

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА  
ВО ВРЕМЯ МЕЖПЛАНЕТНОГО ПЕРЕЛЕТА  
ПО ИЗМЕРЕНИЯМ УГЛОВОГО РАЗМЕРА ПЛАНЕТ  
СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ**

Выпускная квалификационная работа  
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 010900 «Прикладные математика и физика»

Выполнила:  
студентка 272 группы  
Наумкина Юлиана Константиновна

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н.  
Иванов Данил Сергеевич

Москва, 2016

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>1. Системы координат и постановка задачи</b>	<b>4</b>
<b>2. Определение положения космического аппарата</b>	<b>6</b>
2.1. Алгоритм определения положения по направлению на планету . . . . .	6
2.2. Алгоритм определения положения космического аппарата по направлению и угловому размеру . . . . .	11
2.3. Модель звездной камеры . . . . .	12
2.4. Алгоритм стабилизации камеры в направлении планеты . . . . .	14
<b>3. Численное моделирование</b>	<b>17</b>
3.1. Параметры моделирования . . . . .	17
3.1.1. Начальные условия . . . . .	17
3.1.2. Параметры фильтра Калмана . . . . .	20
3.1.3. Звездный датчик . . . . .	21
3.2. Сравнение алгоритмов . . . . .	21
3.2.1. Анализ ошибок при добавлении измерения углового размера . . . . .	21
3.2.2. Переориентация на другую планету . . . . .	24
<b>Заключение</b>	<b>26</b>

## **Введение.**

В настоящее время спутники используются для ряда важных для современного общества целей: спутниковая навигация, связь, прогнозирование погоды и наблюдение за климатом, разведка, проведение научных экспериментов над живыми организмами в условиях космоса. Но другая важная сфера их использования – это исследование самого космоса, изучение небесных тел. Для успешного осуществления миссии любого космического аппарата критическим вопросом является определение местоположения спутника в пространстве.

Наиболее эффективный способ определения движения на околоземных орбитах заключается в использовании наземных радиостанций. Для определения движения КА при межпланетном перелете создана сеть таких станций в разных странах, так как для получения результатов более высокой точности необходимо, чтобы расстояние между точками, из которых на спутник отправляются радиосигналы, было максимально возможным. Проблема, возникающая при межпланетных перелетах, связана именно с этим расстоянием. При большом удалении от Земли дистанции между радиостанциями становятся малыми относительно расстояния до спутника, что приводит к уменьшению точности определения параметров движения. В связи с этим возникает необходимость разработки автономных методов навигации.

Такие системы навигации могут использовать в своих расчетах данные о других небесных телах. Так, например, Исследователи из Института Макса Планка (Германия) разработали систему автономной космической навигации, использующую сигналы пульсаров. Ранее её практическая реализация была затруднена из-за недостаточного количества известных пульсаров и сложной технологии их обнаружения. Система межпланетной навигации основана на принципе,

используемом GPS. Измеряя время прибытия импульсов, приходящих от по крайней мере трех различных пульсаров, и сравнивая их с расчетными значениями, можно определить пространственные координаты приемника. Идентичность импульсов пульсаров создает множество возможных решений, но, ограничив их область относительно небольшим объемом вокруг предполагаемого местоположения аппарата, можно найти соответствующее действительности.

Другой способ автономной межпланетной навигации, который и будет в дальнейшем рассматриваться в этой работе, - это метод, основанный на определении направления на известные небесные тела, например, планеты Солнечной системы с известным заранее движением. Направление на планеты можно определить с использованием оптических датчиков, например, инфракрасных датчиков или звездной камеры. Однако наряду с определением направления на центр небесного тела можно также в качестве измерения использовать угловой размер видимого объекта, параметры которого предполагаются известными. В настоящей работе построен алгоритм, позволяющий решать задачу автономной навигации с использованием только звездной камеры. Минимальный состав измерительной аппаратуры позволяет использовать его в том числе на малых космических аппаратах во время межпланетного перелета.

## Глава 1.

### Системы координат и постановка задачи

Моделирование и расчеты проводятся при следующем приближении. Считается, что движение всех тел – планет и спутника – кеплерово, т.е. на тела не действует никаких возмущений, орбиты замкнуты.

Рассматривается три системы координат.

$OXYZ$  – гелиоцентрическая. Начало координат помещается в центр масс Солнца, Инерциальная.

