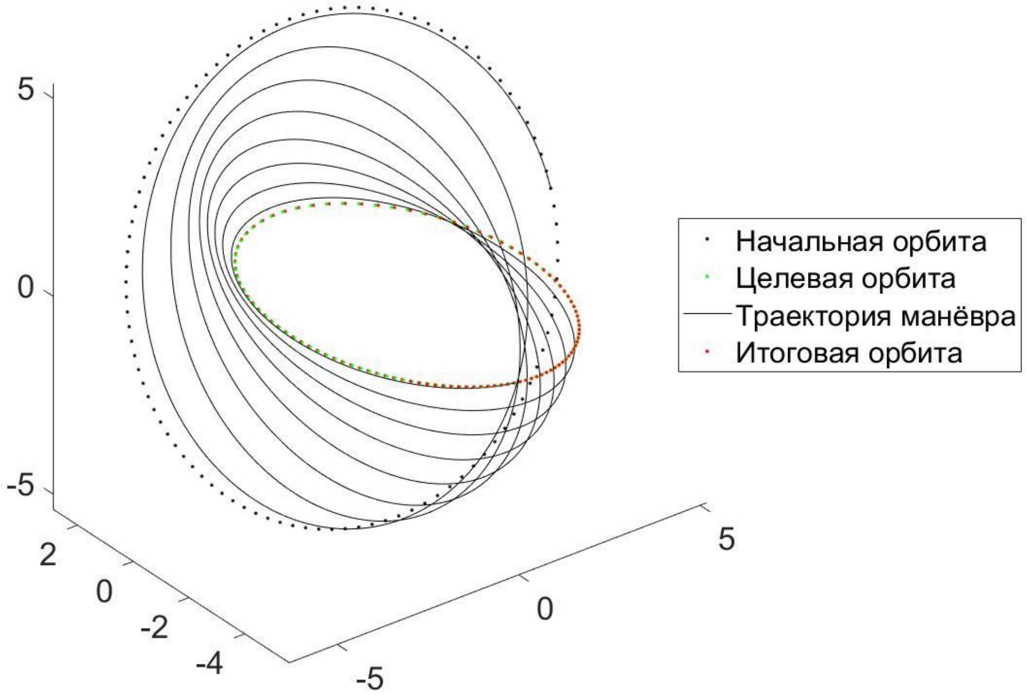
Найти решение $\boldsymbol{\alpha}$ уравнения $\mathbf{x}_f(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{x}_t = \mathbf{0}$, доставляющее минимум функционалу

$$J = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(\alpha_0^S\right)^2 + \left(\alpha_0^W\right)^2 + \left(\alpha_0^T\right)^2\right) \to min$$

Корректная работа метода Хадсон–Ширса

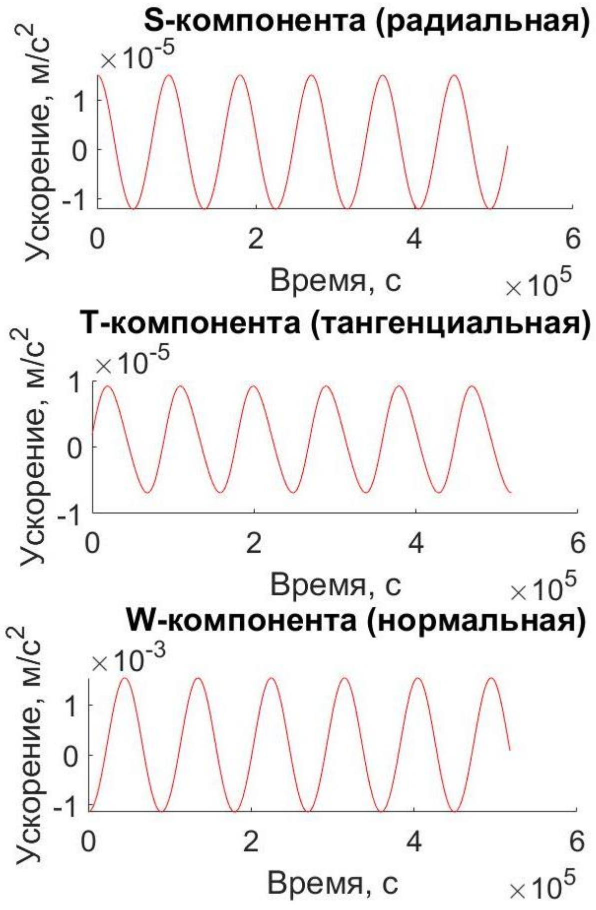
	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_t$
a, тыс. км	10	7
e	0,1	0,4
$i, ^\circ$	70	10
$\Omega, ^\circ$	0	60
$\omega, ^\circ$	0	30
T_f, часы		144

