МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Базовая организация:
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Квалификационная работа на соискание степени бакалавра
по направлению 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

Оптимизация траекторий перелета между либрационными орбитами различных систем трех тел с использованием инвариантных многообразий

Выполнил:
студент группы 572в
Шипицин Виктор Владимирович

____

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Широбоков Максим Геннадьевич

____

Москва, 2019

Аннотация

Цель данного исследования – построение оптимальных по суммарной характеристической скорости траекторий перелёта между орбитами различных систем трех тел. В работе строится перелет между плоскими периодическими орбитами Ляпунова вокруг коллинеарных точек либрации в системах Солнце–Земля и Солнце–Венера. Траектория проектируются с использованием устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий, связанных с либрационными орбитами. Сначала перелет строится в рамках «сопряженных» задач трех тел (участки Солнце–Земля и Солнце–Венера) и задачи двух тел (гелиоцентрический участок). Далее эта траектория, полученная в простой модели, адаптируется к высокоточной модели, основанной на эфемеридном движении тел Солнечной системы.

Данная работа может рассматриваться как первый этап на пути создания методики проектирования межпланетного суперхайвея – динамической структуры, позволяющей со сравнительно низкими затратами топлива перемещаться между планетами Солнечной системы.

Оглавление

Введение **4**

1. Теоретические сведения **6**

1.1. Круговая ограниченная задача трёх тел 6

1.2. Квазипериодические орбиты вокруг коллинеарных точек либрации 9

1.3. Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия . . 11

2. Моделирование **12**

2.1. Постановка задачи 12

2.2. Алгоритм построения траектории 13

2.3. Результаты в рамках простой модели 18

3. Адаптация траектории к высокоточной модели **20**

3.1. Эфемеридное движение 20

3.2. Метод параллельной пристрелки 21

3.3. Результаты в рамках сложной модели 24

Заключение **27**

Список использованных источников **28**

Введение

В большом количестве исследований, связанных с полётом космических аппаратов (КА), уделяется внимание предполётному проектированию, на котором оптимизируются затраты топлива. В случае запуска КА важно увеличивать долю полезной нагрузки, поэтому возникает задача проектирования оптимальных траекторий с точки зрения затрат характеристических скоростей.

Для построения оптимальных траекторий нужно учитывать тонкие гравитационные эффекты. С помощью классического подхода – задачи двух тел – не удастся использовать сложную структуру и геометрию инвариантных множеств и их устойчивых и неустойчивых многообразий, которые появляются при рассмотрении ограниченной задачи трёх тел [1]. Оказывается, такие многообразия для различных систем трёх тел могут пересекаться в координатном пространстве, или быть близкими, что позволяет с относительно малыми затратами топлива перемещаться между этими системами, а значит, и между соответствующими планетами/спутниками.

Таким образом, в нашей Солнечной системе существует система тоннелей, образованная многообразиями, порождёнными точками либрации различных систем двух тел [2]. Подчёркивая важность увеличения массы полезной нагрузки аппарата и использования гравитационных эффектов [3], а также опираясь на идеи методов перелёта к Марсу [4] и Венере [5], в данной работе ставится цель – начать с важного этапа построения полётов вдоль межпланетного суперхайвея [6]: построения траектории между двумя системами трёх тел и её оптимизации.

Перелёт на орбиту Ляпунова вокруг коллинеарной точки либрации от массивного тела и обратно рассмотрен в [7]. Данное исследование базируется на проектировании перелёта с плоской орбиты одной системы трёх тел на плоскую орбиту другой системы. Поэтому содержание работы построено следующим образом.

В **первой главе** будут даны теоретические сведения, используемые в решении задачи. Сначала будет идти речь о модели круговой ограниченной задачи трёх тел (circular restricted three-body problem, CR3BP). Затем будут получены типы движений вокруг коллинеарных точек либрации. Далее будут определены устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия, с помощью которых будет проектироваться траектория перелёта.

Во **второй главе** будет сформулирована постановка задачи вместе с описанием схемы построения траектории, а также даны результаты в рамках простой модели.

И, наконец, **третья глава** будет посвящена адаптации простой модели к сложной (высокоточной) модели, основанной на эфемеридном движении тел Солнечной системы, помощью одного из популярных численных методов общего назначения.

Первые две главы и соответствующие результаты, полученные в рамках простой модели, были освещены на 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ [8].

1. Теоретические сведения

1.1. Круговая ограниченная задача трёх тел

Классическая задача трёх тел подразумевает, что тела взаимодействуют только гравитационно, и их массы известны. Накладываемые ограничения помогают упростить решение задачи, и в то же время не лишены смысла.

Первое ограничение связано с тем, что масса одного тела много меньше масс двух других тел. Поэтому задача называется ограниченной. В данной работе $m_1 \geqslant m_2 \gg m_3$, где m_1 обозначает Солнце, m_2 – Землю/Венеру (в зависимости от рассматриваемой системы), m_3 – КА.

Второе ограничение связано со следующим упрощением: не обращая внимания на третью, меньшую, массу, возьмем центр масс первых двух тел, также называемый барицентром. Тогда предположение заключается в том, что два массивных тела будут вращаться вокруг барицентра по круговым орбитам. Поэтому задача называется круговой.

Чтобы получить уравнения движения, введём некоторую инерциальную систему координат (ИСК) $CXYZ$, связанную с Солнцем, и вращающуюся систему координат (ВСК) $Cxyz$, где C – барицентр, ось Cx соединяет m_1 и m_2, ось Cz совпадает с осью CZ и совпадает с направлением вектора угловой скорости движения m_2 вокруг m_1, а ось Cy дополняет оси Cx и Cz правой тройки (рис. 1).

Также введём безразмерную систему единиц, в которой $m_1 = 1 - \mu$, $m_2 = \mu$, где $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ – массовый параметр, а норма угловой скорости ВСК и расстояние между m_1 и m_2 равны единице.

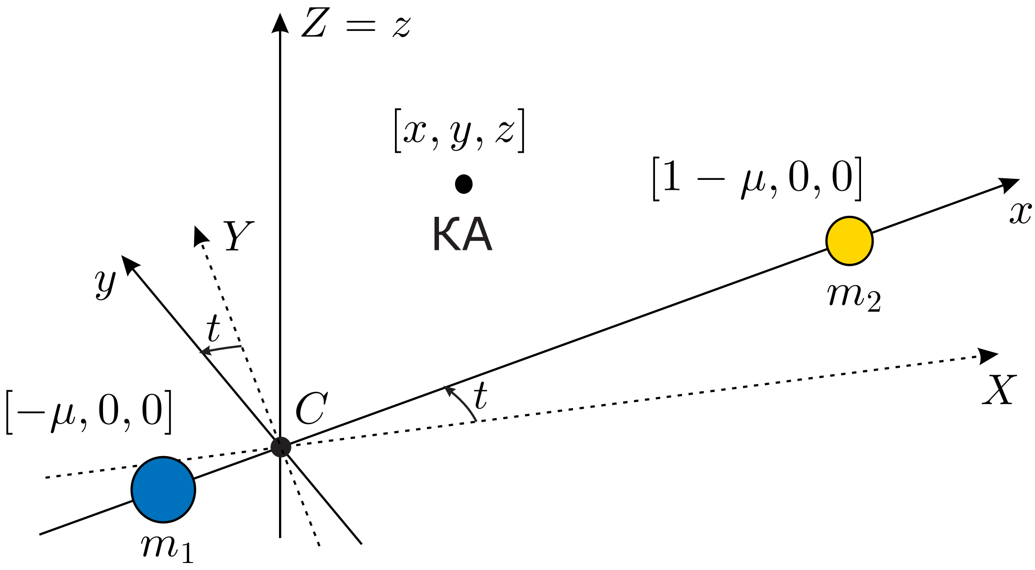

Рис. 1. Инерциальная и вращающаяся системы координат. Система единиц безразмерная

Тогда в ВСК координаты масс m_1 и m_2 равны $[-\mu,\ 0,\ 0]$ и $[1-\mu,\ 0,\ 0]$ соответственно.