$O'xyz$  – орбитальная. Начало координат помещается в центр масс космического аппарата, ось  $O'z$  направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего центры масс Солнца и КА, ось  $O'x$  перпендикулярна оси  $O'z$  и лежит в плоскости, проходящей через радиус-вектор и вектор скорости центра масс КА, составляя с последним угол меньше  $90^\circ$ . Неинерциальная.

$O'\xi\eta\zeta$  – связанная. Начало координат помещается также в центр масс КА. Оси направлены по главным осям инерции тела. Неинерциальная.

Их взаимное расположение изображено на рис.1.

Движение планет определено в том смысле, что известны параметры орбиты, по которым в каждый момент времени можно найти положение. Кроме того предполагается, что планета хорошо видна на изображении со звёздного датчика, отсутствует засветка Солнцем, к тому же подразумевается, что её форма близка к сфере.

Для получения измерений используется звёздный датчик, установленный на спутнике, – камера, фотографирующая участок небесной сферы. При помощи изображений, с одной стороны, по звёздам можно определить ориентацию спутника в пространстве, а с другой

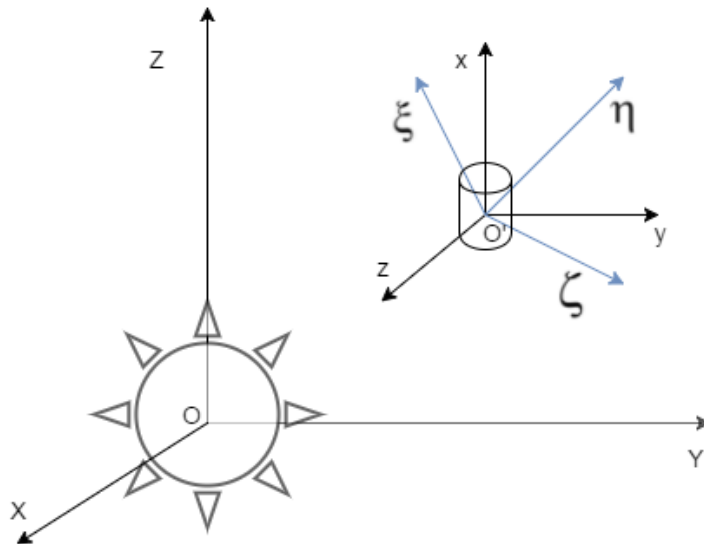


Рис. 1: Используемые системы координат

стороны – получить информацию о размере и положении видимой планеты, которая впоследствии будет использоваться при вычислениях.

Космический аппарат является твёрдым телом, по одной из осей направлена камера. В начальный момент времени в обзор может не попадать ни одной планеты.

Цель настоящей работы заключается в разработке и исследовании алгоритма автономной навигации спутника в пространстве при межпланетном перелёте с использованием обработки снимков видимых планет. Положение и скорость космического аппарата в гелиоцентрической системе координат необходимо оценивать итерационно по мере поступления измерений в режиме реального времени. Поэтому в работе алгоритм определения движения выбран на основе расширенного фильтра Калмана.

## Глава 2

### Определение положения космического аппарата

Задача определения орбиты с использованием измерений объектов прямой видимости появляется в двух эквивалентных случаях: при оценивании орбиты наблюдателя при наблюдении известного планетарного тела (навигационная задача), и при определении орбиты неизвестного наблюдаемого тела, когда известна орбита наблюдателя (задача определения орбиты). Эти две проблемы математически эквивалентны. Когда расстояния между наблюдателем и наблюдаемыми объектами становятся большими, как и во время межпланетных полетов, задача становится более сложной. Для любого космического аппарата, в особенности, при межпланетных полетах, автономия играет решающую роль для успеха миссии, особенно в случае нештатных ситуаций в системе связи. При использовании звёздных датчиков можно добиться автономности определения движения во время межпланетных полетов, в то время как оценка движения с помощью наземных станций требует наличия радиосвязи с космическим аппаратом. В межпланетной навигации из-за больших расстояний и высокой скорости наблюдателя, возникает свето-временной эффект и эффект абберации света. В настоящей работе эти эффекты не учитываются.

#### 2.1. Алгоритм определения положения по направлению на планету

Для определения направления на планету ведётся измерение двух углов, задающих направление на объект. В настоящей работе выбраны углы места и азимута. Направление на планету определяется с помощью изображения со звёздной камеры, в случае когда кроме звезд на изображении видна планета, отражающая солнечный свет.

