

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

На правах рукописи
УДК 629.785

Целоусова Анастасия Александровна

Оптимизация траекторий перелета с малой тягой на основе решения задачи Штарка

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Направление подготовки 03.03.01 Прикладные математика и физика

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _____ Четверушкин Б.Н.

Научный руководитель
к.ф.-м.н. _____ Ширококов М.Г.

Выполнила
студентка 372 группы _____ Целоусова А.А.

г. Москва
2017

Содержание

Введение	3
1 Современные методы решения задачи Штарка	6
1.1 Методы Лантуана и Бискани	6
1.2 Метод Пеллегрини	9
1.3 Сравнение подходов Лантуана, Бискани и Пеллегрини	12
2 Постановка задачи	13
3 Решение	14
Заключение	21
Список литературы	21
Приложение	23

Введение

В настоящее время наряду с химическими двигателями большой тяги широко распространены так называемые двигатели малой тяги. Двигатели малой тяги создаются сейчас преимущественно на основе электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) и используются преимущественно в задачах орбитальной коррекции спутников связи и задачах довыведения космических аппаратов (КА) с промежуточной на геостационарную орбиту. Крупный обзор существующих двигателей малой тяги и вопросов об использовании их на спутниках связи можно найти в монографии [1]. Благодаря высокому удельному импульсу, двигатели малой тяги обладают меньшим расходом топлива, а их использование на КА позволяет увеличить массу полезной нагрузки. Это делает двигатели малой тяги привлекательным средством доставки КА к целям в дальнем космосе. Малость же тяги проявляет себя в увеличенных интервалах времени на разгон аппарата. В ряде случаев, импульсным приближением для построения траекторий воспользоваться не удастся, что особенно критично в задачах оптимизации траекторий перелета.

Основными методами решения задач оптимального управления являются так называемые прямые и непрямые методы. Непрямые методы основаны на использовании принципа максимума Понтрягина и сводятся к решению краевой задачи для расширенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которую можно решать любым численным методом решения краевых задач. Для решения, полученного непрямой методом, выполняются необходимые условия оптимальности в классе непрерывных ограниченных функций, и в типичных задачах оптимизации времени перелета или затрат топлива удается получить явное выражение для вектора оптимального управления как функции сопряженных переменных. Недостатком непрямых методов можно назвать высокую чувствительность поведения итерационной процедуры расчета сопряженных переменных к их начальному приближению.

В прямых методах управление задается конечным числом параметров, поэтому задача оптимального управления сводится к задаче нелинейного программирования. Хорошо известно, что для сходимости возникающих при

этом итерационных процедур удается сравнительно легко подобрать начальное приближение. Для полученного решения выполняются необходимые условия оптимальности в более узком классе функций, однако, оно является близким к оптимальному решению к классу непрерывных ограниченных функций. На практике управление часто строят в два этапа: сначала прямым методом получают начальное приближение к оптимальному управлению, а затем оно уточняется непрямыми методами.

Для того, чтобы пользоваться непрямым методом, необходимо сначала как можно быстрее и точнее решить задачу прямым методом оптимизации. Если управление задается в виде кусочно-постоянной функции, то уравнения движения интегрируются на нескольких участках, на которых тяга постоянна по величине и направлению. Оказывается, что задача распространения траектории в центральном поле с постоянным по величине и направлению ускорением тяги решается аналитически и носит название задачи Штарка [2].

Задача Штарка является одной из немногих интегрируемых задач и поэтому представляет интерес для математиков всего мира на протяжении уже двух веков. Впервые интегрируемость задачи была показана Ж. Лагранжем в конце XVIII века [3]. Он смог свести ее к квадратурам и предположил, что решение может быть выражено через трансцендентные функции. В 1849 году К. Якоби и Ж. Лиувилль обнаружили, что при переходе к параболическим координатам уравнения Гамильтона-Якоби для этой задачи разделяются [4]. Позднее Лиувилль сформулировал достаточные условия интегрируемости уравнений Гамильтона-Якоби в квадратурах и показал, что большинство известных на то время интегрируемых задач удовлетворяют этим условиям, включая и задачу Штарка [5].

В начале XX века интерес к задаче снова возрос в связи с открытием Штарк-эффекта (расщепление спектральных линий атома водорода в постоянном однородном электрическом поле). Задача определения движения электрона в атоме вокруг ядра под действием постоянного поля также является задачей Штарка. Было показано, что переменные в уравнении Шредингера разделяются при переходе к параболическим координатам, однако полное решение задачи получено не было [6, 7, 8].

Используя эллиптические функции Якоби, в 1964 году В. В. Белецкий на-

чал классифицировать траектории задачи Штарка для плоского случая [2]. В 1966 году А. Л. Куницын расширил классификацию В. В. Белецкого на пространственный случай. Его классификация оставалась неполной [9]. Примерно в то же время, В. Г. Демин предложил рассматривать задачу Штарка как предельный случай интегрируемой задачи двух неподвижных центров, когда один из них находится на бесконечности (задача Эйлера) [10].

В 1971 году Ю. Кирхграбер заметил, что уравнения задачи разделяются не только в параболических координатах, но и при переходе к переменным Кустанхейма-Штифеля [11]. Упущение данной работы состоит в том, что в зависимости от направления силы тяги необходимо специальным образом определять систему координат. Позднее этот недостаток был устранен С. М. Полещиковым [12]. В 1972 году Ю. Н. Исаев моделировал движение сферически-симметричных космических аппаратов под действием сил светового давления, сведя свою задачу к задаче Штарка [13].

Спустя десятилетия результаты предыдущих исследований были собраны вместе и подробно изучены американскими математиками Г. Лантуаном, Р. Расселом и С. Компаньолой [4]. Следуя предыдущим работам, они выразили решения задачи Штарка в виде эллиптических функций Якоби и получили полную классификацию орбит в плоском и пространственном случаях. Спустя несколько лет Ф. Бискани и Д. Иццо использовали другое описание решений задачи Штарка — через эллиптические функции Вейерштрасса [14]. Новый формализм позволил значительно упростить формулы, которыми описываются решения. В 2015 году Э. Пеллегрини и Р. Рассел продемонстрировали качественно другой подход к интегрированию задачи Штарка, основанный на известном методе F- и G-рядов, адаптированном к пространственному случаю [15].