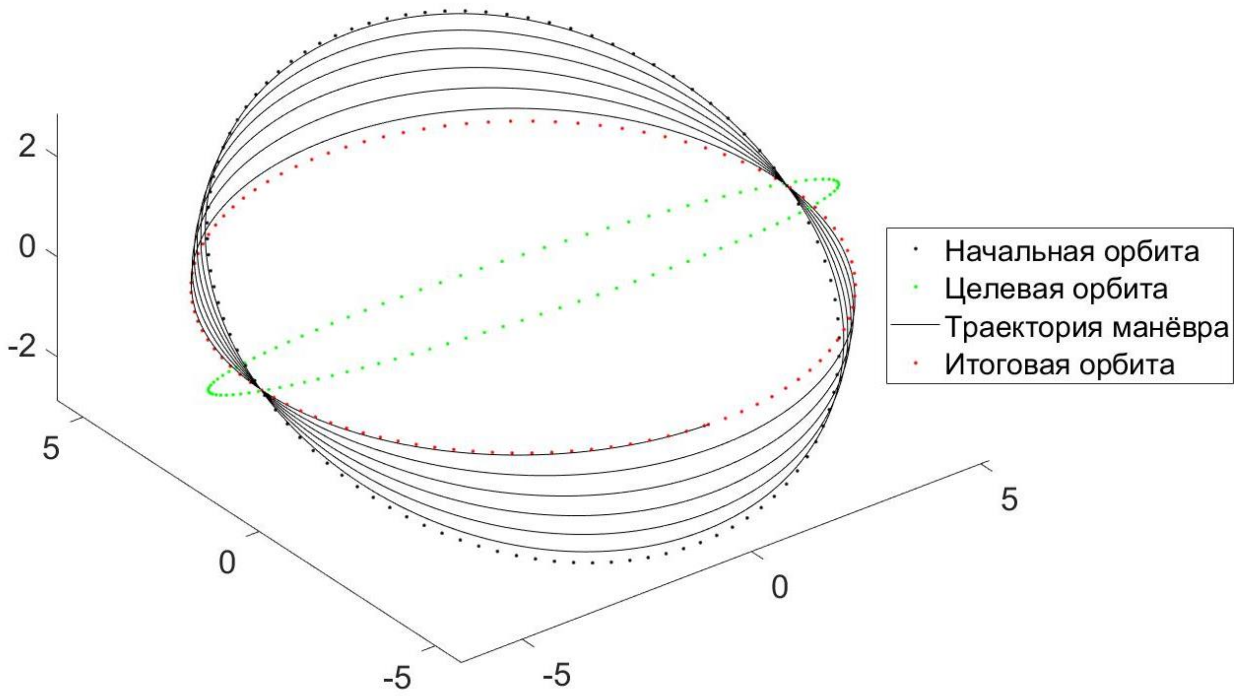




Ошибки в работе метода Хадсон–Ширса

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_t$
a, тыс. км	10	10
e	0,1	0,1
$i, \circ$	30	-30
$\Omega, \circ$	0	1
$\omega, \circ$	0	0
T_f, *часы*		144





Переход к равноденственным элементам

$$\mathbf{y}(t) = \left(p(t), e_x(t), e_y(t), i_x(t), i_y(t) L(t)\right)^{\mathrm{T}}$$

$$p = a(1 - e^2)$$
$$e_x = e\cos(\omega + j\Omega)$$
$$e_y = e\sin(\omega + j\Omega)$$
$$i_x = \left(\tan\frac{i}{2}\right)^j j\cos\Omega$$
$$i_x = \left(\tan\frac{i}{2}\right)^j j\sin\Omega$$
$$L = \vartheta + \omega + j\Omega$$