Положение $\boldsymbol{R} = [X,\ Y,\ Z]$ и скорость $\boldsymbol{V} = [\dot{X},\ \dot{Y},\ \dot{Z}]$ КА в ИСК связаны с положением $\boldsymbol{r} = [x,\ y,\ z]$ и скоростью $\boldsymbol{v} = [\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}]$ в ВСК следующим образом:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Введём функцию Лагранжа как

$$L = \frac{1}{2}V^2 + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \tag{1.1}$$

где $V^2 = (\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2 + (\dot{Z})^2 = (\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2 + (\dot{z})^2$, а r_1 и r_2 – расстояния до m_1 и m_2, которые выражаются как

$$r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2$$
$$r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2$$

Тогда запишем уравнения Эйлера-Лагранжа в ВСК:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0 \tag{1.2}$$

После подстановки (1.1) в (1.2) и упрощений получим уравнения движения в ВСК:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= U_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= U_y \\ \ddot{z} &= U_z \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \tag{1.4}$$

1.2. Квазипериодические орбиты вокруг коллинеарных точек либрации

В системе (1.3) есть пять положений равновесия, называемых точками либрации (точками Лагранжа, L-точками), которые обычно обозначаются как L_1, L_2, L_3 (коллинеарные точки) и L_4, L_5 (треугольные точки). В дальнейшем в данной работе нас будут интересовать точки L_1 и L_2, как неустойчивые (по Ляпунову) и самые близкие к массе m_2.

Получим вид движения вокруг какой-либо коллинеарной точки либрации в линейном приближении. Для этого перепишем систему уравнений (1.3) относительно фазового вектора $\boldsymbol{x} = [x,\, y,\, z,\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}]$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \tag{1.5}$$

где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z},\, U_x + 2\dot{y},\, U_y - 2\dot{x},\, U_z]$, и линеаризуем её в некоторой коллинеарной точке либрации $\boldsymbol{x}_L = [x_L,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0]$. Тогда уравнения относительно $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_L$ будут такими:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_L} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{1.6}$$

Через обозначения $\boldsymbol{O}_{3\times3}$ – нулевой матрицы 3×3, $\boldsymbol{I}_{3\times3}$ – единичной матрицы 3×3, $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{rr}}$ – матрицы вторых частных производных функции $U(x,y,z)$ (1.4) и $\boldsymbol{\Omega}_{3\times3}$ – матрицы векторного произведения на угловую скорость $\boldsymbol{\omega} = [0;\, 0;\, 1]$ (то есть такой матрицы, что $\forall \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{\Omega}_{3\times3}\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{b}$)

$$\boldsymbol{\Omega}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

матрица $\boldsymbol{A}$ запишется как

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_{3\times3} \\ \boldsymbol{U_{rr}} & -2\boldsymbol{\Omega}_{3\times3} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_L}$$

Учтём, что в точке $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_L$ матрица $\boldsymbol{U_{rr}}$ является диагональной. Приняв за $\bar{\mu} = \mu|x_L - 1 + \mu|^{-3} + (1-\mu)|x_L + \mu|^{-3}$, получим характеристические числа линейной системы (1.6):

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm\sqrt{\left(\bar{\mu} - 2 + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}\right)/2} \\ \lambda_{3,4} &= \pm i\sqrt{\left(2 - \bar{\mu} + \sqrt{9\bar{\mu}^2 - 8\bar{\mu}}\right)/2} \\ \lambda_{5,6} &= \pm i\sqrt{\bar{\mu}} \end{aligned}$$

Тогда, обозначая $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = -\lambda_4 = i\omega_p$, $\lambda_5 = -\lambda_6 = i\omega_v$, запишем решение системы (1.6):

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha\cos(\omega_p t + \phi_1) + \gamma e^{\lambda t} + \bar{\gamma} e^{-\lambda t} \\ -k_2\alpha\sin(\omega_p t + \phi_1) + k_1(\gamma e^{\lambda t} - \bar{\gamma} e^{-\lambda t}) \\ \beta\cos(\omega_v t + \phi_2) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

где

$$k_1 = \frac{\lambda^2 - 2\bar{\mu} - 1}{2\lambda}, \quad k_2 = \frac{\omega_p^2 + 2\bar{\mu} + 1}{2\omega_p}$$

Варьирование значений коэффициентов α, β, γ, $\bar{\gamma}$ позволяет выделить различные типы (квази)периодических орбит и других траекторий в линейной динамике, описанной выше. Классификация таких типов движения полно представлена в [9]. В данной работе мы будем проектировать траектории, используя плоские (горизонтальные) периодические орбиты Ляпунова, которые получаются при $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = \bar{\gamma} = 0$, то есть характеризуются амплитудой движения по оси Cx или Cy.

1.3. Устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия

С периодическими орбитами вокруг коллинеарных точек либрации связаны два множества траекторий, которые стремятся к орбите при $t \to +\infty$ (устойчивые) и при $t \to -\infty$ (неустойчивые), называемые устойчивыми и неустойчивыми многообразиями.

Чтобы построить какую-либо асимптотическую траекторию, связанную с некоторой точкой $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ периодической орбиты $\boldsymbol{x}_p(t)$, используем уравнения (1.6) с той лишь разницей, что теперь вместо точки $\boldsymbol{x}_L$ будет точка на орбите $\boldsymbol{x}_p(t)$. Относительно $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p(t)$ получим:

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p(t)} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{y}$$

Решение этих уравнений выражается через матрицу перехода $\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{y}(t_0)$$

которая находится из решения уравнений движения и уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) \\ &\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t, t_0) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0), \quad \boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \boldsymbol{I}_{6\times 6} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Проинтегрировав систему (1.8) на периоде орбиты T, получим матрицу монодромии $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\Phi}(t_0 + T, t_0)$, собственные значения которой для рассматриваемых плоских орбит Ляпунова удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\lambda_1 > 1, \quad \lambda_2 = \lambda_1^{-1} < 1, \quad |\lambda_3| = |\lambda_4| = |\lambda_5| = |\lambda_6| = 1$$

Тогда, взяв собственные векторы $\boldsymbol{v}_u$ и $\boldsymbol{v}_s$, соответствующие наибольшему и наименьшему по норме собственным числам λ_1 и λ_2, получим начальные приближения к траектории неустойчивого/устойчивого многообразия:

$$\boldsymbol{x}_u = \boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{v}_u$$

$$\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{v}_s$$

где ε – малое значение (в данной работе 10^{-8}). И, наконец, интегрирование вперёд/назад во времени уравнений (1.3) от данных начальных приближений даст нужную траекторию соответствующего многообразия.