Применение полученных аналитических методов позволяет не использовать численное интегрирование и тем самым повышает быстродействие и точность вычислений. Сравнение методов Лантуана, Бискани и Пеллегрини можно найти в работе Н. Хаттена и Р. Рассела [16].

Целью диссертационной работы является реализация алгоритма поиска оптимальной траектории межпланетного перелета с малой тягой на основе решения задачи Штарка. В работе подробно говорится о том, в каких пред-

положениях о движении КА и планет решается поставленная задача, приводится описание алгоритма поиска оптимальных траекторий и результаты его реализации.

Глава 1 посвящена описанию трех современных методов решения задачи Штарка: методу Лантуана [4], методу Бискани [14] и методу Пеллегрини [15]. Также в ней приводится их краткий сравнительный анализ на основании работы [16]. В главе 2 формулируется постановка задачи, перечисляются все используемые предположения и модели. В главе 3 подробно описывается решение поставленной задачи и алгоритм поиска оптимальных траекторий перелета. Здесь же приводятся результаты исследования, демонстрируются найденные оптимальные траектории, а также исследуется зависимость затрат топлива от времени перелета с использованием многопроцессорной вычислительной системы. В заключении перечислены выводы данной работы.

1 Современные методы решения задачи Штарка

Напомним, что задача Штарка заключается в определении орбиты КА в центральном поле с учетом постоянного по величине и направлению ускорения тяги. Ниже будут описаны основные методы ее решения.

1.1 Методы Лантуана и Бискани

Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета выбрана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, в начале которой находится притягивающий центр. Уравнения движения задачи Штарка записываются в виде:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

где $\mathbf{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор КА, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, μ — гравитационный параметр, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — ускорение тяги.

Для простоты рассмотрим случай, когда ускорение тяги направлено вдоль оси z . Тогда гамильтониан задачи в переменных (x, y, z)

$$H = U + T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r} - \varepsilon z$$

Перейдем теперь к параболическим переменным (ξ, η, φ) :

$$x = \xi\eta \cos \varphi, \quad y = \xi\eta \sin \varphi, \quad z = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}$$

$$\xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

В параболических координатах гамильтониан запишется в виде

$$H = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{2(\xi^2 + \eta^2)} + \frac{p_\varphi^2}{2\xi^2\eta^2} - \frac{2\mu}{\xi^2 + \eta^2} - \varepsilon \frac{\xi^2 - \eta^2}{2} \quad (1)$$

где $p_\xi = (\xi^2 + \eta^2)\dot{\xi}$, $p_\eta = (\xi^2 + \eta^2)\dot{\eta}$, $p_\varphi = \xi^2\eta^2\dot{\varphi}$ — обобщенные импульсы, соответствующие обобщенным координатам ξ, η, φ .

Из выражения (1) следует, что переменная φ в (1) является циклической, поэтому $p_\varphi = \text{const}$. После домножения (1) на $(\xi^2 + \eta^2)$ перенесем слагаемые, зависящие от ξ и η , в разные части равенства:

$$H\xi^2 - \frac{1}{2}p_\xi^2 - \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{\xi^2} + \mu + \frac{1}{2}\varepsilon\xi^4 = -H\eta^2 + \frac{1}{2}p_\eta^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{\eta^2} - \mu - \frac{1}{2}\varepsilon\eta^4 \quad (2)$$

Обозначим выражение, стоящее в левой части равенства (2) как $f(\xi, p_\xi)$ и заметим, что (2) можно переписать в виде:

$$f(\xi, p_\xi) = -f(\eta, p_\eta)$$

Дифференцируя f , получаем

$$\dot{\xi} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \dot{p}_\xi \frac{\partial f}{\partial p_\xi} = -\dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \eta} - \dot{p}_\eta \frac{\partial f}{\partial p_\eta} \quad (3)$$

Воспользовавшись определением скобок Пуассона, перепишем выражение (3) в виде:

$$\{H, f\} = 0 \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что f является первым интегралом, поэтому

$$H\xi^2 - \frac{1}{2}p_\xi^2 - \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{\xi^2} + \mu + \frac{1}{2}\varepsilon\xi^4 = -H\eta^2 + \frac{1}{2}p_\eta^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{\eta^2} - \mu - \frac{1}{2}\varepsilon\eta^4 = -c_0$$

Перейдем, наконец, к новой независимой переменной τ , связанной с t соотношением $dt = (\xi^2 + \eta^2)d\tau$, и получим уравнения движения

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{d\tau} = p_\xi = \pm \frac{1}{\xi} \sqrt{\varepsilon\xi^6 + 2h\xi^4 + 2\alpha_1\xi^2 - p_\varphi^2} \\ \frac{d\eta}{d\tau} = p_\eta = \pm \frac{1}{\eta} \sqrt{-\varepsilon\eta^6 + 2h\eta^4 + 2\alpha_2\eta^2 - p_\varphi^2} \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = p_\varphi^2 \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) \end{cases}$$

Как видно из полученных уравнений, первые два из них могут быть решены независимо друг от друга. После нахождения переменных ξ и η зависимость φ от τ выражается в квадратурах. Из первых двух равенств для ξ и η следуют равенства

$$\tau = \pm \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{udu}{\sqrt{\varepsilon u^6 + 2Hu^4 + 2(\mu + c_0)u^2 - p_\varphi^2}}$$

$$\tau = \pm \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{udu}{\sqrt{-\varepsilon u^6 + 2Hu^4 + 2(\mu - c_0)u^2 - p_\varphi^2}}$$

Получаем уравнения, которые неявным образом задают обратное преобразование от τ к параболическим переменным через эллиптические интегралы (см. Приложение). Есть два способа вычисления параболических переменных $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$: с использованием эллиптических функций Якоби (метод Лантуана) и эллиптических функций Вейерштрасса (метод Бискани). Полную классификацию решений задачи в терминах эллиптических функций Якоби и Вейерштрасса можно найти в работах [4] и [14], соответственно. В настоящее время существуют различные математические пакеты, реализованные на языках C и Fortran для работы с эллиптическими функциями и интегралами [17, 18, 19]. В языке программирования MATLAB эллиптическую функцию Якоби реализует функция `ellipj`, а эллиптические интегралы реализованы в функции `ellipke`. Этими библиотеками и функциями можно воспользоваться и для реализации методов Лантуана и Бискани.

