

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**МОДЕЛИ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ
ОРИЕНТАЦИИ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ
ЗЕМЛИ**

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнила:
студентка 172 группы _____ Пичужкина Алена Викторовна

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. _____ Ролдугин Дмитрий Сергеевич

Москва 2015

Оглавление

Введение	3
1. Модели магнитного поля.....	3
2. Использование моделей в аналитических исследованиях	13
2.1. Переходные процессы	13
2.1. Установившееся движение.....	18
Заключение.....	30
Литература	31

Введение

Развитие малых спутников, популярных благодаря простоте сборки и низкой стоимости, возродило интерес к наиболее простым системам ориентации. Малый спутник, имеющий ограничения по массе, мощности бортового вычислительного устройства, объему полезной нагрузки, энерговооруженности, желательно оснащать самыми простыми и дешевыми исполнительными элементами и датчиками ориентации. Вместе с тем малые спутники зачастую не имеют высоких требований к обеспечиваемой точности ориентации, так как их полезная нагрузка подчиняется тем же ограничениям, что и служебные системы. Связка из магнитных катушек и магнитометра или даже пассивная магнитная система, состоящая из постоянного магнита и гистерезисных стержней, активно используются на Кубсатах и других малых спутниках.

В случае применения активной магнитной системы на борту необходимо наличие модели геомагнитного поля для определения ориентации. Такая необходимость может возникнуть и при использовании пассивной системы. В этом случае знание ориентации не требуется для работы системы, но оно может быть необходимо для интерпретации данных, получаемых полезной нагрузкой. Магнитометр – один из самых простых, надежных и дешевых датчиков ориентации. Наконец, модель геомагнитного поля необходима на этапе проектирования спутника для оценки достижимой точности ориентации. Цель данной работы – кратко описать существующие модели геомагнитного поля, используемые при обеспечении ориентации спутников, и определить рамки их использования на разных этапах, от проектирования до летных испытаний спутника.

1. Модели магнитного поля

Системы координат

В работе будут рассмотрены четыре модели геомагнитного поля: IGRF, наклонный и прямой диполи и осредненная модель. Вектор геомагнитной индукции будем задавать в нескольких системах координат, обычно используемых при рассмотрении углового движения спутника.

$O_aY_1Y_2Y_3$ – инерциальная система, где O_a – центр масс Земли, ось O_aY_3 направлена по оси вращения Земли, O_aY_1 лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты спутника (считаем орбиту круговой), O_aY_2 дополняет систему до правой.

$O_aJ_1J_2J_3$ – инерциальная система J2000, ось O_aJ_3 направлена по оси вращения Земли, O_aJ_1 лежит в плоскости земного экватора и направлена в точку весеннего равноденствия эпохи 2000.0, O_aJ_2 дополняет систему до правой. Переход от системы $O_aJ_1J_2J_3$ к системе $O_aY_1Y_2Y_3$ задается с помощью поворота на среднее гринвичское время t_g относительно оси O_aJ_3 . Мы не будем здесь учитывать прецессию оси вращения Земли.

$O_aZ_1Z_2Z_3$ – инерциальная система, полученная из системы $O_aY_1Y_2Y_3$ поворотом на некоторый угол Θ вокруг оси O_aY_1 . Величина этого угла будет далее определена с помощью осредненной модели.

$O_aS_1S_2S_3$ – система, связанная с положением орбиты спутника в инерциальном пространстве. Ось O_aS_3 направлена по нормали к плоскости орбиты, ось O_aS_1 направлена в восходящий узел орбиты, ось O_aS_2 дополняет систему до правой. Переход между системами $O_aY_1Y_2Y_3$ и $O_aS_1S_2S_3$ задается поворотом на угол i (наклонение орбиты) относительно оси O_aY_1 , а между $O_aS_1S_2S_3$ и $O_aZ_1Z_2Z_3$ – на угол $\Theta - i$ относительно оси O_aS_1 .

$OX_1X_2X_3$ – орбитальная система координат с центром в центре масс спутника, ось OX_2 лежит в плоскости орбиты и направлена по нормали к радиус-вектору в сторону движения спутника, составляя острый угол с вектором скорости его центра масс (на круговой орбите направление оси совпадает с направлением скорости поступательного движения спутника), ось OX_1 направлена по радиус-вектору центра масс спутника, OX_3 дополняет систему до правой. Отметим, что такой «нетрадиционный» выбор орбитальной системы обусловлен удобством последовательных переходов между системами координат.

$Ox_1x_2x_3$ – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

$OL_1L_2L_3$ – система, связанная с кинетическим моментом спутника. O – центр масс спутника, ось OL_3 направлена по вектору кинетического момента спутника, ось OL_2 – перпендикулярно OL_3 и лежит в плоскости, параллельной плоскости первых двух осей инерциальной системы, относительно которой

описывается движение спутника, и проходящей через O , ось OL_1 дополняет систему до правой.

Далее для векторов, заданных в разных системах координат, будем использовать индекс с буквой системы. Например, вектор геомагнитной индукции в этих системах, соответственно, будет обозначаться как $\mathbf{B}_Y, \mathbf{B}_J, \mathbf{B}_Z, \mathbf{B}_S, \mathbf{B}_X, \mathbf{B}_x$. Матрицы перехода между системами координат

$$\mathbf{A}_{YZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Theta & \sin \Theta \\ 0 & -\sin \Theta & \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{YS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{SX} = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{YX} = \mathbf{A}_{SX} \mathbf{A}_{YS} = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \cos i & \sin u \sin i \\ -\sin u & \cos u \cos i & \cos u \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix},$$

где u – аргумент широты.

International geomagnetic reference field/ World magnetic model

Наиболее полно геомагнитное поле описывают модели IGRF (International geomagnetic reference field) и WMM (World magnetic model). Разложение потенциала поля в ряд, используемое в обоих моделях, было предложено в 1838 К.Ф. Гауссом. Это разложение имеет вид [1]

$$V = -R \sum_{i=1}^k \left(\frac{R}{r} \right)^{i+1} \sum_{n=0}^m (g_n^m(t) \cos m \lambda_0 + h_n^m(t) \sin m \lambda_0) P_n^m(\cos \vartheta_0), \quad \mathbf{B} = \mu_0 \nabla V,$$

где λ_0 – долгота точки, в которой определяется вектор напряженности, $\vartheta_0 = 90^\circ - \theta_0$, θ_0 – ее широта, r – расстояние от центра Земли, R – средний радиус Земли, g_n^m и h_n^m – коэффициенты Шмидта, определяемые из таблицы [2], $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{кЗ} \cdot \text{м} \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$ – магнитная постоянная (или магнитная проницаемость вакуума), P_n^m – квазинормализованные по Шмидту присоединенные функции Лежандра. Величины коэффициентов определяются эмпирически с помощью измерений магнитного поля, производимых спутниками. Обе модели отличаются лишь наборами коэффициентов и имеют общие ограничения. Они могут использоваться для высот до 600 километров над поверхностью Земли (WGS84) и применимы до определенного года. В последний год действия модели Международный геодезический и геофизический союз публикует новые коэффициенты IGRF, действующие

следующие пять лет. То же проделывает Национальное управление океанических и атмосферных исследований США для модели WMM. Такие сложные модели обычно используются на борту спутника для достижения максимально возможной точности и при численном моделировании его движения на этапе разработки, но не используются при аналитических исследованиях. Стоит отметить, что в части обеспечения ориентации спутников чаще используется модель IGRF.