2. Моделирование

2.1. Постановка задачи

В работе будет рассматриваться проектирование траектории в рамках модели CR3BP и задачи двух тел, в которых плоскости орбит Земли и Венеры считаются совпадающими. Всего будет 5 этапов построения траектории:

1. построение плоской периодической орбиты вокруг выбранной коллинеарной точки либрации (L_1/L_2) и с выбранной амплитудой в системе Солнце–Земля;

2. построение неустойчивого многообразия связанного с орбитой, описанной выше;

3. построение плоской периодической орбиты вокруг выбранной коллинеарной точки либрации (L_1/L_2) и с выбранной амплитудой в системе Солнце–Венера;

4. построение устойчивого многообразия связанного с орбитой, описанной выше;

5. построение двухимпульсного перелёта между крайними точками многообразий, который находится с помощью решения задачи Ламберта.

Модель, в рамках которой траектория строится описанным выше образом, в данной работе называется *простой*.

Пусть $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$ – скорости КА в крайних конечной и начальной точках на участках неустойчивого и устойчивого многообразии соответственно, а $\boldsymbol{V}_{1corr}$ и $\boldsymbol{V}_{2corr}$ – скорости, полученные из решения задачи Ламберта.

Тогда цель – решить задачу оптимизации

$$\boldsymbol{J} = \|\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_{1corr}\|_2 + \|\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_{2corr}\|_2 \to \min$$

То есть, найти оптимальную по сумме характеристических скоростей траекторию перелёта КА между плоскими периодическими орбитами вокруг коллинеарных точек либрации систем Солнце–Земля и Солнце–Венера.

2.2. Алгоритм построения траектории

Напомним, что все построения будут проводиться с использованием безразмерных единиц, которые получены путём принятия за единицу расстояний от Солнца до Земли/Венеры.

Сначала построим плоские периодические орбиты Ляпунова. Для этого возьмём точки L_2 в системах Солнце–Земля и Солнце–Венера, координаты которых в соответствующих ВСК будут $x_{L2} = 1.0100740$ и $x_{L2} = 1.0093433$. Для выбранных амплитуд орбит $\alpha = 0.0023$ в первой системе и $\alpha = 0.0021$ во второй системе по оси Cx получим (квази)периодические траектории (рис. 2 и рис. 3) следующим образом.

Начальное приближение для фазового вектора в момент времени $t = 0$ берётся из решения линеаризованных уравнений (1.7) и выглядит как $[x(0);\ 0;\ 0;\ 0;\ \dot{y}(0);\ 0]$, для полупериода $T^0_{1/2} = \pi/\omega_p$. Чтобы скорректировать в данных приближениях переменные скорость $\dot{y}(t = 0)$ по оси Cy в начальный момент времени и полупериод орбиты $T_{1/2}$, решим систему

$$
\begin{aligned}
y(T_{1/2}) &= 0 \\
\dot{x}(T_{1/2}) &= 0
\end{aligned}
$$

некоторым численным методом оптимизации для задач нелинейного программирования (например, из семейства Trust-Region алгоритмов), интегрируя уравнения движения (1.3).

Далее, проинтегрировав уравнения движения на всём периоде со скорректированного начального приближения, получим соответствующие искомые орбиты.

Чтобы получить неустойчивое многообразие в системе Солнце–Земля или устойчивое многообразие в системе Солнце–Венера, связанное с точкой на орбите вокруг точки либрации, будем придерживаться метода, изложенного в первой главе. То есть, для какой-либо выбранной точки на орбите проинтегрируем уравнения в вариациях (1.8) на всём периоде.

Получив нужный собственный вектор матрицы монодромии и взяв соответствующее начальное приближение, мы приходим к построению многообразия на заданный период (рис. 4 и рис. 5).

Проектирование двухимпульсного перелёта между крайними точка-

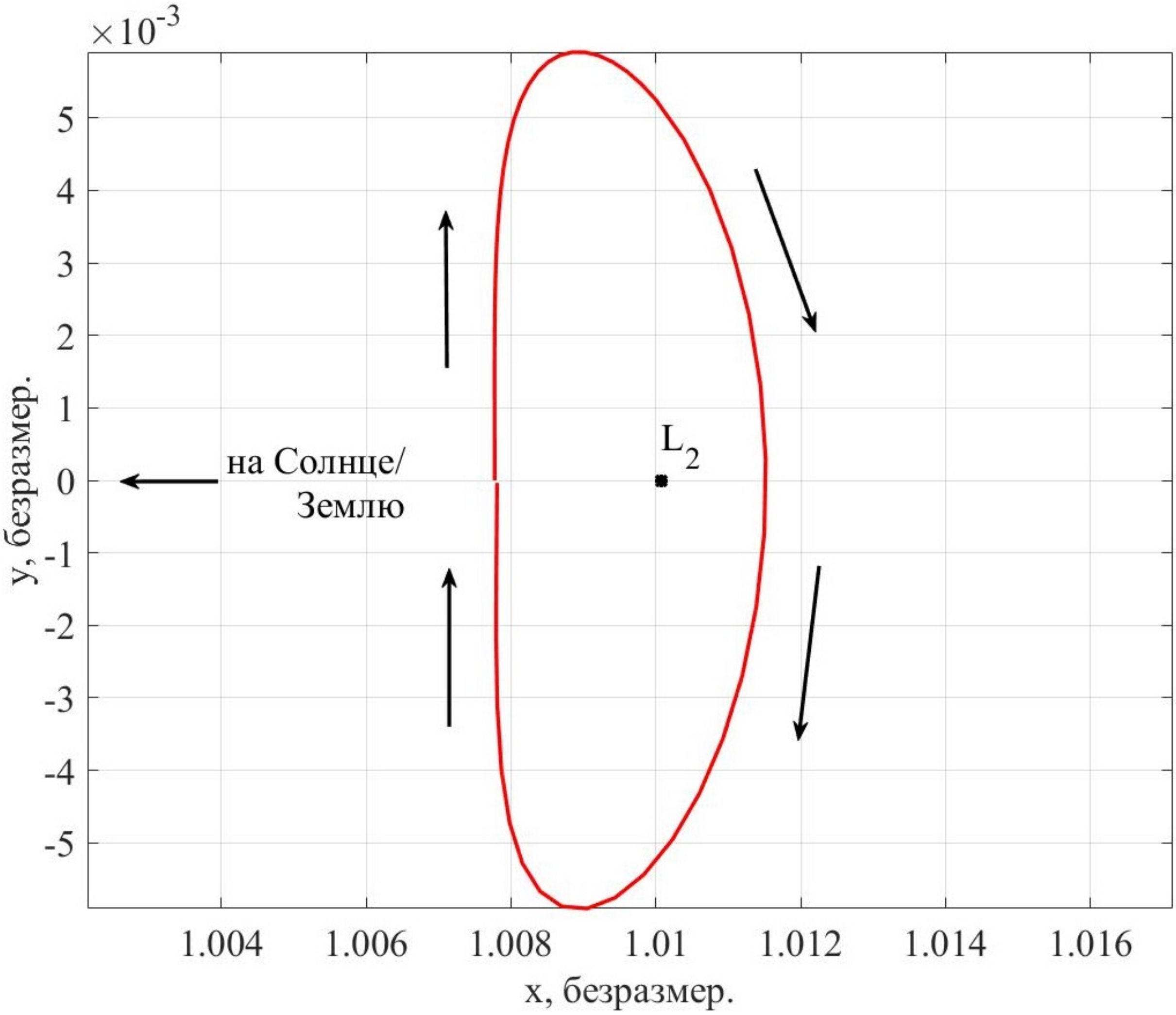

Рис. 2. Плоская орбита в системе Солнце–Земля

ми участков многообразий сводится к решению задачи Ламберта, которая заключается в определении орбиты КА между точками пространства с радиус-векторами $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$ в моменты времени t_1 и t_2 соответственно, для заданных времени перелета $T = t_2 - t_1$, направления перелета и числа полных витков вокруг притягивающего центра. В основе большого количества методов определения траектории находятся уравнения Ламберта [10].