1.2 Метод Пеллегрини

Основная идея метода Пеллегрини заключается в том, что положение \mathbf{r} и скорость \mathbf{v} в произвольный момент времени t можно выразить через положение и скорость в начальный момент времени и ускорение тяги $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{r}_0 + g(t)\mathbf{v}_0 + h(t)\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v}(t) = \dot{f}(t)\mathbf{r}_0 + \dot{g}(t)\mathbf{v}_0 + \dot{h}(t)\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases}$$

Применим преобразование Сундмана для перехода к новой независимой переменной τ : $dt = c\tau^\alpha d\tau$, $\alpha \geq 0$, где постоянная c может быть выбрана любым положительным числом. В этом случае

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\tau) = f(\tau)\mathbf{r}_0 + g(\tau)\mathbf{v}_0 + h(\tau)\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{v}(\tau) = \frac{df(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \mathbf{r}_0 + \frac{dg(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \mathbf{v}_0 + \frac{dh(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $\mathbf{r}(\tau_0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(\tau_0) = \mathbf{v}_0$, тогда положение \mathbf{r} КА в момент времени $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ может быть представлено в виде ряда Тейлора в окрестности точки τ_0 :

$$\mathbf{r}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \mathbf{r}}{d\tau^n}(\tau_0) \frac{\Delta\tau^n}{n!} \quad (6)$$

Производные в момент времени τ_0 также будем считать линейной комбинацией векторов \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0 и $\boldsymbol{\varepsilon}$ с некоторыми коэффициентами:

$$\frac{d^n \mathbf{r}}{d\tau^n}(\tau_0) = F_n(\tau_0)\mathbf{r}_0 + G_n(\tau_0)\mathbf{v}_0 + H_n(\tau_0)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и сравнивая полученное выражение с первым уравнением системы (5), получаем для искомых коэффициентов f, g, h :

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\tau_0) \frac{\Delta\tau^n}{n!} \\ g(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_n(\tau_0) \frac{\Delta\tau^n}{n!} \\ h(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\tau_0) \frac{\Delta\tau^n}{n!} \end{aligned} \quad (8)$$

Для нахождения коэффициентов F_n, G_n, H_n перепишем выражение (7) для произвольного момента времени τ :

$$\frac{d^n \mathbf{r}(\tau)}{d\tau^n} = F_n(\tau) \mathbf{r}(\tau) + G_n(\tau) \mathbf{v}(\tau) + H_n(\tau) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (9)$$

Тогда, с одной стороны,

$$\frac{d^{n+1} \mathbf{r}(\tau)}{d\tau^{n+1}} = F_{n+1}(\tau) \mathbf{r}(\tau) + G_{n+1}(\tau) \mathbf{v}(\tau) + H_{n+1}(\tau) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

В то время как дифференцирование выражения (9) по τ в силу уравнений движения позволяет получить

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1} \mathbf{r}(\tau)}{d\tau^{n+1}} = & F'_n(\tau) \mathbf{r}(\tau) + cr^\alpha(\tau) F_n(\tau) \mathbf{v}(\tau) + G'_n(\tau) \mathbf{v}(\tau) + \\ & + cr^\alpha(\tau) G_n(\tau) \left(-\frac{\mu}{r^3(\tau)} \mathbf{r}(\tau) + \boldsymbol{\varepsilon} \right) + H'_n(\tau) \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (11)$$

где производные $F'_n(\tau), G'_n(\tau), H'_n(\tau)$ обозначают дифференцирование соответствующих коэффициентов по τ .

Сравнивая уравнения (10) и (11), находим рекуррентные соотношения для функций $F_n(\tau), G_n(\tau)$ и $H_n(\tau)$:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\tau) &= F'_n(\tau) + cr^\alpha(\tau) G_n(\tau) \left(-\frac{\mu}{r^3(\tau)} \right) \\ G_{n+1}(\tau) &= G'_n(\tau) + cr^\alpha(\tau) F_n(\tau) \\ H_{n+1}(\tau) &= H'_n(\tau) + cr^\alpha(\tau) G_n(\tau) \end{aligned}$$

Теперь необходимо перейти от текущей независимой переменной τ ко времени t , для этого можем воспользоваться соотношением:

$$\Delta t = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\tau) \frac{\Delta \tau^n}{n!}, \quad T_{n+1}(\tau) = T'_n(\tau)$$

где Δt — это изменение времени, соответствующее изменению переменной τ на величину $\Delta \tau$.

В начальный момент времени $\Delta \tau = 0$ и $\mathbf{r} = F_0 \mathbf{r}_0 + G_0 \mathbf{v}_0 + H_0 \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{r}_0$, поэтому $F_0 = 1, G_0 = 0, H_0 = 0$ и $T_1 = cr^\alpha$. При вычислении коэффициентов более высокого порядка и их производных возникают скалярные величины: $k_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$, $k_2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}$, $k_3 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}$, $k_4 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, $s = cr^\alpha$ и их производные.

