



64-я Всероссийская научная конференция МФТИ
Москва, 3 декабря, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН



Замена фазовых переменных как точечное каноническое преобразование в задачах оптимального межорбитального перелёта

Корнеев Кирилл Романович, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Трофимов Сергей Павлович, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН



Мотивация



При оптимизации траекторий с малой тягой часто используют принцип максимума Понтрягина

Краевые задачи принципа максимума обладают высокой чувствительностью

Есть два пути к построению регулярных процедур решения таких задач:

- Выбор переменных, в которых уравнения движения обладают хорошими численными свойствами
- Использование эффективных вычислительных методов решения краевых задач



Ионный двигатель NASA
Evolutionary Xenon Thruster (NEXT)
Источник: NASA



Проблема выбора переменных

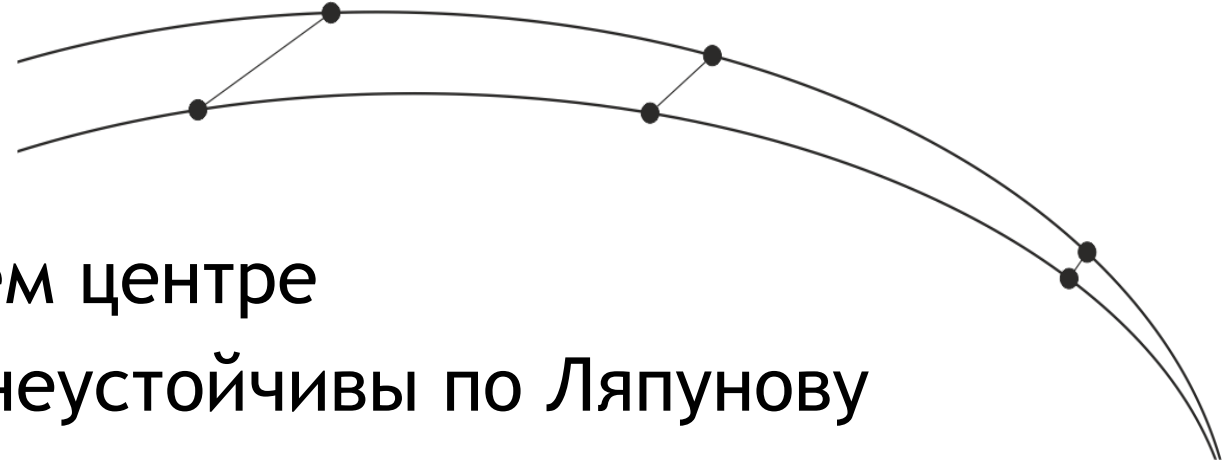


$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

- Сингулярность в притягивающем центре
- Траектории в задаче двух тел неустойчивы по Ляпунову

$$\mathbf{x} = (\Delta \mathbf{r}, \Delta \mathbf{v})^T$$

$$|\mathbf{x}(t)| \sim t^2 |\mathbf{x}_0|$$



Плохая обусловленность матрицы чувствительности краевой задачи принципа максимума связана с квадратичным разбеганием траекторий



Цели работы



$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{u} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \\ dt = \chi(\mathbf{x})ds}]{\text{blue arrow}} \frac{d\mathbf{X}}{ds} = \mathbf{F}_s = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{u},$$

- Желательно добиться линейного вида уравнений пассивного движения
- При этом матрица $\mathbf{A}$ должна быть устойчива по Ляпунову
- По возможности правые части уравнений должны быть максимально простыми
- Сопряжённые переменные заменяются соответствующим образом для каноничности расширенной системы



Решаемые задачи (план работ)



Рассмотреть следующие варианты:

1. Репараметризация траекторий

$$dt = \chi(\mathbf{x})ds$$

2. Однородное точечное преобразование

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X})$$

3. Репараметризация и однородное точечное преобразование

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}) \quad dt = \chi(\mathbf{x})ds$$

4. Репараметризация и неоднородное точечное преобразование

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \quad dt = \chi(\mathbf{x})ds$$