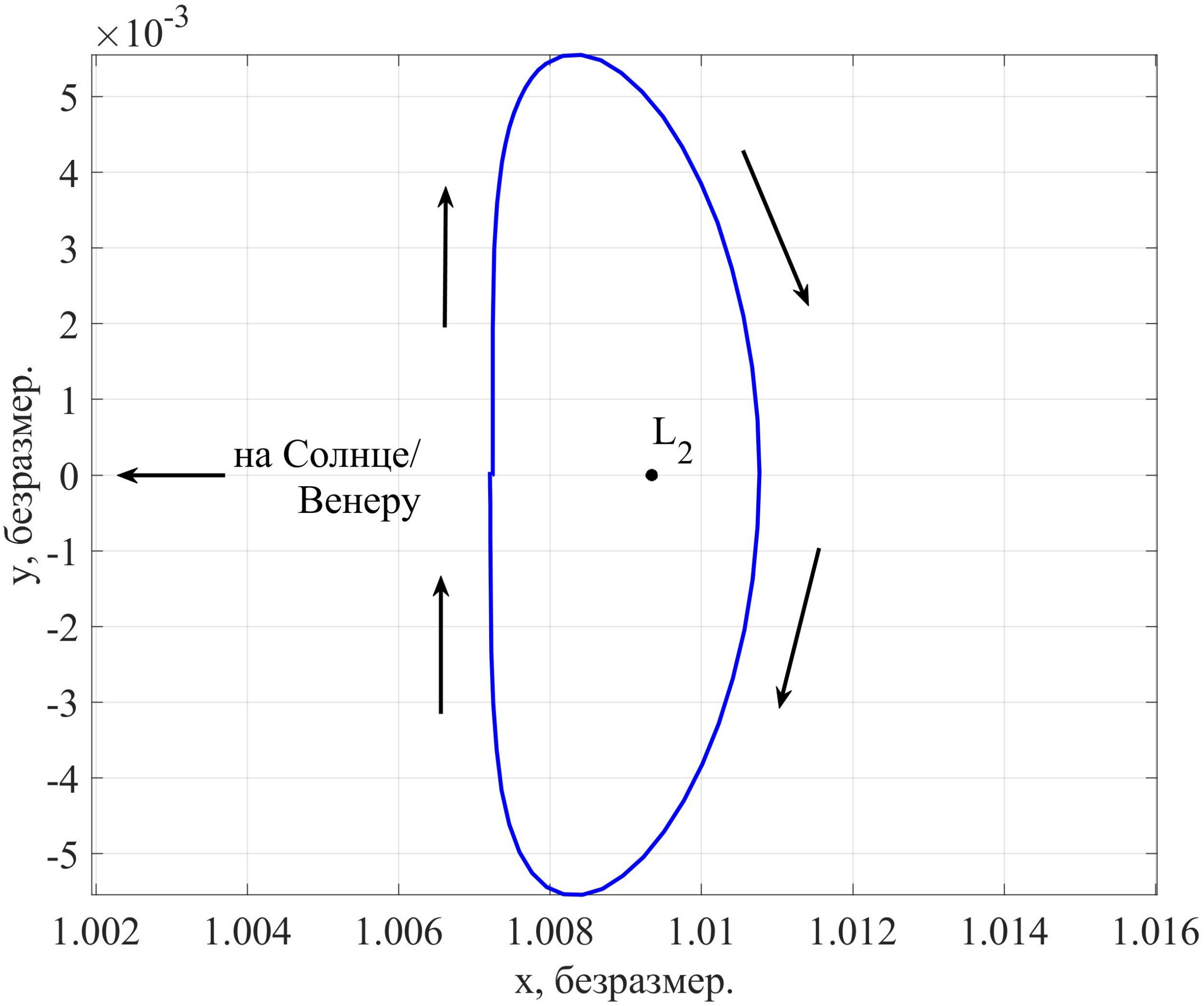

Рис. 3. Плоская орбита в системе Солнце–Венера

Таким образом, решением данной краевой задачи для дифференциального уравнения в модели двух тел Солнце–КА

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = -\mu\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|^3}, \quad \boldsymbol{R}(t_1) = \boldsymbol{R}_1, \quad \boldsymbol{R}(t_2) = \boldsymbol{R}_2$$

будет некоторая кеплеровская орбита (или её часть) и, следовательно, скорректированные векторы скоростей $\boldsymbol{V}_{1corr}$ и $\boldsymbol{V}_{2corr}$ в точках $\boldsymbol{R}_1$ и $\boldsymbol{R}_2$. Изменения скоростей, которые необходимы для перехода с неустойчивого многообразия на траекторию данного перелёта $||\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_{1corr}||_2$ и с траектории перелёта на устойчивое многообразие $||\boldsymbol{V}_{2corr} - \boldsymbol{V}_2||_2$, есть характеристические скорости, сумма которых минимизируется в данной работе.