Резюмируем алгоритм расчета коэффициентов F_n, G_n, H_n

- 1: **Вход:** $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\varepsilon}, \mu, \alpha$
- 2: Инициализировать $k_1 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0, k_2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}_0, k_3 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}_0, k_4 = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0, s = cr^\alpha$
- 3: Инициализировать $F_0 = 1, G_0 = 0, H_0 = 0$ and $T_1 = s$
- 4: **for** $n = 0, N - 1$ **do**
- 5: **Найти аналитическое выражение для** F'_n, G'_n, H'_n, T'_n (дифференцируя F_n, G_n, H_n, T_n по τ) **через** k_1, k_2, k_3, k_4, s **и их производные**
- 6: **Подставить** $\{r' = s\frac{k_2}{r}, s' = \alpha s^2\frac{k_1}{r^2}, k'_1 = s(k_4 - \frac{\mu}{r} + k_2), k'_2 = sk_3, k'_3 = s(-\frac{\mu}{r^3}k_2 + \varepsilon^2), k'_4 = 2s(k_3 - \frac{\mu}{r^3}k_1)\}$
- 7: $F_{n+1} = F'_n + sG_n(-\frac{\mu}{r^3})$
- 8: $G_{n+1} = G'_n + sF_n$
- 9: $H_{n+1} = H'_n + sG_n$
- 10: $T_{n+1} = T'_n$
- 11: **Вычислить** $k_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, k_2 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}, k_3 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}, k_4 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, s = cr^\alpha$
- 12: **end for**
- 13: **Выход:** $\{F_n, G_n, H_n, T_n\}, n = \overline{0, N}$

Подставив полученные коэффициенты F_n, G_n, H_n в (8), найдем f, g, h , которые затем подставляем в (5). Таким образом, мы получаем явную зависимость \mathbf{r} от времени t в виде бесконечных рядов по степеням $\Delta\tau$. Для определения скорости воспользуемся следующим соотношением:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{s} \left(\sum_{n=1}^N \left[F_n(\tau_0) \left(\frac{\Delta\tau^{(n-1)}}{(n-1)!} \right) \right] \mathbf{r}_0 + \sum_{n=1}^N \left[G_n(\tau_0) \left(\frac{\Delta\tau^{(n-1)}}{(n-1)!} \right) \right] \mathbf{v}_0 + \sum_{n=1}^N \left[H_n(\tau_0) \left(\frac{\Delta\tau^{(n-1)}}{(n-1)!} \right) \right] \boldsymbol{\varepsilon} \right) \quad (12)$$

Степень точности решения можно регулировать выбором количества слагаемых в рядах. Увеличение количества слагаемых приводит сначала к увеличению точности, однако если слагаемых слишком много, точность может падать, как следует из исследования Э. Пеллегрини [15] и Р. Рассела [16]. Точность уменьшается с ростом Δt , поэтому длительные интервалы времени следует разбивать на несколько промежуточных интервалов и на каждом решать связанную задачу Штарка. На основании рис. 1 можно сделать вывод, что при разбиении времени перелета на 20 и более интервалов достаточно

ограничиться 12-18 слагаемыми для достижения высокой точности решения.

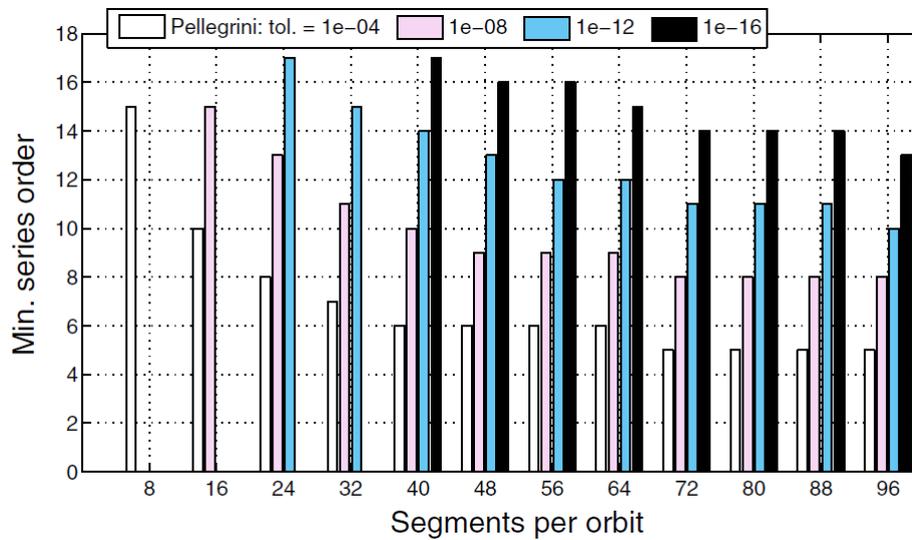


Рис. 1. Зависимость точности решения от количества слагаемых и участков разбиения траектории в методе Пеллегрини (заимствовано из [16])

1.3 Сравнение подходов Лантуана, Бискани и Пеллегрини

На основании исследований Н. Хаттена и Р. Рассела в 2015 году [16] можно сделать следующие выводы об эффективности рассмотренных выше методов. Ни один из них не использует численное интегрирование, и все они оказались эффективнее по быстродействию в сравнении с методом Рунге-Кутты-Фельберга 8 порядка. Методы, использующие эллиптические функции, не используют приближенные итерационные методы и работают быстрее типичных методов интегрирования, но обладают достаточной вычислительной сложностью. Кроме того, плоский и пространственный случаи в этих методах требуют отдельного рассмотрения. Наиболее эффективным по быстродействию и простым в реализации оказывается метод Пеллегрини (рис. 2). Несмотря на то, что этот метод является приближенным и позволяет получать решение лишь с некоторой наперед заданной точностью, эту точность легко регулировать, изменяя количество слагаемых в сопутствующих рядах (рис. 1). В дальнейшем будет использоваться именно этот метод.

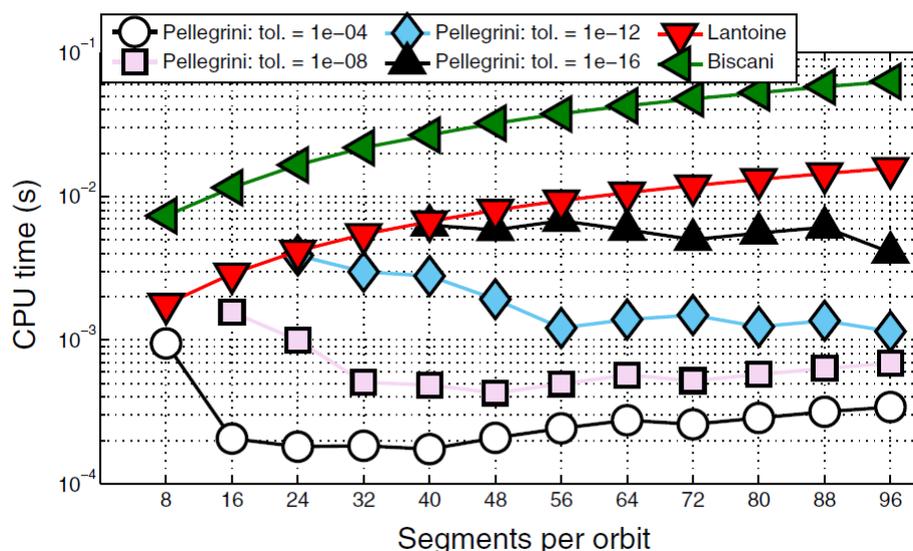


Рис. 2. Быстродействие методов Лантуана, Бискани и Пеллегрини в зависимости от количества подинтервалов разбиения времени полета (заимствовано из [16])