Наклонный диполь

Модель наклонного диполя, получающаяся из гауссовой модели при учете первых трех слагаемых, описывает поле диполя, наклоненного под углом около 10-12 градусов к оси вращения Земли и направленного антипараллельно ей. Точное значение угла наклона постоянно меняется из-за перемещения северного и южного магнитных полюсов, в настоящее время наклон составляет около 11.7 градуса. Поскольку вклад дипольной части в разложение составляет более 90%, такое допущение вполне оправдано. Оно позволяет учесть два основных эффекта, вызывающих изменение геомагнитного поля в точке нахождения спутника – его движение по орбите и суточное вращение Земли. Не учитываются нерегулярные эффекты, например, пролет спутника над горным массивом с большим содержанием железной руды, что приводит к увеличению индукции геомагнитного поля в этой точке по сравнению с дипольным приближением. Вектор индукции в модели наклонного диполя можно для любой системы координат задать выражением [1]

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_e}{r^5} (\mathbf{k}r^2 - 3(\mathbf{k}\mathbf{r})\mathbf{r}), \quad (1.1.1)$$

где \mathbf{k} – единичный вектор в направлении диполя, \mathbf{r} – радиус-вектор центра масс спутника. В инерциальной системе координат $O_aY_1Y_2Y_3$ это выражение можно представить как

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \sin \lambda_2 \sin \delta_1 - 3\xi \cos u \\ -\cos \lambda_2 \sin \delta_1 - 3\xi \cos i \sin u \\ \cos \delta_1 - 3\xi \sin i \sin u \end{pmatrix}. \quad (1.1.2)$$

Здесь $\mu_e = 7.812 \cdot 10^6 \text{ км}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$ – постоянная земного магнетизма, r – радиус-вектор точки, в которой вычисляется индукция. Углы λ_2, δ_1 показывают ориентацию диполя относительно системы $O_aY_1Y_2Y_3$. Угол

$\lambda_2 = \omega_E t + \lambda_{20}$, где ω_E – угловая скорость вращения Земли, показывает вращение диполя относительно $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ вместе с Землей,

$\xi = \cos u \sin \delta_1 \sin \lambda_2 - \sin u \cos i \sin \delta_1 \cos \lambda_2 + \sin u \cos \delta_1 \sin i$, $\delta_1 \approx 11.7^\circ$, i – наклонение орбиты.

Прямой диполь

В дальнейшем упрощении – модели прямого диполя – геомагнитное поле моделируется полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения. В этом случае общее выражение (1.1.1) остается верно, при этом в системе $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ вектор направления диполя имеет вид $\mathbf{k} = (0, 0, -1)$. Соответственно, выражение для вектора геомагнитной индукции в системе $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ можно получить из (1.1.2), положив $\lambda_2 = \delta_1 = 0$,

$$\mathbf{B}_Y = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -1.5 \sin i \sin 2u \\ -1.5 \sin 2i \sin^2 u \\ 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u \end{pmatrix}. \quad (1.1.3)$$

Величина вектора индукции изменяется при движении спутника по орбите и

$$\text{составляет } B_{0incl} = \frac{\mu_e}{r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}. \quad (1.1.4)$$

В системе координат $O X_1 X_2 X_3$ геомагнитное поле записывается особенно компактно,

$$\mathbf{B}_X = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -2 \sin u \sin i \\ \cos u \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (1.1.5)$$

В системе $O_a S_1 S_2 S_3$ вектор индукции имеет вид

$$\mathbf{B}_S = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -1.5 \sin 2u \sin i \\ -3 \sin^2 u \sin i + \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (1.1.6)$$

Осредненная модель

В модели прямого диполя вектор индукции неравномерно вращается по поверхности практически кругового конуса (\mathbf{H} -конус). Поэтому логично ввести следующее упрощение, фактически усредняя вращение вектора индукции. В осредненной модели геомагнитного поля [3] вектор индукции имеет постоянную длину и равномерно движется по поверхности кругового конуса ($\mathbf{\Theta}$ -конус). Если перенести этот вектор в центр масс Земли, то конус касается оси $O_a Y_3$ системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$, его ось лежит в плоскости $O_a Y_2 Y_3$ (рис. 1).

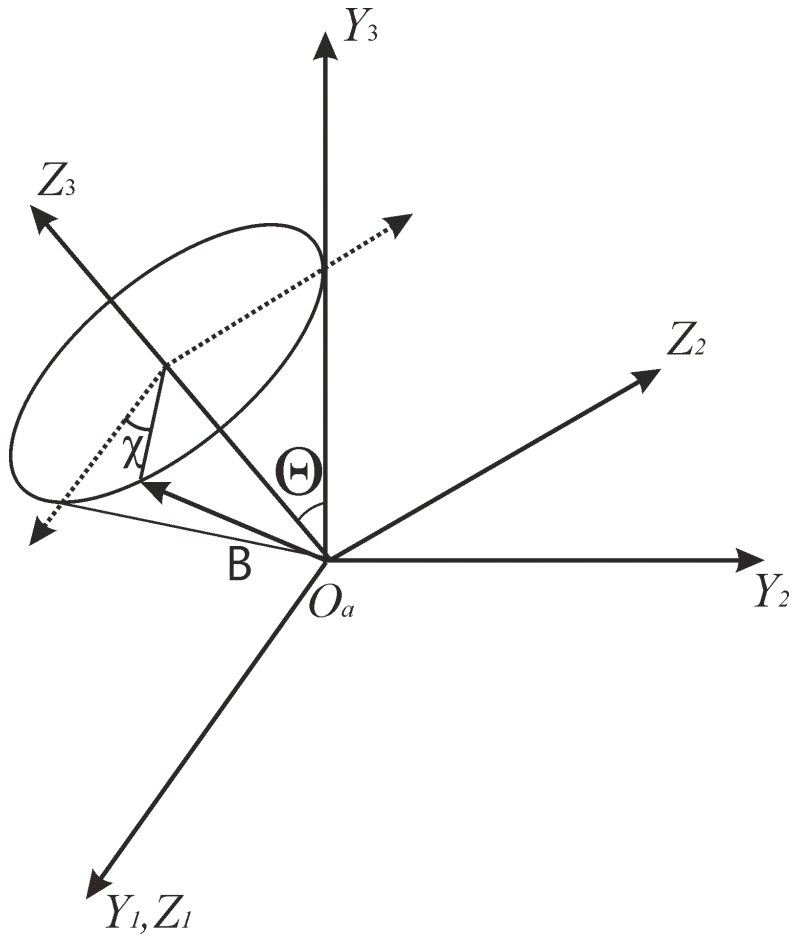


Рис. 1. Осредненная модель геомагнитного поля

Угол полураствора конуса вычисляется из соотношения

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i})}.$$

Вектор геомагнитной индукции в рамках этой модели движется по поверхности конуса с удвоенной орбитальной скоростью ω_0 , то есть

$$\chi = 2\omega_0 t + \chi_0 = 2u + \chi_0, \quad (1.1.7)$$

и в системе $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ имеет следующий вид

$$\mathbf{B}_Z = B_0 \begin{pmatrix} -\sin \Theta \sin \chi \\ \sin \Theta \cos \chi \\ \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (1.1.8)$$

Для того чтобы определить χ_0 , сравним векторы геомагнитной индукции при использовании осредненной модели и прямого диполя. Согласно (1.1.8), в осредненной модели вектор индукции в системе $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ при $\chi = 0$ имеет вид

$\mathbf{B}_z = B_0(0, \sin \Theta, \cos \Theta)^T$, то есть вектор \mathbf{B} направлен по оси $O_a Y_3$ (Рис. 1). В модели прямого диполя вектор индукции, согласно (1.1.3), направлен по этой же оси при $u = 0$, откуда из (1.1.7) следует, что $\chi_0 = 0$.

В осредненной модели вектор геомагнитной индукции в разных системах координат имеет следующий вид:

$$O X_1 X_2 X_3 \quad \mathbf{B}_x = B_0 \begin{pmatrix} \sin i \sin u - 2 \sin u \sin \Theta (\cos^2 u + \sin^2 u \cos(\Theta - i)) \\ \sin i \cos u + 2 \cos u \sin \Theta \sin^2 u (1 - \cos(\Theta - i)) \\ -2 \sin \Theta \sin^2 u \sin(\Theta - i) + \cos i \end{pmatrix} \quad (1.1.9)$$

$$O_a Z_1 Z_2 Z_3 \quad \mathbf{B}_z = B_0 \begin{pmatrix} -\sin \Theta \sin 2u \\ \sin \Theta \cos 2u \\ \cos \Theta \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

$$O_a Y_1 Y_2 Y_3 \quad \mathbf{B}_y = B_0 \begin{pmatrix} -\sin \Theta \sin 2u \\ -\sin 2\Theta \sin^2 u \\ 1 - 2 \sin^2 \Theta \sin^2 u \end{pmatrix} \quad (1.1.11)$$

$$O_a S_1 S_2 S_3 \quad \mathbf{B}_s = B_0 \begin{pmatrix} -\sin \Theta \sin 2u \\ -2 \sin \Theta \sin^2 u \cos(\Theta - i) + \sin i \\ -2 \sin \Theta \sin^2 u \sin(\Theta - i) + \cos i \end{pmatrix}$$