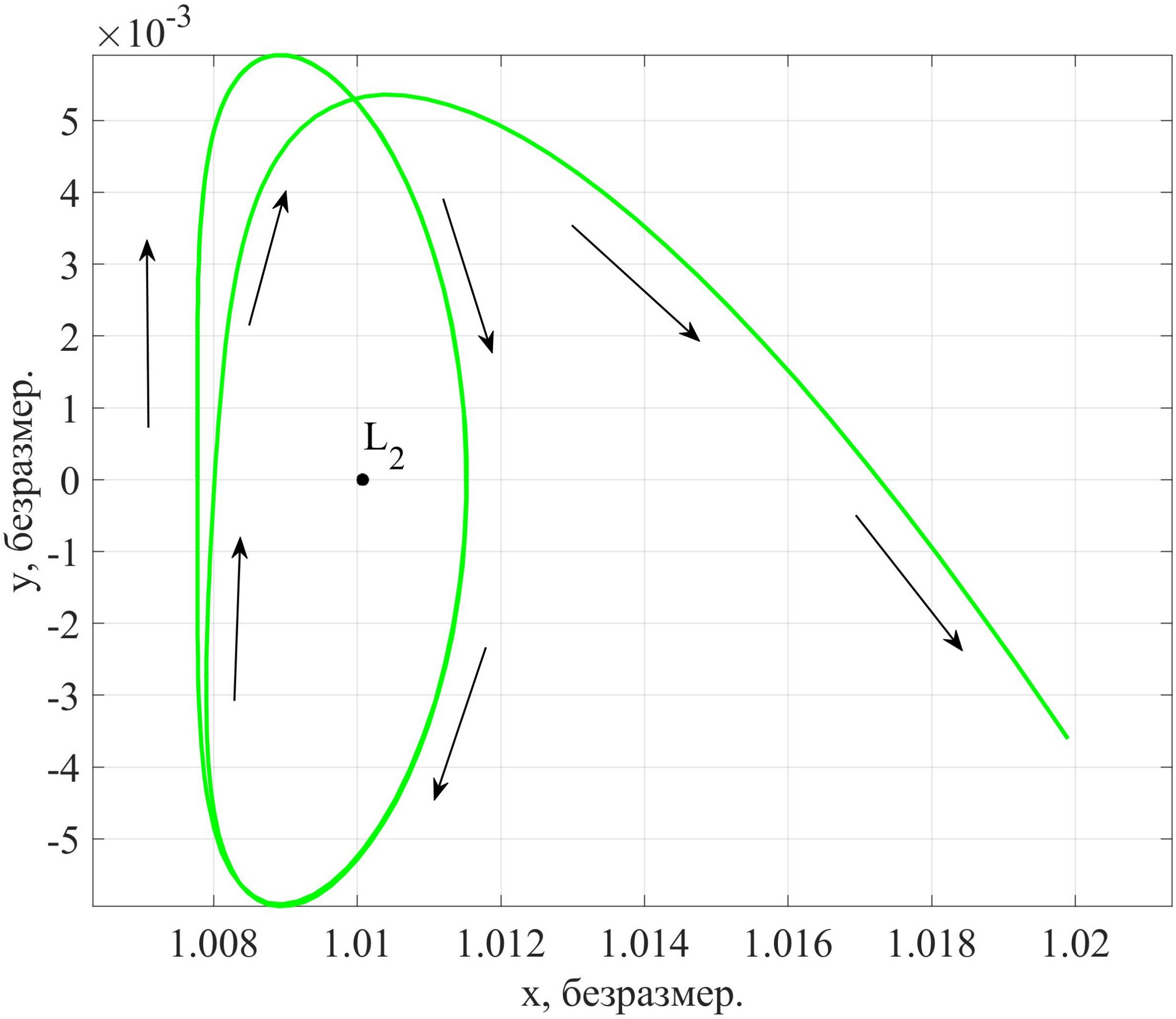

Рис. 4. Неустойчивое многообразие в системе Солнце–Земля

Задача оптимизации будет решаться в единой ИСК с центром в Солнце и безразмерных единицах системы Солнце–Земля путём варьирования следующих переменных: ϕ и ψ – параметры, характеризующие точку на плоской орбите в системе Солнце–Земля и Солнце–Венера соответственно, t_1 и t_2 – времена полёта по неустойчивому/устойчивому многообразию, T – время двухимпульсного перелёта.

Для решения задачи используется один из наиболее распространённых и эффективных оптимизационных алгоритмов общего назначения – Sequential Quadratic Programming (SQP). Для обеспечения высокого порядка точности, интегрирование производится адаптивным методом Адамса переменного порядка [11].

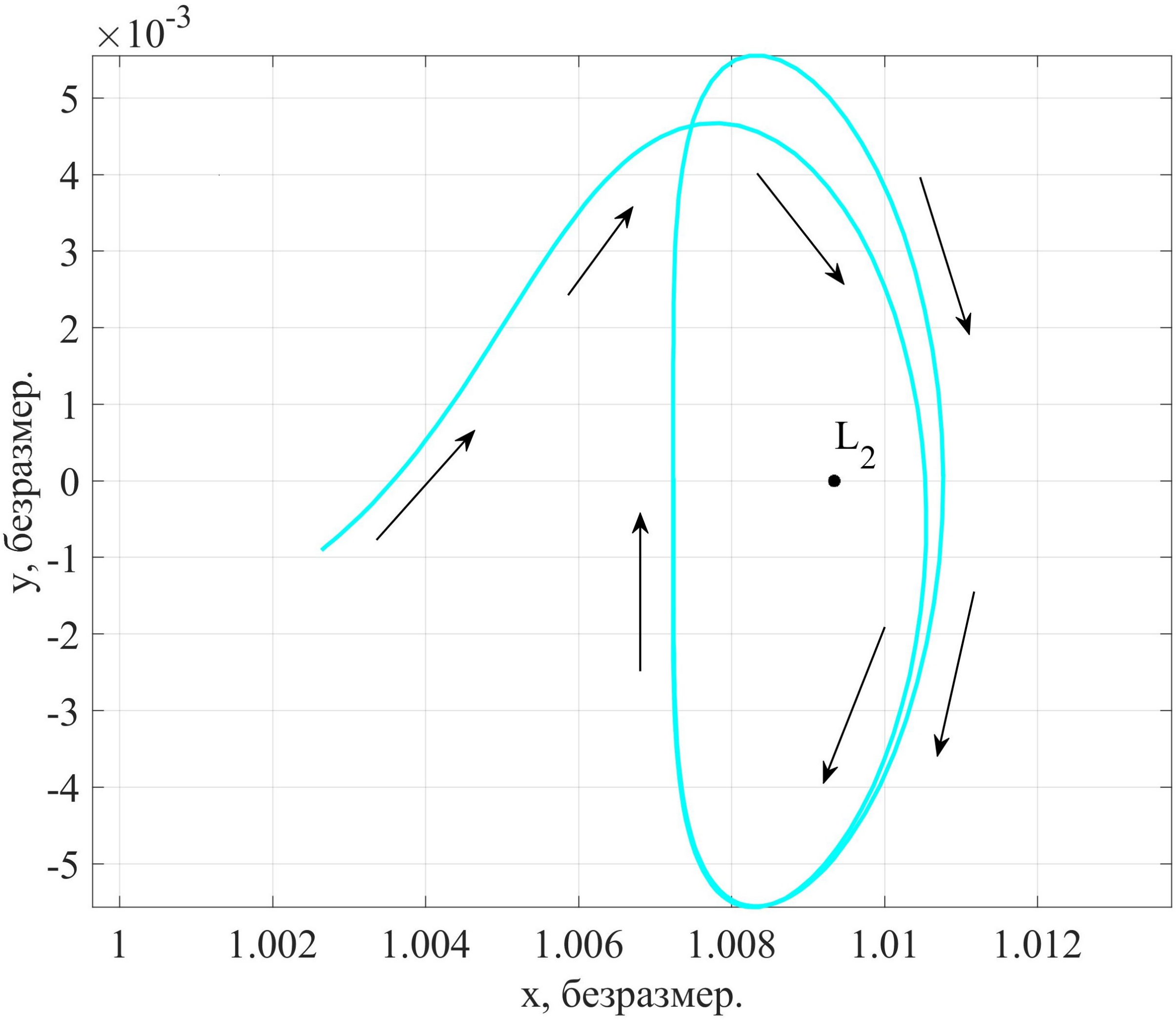

Рис. 5. Устойчивое многообразие в системе Солнце–Венера

2.3. Результаты в рамках простой модели

С учётом положений Земли и Венеры в начальный момент времени (в работе была выбрана дата 02.07.2044), полученных с помощью информации об эфемеридном движении (об этом будет рассказано в третьей главе), построенная траектория получилась следующей (рис. 6).