Метод Хадсон-Ширса для равноденственных элементов

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k^R \cos L + \beta_k^R \sin L \right), \qquad R \in \{S, W, T\}$$

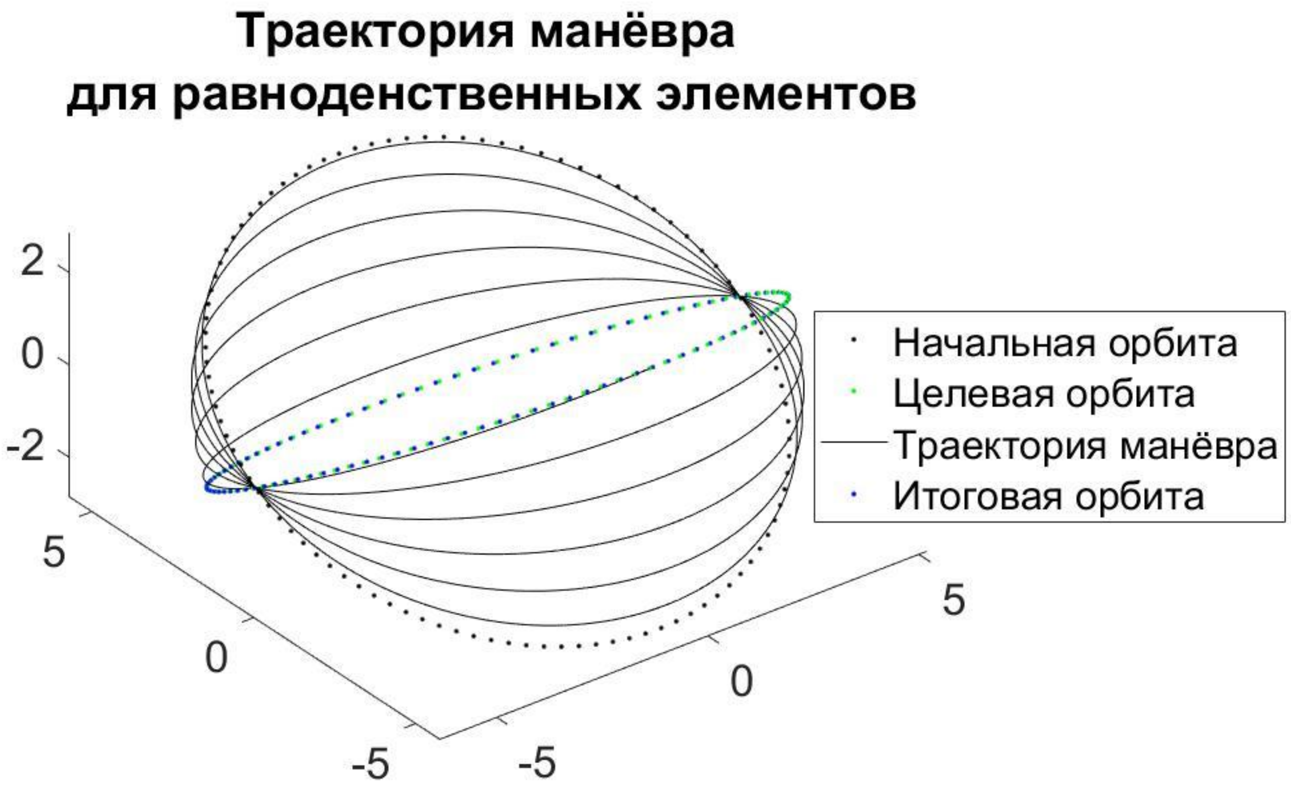
$$\bar{\dot{\boldsymbol{y}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + e_x \cos L + e_y \sin L \right) \dot{\boldsymbol{y}} dL$$