Перейдем к более детальному сравнению прямого диполя и осредненной модели геомагнитного поля. Величину вектора индукции B_0 для осредненной модели обычно находят, опираясь на величину поля в модели прямого диполя (1.1.4). Она принимается равной либо среднему арифметическому максимального и минимального значений

$$B_0 = \frac{1}{2} \left(B_{0incl}(0) + B_{0incl}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = \frac{\mu_e}{2r^3} \left(1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i} \right), \quad (1.1.12)$$

либо интегральному среднему, взятому за половину витка на орбите,

$$B_0 = \int_0^\pi B_{0incl}(u) du = \frac{\mu_e}{\pi r^3} \int_0^\pi \sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u} du. \quad (1.1.13)$$

На рис. 2 представлена величина вектора геомагнитной индукции при использовании соотношений (1.1.12) и (1.1.13). Из рис. 3 видно, что разница между обоими подходами незначительна, и только для приполярных орбит достигает 1250 нТл, что составляет примерно 3% от интегрального среднего

для этих орбит. Таким образом, в большинстве случаев можно опираться на простое выражение (1.1.12). Это может упростить аналитические исследования, когда требуется оценить влияние наклона орбиты на движение спутника в магнитном поле. При численных расчетах возможна небольшая экономия расчетного времени, если аппарат движется по оскулирующей орбите с изменяющимся наклоном. В этом случае для получения текущей величины поля достаточно воспользоваться конечным соотношением (1.1.12), избегая вычисления интеграла (1.1.13).

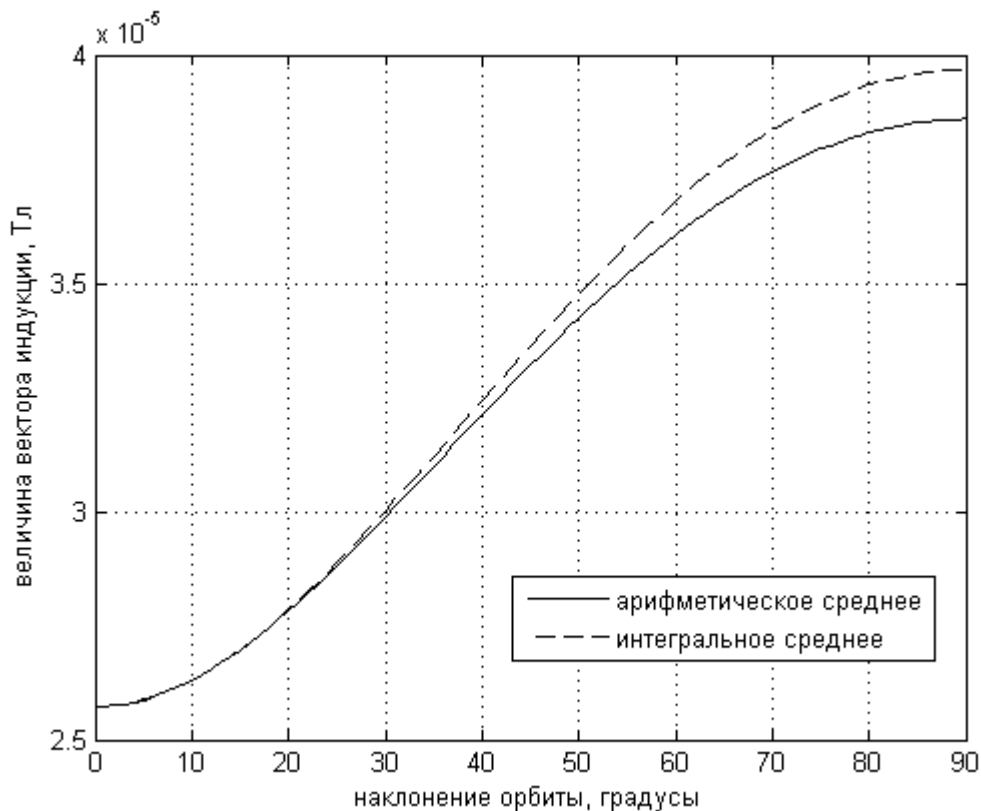


Рис. 2. Величина вектора индукции для осредненной модели на высоте 350 км

При движении спутника по орбите вектор \mathbf{V} в модели прямого диполя описывает коническую поверхность, замыкающуюся за половину оборота спутника по орбите (\mathbf{H} -конус). Оказывается, что направляющие кругового конуса (Θ -конуса) почти в точности совпадают с направляющими \mathbf{H} -конуса. Основания конусов при этом заметно различаются (Рис. 3).

Пусть δ — угловое отклонение вектора \mathbf{V} от оси Z_3 в системе $O_a Z_1 Z_2 Z_3$. Тогда $\delta \geq \Theta$ при любом u ($\delta = \Theta$ при $u = 0$ и $u = \pi/2$). Иначе говоря, круговой конус (Θ -конус) лежит целиком внутри \mathbf{H} -конуса, имея с ним две общие,

диаметрально противоположные образующие. Однако разность $\delta - \Theta$ всегда очень мала и не превышает величины $1^{\circ}11'$ (это максимальное отклонение **Н**-конуса от кругового δ_{\max} достигается на орбите с $i \sim 52^{\circ}6'$; на орбитах с другими наклонениями максимальное значение разности $\delta - \Theta$ будет еще меньше). На рис. 4 приведена зависимость величины δ_{\max} от наклонения орбиты.

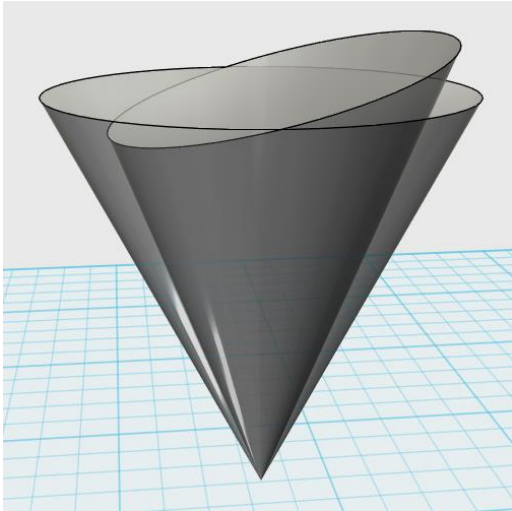


Рис. 3. Сравнение **Н**- и **Θ**-конусов

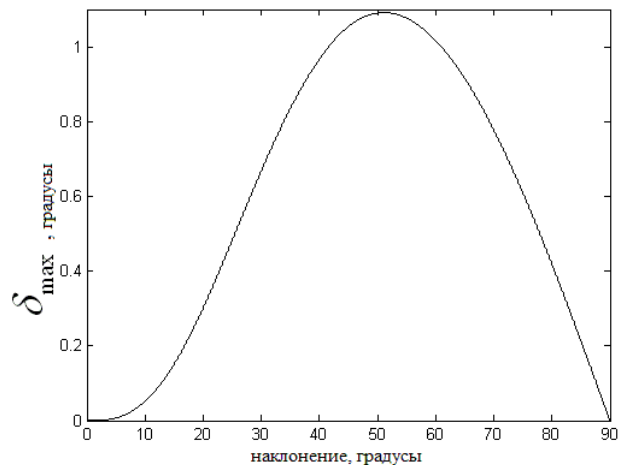


Рис.4. Максимальное отклонение вектора геомагнитной индукции в дипольной модели от конуса осредненной модели

Скорость движения вектора геомагнитной индукции по **Н**-конусу непостоянна. Сравним векторы геомагнитной индукции в осредненной модели и в модели прямого диполя при различных значениях аргумента широты.

При $u = 0$, $u = \pi/2$ и $u = \pi$ они совпадают по направлению. Несложно проверить (используя (1.1.3) и (1.1.11)), что при $u = \pi/2$ векторы геомагнитной индукции при этом не равны по модулю. В течение первой четверти витка вектор в модели прямого диполя «обгоняет» вектор индукции осредненной модели. На второй четверти он «запаздывает», пока через половину витка они не совпадут по направлению. При этом угол между векторами не превышает Δ . Чтобы определить этот угол, используем выражения (1.1.5) и (1.1.9), задающие векторы индукции в орбитальной системе. Скалярное произведение этих векторов дает

$$\cos \Delta = \frac{1 + \sin^2 i \sin^2 u}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u}}. \quad (1.1.14)$$

Производная этого выражения есть

$$\frac{d \cos \Delta}{di} = \frac{\sin^2 u \sin i \cos i (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1)}{(1 + 3 \sin^2 i \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Нули производной достигаются при $\sin i = 0$, $\cos i = 0$ и при $3 \sin^2 i \sin^2 u - 1 = 0$, откуда получаем $\sin^2 u = 1/3 \sin^2 i$. Так как $\sin^2 u \leq 1$, то $1/3 \sin^2 i \leq 1$, откуда следует $1/\sqrt{3} \leq |\sin i|$. При $\sin i = 1/\sqrt{3}$ наклонение равно $i \approx 35^\circ$, при превышении наклонения в 35° график (1.1.14) выходит на стационарное значение.