2 Постановка задачи

В работе решается задача оптимального по затратам топлива межпланетного перелета от Земли к Марсу в рамках следующих предположений:

- КА оснащен двигателем малой тяги
- величина ускорения тяги ограничена постоянной
- скорость истечения топлива постоянна
- функция управления считается кусочно-постоянной (траектория перелета разбивается на несколько участков, на каждом из которых ускорение тяги постоянно по величине и направлению)
- на КА действует только центральное гравитационное поле Солнца
- вектор гелиоцентрической скорости отлета равен вектору гелиоцентрической скорости Земли
- вектор гелиоцентрической скорости прилета равен вектору гелиоцентрической скорости Марса

- для расчета положений и скоростей планет и Солнца используются эфемериды DE-423 [20]

С учетом данных предположений в задаче требуется определить оптимальные направление и величину ускорения тяги на всем участке траектории для заданных начального и конечного положений аппарата и времени перелета.

3 Решение

Пусть T — заданное время перелета от Земли к Марсу. Разобьем траекторию перелета равномерно по времени на N участков, тогда время перелета на каждом участке равно $\Delta t = \frac{T}{N}$. Обозначим $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ускорение тяги на i -ом участке. Пусть ε_{max} — максимальная величина ускорения тяги, введем ограничения вида «неравенство»:

$$|\boldsymbol{\varepsilon}_i| \leq \varepsilon_{max}, i = \overline{1, N} \quad (13)$$

Фазовый вектор в начальный момент времени равен фазовому вектору Земли, обозначим его \mathbf{X}_1 . Распространим траекторию КА с ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ на интервале $[0; \Delta t]$, решив задачу Штарка методом Пеллегрини. Получаем новый фазовый вектор \mathbf{X}_2 . Затем распространяем траекторию КА из этой точки с ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ на следующем интервале длины Δt , получаем точку \mathbf{X}_3 . Повторяем эту процедуру для каждого участка траектории. В результате получаем фазовый вектор \mathbf{X}_{N+1} . Так как целью является перелет к Марсу, введем ограничения вида «равенство»:

$$\mathbf{X}_{N+1} - \mathbf{X}_{Mars} = \mathbf{0} \quad (14)$$

где \mathbf{X}_{Mars} — фазовый вектор Марса.

Перейдем непосредственно к вопросу оптимизации. Масса израсходованного топлива Δm при включении тяги согласно формуле Циолковского равна

$$\Delta m = m_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta v}{I_{sp} g} \right) \right), \quad \Delta v = \sum_{i=1}^N |\boldsymbol{\varepsilon}_i| \Delta t \quad (15)$$

где m_0 — начальная масса КА, Δv — затраты характеристической скорости, I_{sp} — удельный импульс двигателя, $g = 9.80665$ м/с².

Используя (14), получаем, что задача оптимизации по затратам топлива в приведенной постановке эквивалентна задаче оптимизации затрат характеристической скорости, следовательно будем минимизировать следующий функционал

$$J = \sum_{i=1}^N |\epsilon_i| \Delta t \quad (16)$$

Таким образом, поставленная задача является задачей нелинейного программирования с целевым функционалом (16), ограничениями типа «неравенство» (13) и ограничениями типа «равенства» (14):

$$\begin{cases} J \rightarrow \min \\ |\epsilon_i| \leq \epsilon_{max}, i = \overline{1, N} \\ \mathbf{X}_{N+1} - \mathbf{X}_{Mars} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Полученную в ходе решения траекторию мы и будем называть оптимальной.

Поставленную задачу можно решать различными численными методами. В данной работе поставленная задача решается методом последовательного квадратичного программирования (sequential quadratic programming, SQP) с использованием оптимизационного пакета SNOPT 7.6 [21]. В диссертации используется реализация метода Пеллегрини, предложенная в работе [15].

Как уже было сказано ранее, время перелета необходимо разбить на достаточно большое количество интервалов для достижения высокой точности решения задачи Штарка на каждом из них. Однако, при слишком большом количестве интервалов при получении ограничений типа «равенство» происходит последовательное накопление ошибок округления в рядах метода Пеллегрини. В данной работе используются 18 слагаемых для метода Пеллегрини и 10 участков разбиения каждого из участков траектории с постоянным по направлению и величине ускорением тяги.

Стоит также отметить, что возникающие итерационные процедуры оказываются чувствительными к начальному приближению, это выражается в необходимости выработать стратегию его подбора. Для произвольной даты старта и времени перелета начальное приближение можно подбирать методами Монте-Карло, т.е. случайно изменять направление и величину начального

ускорения тяги до тех пор, пока численный метод не сойдется. Область поиска можно ограничить ускорениями с нулевой и максимальной величиной: действительно, из общей теории управления известно, что в классе непрерывных ограниченных функций оптимальным будет релейное управление, поэтому уже на первом этапе решения оптимизационной задачи прямым методом можно апробировать именно релейное управление. В ряде случаев эффективной может оказаться техника продолжения по параметру: если каким-либо образом удалось получить решение для текущих дат старта и прилета, то это же решение можно использовать в качестве начального приближения для близких дат старта и прилета.

В данной работе было принято использовать метод продолжения по времени перелета. Начальные приближения для функции управления искались методом проб и ошибок. Также методом проб и ошибок было установлено, что шаг по времени перелета не должен превышать 6 часов.

