60-я Научная конференция МФТИ

Глобальная оптимизация космических траекторий с помощью кривых, заполняющих пространство

Ю.А. Худайбердиев[1]
С.П. Трофимов[2]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

20 ноября 2017

Функционалы в задачах оптимизации космических траекторий

- Заданы в многомерном пространстве
- Многоэкстремальны
- Существенно нелинейны
- Могут иметь разрывные экстремали

Стандартные методы глобальной оптимизации

- Неградиентные (алгоритм Нелдера-Мида)
- Стохастические (метод роя частиц, генетические)

Минусы методов:

- Сложны в реализации
- Результаты зависят от параметров конкретной задачи

Эффективные методы одномерной оптимизации

- Алгоритм Пиявского – для липшицевых функций
- GJE алгоритм (*Gourdin, Jaumard, and Ellaia*) – для гёльдеровых функций
- Информационный алгоритм (Стронгин)
- Геометрический алгоритм (Сергеев)

Для работы этих алгоритмов необходимо лишь то, чтобы функция была липшицевой (с константой L)

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|,$$

или гёльдеровой (с константой H)

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq H|x_2 - x_1|^{\alpha},$$

$\alpha \in (0, 1]$

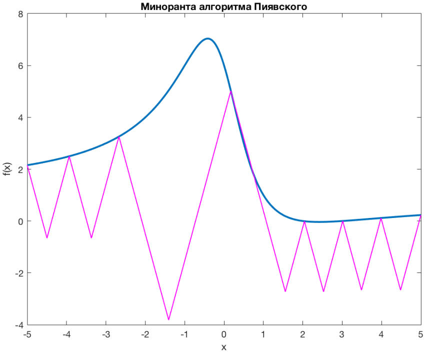
Общая схема

Даны: набор точек (узлов) и значения функции в них

- На каждом интервале между соседними узлами вычисляется характеристика этого интервала – некоторая скалярная величина
- Исходя из значения характеристики, выбирается интервал, куда будет добавлен следующий узел
- Процесс продолжается, пока длина интервала, в который должен добавиться следующий узел, не становится меньше заданной точности

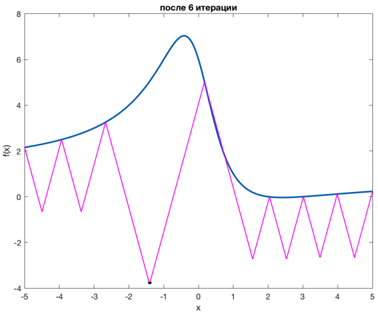
Алгоритм Пиявского

Строится миноранта – кусочно-линейная функция, «подпирающая» снизу оптимизируемую функцию
$c_i(x) = \max\{z_{i-1} - L(x - x_{i-1}), z_i + L(x - x_i), x \in [x_{i-1}, x_i]$



Работа алгоритма

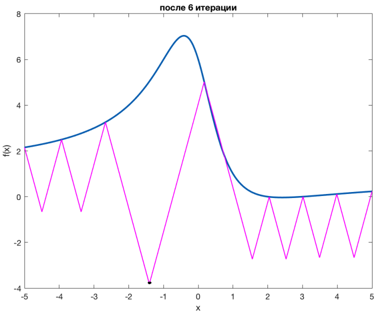
В качестве характеристики берется значение миноранты в зубце. Интервал, на который добавляется следующий узел, имеет минимальную характеристику.



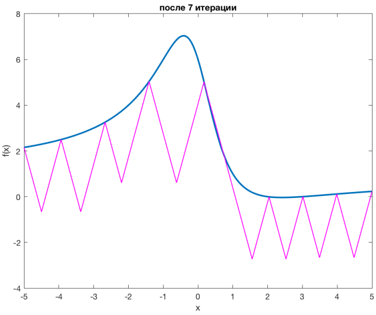
Миноранта в методе Пиявского 6 итераций

Работа алгоритма

В качестве характеристики берется значение миноранты в зубце. Интервал, на который добавляется следующий узел, имеет минимальную характеристику.



Миноранта в методе Пиявского 6 итераций



Миноранта в методе Пиявского 7 итераций

Информационный алгоритм

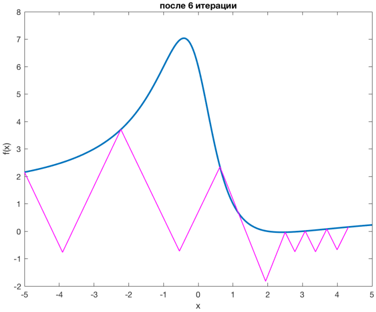
- Информационный алгоритм основан на стохастическом подходе к задачам глобальной оптимизации
- Характеристика интервала – величина, оценивающая вероятность нахождения глобального минимума на этом интервале

$$R_i = m(x_i - x_{i-1}) + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{m(x_i - x_{i-1})} - 2(z_i + z_{i-1}),$$

m – оценка константы Липшица

Информационный алгоритм можно интерпретировать с помощью миноранты с углом наклона

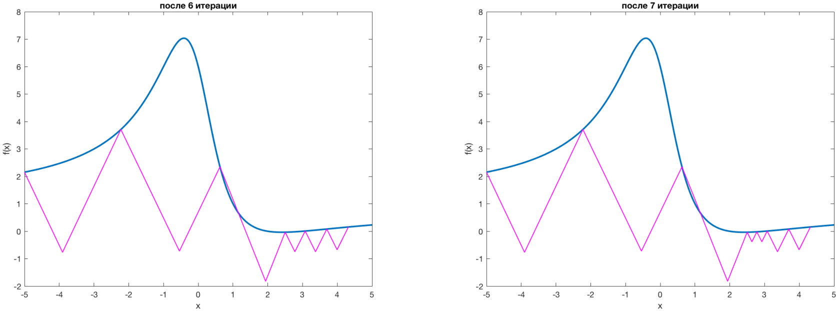
$$s_i = 0.5 * (rM + \frac{M_i^2}{rM}), M_i = \frac{|z_i - zi - 1|}{x_i - xi - 1}$$