Существующие подходы



Замена фазовых переменных на орбитальные элементы

- Оскулирующие/равноденственные элементы (*E. Taheri, J. Junkins*)
- Гибридные наборы переменных (*E. Taheri, J. Junkins*)

Повышение размерности для достижения регуляризации

- Переменные Кустаанхеймо-Штифеля
- Переменные Шперлинга-Бюрде

Репараметризация

- Преобразование Сундмана



Принцип Гамильтона-Понтрягина



Записываем уравнения движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^l.$$

Вводим функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min$$

Строим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H = \lambda_0 f_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$$

Получаем уравнения расширенной динамической системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}},$$



Однородное точечное преобразование



Применяем точечное преобразование

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^m,$$

Находим связь между старыми и новыми сопряжёнными переменными, а также связь между правыми частями

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F}, \quad \Lambda = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \lambda.$$

Записываем новый гамильтониан

$$K = \Lambda^T \mathbf{F}$$

Получаем новые уравнения движения

$$\dot{\Lambda} = -\frac{\partial K}{\partial \mathbf{X}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \Lambda \quad \dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial K}{\partial \Lambda} = \mathbf{F}$$



Дополнительная репараметризация



Переходим к фиктивному времени

$$dt = \chi(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Lambda}) ds.$$

Получаем новые уравнения движения с дифференцированием по новой независимой переменной

$$\mathbf{X}' = \chi(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Lambda}) \frac{\partial K}{\partial \Lambda} = \chi(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Lambda}) \mathbf{F}$$

$$\Lambda' = -\chi(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Lambda}) \frac{\partial K}{\partial t} = -\chi(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\Lambda}) \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right)^T \Lambda.$$

Дополняем краевую задачу условиями трансверсальности

$$\Lambda = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n-k},$$



Уравнения для функций замены переменных



Записываем связь между правыми частями

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{F} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} \frac{\mathbf{F}_s}{\chi}$$

Выбираем линейный вид новых правых частей

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\omega^2 \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \tilde{\mathbf{B}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Уравнения для поиска замены переменных записываются в виде

$$\begin{cases} \Phi_2 = \frac{1}{\chi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{X}_1} \mathbf{X}_2, & \frac{1}{\chi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{X}_2} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{E}, & \Phi_1 = \Phi_1(\mathbf{X}_1), \\ -\frac{\mu}{|\Phi_1|^3} \Phi_1 = \frac{1}{\chi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)} \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{X}_1} \mathbf{X}_2 - \omega^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{X}_2} \mathbf{X}_1 \right]. \end{cases}$$



Пример: KS-переменные



Используем переменные Кустаанхеймо-Штифеля,
т.н. KS-переменные

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4, \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{u}}{ds}$$

$$h = -\mu / (\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} + 4\mathbf{w} \cdot \mathbf{w})$$

$$\Phi_1 = \mathbf{r} = L(\mathbf{u})\mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = L(\mathbf{u})\mathbf{u}$$

Применяем преобразование времени Сундмана

$$\chi = \frac{dt}{ds} = \frac{r}{\sqrt{-2h}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I}/4 & \mathbf{O} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 = \mathbf{v} = \frac{2\sqrt{-2h}L(\mathbf{u})\mathbf{w}}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ -(\mathbf{I}(\mathbf{u}^T \mathbf{u})/4 + \mathbf{w}\mathbf{w}^T)\mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$



Выводы



- Предложен подход к проблеме систематического синтеза замены переменных в уравнениях оптимального движения
- Проведена подготовительная работа по получению уравнений для функций точечного преобразования координат и репараметризации траекторий (замены независимой переменной)
- Начато исследование случая однородной точечной замены с репараметризацией



Бэкап



Численная проверка



Делаем численную проверку,
находя оптимальные траектории при
помощи принципа максимума
Понтрягина

Максимальная разница в координатах

Расход массы в KS-координатах

Расход массы в прямоугольных координатах

4.6 м.

296.1 кг

296.1 кг