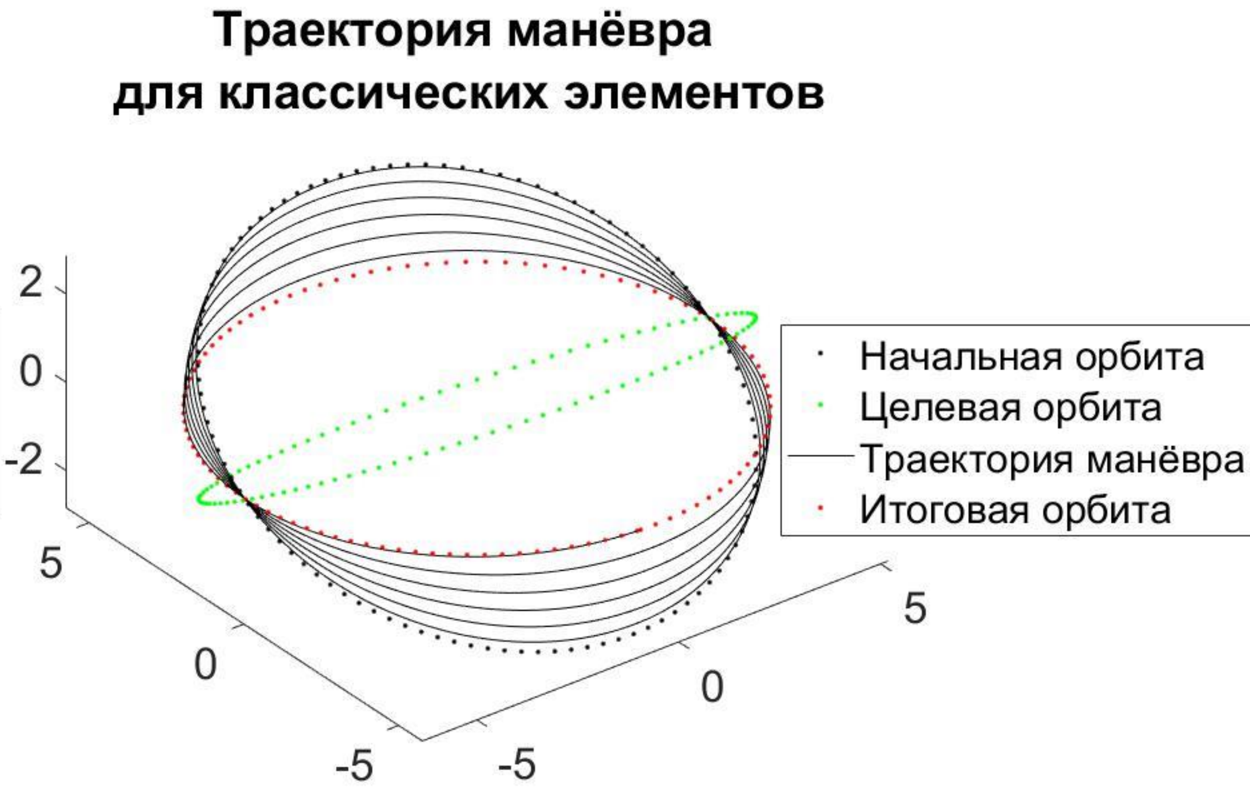
$$\bar{\dot{\boldsymbol{y}}} = \mathrm{G}(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{\alpha}$$

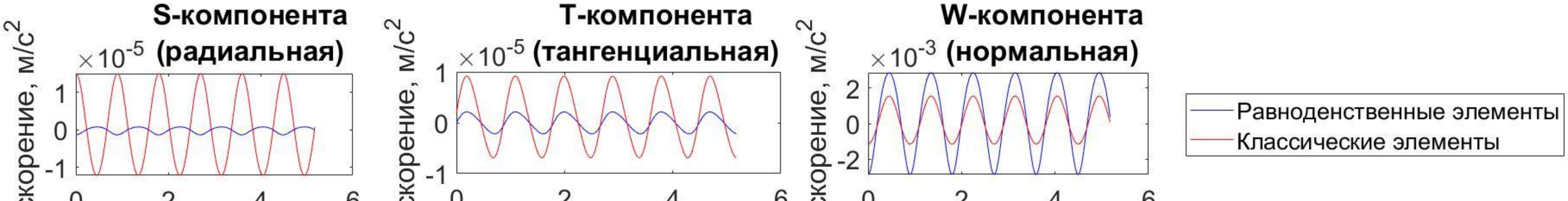
$\boldsymbol{\alpha} = \left(\alpha_0^S, \alpha_1^S, \alpha_2^S, \beta_1^S, \beta_2^S, \alpha_0^T, \alpha_1^T, \alpha_2^T, \beta_1^T, \beta_2^T, \alpha_1^W, \beta_1^W \right)^T$ - 12 параметров