По звездам определяется ориентация космического аппарата в инерциальной системе координат, а по изображению планеты определяется единичный вектор на её центр в связанной с космическим аппаратом системе координат. Таким образом, можно вычислить вектор направления на планету в инерциальной системе координат. Модель измерений записывается следующим образом:

$$\mathbf{h} = \begin{Bmatrix} \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin^{-1}\left(\frac{x-R_x}{\sqrt{(x-R_x)^2+(y-R_y)^2+(z-R_z)^2}}\right) \\ \tan^{-1}\left(\frac{y-R_y}{x-R_x}\right) \end{Bmatrix}$$

где  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{z}}]^T$  – вектор состояния космического аппарата в гелиоцентрической системе координат,  $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z]^T$  – радиус-вектор планеты.

Для автономной навигации необходимо получать последовательную оценку вектора состояния в режиме реального времени по поступающим с некоторым шагом измерениям. Построим для этой цели расширенный фильтр Калмана, который работает по принципу "прогноз-коррекция". Его суть состоит в том, что, используя полученные измерения, их модель, а также модель движения, вычисляется оценка вектора состояния. На каждом шаге высчитываются весовые коэффициенты, с помощью которых корректируется текущая оценка вектора состояния. При запуске обработки данных на вход подаётся начальный вектор состояния  $X_0$  и матрица ошибок  $P_0$ , содержащая в себе информацию о предполагаемых ошибках вектора состояния.

На этапе прогноза ведётся численное интегрирование уравнений движения космического аппарата. В настоящей работе используется в качестве них используется классического выражение для задачи двух тел:

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0.$$



Интегрирование проводится с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка, коэффициенты которого рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(\mathbf{X}_i, \mathbf{t}_i) \\ k_2 &= f\left(\mathbf{X}_i + \frac{\mathbf{h}}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{t}_i + \frac{\mathbf{h}}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(\mathbf{X}_i + \frac{\mathbf{h}}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{t}_i + \frac{\mathbf{h}}{2}\right) \\ k_4 &= f(\mathbf{X}_i + \mathbf{h}\mathbf{k}_3, \mathbf{t}_i + \mathbf{h}), \end{aligned}$$

а значение на новом шаге получается по формуле:

$$X_{i+1} = X_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Здесь  $h$  – шаг по времени, а  $f$  – используемое уравнение движения. В данном случае система выглядит так:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \end{aligned}$$

$\mathbf{r}, \mathbf{x}$  – компоненты вектора состояния, отвечающие за радиус-вектор и скорости соответственно.

Получив проинтегрированное значение вектора состояния  $X_k^-$ , вычисляется вектор измерений  $\mathbf{h}$ . Затем осуществляется прогноз матрицы ошибок:

$$P_k^- = \Phi_k P_{k-1}^+ \Phi_k^T + Q_k.$$

Значение  $Q_k$  вычисляется таким образом:

$$M(\mathbf{q}_k) = \mathbf{0}, M(\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T) = \mathbf{Q}_k,$$

где  $\mathbf{q}_k$  ошибка модели движения КА:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{q}_k$ . То есть по своему смыслу  $Q_k$  – корреляционная матрица. Остальные используемые элементы вычисляются так:

$$\Phi_k = E + F_k(t_k - t_{k-1})$$

$$F_k = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}}$$

$$H_k = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{t})}{\partial \mathbf{x}}$$

Для используемых моделей движения и измерений в результате линеаризации матрицы  $F$  и  $H$  принимают вид:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\mu(2x^2 - y^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{3\mu yx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{3\mu zx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3\mu yx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{\mu(2y^2 - x^2 - z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{3\mu zy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3\mu zx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{3\mu zy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & \frac{\mu(2z^2 - x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты матрицы  $H$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{(x - R_x)(z - R_z)}{[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 + (z - R_z)^2] \sqrt{(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{(y - R_y)(z - R_z)}{[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 + (z - R_z)^2] \sqrt{(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sqrt{(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2}}{(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 + (z - R_z)^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{(y - R_y)}{(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{(x - R_x)}{(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2}$$

Следующим этапом необходимо обработать измерения для получения оценки вектора состояния. Для этого вычисляется весовая матрица:

$$K_k = P_k H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1},$$

матрица  $R_k$  здесь определяется аналогично матрице  $Q_k$ :

$$M(\mathbf{r}_k) = \mathbf{0}, \mathbf{M}(\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T) = \mathbf{R}_k,$$

здесь  $\mathbf{r}_k$  ошибка модели измерений:  $\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \mathbf{r}_k$ . Далее с помощью матрицы  $K_k$  происходит коррекция  $X_k^-$ :

$$X_k^+ = X_k^- + K_k [z_k - h(X_k^-, t)],$$

$z_k$  - полученные измерения,  $h(X_k^-, t)$  - модельные. Значение  $X_k^+$  является апостериорной оценкой вектора состояния.