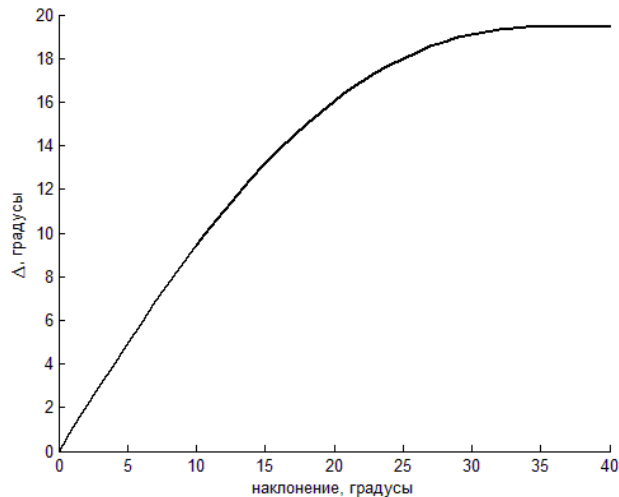


Рис.5 Зависимость угла Δ от наклонения орбиты.

Рис. 5 показывает, что различие между векторами индукции в осредненной модели и модели прямого диполя могут значительно отличаться по направлению (около 19°) несмотря на то, что **Н**- и **Θ**-конуса отличаются незначительно (Рис. 4). Хотя осредненная модель не позволяет учесть неравномерность вращения местного вектора геомагнитной индукции при движении спутника по орбите (как это учитывает, например, модель прямого диполя) и его суточное изменение (как учитывает модель наклонного диполя), тем не менее, она позволяет достаточно верно описать основные свойства магнитного поля, влияющие на динамику спутника.

2. Использование моделей в аналитических исследованиях

2.1. Переходные процессы

Для описания движения спутника при большой угловой скорости вращения будем использовать уравнения в оскулирующих переменных $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$. Рассмотрим осесимметричный спутник и введем его тензор инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(A, A, C)$. Считаем, что его центр масс движется по круговой орбите. Движение такого спутника относительно центра масс описывается [10] системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M_{3L}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_{2L}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L} (M_{2L} \cos \psi - M_{1L} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} (M_{1L} \cos \psi + M_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} M_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta), \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где M_{1L}, M_{2L}, M_{3L} – компоненты вектора суммарного внешнего момента, L – модуль вектора кинетического момента, углы ρ, σ определяют его ориентацию относительно любой инерциальной системы, например, $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ (рис. 6).

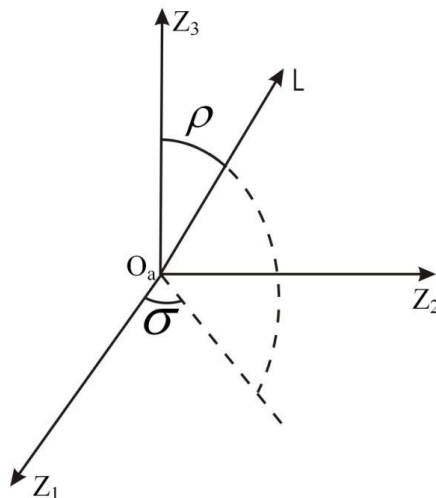


Рис. 6. Ориентация вектора кинетического момента в инерциальном пространстве

Матрица направляющих косинусов, описывающая переход между инерциальной системой и системой, связанной с кинетическим моментом, суть

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma & -\sin \sigma & \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma & \cos \sigma & \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix}. \quad (1.2.2)$$

Ориентация осей системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OL_1L_2L_3$ задается углами Эйлера φ, ψ, θ . Матрица направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Оскулирующие переменные удобно использовать для анализа переходных процессов, когда основной интерес представляет величина угловой скорости спутника, фактически характеризуемая одной переменной L . Предположим, что момент, создаваемый взаимодействием МСО с геомагнитным полем, мал в смысле малого изменения кинетического момента аппарата за один его оборот вокруг центра масс и за один виток по орбите по сравнению со значением кинетического момента. Тогда можно ввести малый параметр ε и представить уравнения в оскулирующих переменных (1.2.1) для круговой орбиты спутника в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (1.2.3)$$

где $\mathbf{y} = (\varphi, \psi, u)$ – быстрые переменные, $\mathbf{x} = (L, \rho, \sigma, \theta)$ – медленные переменные. Эти уравнения позволяют использовать метод усреднения для изучения эволюции медленных переменных. Рассмотрение осесимметричного спутника позволяет значительно упростить этот анализ. Порождающим решением для уравнений (1.2.3) является регулярная прецессия. В этом случае среднее по времени совпадает с пространственным средним и для получения осредненных уравнений для медленных переменных достаточно независимо усреднить правые части уравнений по быстрым переменным при условии отсутствия резонанса. В результате на временном интервале порядка $1/\varepsilon$ решение может быть найдено с точностью порядка ε .

Будем рассматривать движение спутника под действием диссипативного момента [4]

$$\mathbf{M}_x = k(\boldsymbol{\omega}_x \times \mathbf{B}_x) \times \mathbf{B}_x.$$

Следуя далее рассуждениям, приведенным в [4], выразим угловую скорость спутника через его кинетический момент: $\boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{L}_x$. Поскольку известен вид кинетического момента $\mathbf{L}_L = (0, 0, L)^T$ в системе $OL_1L_2L_3$, то можем пересчитать его в систему $Ox_1x_2x_3$ по формуле $\mathbf{L}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{L}_L$, откуда $\mathbf{L}_x = L(a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$. Необходимо далее задать компоненты внешнего момента в системе $OL_1L_2L_3$. Запишем внешний момент в этой системе, учитывая, что $\boldsymbol{\omega}_L = \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_x$ и $\mathbf{B}_L = \mathbf{Q}^T \mathbf{B}_Z$,

$$\mathbf{M}_L = \begin{pmatrix} \omega_{3L} B_{1L} B_{3L} - \omega_{1L} B_{3L}^2 - \omega_{1L} B_{2L}^2 + \omega_{2L} B_{1L} B_{2L} \\ \omega_{1L} B_{1L} B_{2L} - \omega_{2L} B_{1L}^2 - \omega_{2L} B_{3L}^2 + \omega_{3L} B_{2L} B_{3L} \\ \omega_{2L} B_{2L} B_{3L} - \omega_{3L} B_{2L}^2 - \omega_{3L} B_{1L}^2 + \omega_{1L} B_{1L} B_{3L} \end{pmatrix}.$$

Запишем теперь уравнения движения спутника в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерный момент $\overline{\mathbf{M}}_L$, определяемый выражением

$$\mathbf{M}_L = \frac{kB_0^2 L}{C} \overline{\mathbf{M}}_L.$$

Перейдем в (1.2.1) к дифференцированию по аргументу широты $u = \omega_0(t - t_0)$, где t_0 – некоторый начальный момент времени. Введем безразмерный кинетический момент l по формуле $L = L_0 l$, где L_0 – начальный кинетический момент спутника. Все это позволяет записать уравнения движения (1.2.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon l \overline{M}_{3L}, \quad \frac{d\rho}{du} = \varepsilon \overline{M}_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \overline{M}_{2L}, \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon (\overline{M}_{2L} \cos \psi - \overline{M}_{1L} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{du} &= \eta_1 l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} (\overline{M}_{1L} \cos \psi + \overline{M}_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{du} &= \eta_2 l - \varepsilon \overline{M}_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon \overline{M}_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta), \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{kB_0^2}{\omega_0 C}, \quad \eta_1 = \frac{L_0}{\omega_0} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right), \quad \eta_2 = \frac{L_0}{A\omega_0}.$$

Параметр ε имеет смысл отношения изменения вектора кинетического момента за виток вокруг Земли к его значению. Разделение переменных на медленные и быстрые позволяет использовать метод усреднения. Поскольку нас интересует, в первую очередь, эволюция медленных переменных, к которым относится модуль вектора кинетического момента, будем рассматривать первое приближение по степеням параметра ε . Для этого необходимо провести усреднение правой части уравнений вдоль порождающего решения. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения $\langle M_{iL} \rangle_{u,\varphi,\psi}$, $\langle M_{iL} \cos \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$ и $\langle M_{iL} \sin \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$. Для усреднения (1.2.4) по u необходимо вычислить выражения

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_i B_j du, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.2.5)$$

где B_i – компоненты безразмерного геомагнитного поля. Вид получаемых усредненных уравнений определяется выражением вектора геомагнитной индукции. Перейдем к рассмотрению вектора индукции в различных моделях, и в каждой модели будем использовать ту систему координат, в которой магнитное поле записывается наиболее компактно.