$$J = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(\alpha_0^S \right)^2 + (\alpha_0^T)^2 \right)$$

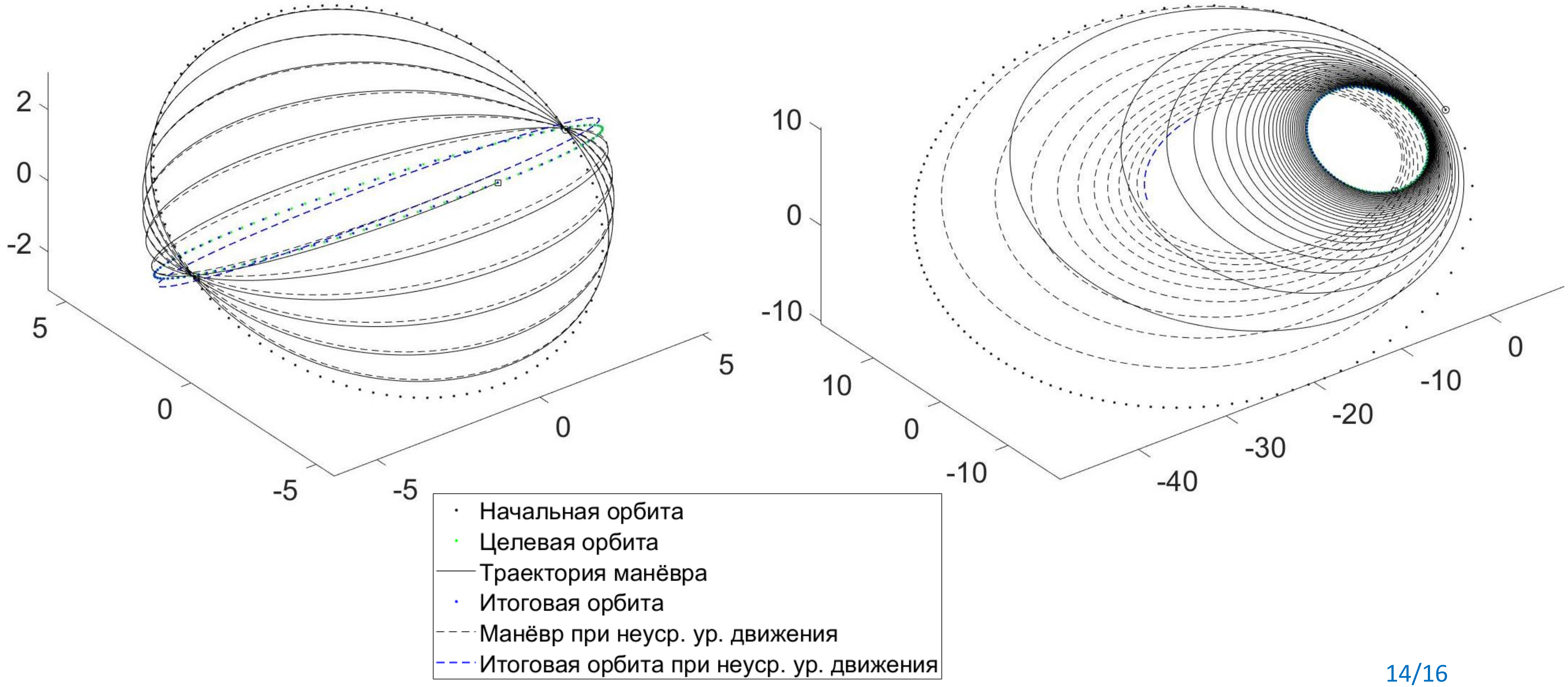
Результат перехода к равноденственным элементам