Суммарная характеристическая скорость составила 6.49 км/с.

Стоит упомянуть о том, что в задаче двух тел между круговыми компланарными орбитами существует оптимальный среди двухимпульсных перелётов гомановский переход [12]. В случае перелёта между орбитами

Земли и Венеры суммарная характеристическая скорость при гомановском переходе составляет примерно 5.20 км/с. Здесь же стоит отметить, что построение траектории в простой модели есть построение начального приближения для эфемеридной модели. Поэтому данный, достигнутый варьированием начальных значений переменных оптимизации, результат в рамках простой модели можно считать удовлетворительным.

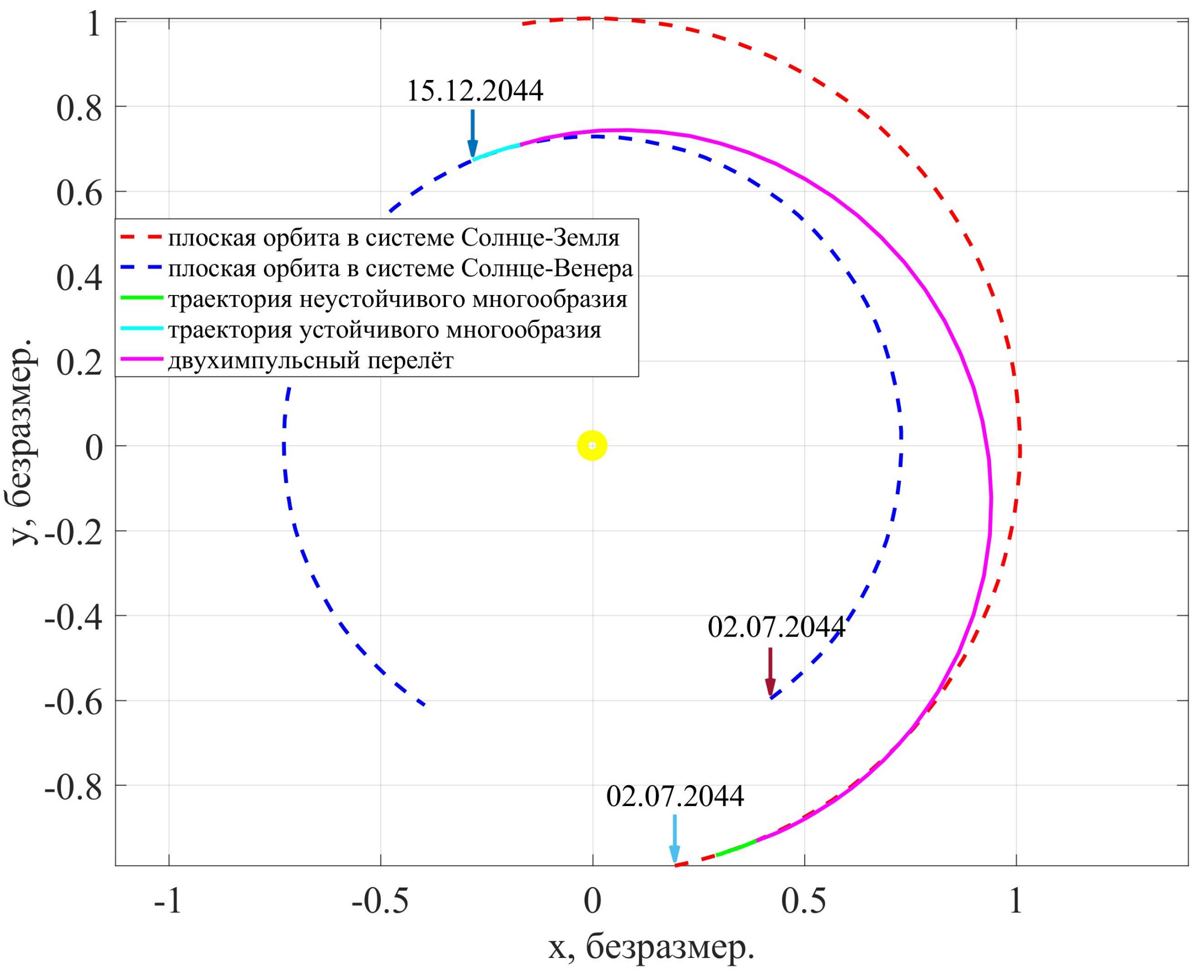

Рис. 6. Траектория полёта в рамках простой модели. Более поздняя дата символизирует переход на плоскую орбиту в системе Солнце–Венера

3. Адаптация траектории к высокоточной модели

3.1. Эфемеридное движение

Необходимым для подтверждения результатов построения траектории является анализ движения с учётом тел Солнечной системы, то есть адаптация траектории к высокоточной модели, основанной на эфемеридном движении тел Солнечной системы. В данной работе использовались эфемериды Jet Propulsion Laboratory (JPL) DE430 и, соответствующие им, массовые параметры планет [13]. Для перевода траектории из модели CR3BP в ВСК в эфемеридную модель в проекциях на оси Международной Небесной Системы Координат (МНСК) и с центром в местоположении Солнца будем пользоваться следующим алгоритмом.

1. Сместим начало координат в центр масс Солнца. Тогда фазовый вектор станет таким: $\boldsymbol{x}(t) = [x(t) + \mu,\ y(t),\ z(t),\ \dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)]$.

2. Введём мгновенный базис

$$\boldsymbol{e_1}(t) = \frac{\boldsymbol{R}(t)}{|\boldsymbol{R}(t)|}, \quad \boldsymbol{e_3}(t) = \frac{\boldsymbol{R}(t) \times \boldsymbol{V}(t)}{|\boldsymbol{R}(t) \times \boldsymbol{V}(t)|}, \quad \boldsymbol{e_2}(t) = \boldsymbol{e_3}(t) \times \boldsymbol{e_1}(t)$$

и мгновенную угловую скорость

$$\Omega(t) = \frac{|\boldsymbol{R}(t) \times \boldsymbol{V}(t)|}{|\boldsymbol{R}(t)|^2}$$

где радиус-вектор $\boldsymbol{R}(t)$ и скорость $\boldsymbol{V}(t)$ получены из эфемерид движения Земли/Венеры относительно Солнца.

3. Теперь получим искомый фазовый вектор

$\boldsymbol{X}(t) = [X(t),\, Y(t),\, Z(t),\, \dot{X}(t),\, \dot{Y}(t),\, \dot{Z}(t)]$ путём преобразования:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \Omega e_{12} & -\Omega e_{11} & 0 & e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ \Omega e_{22} & -\Omega e_{21} & 0 & e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ \Omega e_{32} & -\Omega e_{31} & 0 & e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+\mu \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

где $\boldsymbol{e}_1 = [e_{11},\, e_{21},\, e_{31}]$, $\boldsymbol{e}_2 = [e_{12},\, e_{22},\, e_{32}]$, $\boldsymbol{e}_3 = [e_{13},\, e_{23},\, e_{33}]$.