Все алгоритмы реализованы автором диссертации на языке программирования Fortran 90 с использованием компилятора `gfortran`. Генерация матрицы начальных данных и отрисовка результатов проводились в программе MATLAB R2015a.

Расчеты проводились на двух вычислительных машинах: персональном компьютере и гибридном вычислительном кластере К-60 Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН [22]. Характеристики персонального компьютера: операционная система Windows 7, процессор Intel®Core™ i3 – 2377М, частота 1.5 ГГц, оперативная память 4.0 ГБ. Параметры вычислительных узлов на К-60: процессор 2 x Intel® Xeon® E5-2690 v4, 28 ядер, оперативная память 256 ГБ. При параллельных вычислениях использовалась технология параллельного программирования Message Passing Interface (MPI).

Поставленная задача решалась применительно к КА со следующими характеристиками:

- масса 300 кг
- двигатель малой тяги СПД100-В с максимальной силой тяги 83 мН и удельным импульсом 1600 с

В качестве единиц измерения в работе использовались:

- ед. длины = 149597870.7 км = 1 а.е.
- ед. времени = 58.13244 дня
- ед. скорости = 29.78 км/с
- ед. ускорения = 5.93 мм/с²

В результате были получены оптимальные траектории перелета для разных дат старта КА. Даты старта варьировались от 01.01.2020 до 28.01.2020 и для каждой даты старта время перелета менялось от 432 до 711 дней.

На рис. 3 представлена оптимальная по затратам топлива траектория перелета в проекции на плоскость Oxy для даты старта 1 января 2020 года, временем перелета 432 дня и 30 участками траектории, на которых тяга считается постоянной по величине и направлению. Зеленым цветом обозначена орбита Земли, красным — орбита Марса, фиолетовым — траектория КА. Также стрелками обозначено направление тяги на тех участках, где она ненулевая. На рис. 4 представлен профиль ускорения тяги.

Из рис. 3 и 4 видно, что при оптимальном управлении тяга включена на стартовом участке в 25 дней, далее тяга выключена в течение 75 дней, затем тяга достигает снова своей максимальной величины на протяжении 180 дней, далее следует 100 дней с практически нулевой тягой и еще 100 дней с максимальным значением ускорения тяги. Отметим, что такое поведение (релейное, bang-bang control) является характерным для разных дат старта, времени перелета и разного количества участков с постоянной тягой. Более того, релейное управление удовлетворяет необходимым условиям оптимальности принципа максимума Понтрягина в классе непрерывных ограниченных функций управления. Поэтому решение, полученное прямым методом, тоже оказывается близким к релейному.

На рис. 5 и 6, показана зависимость затрат характеристической скорости аппарата и относительных затрат топлива $\Delta m/m_0$ от времени перелета для даты старта 01.01.2020. При увеличении времени перелета расход топлива и Δv быстро уменьшаются, а затем, начиная с какого-то момента, становят-

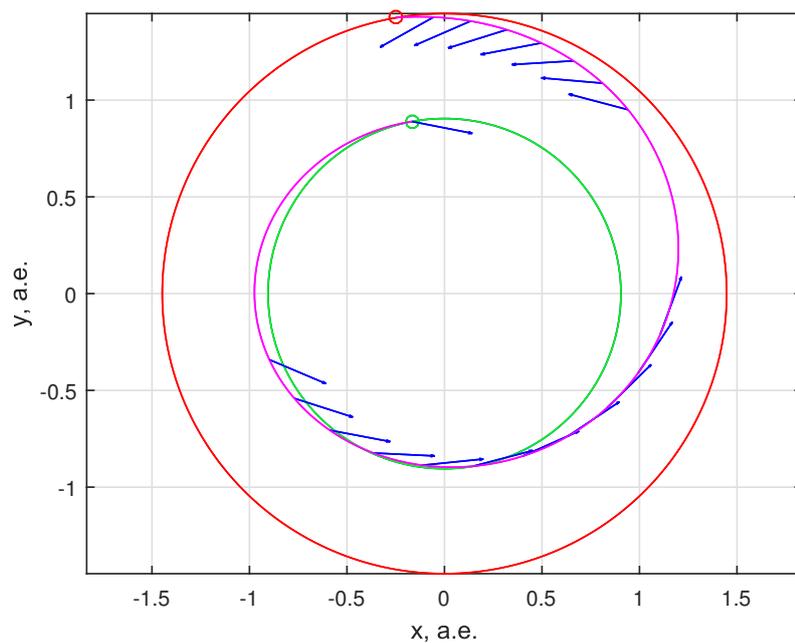


Рис. 3. Оптимальная траектория перелета для даты старта 01.01.2020,
 $T = 432$ дня, $N = 30$

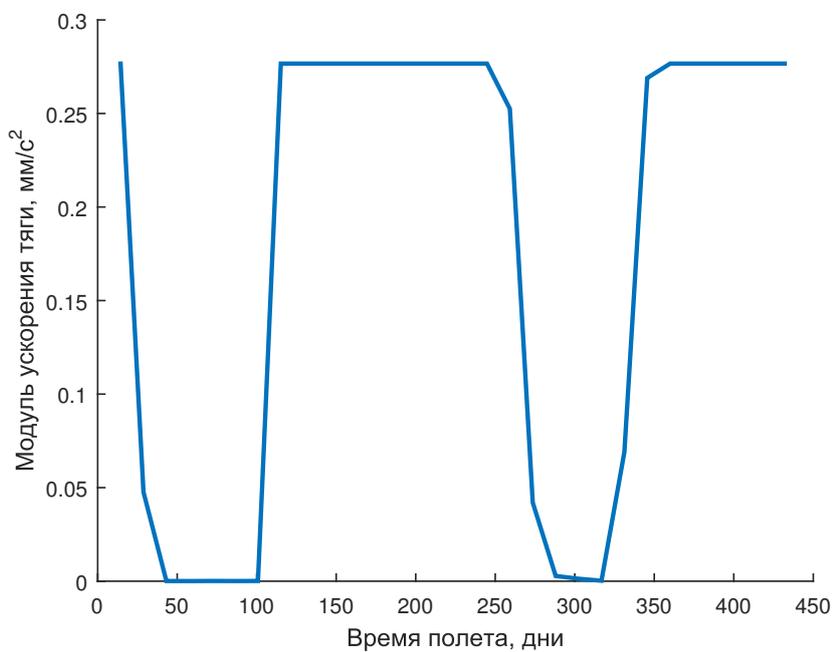


Рис. 4. Профиль ускорения для даты старта 01.01.2020,
 $T = 432$ дня, $N = 30$

ся практически неизменными. При длительных временах перелета характерными значениями для данной даты старта являются: $\Delta v \approx 5.688$ км/с и $\Delta m/m_0 \approx 30\%$. Выбросы отвечают данным, для которых оптимизационная процедура не сошлась.