Миноранта информационного алгоритма 6 итераций

Информационный алгоритм можно интерпретировать с помощью миноранты с углом наклона

$$s_i = 0.5 * (rM + \frac{M_i^2}{rM}), M_i = \frac{|z_i - zi - 1|}{x_i - xi - 1}$$

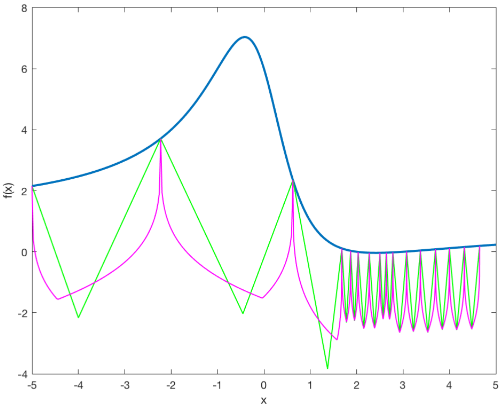


Миноранта информационного алгоритма 6 итераций

Миноранта информационного алгоритма 7 итераций

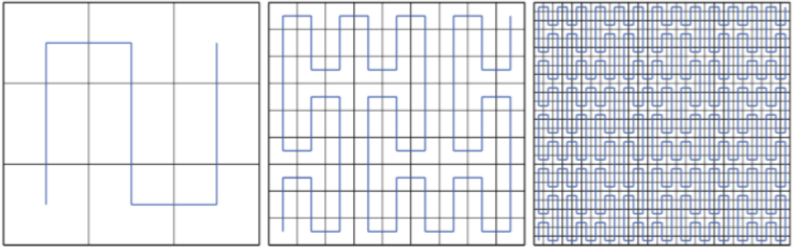
Алгоритмы: GJE и геометрический

- Для гёльдеровых функций миноранты состоят не из отрезков, а из кусков гипербол
- Для GJE алгоритма координаты зубца миноранты вычисляются точно
- Для геометрического алгоритма куски гипербол аппроксимируются прямыми


f(x)
x
8
6
4
2
0
-2
-4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Кривые, заполняющие пространство. Определение.

Кривая, заполняющая пространство – непрерывное отображение $y(x)$, отображающее отрезок [0,1] на гиперкуб $D = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{2} \leq y_j \leq \frac{1}{2}, 1 \leq j \leq N \right\}$



Кривая Пеано[1]

Подход к решению таких задач

Можем свести задачу многомерной оптимизации липшицевой функции F на стандартном гиперкубе к задаче оптимизации одномерной гёльдеровой функции с помощью кривой Пеано

$$f(x) = F(y(x)) \to \min,$$

$y(x)$ – кривая Пеано.

$H = 2L\sqrt{N+3}$ – константа Гёльдера образа N-мерной липшицевой функции с константой L.

Постановка основной задачи

Даны: Круговые компланарные орбиты радиусов R_1 и R_2, v_0, r_0 – начальные векторы скоростей и координат, $\vec{a}$ – ускорение тяги.

Необходимо найти: траекторию наискорейшего перелета.

С помощью принципа максимума Понтрягина исходная задача сводится к двухточечной краевой задаче для расширенной системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -\dfrac{\vec{r}}{r^3} + a_{\max}\dfrac{\overrightarrow{p_v}}{p_v} \\ \dot{\overrightarrow{p_v}} = -\overrightarrow{p_r} \\ \dot{\overrightarrow{p_r}} = -\dfrac{1}{r^3}(3\dfrac{\vec{r}\cdot\overrightarrow{p_v}}{r^2} - \overrightarrow{p_v}) \end{cases}, \qquad (1)$$

где $\overrightarrow{p_r}, \overrightarrow{p_v}$ – векторы сопряженных переменных, $a_{\max}$ – максимальное значение ускорения тяги.

Пусть $\overrightarrow{r_f}, \overrightarrow{v_f}$ – требуемые значения положения и скорости КА в конечный момент времени. Если задать значения $\overrightarrow{p_r}(t_0), \overrightarrow{p_v}(t_0)$, то получим задачу Коши и численным интегрированием можем вычислить значения $\vec{r}(t_f), \vec{v}(t_f)$.

Наша задача – минимизировать функционал невязки $J = (\vec{r}(t_f) - \overrightarrow{r_f})^2 + (\vec{v}(t_f)) - \overrightarrow{v_f})^2$. Когда придем к абсолютному минимуму $J = 0$, двухточечная краевая задача будет считаться решенной.

Вектор сопряженных переменных $(\overrightarrow{p_r}, \overrightarrow{p_v})$ может считаться нормированным в начальный момент времени:

$$\vec{p}_r^{\,2} + \vec{p}_v^{\,2} = 1$$

В таком случае мы ищем три угла $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, задающие единичный сопряженный вектор на 4х-мерной сфере

Решение задачи

- Составляем параллелепипед со сторонами $2\pi, \pi, 2\pi$.
- Преобразованием координат приводим его к стандартному кубу
- Строим кривую Пеано
- Решаем задачу одномерной оптимизации

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ 17-71-10242.

Спасибо за внимание!