Последним действием на текущем шаге является коррекция матрицы ошибок:

$$P_k^+ = [E - K_k H_k] P_k^-.$$

После этого начинается новый цикл. Общая схема работы фильтра Калмана изображена на рис.2

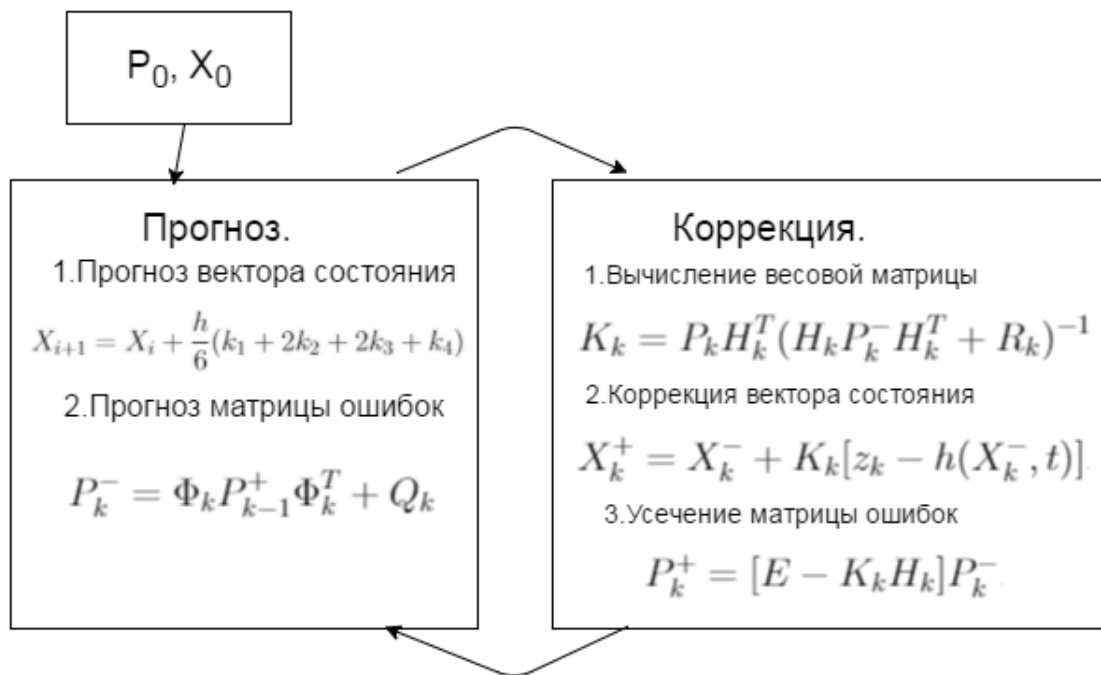


Рис. 2: Блок-схема работы фильтра Калмана

## 2.2. Алгоритм определения положения космического аппарата по направлению и угловому размеру.

Для улучшения точности определения вектора состояния космического аппарата можно использовать также угловой размер планеты. Добавление этого измерения не внесет изменений в состав датчиков аппарата, для его получения используется уже имеющийся звёздный датчик. Анализируя полученные изображения планеты, можно с определенной точностью получать информацию о размерах видимого объекта. Для этого необходимо использовать формулы проективной геометрии и иметь модель звездной камеры. В качестве модели измерения углового размера используется формула

$$\alpha = 2 \arctg \frac{D}{2L},$$

и её приближение для малых углов

$$\alpha = \frac{D}{L},$$

где  $D$  – это реальный диаметр планеты,  $L$  – расстояние между пла-

нетой и космическим аппаратом. Добавим это выражение в вектор измерений  $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \alpha \end{pmatrix}$ . Тогда матрицы  $\Phi$  и  $F$ , используемые фильтром Калмана, останутся без изменений, а матрица  $H$  преобразуется следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} & \frac{\partial \alpha}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

добавленные компоненты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= -\frac{D(x - R_x)}{[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 + (z - R_z)^2]^{(\frac{3}{2})}}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -\frac{D(y - R_y)}{[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 + (z - R_z)^2]^{(\frac{3}{2})}}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} &= -\frac{D(z - R_z)}{[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 + (z - R_z)^2]^{(\frac{3}{2})}}. \end{aligned}$$