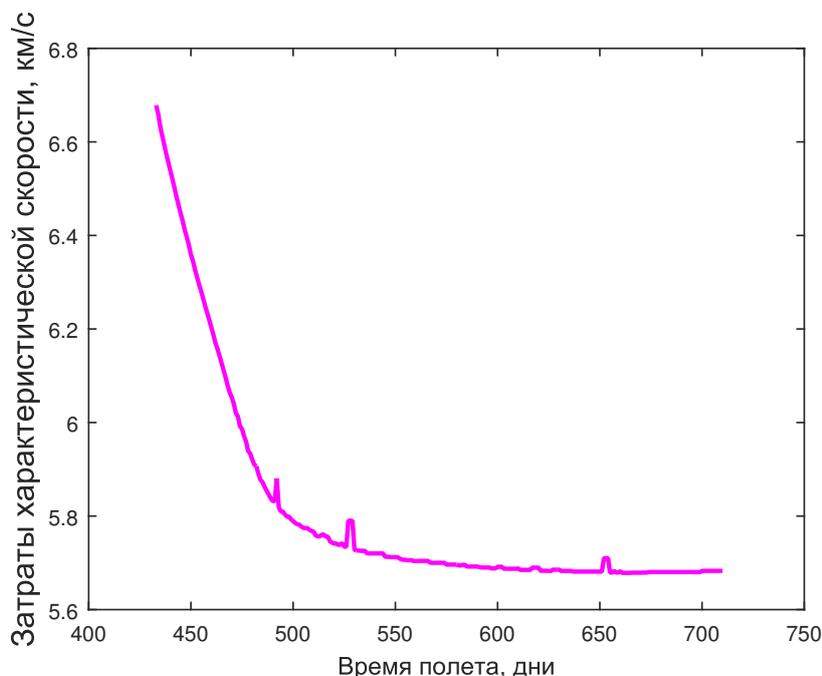


Рис. 5. Зависимость затрат характеристической скорости от времени перелета для даты старта 01.01.2020, $N = 30$

На рис. 7 приведена зависимость расхода топлива от времени перелета для дат старта 01.01.2020 – 28.01.2020. Расчет полученных оптимальных решений проводился с использованием 28 ядер вычислительного кластера К-60. На каждом ядре оптимальные траектории рассчитывались для конкретной даты старта, а время перелета менялось от 432 до 711 дней. Использовалось несколько значений шага изменения времени перелета для метода продолжения. Использование шага в одни сутки оказалось недостаточным для получения решений с длительным временем перелета, шаг в половину суток позволил найти большее количество траекторий. В данной работе используется шаг в 6 часов, он позволяет найти оптимальные траектории с временем перелета 432 – 711 дней. Можно продолжить уменьшение шага для получения более длительных оптимальных траекторий. Выбросы отвечают данным, для которых оптимизационная процедура не сошлась.

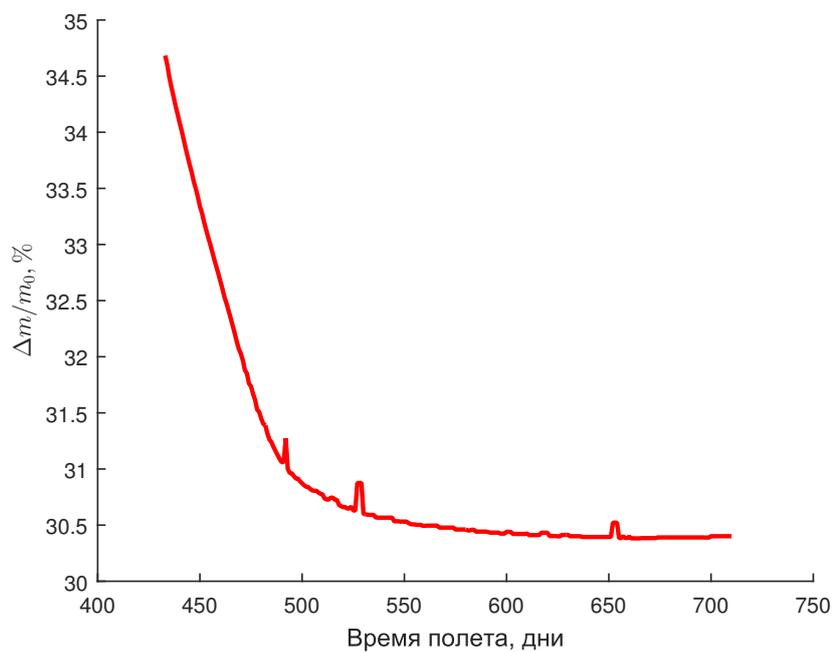


Рис. 6. Зависимость массы расходуемого топлива от времени перелета для даты старта 01.01.2020, $N = 30$