Рассмотрим сначала осредненную модель. Для вычисления компонент B_{ij} для этой модели используем выражение вектора индукции в системе $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ (1.1.10). В результате получаем

$$B_{11} = B_{22} = p = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta, \quad B_{33} = q = \cos^2 \Theta, \quad B_{12} = B_{23} = B_{13} = 0.$$

Усредняя, получаем уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных l, ρ, σ, θ ,

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[2p + (1-3p) \sin^2 \rho \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon (3p-1) \sin \rho \cos \rho \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\sigma}{du} &= 0, \\ \frac{d\theta}{du} &= \frac{1}{2} \varepsilon \left(1 - \frac{C}{A} \right) \left[2(1-p) + (3p-1) \sin^2 \rho \right] \sin \theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Для уравнений (1.2.6) можно найти [4] полный набор первых интегралов. Тем самым, решение уравнений (1.2.6) может быть найдено в квадратурах.

Теперь получим усредненные уравнения для прямого диполя, которые будут отличаться компонентами B_{ij} . Для вычисления этих компонент согласно (1.2.5) воспользуемся выражением для вектора индукции в системе $O_a S_1 S_2 S_3$ (1.1.6). Соответственно, углы ρ, σ теперь задают ориентацию кинетического момента вокруг этой системы координат. Выражение для матрицы направляющих косинусов (1.2.2) также сохраняется. Для (1.2.5) получаем

$$B_{11} = a = \frac{9}{8} \sin^2 i, \quad B_{22} = \frac{11}{9} a = \frac{11}{8} \sin^2 i, \quad B_{33} = c = \cos^2 i,$$

$$B_{12} = B_{13} = 0, \quad B_{23} = d = -\frac{1}{2} \sin i \cos i.$$

После усреднения получаем следующие уравнения,

$$\frac{dl}{du} = -\varepsilon l \left[\frac{20}{9} a + \sin^2 \rho \left(c - a \cos^2 \sigma - \frac{11}{9} a \sin^2 \sigma \right) + 2d \cos^2 \rho \sin \sigma \cos \sigma \right] \times$$

$$\times \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{d\rho}{du} = \varepsilon \left[\left(\frac{11}{9} a \sin^2 \sigma + a \cos^2 \sigma - c \right) \sin \rho \cos \rho - d \sin \sigma \cos 2\rho \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{d\sigma}{du} = \varepsilon \left[\frac{2}{9} a \sin \sigma \cos \sigma + d \cos \sigma \operatorname{ctg} \rho \right] \left(\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{d\theta}{du} = \varepsilon \lambda \left[\frac{20}{9} a + c(1 + \cos^2 \rho) + a \sin^2 \rho \left(\cos^2 \sigma + \frac{11}{9} \sin^2 \sigma \right) + 2d \sin \rho \cos \rho \sin \sigma \right] \times$$

$$\times \sin \theta \cos \theta.$$

Отсюда видно, что в усредненных уравнениях для прямого диполя появляются дополнительные слагаемые из-за наличия ненулевого недиагонального элемента матрицы B_{ij} , поэтому искать первые интегралы так же легко, как в случае осредненной модели, не получится. Если при использовании осредненной модели полный набор первых интегралов можно найти в виде конечных выражений [4], то в случае прямого диполя можно найти лишь некоторые первые интегралы, причем в виде квадратур (разделив выражения для производных ρ и σ , l и ρ)

Наконец, рассмотрим наклонный диполь. Следуя [1], будем в (1.2.5) усреднять дополнительно по времени оборота Земли вокруг своей оси. Для вычисления компонент B_{ij} воспользуемся выражением для вектора индукции в системе $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ (1.1.2). Тогда получаем

$$B_{11} = \frac{11}{16} \sin^2 \delta_1 + \frac{9}{8} \left(\cos^2 \delta_1 \sin^2 i + \frac{1}{2} \cos^2 i \sin^2 \delta_1 \right),$$

$$B_{22} = \frac{1}{2} \sin^2 \delta_1 - \frac{15}{16} \cos^2 i \sin^2 \delta_1 + \frac{27}{8} \cos^2 i \left(\cos^2 \delta_1 \sin^2 i + \frac{1}{2} \cos^2 i \sin^2 \delta_1 \right),$$

$$B_{33} = \cos^2 \delta_1 + \frac{9}{16} \sin^2 i \sin^2 \delta_1 - 3 \sin^2 i \cos^2 \delta_1 + \frac{27}{8} \sin^2 i \left(\cos^2 \delta_1 \sin^2 i + \frac{1}{2} \cos^2 i \sin^2 \delta_1 \right),$$

$$B_{12} = 0, \quad B_{13} = 0,$$

$$B_{23} = -\frac{3}{2} \sin i \cos i \left(\cos^2 \delta_1 + \frac{1}{8} \sin^2 \delta_1 \right) + \frac{27}{8} \sin i \cos i \left(\sin^2 i \cos^2 \delta_1 + \frac{1}{2} \cos^2 i \sin^2 \delta_1 \right),$$

Очевидно, что усредненные уравнения в случае наклонного диполя будут иметь еще более громоздкий вид, чем в случае прямого диполя. Поэтому для описания движения спутника в случае переходных процессов удобнее использовать осредненную модель, так как можно легко получить первые интегралы из системы уравнений движения.

2.1. Установившееся движение

Установившееся движение удобно рассматривать при помощи уравнений Эйлера. В этом случае для описания динамики спутника рассматриваются переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma$. Здесь ω_i – компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника в системе $O x_1 x_2 x_3$ ($i=1,2,3$), самолетные углы задают ориентацию системы $O x_1 x_2 x_3$ относительно $O Z_1 Z_2 Z_3$. Матрица направляющих косинусов \mathbf{D} имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.2.7)$$

Уравнения движения спутника теперь уже с произвольным тензором инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(A, B, C)$ с учетом действующих управляющего и возмущающих моментов имеют вид

$$\begin{aligned}
A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 &= M_{1x}, \\
B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_1\omega_3 &= M_{2x}, \\
C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 &= M_{3x},
\end{aligned}
\tag{1.2.8}$$

Кинематические соотношения при движении в инерциальном пространстве (самолетные углы задают ориентацию связанной системы относительно инерциальной) имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos\beta}(\omega_2 \cos\gamma - \omega_3 \sin\gamma), \\
\frac{d\beta}{dt} &= \omega_2 \sin\gamma + \omega_3 \cos\gamma, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 - \operatorname{tg}\beta(\omega_2 \cos\gamma - \omega_3 \sin\gamma),
\end{aligned}
\tag{1.2.9}$$

При описании движения спутника в орбитальной системе координат (самолетные углы задают ориентацию относительно орбитальной системы) кинематические соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos\beta}(\omega_2 \cos\gamma - \omega_3 \sin\gamma - \omega_0 \sin\alpha \sin\beta), \\
\frac{d\beta}{dt} &= \omega_2 \sin\gamma + \omega_3 \cos\gamma - \omega_0 \cos\alpha, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 - \operatorname{tg}\beta(\omega_2 \cos\gamma - \omega_3 \sin\gamma) + \omega_0 \frac{\sin\alpha}{\cos\beta},
\end{aligned}
\tag{1.2.10}$$

либо можно использовать выражение (1.2.9), заменив в нем абсолютную угловую скорость ω на относительную Ω .