Проделав так для выбранных точек построенной траектории в простой модели, мы получим скорректированное начальное приближение для высокоточной модели, которое будет использовано для уточнения движения с помощью метода параллельной пристрелки.

3.2. Метод параллельной пристрелки

Метод параллельной пристрелки зарекомендовал себя при решении задач в случаях высокой чувствительности системы. Поэтому в механике космического полёта он используется для построения квазипериодических орбит, адаптации траекторий к сложной модели движения и решения краевых задач в случаях с неустойчивой динамикой.

Суть метода состоит в том, чтобы разбить начальную траекторию на несколько участков, распространить её вперёд на заданный промежуток времени на каждом из них, а затем соединить гладко или только непрерывно набор полученных дуг.

Применим метод для нашего случая. На промежутке $[t_1,\, t_f]$ решается следующая задача

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

где $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{r},\, \boldsymbol{v}]$ – фазовый вектор, $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = [\dot{\boldsymbol{v}},\, \sum_i \boldsymbol{F}_i]$ – функция правых частей уравнений движения в сложной модели с учётом центральных гравитационных полей тел Солнечной системы, то есть

$$\boldsymbol{F}_i = -\mu_i \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_i|^3} + \mu_i \frac{\boldsymbol{R}_i}{|\boldsymbol{R}_i|^3}$$

где μ_i – массовый параметр i-ой планеты, $\boldsymbol{R}_i$ – радиус-вектор, полученный согласно эфемеридам i-ой планеты.

Разобъём отрезок $[t_1,\, t_f]$ на N промежутков: $t_1 < t_2 < ... < t_{N+1}$. Решение в момент t_{i+1} системы уравнений на отрезке $[t_i;\, t_{i+1}]$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(t_i) = \boldsymbol{x}_i$$

обозначим как $\boldsymbol{x}_i^t$. Мы хотим получить всюду гладкую траекторию, кроме точек приложения импульсов (там траектория может быть просто непрерывной). Пусть эти точки имеют номера k и m, а векторы $\boldsymbol{\Delta v}_1$ и $\boldsymbol{\Delta v}_2$ – разности скоростей между многообразиями и двухимпульсным перелётом в этих точках.

Сформируем вектор неизвестных переменных

$$\boldsymbol{s} = [\boldsymbol{x}_1,\, ...,\, \boldsymbol{x}_N,\, \boldsymbol{\Delta v}_1,\, \boldsymbol{\Delta v}_2]$$

и вектор невязок

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^t - \boldsymbol{x}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{r}_k^t - \boldsymbol{r}_k \\ \boldsymbol{v}_k^t - \boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{\Delta v}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{r}_m^t - \boldsymbol{r}_m \\ \boldsymbol{v}_m^t - \boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{\Delta v}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{x}_N^t - \boldsymbol{x}_{N+1} \end{bmatrix}$$

Тогда задача адаптации траектории свелась к задаче минимизации функционала

$$\boldsymbol{J} = ||\boldsymbol{\Delta v}_1||_2 + ||\boldsymbol{\Delta v}_2||_2$$

с ограничениями $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}) = 0$.

Для ускорения и уточнения численного счёта требуется вычислить матрицу Якоби $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{s}}$. Для этого нужно будет записать, а затем и проинтегрировать уравнения в вариациях

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_i^t}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}_i^t}{\partial \boldsymbol{x}_i}\right)$$

$$\boldsymbol{x}(t_i) = \boldsymbol{x}_i, \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}_i^t}{\partial \boldsymbol{x}_i}(t_i) = \boldsymbol{I}_{6\times 6}$$

из которых можно получить матрицы перехода $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}_i^t}{\partial \boldsymbol{x}_i}$, участвующие в вычислении матрицы Якоби.

$$
\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{s}} = \begin{bmatrix}
\frac{\partial \boldsymbol{x}_1^t}{\partial \boldsymbol{x}_1} & -\boldsymbol{I}_{6\times6} & \boldsymbol{O}_{6\times6} & \dots & \dots & \dots & \boldsymbol{O}_{6\times6} & \boldsymbol{O}_{6\times3} & \boldsymbol{O}_{6\times3} \\
\boldsymbol{O}_{6\times6} & \frac{\partial \boldsymbol{x}_2^t}{\partial \boldsymbol{x}_2} & -\boldsymbol{I}_{6\times6} & \dots & \dots & \dots & \boldsymbol{O}_{6\times6} & \boldsymbol{O}_{6\times3} & \boldsymbol{O}_{6\times3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{x}_k^t}{\partial \boldsymbol{x}_k} & -\boldsymbol{I}_{6\times6} & \dots & \dots & \boldsymbol{O}_{6\times6} & \begin{matrix} \boldsymbol{O}_{3\times3} \\ -\boldsymbol{I}_{3\times3} \end{matrix} & \boldsymbol{O}_{6\times3} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{x}_m^t}{\partial \boldsymbol{x}_m} & -\boldsymbol{I}_{6\times6} & \dots & \boldsymbol{O}_{6\times6} & \boldsymbol{O}_{6\times3} & \begin{matrix} \boldsymbol{O}_{3\times3} \\ -\boldsymbol{I}_{3\times3} \end{matrix} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial \boldsymbol{x}_N^t}{\partial \boldsymbol{x}_N} & \boldsymbol{O}_{6\times3} & \boldsymbol{O}_{6\times3}
\end{bmatrix}
$$

3.3. Результаты в рамках сложной модели

Для решения задачи оптимизации в данной модели так же используется метод последовательного квадратичного программирования (SQP), а высокий порядок точности решения обыкновенных дифференциальных уравнений так же обеспечивается при помощи адаптивного метода Адамса.

С использованием градиента вектора ограничений по вектору неизвестных, то есть записанной ранее матрицы Якоби, скорость выполнения оптимизации увеличивается примерно в $6N$ раз, где N – количество выбранных узловых точек для начального приближения.

Для построения траектории в сложной модели (рис. 7) траектория, полученная в простой модели, была изменена, а именно: начальное приближение в сложной модели стало состоять из нескольких витков по периоди-