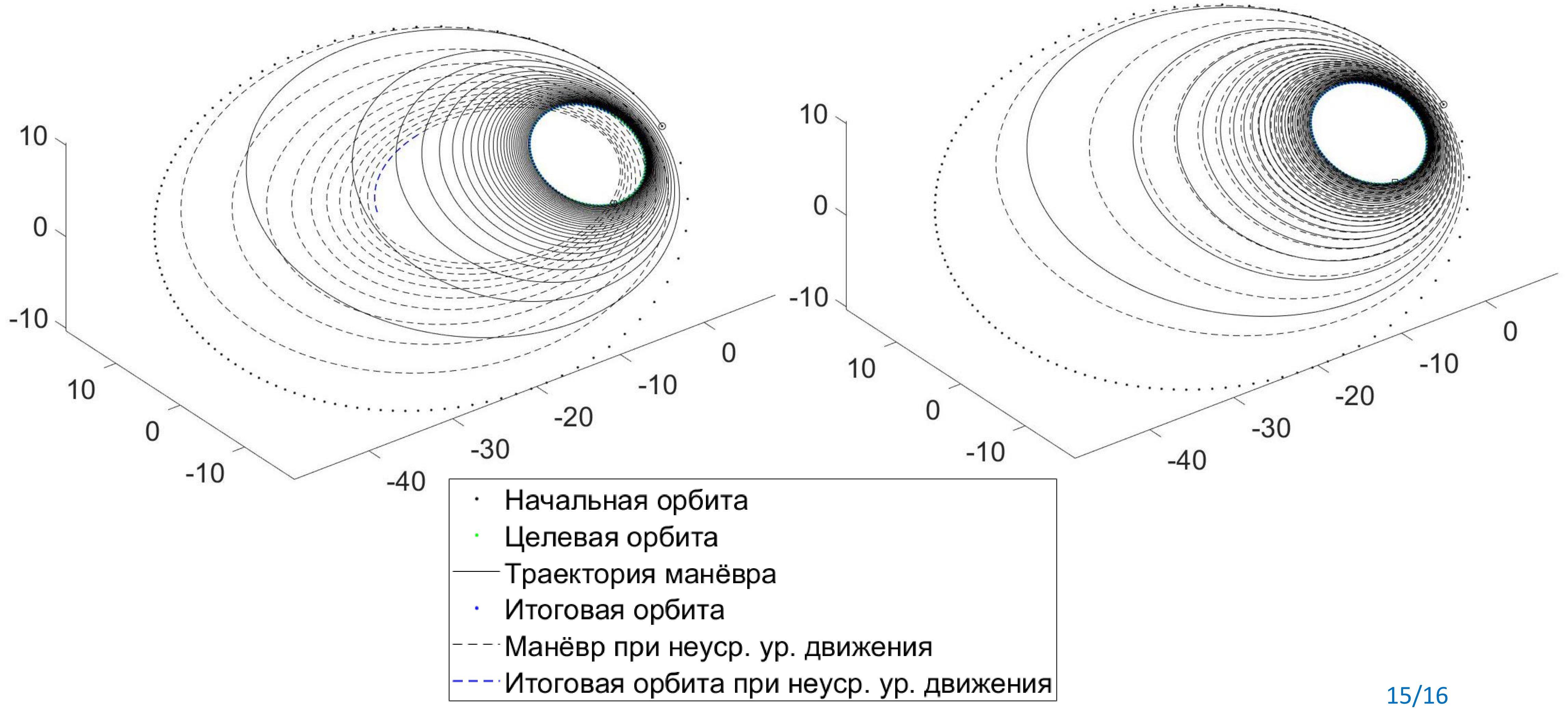




Переход к неусреднённым уравнениям



Результат коррекции управления



Выводы

- Использование равноденственных элементов решает проблемы, связанные с вырождением классических элементов
- Полученный алгоритм даёт хорошее приближение для функции оптимального управления в задаче 2 тел
- Следующий шаг – анализ уравнений движения в ограниченной круговой задаче 3 тел

Спасибо за внимание!