Плоское движение спутника

Рассмотрим плоское движение спутника, удовлетворяющее условиям $\alpha = \gamma = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$.

$$\tag{2.2.1}$$

Покажем, что такое движение существует для некоторых вариантов магнитного управления, когда на спутник также действует гравитационный момент. Из (1.2.10) получаем

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = \omega_3 - \omega_0, \quad \frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad (2.2.2)$$

то есть движение (2.2.1) удовлетворяет кинематическим соотношениям.

Перейдем к динамическим уравнениям. Гравитационный момент имеет вид

$$\mathbf{M}_g = 3\omega_0^2 \mathbf{e} \times \mathbf{J} \mathbf{e}, \quad (2.2.3)$$

где \mathbf{e} – единичный радиус-вектор спутника. В орбитальной системе он имеет вид

$$\mathbf{e} = \mathbf{D}(1 \ 0 \ 0). \quad (2.2.4)$$

Матрица перехода \mathbf{D} имеет простую форму для плоского движения (один угол поворота) и

$$\mathbf{M}_{g3} = 3\omega_0^2 (A - B) \cos \beta \sin \beta, \quad \mathbf{M}_{g2} = \mathbf{M}_{g1} = 0,$$

то есть гравитационный момент действует только в плоскости орбиты.

Предположим, что магнитное управление создает дипольный момент только вдоль первой оси спутника, то есть $\mathbf{m} = (m \ 0 \ 0)$. В частности, в теле спутника может быть установлен постоянный магнит, направленный по первой связанной оси. Тогда из $\mathbf{M}_{уп} = \mathbf{m} \times \mathbf{V}_x$ получаем

$$\mathbf{M}_{уп} = B_0 (0 \ -mB_{x3} \ mB_{x2}).$$

Для того, чтобы существовало плоское движение, необходимо $B_{x3} = 0$.

Рассмотрим дипольное приближение и осредненную модель геомагнитного поля, чтобы определить, возможно ли плоское движение в этих случаях. Вектор геомагнитной индукции в осредненной модели (1.1.9) для круговой полярной орбиты ($i = \Theta = \pi/2$) в орбитальной системе принимает вид

$$\mathbf{V}_x = B_0 \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

и в связанной системе

$$\mathbf{V}_x = B_0 \begin{pmatrix} \sin(\beta - u) \\ \cos(\beta - u) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Следовательно, эта модель допускает плоское движение. Аналогично в модели прямого диполя (1.1.5) получаем

$$\mathbf{B}_x = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} \sin(\beta - u) - \sin u \cos \beta \\ \cos(\beta - u) + \sin u \sin \beta \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Для наклонного диполя на полярной орбите $B_{x_3} = \cos \lambda_2 \sin \delta_1 \neq 0$. Эта модель не допускает плоского движения, что связано с наклоном оси диполя по сравнению с осью Земли. Плоское движение в этом случае можно было бы искать на орбите, в плоскости которой лежит диполь. В этом случае задается наклонение орбиты $i = \delta_1$ и скорость дрейфа ее долготы восходящего узла (сутки). Это позволяет определить высоту орбиты. Однако из-за высокой требуемой скорости дрейфа эта высота оказывается меньше радиуса Земли. Таким образом, уже можно констатировать, что использование громоздкой модели наклонного диполя в аналитических исследованиях неприемлемо.

Окончательно плоское движение спутника описывается уравнением

$$C\ddot{\beta} = 3\omega_0^2 (A - B) \sin \beta \cos \beta + mB_0 (\cos(\beta - u) + \chi \sin u \sin \beta), \quad (2.2.7)$$

где $\chi = 0$ для осредненной модели и $\chi = 1$ для прямого диполя.

Так как рассматривается движение с постоянным магнитом, особый интерес представляет ориентация спутника вдоль направления магнитного поля. Рассмотрим движение спутника в окрестности такой ориентации. Для этого положим

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta,$$

где $\beta_0 = \arcsin(\cos u)$ – направление вектора геомагнитной индукции в плоскости орбиты. Рассмотрим сначала это направление в осредненной модели. Тогда уравнение движения (2.2.7) переписется в виде

$$\Delta\ddot{\beta} + \Delta\beta(\lambda^2 + \varepsilon \cos 2u) = -\frac{\varepsilon}{2} \sin 2u, \quad (2.2.8)$$

где $\varepsilon = \frac{3(A - B)}{C}$, $\lambda^2 = \frac{mB_0}{C\omega_0^2}$. Уравнение (2.2.8) является квазигармонической

системой, то есть системой, колебания которой описываются линейными уравнениями с периодическими коэффициентами. Рассмотрим свободные колебания, то есть колебания, описываемые однородным уравнением

$$\Delta\ddot{\beta} + \Delta\beta\lambda^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \cos 2u \right) = 0, \quad (2.2.9)$$

известным как уравнение Матье. Необходимо определить те значения параметров λ и ε , при которых для этого уравнения будет иметь место устойчивость или неустойчивость. Таким образом, можно определить, при каком соотношении между этими параметрами спутник отслеживает движение вектора геомагнитной индукции, а при каком переходит в движение около гравитационно устойчивого положения равновесия. Влияние неоднородной части будет заключаться в ухудшении точности ориентации вдоль вектора геомагнитной индукции.

Составим характеристическое уравнение для (2.2.9), записав его в виде системы

$$\Delta \dot{\beta} = z,$$

$$\dot{z} = -\lambda^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \cos 2u \right) \Delta \beta.$$

Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\rho^2 - 2A \left(\lambda, \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right) \rho + 1 = 0. \quad (2.2.10)$$

Здесь коэффициент $A(\lambda, \varepsilon/\lambda^2)$ по теореме Ляпунова [5] является аналитической функцией параметров λ и ε/λ^2 .

При определении областей устойчивости и неустойчивости для уравнения (2.2.9) будем изменять параметр λ , придавая ему всевозможные вещественные значения, что соответствует изменению величины управляющего момента при неизменном возмущающем гравитационном. Из (2.2.10)

$$\rho(\lambda, \varepsilon/\lambda^2) = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

Следовательно, если $A^2 > 1$, то уравнение (2.2.10) будет иметь 2 вещественных корня, из которых один больше единицы, другой меньше. Если же $A^2 < 1$, то оба корня уравнения (2.2.10) будут комплексными с модулями, равными единице. Таким образом, областям устойчивости уравнения (2.2.10) соответствуют те значения λ , для которых $A^2 < 1$, а областям неустойчивости – те значения, для которых $A^2 > 1$. Отсюда непосредственно вытекает, что области устойчивости и неустойчивости разделяются теми значениями λ , для которых выполняется либо

$$A(\lambda, \varepsilon/\lambda^2) = +1, \quad (2.2.11)$$

либо

$$A(\lambda, \varepsilon/\lambda^2) = -1. \quad (2.2.12)$$

Характеристическими показателями уравнения (2.2.10) при $\varepsilon/\lambda^2 = 0$ являются величины $\pm\lambda i$. Переходя к корням характеристического уравнения, находим, что при $\varepsilon/\lambda^2 = 0$ уравнение (2.2.10) имеет следующие корни:

$$\rho_1(\lambda, 0) = e^{\pi\lambda i}, \quad \rho_2(\lambda, 0) = e^{-\pi\lambda i},$$

и, следовательно,

$$A(\lambda, \varepsilon/\lambda^2) = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) = \cos \pi\lambda,$$

так что можно ожидать, что при $\varepsilon/\lambda^2 > 0$ можно воспользоваться рядом

$$A(\lambda, \varepsilon/\lambda^2) = \cos \pi\lambda + \varepsilon/\lambda^2 \cdot F(\lambda, \varepsilon/\lambda^2), \quad (2.2.13)$$

где $F(\lambda, \varepsilon/\lambda^2)$ – аналитическая функция параметров λ и ε/λ^2 .

Из (2.2.13) сразу видно, что уравнения (2.2.11) и (2.2.12) удовлетворяются при $\varepsilon/\lambda^2 = 0$ и $\lambda = n$, где n – целое число. При этом при n нечетном удовлетворяется уравнение (2.2.12), а при n четном – уравнение (2.2.11).