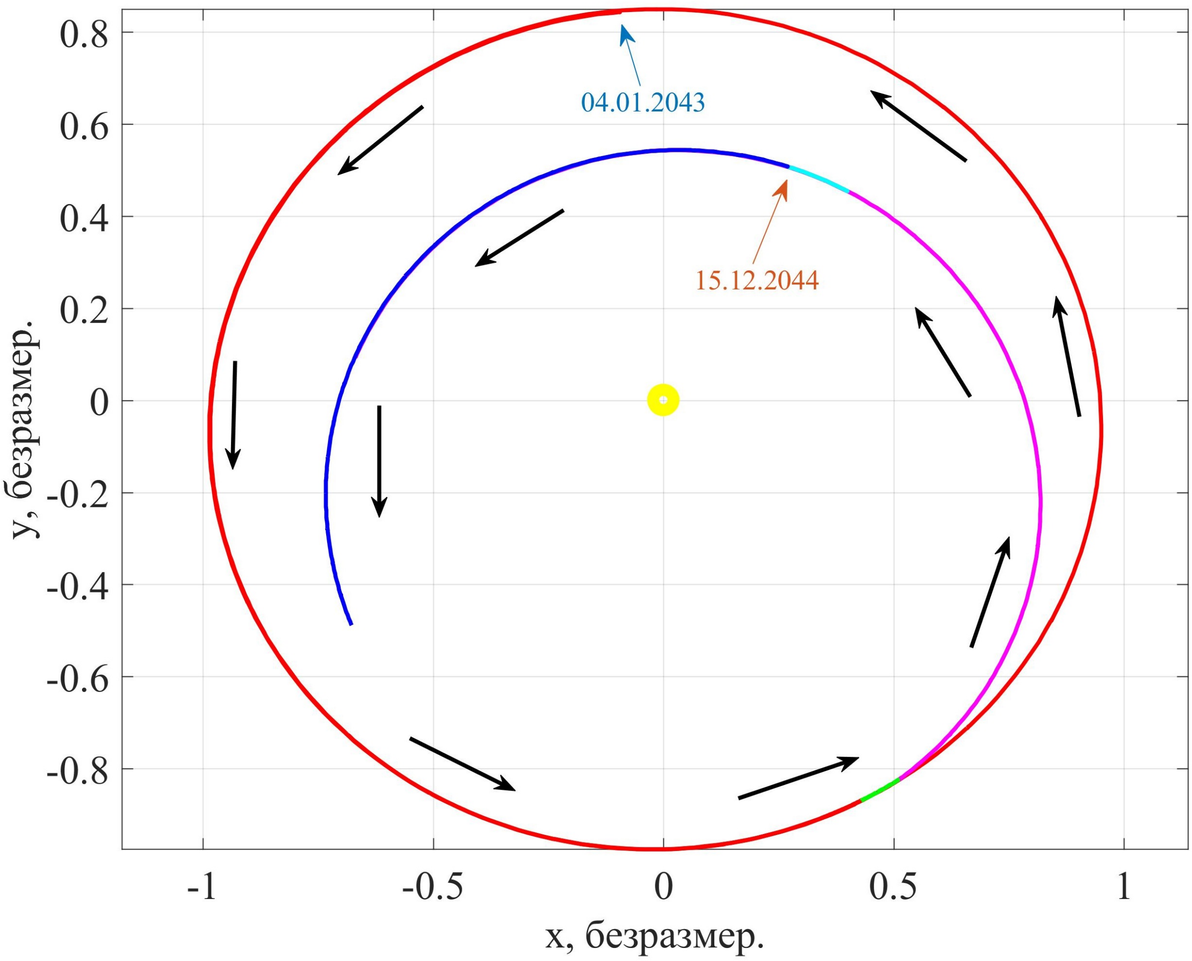

Рис. 7. Траектория полёта, адаптированная к высокоточной модели. Участки соответствуют траектории в простой модели. Более поздняя дата символизирует переход на плоскую орбиту в системе Солнце–Венера

ческой орбите в системе Солнце–Земля (было взято 10 точек на каждый виток), траектории полёта в простой модели (было взято по 5 точек на многообразиях и двухимпульсном перелёте) и нескольких витков по периодической орбите в системе Солнце–Венера (было взято так же 10 точек на каждый виток). Сходимость достигается за несколько десятков итераций и зависит от количества взятых витков по плоским орбитам. Путём перебора среди некоторых значений количества витков, суммарная характеристическая скорость оказалась наименьшей при трёх витках на обеих орбитах и составила 4.04 км/с. Начальная дата для части траектории, полученной в рамках простой модели, была выбрана как 02.07.2044.

Стоит отметить, что итоговый результат очень чувствителен к подбору начальных значений переменных оптимизации и начальной дате, что требует отдельного дополнительного анализа. В данной же работе начальные значения подбирались вручную, поэтому не исключено улучшение результата при более всеобъемлющем подходе.

В целом же, затраты, связанные с изменением импульса для перехода между орбитами, меньше, чем при гомановском переходе, что является хорошим аргументом для построения оптимальных межпланетных траекторий в дальнейшем.

Заключение

В первой части работы были построены плоские периодические орбиты вокруг коллинеарных точек либрации систем трех тел, а также связанные с орбитами устойчивые и неустойчивые многообразия. Далее была поставлена и решена оптимизационная задача в рамках простой модели сопряжённых задач трёх тел и задачи двух тел как задачи Ламберта о двухимпульсном перелёте.

Во второй части работы были реализованы переход к эфемеридной модели и уравнения движения в вариациях с учётом влияния тел Солнечной системы. Далее была поставлена новая задача оптимизации с ограничениями и решена с помощью метода параллельной пристрелки.

Таким образом, была получена траектория в высокоточной модели, в которой значение суммарной характеристической скорости меньше, чем при гомановском переходе между орбитами в задаче двух тел, что приводит к планированию дальнейших исследований, связанных с построением межпланетных траекторий как цепи перелётов между системами трёх тел.

Список использованных источников

[1] Dellnitz, M., Junge, O., Post, M. and Thiere, B. *On target for Venus – set oriented computation of energy efficient low thrust trajectories*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2006, Vol. 95, pp. 357—370.

[2] Lo, M.W. and Ross, S.D. *The Lunar L_1 Gateway: Portal to the Stars and Beyond*, AIAA Space 2001 Conference, Albuquerque, New Mexico, USA, August 28–30, 2001.

[3] Ross, S.D. *The Interplanetary Transport Network*, American Scientist, 2006, Vol. 94(3), pp. 230—237.

[4] Alonso, G.P. *The Design of System-to-System Transfer Arcs Using Invariant Manifolds in the Multi-Body Problem*, Ph.D. Thesis, Purdue University, 2006.

[5] Finocchietti, C., Pergola, P. and Andrenucci, M. *Venus transfer design by combining invariant manifolds and low-thrust arcs*, Acta Astronautica, 2014, Vol. 94, pp. 351—362.

[6] Lo, M.W. *The InterPlanetary Superhighway and the Origins Program*, IEEE Aerospace Conference Proceedings, 2002, Vol. 7, 9–16, pp. 3543—3562.

[7] Nakamiya, M., Scheeres, D.J., Yamakawa, H. and Yoshikawa, M. *Analysis of capture trajectories to libration points*, Advances in the Astronautical Sciences, 2007, Vol. 127, AAS 07 – 228.

[8] Шипицин В.В., Широбоков М.Г. *Проектирование низкоэнергетических траекторий перелёта между системами Солнце–Земля и Солнце–Венера*, Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. Прикладная математика и информатика. - М.: МФТИ, 2018. 240 с.

[9] Широбоков М.Г. *Баллистико-навигационные аспекты миссий малых космических аппаратов к Луне и точкам либрации*, Кандидатская диссертация, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2017.

[10] Lancaster, E.R. and Blanchard, R.C. *A unified form of Lambert's theorem*, NASA technical note TN D–5368, 1969, pp. 1—20.

[11] Hall G. and Usman A. *Modified order and stepsize strategies in Adams codes*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, Vol. 111, pp. 113–122.

[12] Мирер С.А. *Механика космического полета. Орбитальное движение* — М.: Резолит, 2007. 253 с.

[13] William, M.F., James, G.W., Dale, H.B., Ryan, S.P. and Kuchynka, P. *The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431*, IPN Progress Report, 2014, Vol. 42–196.