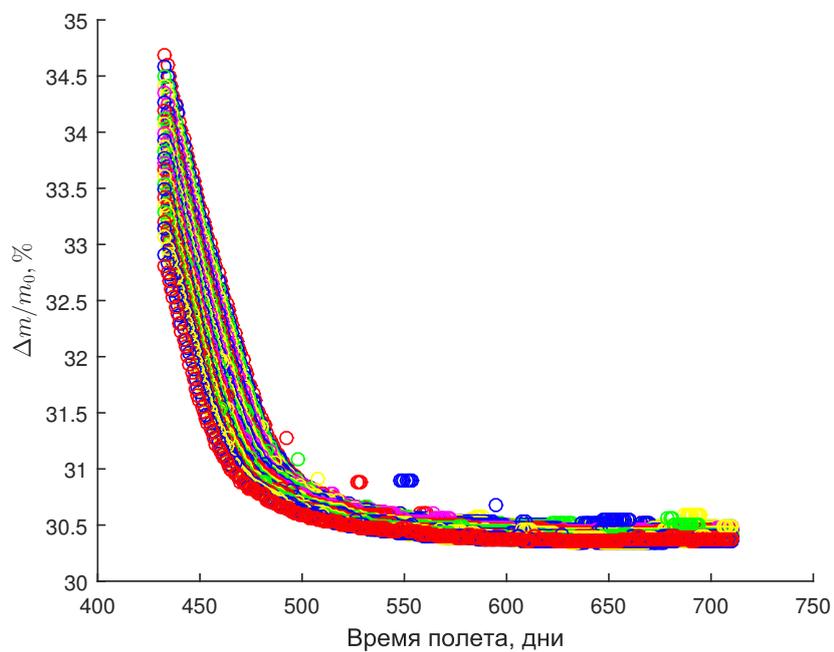


Рис. 7. Зависимость массы расходуемого топлива от времени перелета для дат старта 01.01.2020 - 28.01.2020, $N = 30$

Заключение

В ходе работы был реализован алгоритм поиска оптимальных по затратам топлива траекторий перелета от Земли к Марсу с использованием двигателей малой тяги на основании решения задачи Штарка. В работе приводится описание современных методов ее решения (Лантуана, Бискани и Пеллегрини), обосновывается выбор метода Пеллегрини для решения поставленной в диссертации задачи. В ходе проведенного исследования выяснилось, что возникающие при оптимизации численными методами итерационные процедуры оказываются чувствительными к начальному приближению, в связи с этим предлагается подбирать начальное приближение, используя метод продолжения по времени перелета. С помощью предложенного алгоритма были найдены оптимальные траектории для различных дат старта и прилета. Оптимальное управление, найденное данным методом, получилось близким к релейному. Также исследована зависимость затрат топлива от времени перелета. Показано, что при его увеличении затраты топлива значительно уменьшаются, а затем, начиная с какого-то момента, практически не меняются. С использованием технологии параллельного программирования MPI на гибридном вычислительном кластере К-60 в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН успешно реализован и запущен параллельный вариант программы, решающий поставленную задачу.

Список литературы

- [1] Электрические ракетные двигатели космических аппаратов и их влияние на радиосистемы космической связи / Н.А. Важенин, В.А. Обухов, А.П. Плохих [и др.]. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
- [2] Белецкий В. В. О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения // Космические исследования. 1964. Т. 2, № 3. С. 408–413.
- [3] Lagrange J. L. Mécanique analytique. Ve Courcier, 1815. Vol. 1.
- [4] Lantoine G., Russell R. P. The Stark model: an exact, closed-form approach

to low-thrust trajectory optimization // 21st International Symposium on Space Flight Dynamics. Toulouse, France: 2009.

- [5] Liouville J. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du mouvement d'un nombre quelconque de points matériels // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1849. Vol. 14. P. 257–299.
- [6] Banks D., Leopold J. G. Ionisation of highly excited atoms by electric fields. II. Classical theory of the Stark effect // Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics. 1978. Vol. 11, no. 16. P. 2833.
- [7] Murray-Krezan J. The classical dynamics of Rydberg Stark atoms in momentum space // American Journal of Physics. 2008. Vol. 76, no. 11. P. 1007–1011.
- [8] Born M. The mechanics of the atom. New York, USA, 1967. Vol. 1.
- [9] Куницын А. Л. О движении ракеты в центральном силовом поле с постоянным вектором реактивного ускорения // Космические исследования. 1966. Т. 6, № 2. С. 324–327.
- [10] Демин В. Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.: Наука, 1968.
- [11] Kirchgraber U. A problem of orbital dynamics, which is separable in KS-variables // Celestial mechanics. 1971. Vol. 4, no. 3-4. P. 340–347.
- [12] Полещиков С. М. Об одном интегрируемом случае возмущенной задачи двух тел // Космические исследования. 2004. Т. 42, № 4. С. 398–407.
- [13] Isayev Y. N., Kunitsyn A. L. To the problem of satellite's perturbed motion under the influence of solar radiation pressure // Celestial mechanics. 1972. Vol. 6, no. 1. P. 44–51.
- [14] Biscani F., Izzo D. The Stark problem in the Weierstrassian formalism // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 439, no. 1. P. 810–822.

- [15] Pellegrini E., Russell R. P., Vittaldev V. F and G Taylor series solutions to the Stark and Kepler problems with Sundman transformations // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2014. Vol. 118, no. 4. P. 355–378.
- [16] Hatten N., Russell R. P. Comparison of three Stark problem solution techniques for the bounded case // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2015. Vol. 121, no. 1. P. 39–60.
- [17] URL: <https://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [18] URL: <http://www.alglib.net/>.
- [19] URL: <http://www.boost.org/>.
- [20] URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?planet_eph_export.
- [21] URL: <https://ccom.ucsd.edu/optimizers/downloads.php>.
- [22] URL: <http://www.kiam.ru/MVS/resourses/k60.html>.

Приложение

Эллиптические интегралы и эллиптические функции Якоби и Вейерштрасса

Эллиптическим интегралом называется функция, которая может быть представлена как интеграл от рациональной функции двух переменных

$$f(x) = \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)}) dt$$

где P — многочлен, не имеющий кратных корней. Функции, обратные к эллиптическим интегралам, называются эллиптическими функциями.

Эллиптической функцией Якоби

$$x = sn(u; k)$$

называется функция, обратная к эллиптическому интегралу

$$u = \int_0^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1.$$

Эллиптической функцией Вейерштрасса

$$y = \rho(u; g_2, g_3)$$

называется функция, обратная к эллиптическому интегралу

$$u = \int_y^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2s - g_3}}, \quad g_2, g_3 = \text{const.}$$