Фурье-представление функции управления (орбитальные элементы)

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k^R \cos E + \beta_k^R \sin E \right), \qquad R \in \{S, W, T\}$$

$$\bar{\dot{\sigma}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos E) \dot{\sigma} \, dE\,, \qquad \sigma \in \{a, e, i, \Omega, \omega, M\}$$

$$\frac{\overline{da}}{dt} = 2\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left(\frac{1}{2} e \beta_1^S + \sqrt{1-e^2}\, \alpha_0^T \right)$$

$$\frac{\overline{de}}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \sqrt{1-e^2} \left(\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\, \beta_1^S + \alpha_1^T - \frac{3}{2} e \alpha_0^T - \frac{1}{4} e \alpha_2^T \right)$$

$$\frac{\overline{di}}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1}{2}(1+e^2) \cos\omega\, \alpha_1^W - \frac{3}{2} e \cos\omega\, \alpha_0^W - \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2} \sin\omega\, \beta_1^W - \frac{1}{4} e \cos\omega\, \alpha_2^W + \frac{1}{4} e \sqrt{1-e^2} \sin\omega\, \beta_2^W \right)$$

$$\frac{\overline{d\Omega}}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1}{2}(1+e^2) \sin\omega\, \alpha_1^W - \frac{3}{2} e \sin\omega\, \alpha_0^W + \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2} \cos\omega\, \beta_1^W - \frac{1}{4} e \sin\omega\, \alpha_2^W - \frac{1}{4} e \sqrt{1-e^2} \cos\omega\, \beta_2^W \right)$$

$$\frac{\overline{d\omega}}{dt} = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\, \alpha_1^S + e\sqrt{1-e^2}\, \alpha_0^S + \frac{1}{2}(2-e^2) \beta_1^T - \frac{1}{4} e \beta_2^T \right) - \cos i \frac{\overline{d\Omega}}{dt}$$

$$\frac{\overline{dM}}{dt} = n + \sqrt{\frac{a}{\mu}} \left((-2-e^2) \alpha_0^S + 2e\alpha_1^S - \frac{1}{2} e^2 \alpha_2^S \right) - \sqrt{1-e^2} \left(\frac{\overline{d\omega}}{dt} + \frac{\overline{d\Omega}}{dt} \right) + 2\sqrt{1-e^2} \sin^2\left(\frac{i}{2}\right) \frac{\overline{d\Omega}}{dt}$$

Фурье-представление функции управления (равноденственные элементы)

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k^R \cos L + \beta_k^R \sin L\right), \qquad R \in \{S, W, T\}$$

$$\bar{\dot{\boldsymbol{y}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + e_x \cos L + e_y \sin L\right) \dot{\boldsymbol{y}} dL$$

$$\overline{\frac{dp}{dt}} = 2p\sqrt{\frac{p}{\mu}} \cdot a_0^T$$

$$\overline{\frac{de_x}{dt}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ e_y a_0^S - \frac{e_y}{2} a_2^S + b_1^S + \frac{e_x}{2} b_2^S + 3e_x a_0^T + 2a_1^T + \frac{e_x}{2} a_2^T + \frac{e_y}{2} b_2^T + e_y i_y a_1^W - e_y i_x b_1^W \right\}$$

$$\overline{\frac{de_y}{dt}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -e_x a_0^S - a_1^S - \frac{e_x}{2} a_2^S - \frac{e_y}{2} b_2^S + 3e_y a_0^T - \frac{e_y}{2} a_2^T + 2b_1^T + \frac{e_x}{2} b_2^T - e_x i_y a_1^W + e_x i_x b_1^W \right\}$$

$$\overline{\frac{di_x}{dt}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} a_1^W$$

$$\overline{\frac{di_y}{dt}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{1 + i_x^2 + i_y^2}{2} b_1^W$$

$$\overline{\frac{dL}{dt}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{2 + 3e_x^2 + 3e_y^2}{2p} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}} i_y a_1^W + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}} i_x b_1^W$$