То есть при достаточно малом $\varepsilon/\lambda^2 \neq 0$ уравнение (2.2.11) имеет решение относительно λ в окрестности любого четного числа, а уравнение (2.2.12) имеет решение в окрестности любого нечетного числа. Эти решения существуют, причем все они вещественные и при ε/λ^2 достаточно малом являются аналитическими функциями величины ε/λ^2 в некоторой окрестности точки $\varepsilon/\lambda^2 = 0$, то есть будут разлагаться в сходящиеся ряды по целым положительным степеням ε/λ^2 [4]. А именно,

$$\lambda^2 = n^2 + \alpha_1 \frac{\varepsilon}{\lambda^2} + \alpha_2 \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2}\right)^2 + \dots \quad (2.2.14)$$

В рассматриваемом случае уравнение (2.2.9) допускает периодическое решение, так как если λ удовлетворяет уравнению (2.2.11), то уравнение (2.2.9) имеет периодическое решение с периодом, равным периоду коэффициента, то есть π . Если λ удовлетворяет уравнению (2.2.12), то есть корни характеристического уравнения будут равны -1 и, следовательно, будет существовать решение $\Delta\beta = f(t)$, удовлетворяющее условию

$$f(t + \pi) = -f(t).$$

Функция $f(t)$ будет также периодической, но с периодом 2π .

Решение уравнения (2.2.9) будет аналитическим относительно ε/λ^2 :

$$\Delta\beta = \Delta\beta_0(u) + \varepsilon/\lambda^2 \cdot \Delta\beta_1(u) + (\varepsilon/\lambda^2)^2 \cdot \Delta\beta_2(u) + \dots \quad (2.2.15)$$

Определим для уравнения (2.2.9) первую область неустойчивости, то есть область, соответствующую $n=1$. Полагаем для этого в уравнении (2.2.14)

$$\lambda^2 = 1 + \alpha_1 \varepsilon/\lambda^2 + \alpha_2 (\varepsilon/\lambda^2)^2 + \dots$$

и пытаемся удовлетворить уравнению формальным рядом вида (2.2.15). После подстановки (2.2.14) и (2.2.15) в уравнение (2.2.9) получаем, что $\alpha_1 = \pm 1/2$, $\alpha_2 = 7/32$. Таким образом, первая область неустойчивости определяется неравенствами

$$1 - \frac{\varepsilon}{2\lambda^2} + \frac{7}{32} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right)^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2\lambda^2} + \frac{7}{32} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right)^2 + \dots$$

Для определения второй области неустойчивости, расположенной вблизи $\lambda = 2$, для уравнения Матье (2.2.9) полагаем

$$\lambda^2 = 4 + \alpha_1 \varepsilon/\lambda^2 + \alpha_2 (\varepsilon/\lambda^2)^2 + \dots$$

Коэффициенты α_1 и α_2 находятся аналогично и получаются равными $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 5/3$. Тогда вторая область неустойчивости будет определяться неравенствами

$$4 - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right)^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 4 + \frac{5}{3} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right)^2 + \dots$$

Наконец, третья область неустойчивости для уравнения Матье (2.2.9) будет иметь вид

$$9 + \frac{81}{64} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right)^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 9 + \frac{81}{64} \left(\frac{\varepsilon}{\lambda^2} \right)^2 + \dots$$

Для прямого диполя ($\chi=1$) уравнение движения (2.2.7) при подстановке $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$, где $\beta_0 = \arcsin(\cos u) / \sqrt{1 + 3\sin^2 u}$, может быть выписано в конечном виде только вблизи восходящего и нисходящего узлов $\beta_0 = \arcsin(\cos u)$, принимает следующий вид

$$\Delta\ddot{\beta} + \Delta\beta \left(\frac{3\lambda^2}{2} + \frac{2\varepsilon - \lambda^2}{2} \cos 2u \right) = \frac{\lambda^2 - \varepsilon}{2} \sin 2u. \quad (2.2.16)$$

Таким образом, снова получено уравнение Матье, имеющее, однако, более сложную зависимость от параметров ε и λ^2 . Определим области неустойчивости для однородного уравнения

$$\Delta\ddot{\beta} + \frac{3\lambda^2}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2} \cos 2u \right) \Delta\beta = 0$$

аналогично тому, как их определяли для осредненной модели. Тогда для первой области неустойчивости неравенства будут иметь вид

$$1 - \frac{2\varepsilon - \lambda^2}{6\lambda^2} + \frac{7}{32} \left(\frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2} \right)^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 1 + \frac{2\varepsilon - \lambda^2}{6\lambda^2} + \frac{7}{32} \left(\frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2} \right)^2 + \dots,$$

для второй

$$4 - \frac{1}{3} \left(\frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2} \right)^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 4 + \frac{5}{3} \left(\frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2} \right)^2 + \dots$$

и для третьей

$$9 + \frac{81}{64} \left(\frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2} \right)^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 9 + \frac{81}{64} \left(\frac{2\varepsilon - \lambda^2}{3\lambda^2} \right)^2 + \dots$$

Проанализируем вид первой области неустойчивости при использовании осредненного поля и прямого диполя. Чем меньше величины ε/λ^2 (в случае использования осредненной модели) или $(2\varepsilon - \lambda^2)/3\lambda^2 = 2\varepsilon/3\lambda^2 - 1/3$ (в случае использования прямого диполя), тем меньше область неустойчивости. Например, для осредненной модели параметр $\varepsilon/\lambda^2 = 3(A - B)\omega_0^2/mB_0$ будет тем меньше, чем меньше разность между первыми двумя главными моментами инерции. То есть при уменьшении величины гравитационного момента по сравнению с магнитным уменьшается область неустойчивости. В предельном случае осесимметричного спутника область неустойчивости отсутствует: на спутник действует только управляющий момент. Для прямого диполя величина $(2\varepsilon - \lambda^2)/3\lambda^2 = 2(A - B)\omega_0^2/mB_0 - 1/3$ близка к 0 при $|(A - B)\omega_0^2/mB_0| \approx 1/6$. Использование модели прямого диполя, таким образом, позволяет уточнить полученный в рамках осредненной модели результат. Так, область

неустойчивости отсутствует уже при $|(A - B)\omega_0^2/mB_0| \leq 1/6$. Область допустимых параметров (разница моментов инерции по сравнению с дипольным моментом постоянного магнита) расширяется. В целом можно утверждать, что осредненная модель позволяет получить качественно верный и проще интерпретируемый результат. Модель прямого диполя ценой несколько более трудоемких выкладок, дополнительного ограничения (движение вблизи узла) и менее очевидного результата позволяет получить более точную как качественно, так и количественно картину поведения динамической системы.

Пространственное движение

Рассмотрим теперь уравнения движения спутника, оснащенного тангажным маховиком, то есть маховиком, имеющим постоянную скорость вращения и большой, по сравнению с самим спутником, кинетический момент. Уравнения движения спутника с маховиком, ось вращения которого совпадает с третьей связанной осью, имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} = \mathbf{M}_{cp} + \mathbf{M}_{yup}, \quad (2.2.17)$$

где $\mathbf{h} = (0 \ 0 \ 1)$, или, покомпонентно,

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} + (C - B)\omega_2\omega_3 + \omega_2 h &= 3\omega_0^2(C - B)a_{21}a_{31} + M_{yup1}, \\ B \frac{d\omega_2}{dt} + (A - C)\omega_1\omega_3 - \omega_1 h &= 3\omega_0^2(A - C)a_{11}a_{31} + M_{yup2}, \\ C \frac{d\omega_3}{dt} + (B - A)\omega_1\omega_2 &= 3\omega_0^2(B - A)a_{11}a_{21} + M_{yup3}. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Принимая во внимание вид единичного радиус-вектора спутника (2.2.4)

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad (2.2.19)$$

перепишем уравнения движения, введя безразмерный вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и дифференцирование по аргументу широты,

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_1}{du} &= -\lambda_A \omega_2 \omega_3 - \frac{h}{A\omega_0} \omega_2 + 3\lambda_A a_{21} a_{31} + \frac{M_{\text{ynp1}}}{A\omega_0^2}, \\ \frac{d\omega_2}{du} &= \lambda_B \omega_1 \omega_3 + \frac{h}{B\omega_0} \omega_1 - 3\lambda_B a_{11} a_{31} + \frac{M_{\text{ynp2}}}{B\omega_0^2}, \\ \frac{d\omega_3}{du} &= \lambda_C \omega_1 \omega_2 - 3\lambda_C a_{11} a_{21} + \frac{M_{\text{ynp3}}}{C\omega_0^2},\end{aligned}\tag{2.2.20}$$

$$\text{где } \lambda_A = \frac{(C-B)}{A}, \quad \lambda_B = \frac{(C-A)}{B}, \quad \lambda_C = \frac{(A-B)}{C}.$$

При анализе установившегося движения используем метод Пуанкаре [5], представив уравнения движения (2.2.20) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{g}(\mathbf{x}),\tag{2.2.21}$$

где $\mathbf{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma)$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – момент гравитационных и гироскопических сил, $\varepsilon \mathbf{g}$ – момент сил, создаваемых за счет действия магнитной системы, ε – малый параметр, вид которого определяется из вида конкретного алгоритма управления. Таким образом, рассматривается действие слабого магнитного момента на движение системы. Тогда

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{du} + \varepsilon \frac{d\mathbf{x}_1}{du} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \varepsilon (\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_1 + \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)) + O(\varepsilon^2),\tag{2.2.22}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ – матрица Якоби системы, составленной из кинематических соотношений и уравнений движения ($F_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$). Отсюда получаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_B & 0 & 0 & -3\lambda_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\lambda_C & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{2.2.23}$$

где $\theta_A = \lambda_A + \frac{h}{A\omega_0}$, $\theta_B = \lambda_B + \frac{h}{B\omega_0}$. При $\mathbf{x}_0 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ вектор индукции прямого диполя в связанной системе при $\alpha = \beta = \gamma = 0$ будет иметь такой же вид, как и в орбитальной,

$$\mathbf{B}_x = \mathbf{D}\mathbf{B}_x = \mathbf{B}_x = \frac{\mu_e}{r^3} \begin{pmatrix} -2\sin u \sin i \\ \cos u \sin i \\ \cos i \end{pmatrix}.$$

Управляющий момент вычисляем как [6]

$$\mathbf{M}_{\text{упр}} = k \frac{d\mathbf{B}}{dt} \times \mathbf{B}.$$

Отсюда получаем безразмерную величину управляющего момента

$$\frac{M_{\text{упр}}}{\omega_0^2} = \frac{k}{\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 \begin{pmatrix} \sin u \sin i \cos i \\ -2 \cos u \sin i \cos i \\ 2 \sin^2 i \end{pmatrix}.$$

Для вклада магнитной системы в решение получаем уравнения

$$\frac{d\omega_1}{du} = -\theta_A \omega_2 + \frac{k}{A\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 \sin u \sin i \cos i, \quad (2.2.24)$$

$$\frac{d\omega_2}{du} = \theta_B \omega_1 - 3\lambda_B \alpha - \frac{k}{B\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 2 \cos u \sin i \cos i, \quad (2.2.25)$$

$$\frac{d\omega_3}{du} = 3\lambda_C \beta + \frac{k}{C\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 2 \sin^2 i, \quad (2.2.26)$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \omega_2 - \gamma, \quad (2.2.27)$$

$$\frac{d\beta}{du} = \omega_3, \quad (2.2.28)$$

$$\frac{d\gamma}{du} = \omega_1 + \alpha. \quad (2.2.29)$$

Эти уравнения можно разбить на 2 независимые подсистемы. Из (2.2.26) и

$$(2.2.28) \text{ получаем } \ddot{\beta} - 3\lambda_C \beta = \frac{k}{C\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 2 \sin^2 i.$$

Решением однородного уравнения $\ddot{\beta} - 3\lambda_C \beta = 0$ будет

$$\beta = C_1 \cos \sqrt{3\lambda_C} u + C_2 \sin \sqrt{3\lambda_C} u.$$

При этом мы предполагаем, что $\lambda_C < 0$, то есть спутник занимает гравитационно устойчивое положение равновесия. Таким образом, получаем уравнение колебания. Частное решение неоднородного уравнения

$$\beta = -\frac{k}{3\lambda_C C \omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 2 \sin^2 i. \quad (2.2.30)$$

Чтобы решить вторую подсистему, найдем определитель матрицы, полученной из уравнений (2.2.24), (2.2.25), (2.2.27) и (2.2.29),

$$\det(\mathbf{F}_{1246} - \mu \mathbf{E}) = \mu^4 + (\theta_A \theta_B + 3\lambda_B + 1)\mu^2 + \theta_A(\theta_B + 3\lambda_B) = 0$$

Решая это характеристическое уравнение, получаем

$$\mu^2 = \frac{-\theta_A \theta_B - 3\lambda_B - 1 \pm \sqrt{(\theta_A \theta_B + 3\lambda_B + 1)^2 - 4\theta_A(\theta_B + 3\lambda_B)}}{2}. \quad (2.2.31)$$

Из (2.2.31) видно, что $\mu^2 < 0$, следовательно, собственное число μ будет комплексным, тогда решениями системы однородных уравнений будут колебания.

Частное решение будем искать в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= a \cos u + b \sin u, \\ \gamma &= c \cos u + d \sin u. \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Подставляя (2.2.32) в уравнения

$$\ddot{\gamma} = -\theta_A(\dot{\alpha} + \gamma) - K_1 \sin u,$$

$$\ddot{\alpha} = \theta_B(\dot{\gamma} - \alpha) + K_2 \cos u,$$

где $K_1 = -\frac{k}{A\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 \sin i \cos i$, $K_2 = -\frac{k}{B\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2 2 \sin i \cos i$, получаем частное

решение

$$\alpha = a \cos u,$$

$$\gamma = d \sin u,$$

$$\omega_1 = (d - a) \cos u,$$

$$\omega_2 = (d - a) \sin u,$$

где $a = \frac{\theta_A - \theta_B - 1}{1 - \theta_A - \theta_B} K_2$, $d = \frac{(\theta_A - \theta_B - 1)K_2 \theta_A}{(1 - \theta_A - \theta_B)(\theta_A - 1)} - \frac{K_1}{1 - \theta_A}$.

Для осредненной модели система уравнений будет иметь довольно громоздкий вид, поэтому мы рассмотрим ее только для полярной орбиты, т.е. для $i = \Theta = \pi/2$. Тогда для движения в плоскости получаем

$$\frac{d\omega_3}{du} = 3\lambda_c\beta + \frac{k}{C\omega_0} B_0^2,$$

$$\frac{d\beta}{du} = \omega_3.$$

Частное решение будет иметь вид

$$\beta = -\frac{k}{3C\lambda_c\omega_0} B_0^2.$$

Сравним это решение с решением (2.2.30), которое после подстановки $i = \pi/2$ примет следующий вид

$$\beta = -\frac{2k}{3\lambda_c C\omega_0} \left(\frac{\mu_e}{r^3} \right)^2.$$

Можно заметить, что решения отличаются в два раза. Более того, осредненная модель дает более оптимистичное значение ошибки ориентации, что может привести к неверному выбору параметров спутника и системы ориентации на этапе их проектирования. Поэтому для определения точности достижения стационарного решения невозмущенной задачи при использовании магнитной системы лучше использовать прямой диполь.

Заключение

В работе подробно рассмотрены четыре модели геомагнитного поля: IGRF, наклонный и прямой диполи, осредненная. Для трех последних моделей приведены выражения для вектора геомагнитной индукции в различных системах координат.

В работе исследованы преимущества различных моделей при проведении аналитических исследований. В частности, рассматриваются плоское и пространственное установившиеся движения. В случае плоского движения исследованы области неустойчивости и показано, что модель прямого диполя позволяет получить более точную как качественно, так и количественно картину поведения динамической системы. В случае пространственного движения для решения системы уравнений движения спутника, оснащенного тангажным маховиком, использован метод Пуанкаре. Показано, что для определения точности достижения стационарного решения при использовании магнитной системы лучше использовать прямой диполь, так как он дает более

точную оценку ошибки ориентации. При этом применение осредненной модели дает более оптимистичную оценку, что может привести к неверному выбору параметров системы ориентации спутника на этапе проектирования системы ориентации.

Для анализа переходных процессов, когда основной интерес представляет величина угловой скорости спутника, удобно использовать оскулирующие переменные. Показано, что получить полный набор первых интегралов усредненных уравнений движения в конечном виде можно только при использовании осредненной модели.

Литература

1. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. Москва: Наука, 1985. 288 с.
2. <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>.
3. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // *Астрономический журнал*. 1973. Т. 50, № 2. с. 327–335.
4. Овчинников М.Ю. et al. Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // *Космические исследования*. 2012. Т. 50, № 2. с. 176–183.
5. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 496 с.
6. Alfriend K.T. A Magnetic Control System for Attitude Acquisition // Ithaco, Inc., Report N 90345. 1972.