### 2.3. Модель звездной камеры

Для более детального моделирования ошибок измерений как направления на центр планеты, так и измерений углового размера планеты необходимо использовать модель звездного датчика. Рассмотрим модель, которая состоит из ПЗС (прибор с зарядовой связью) матрицы камеры и тонкой собирающей линзы. Введем систему координат  $OXYZ$ , связанную с центром ПЗС-матрицы, которая находится в фокальной плоскости линзы. Оси  $OX$  и  $OY$  направлены параллельно сторонам ПЗС-матрицы, а ось  $OZ$  – перпендикулярно плоскости матрицы в сторону линзы. Помимо этого свяжем с ПЗС-матрицей и так называемую "пиксельную" плоскую систему координат  $Kxy$ , начало которой находится в углу прямоугольника чувстви-

тельной матрицы, а оси  $Kx$  и  $Ky$  параллельны осям  $OX$  и  $OY$ . (см. рис. 3)

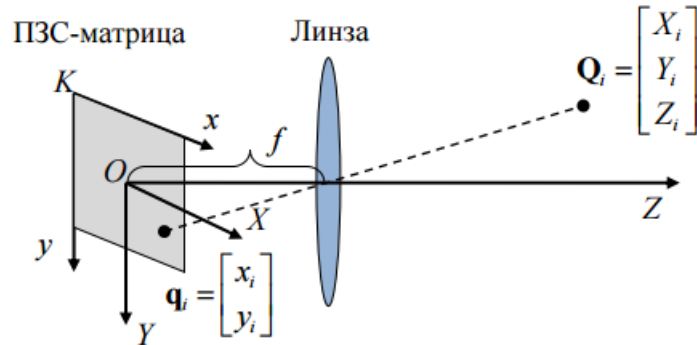


Рис. 3: Системы координат, связанные с ПЗС-матрицей

Введём параметры:  $f$  – фокусное расстояние,  $c_x, c_y$  – координаты точки пересечения оптической оси камеры  $OZ$  с ПЗС-матрицей. Далее, если  $s_x, s_y$  – коэффициенты, определяющие размер пикселя, то  $f_x = s_x f, f_y = s_y f$ . Тогда связь между координатами  $i$ -ой точки  $[X_i, Y_i, Z_i]^T$  в системе  $OXYZ$  и пиксельными координатами  $[x_i, y_i]^T$  в системе  $Kxy$  определяется формулами проективной геометрии:

$$x_i = f_x \frac{X_i}{Z_i} + c_x$$

$$y_i = f_y \frac{Y_i}{Z_i} + c_y$$

Таким образом осуществляется переход к реальным размерам. Определяя по фотографии положение планеты, а также по разности контрастности находя координаты границы, можно получить угловой размер. Видимый диаметр находится как максимум разности между координатами границы. В результате зависимость между непосредственно нужным нам измерением и данными с изображения выглядит так:

$$Q = \frac{qZ}{f},$$

где  $Q$  – угловой размер,  $q$  – пиксельный угловой размер,  $Z$  – компонента  $z$  радиус-вектора центра масс планеты в ССК.

Проанализируем ошибки измерений. В отличие от ошибки определения направления, которая предполагается постоянной величиной, зависящей от точности определения ориентации с помощью звездного датчика, ошибка определения диаметра планеты связана с расстоянием до космического аппарата. Обозначим погрешность в определении диаметра на изображении в пикселях за  $\delta q$ , а ошибку измерения самого диаметра за  $\delta Q$ . Определяться она будет аналогично модели измерений:

$$\delta Q = \frac{Z\delta q}{f_x}.$$

Отсюда видно, что при увеличении расстояния ошибка будет возрастать. В связи с этим встаёт вопрос об избежании увеличения ошибки при слишком большом удалении планеты.

## 2.4. Алгоритм стабилизации камеры в направлении планеты

Для того чтобы ошибки определения диаметра планеты не приводили к серьезному ухудшению получаемых оценок вектора состояния космического аппарата необходимо проверять нет ли рядом более близкой планеты и, в случае если таковая имеется, переориентировать аппарат на неё.

Чтобы иметь возможность осуществить подобный манёвр, необходимо знать угловое движение аппарата, которое можно оценить из измерений звездного датчика. Обозначим  $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$  - вектор угловых скоростей. Для ориентации осей связанной системы координат в орбитальной будем использовать нормированный кватернион  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4]$ . Его выбор связан с отсутствием вырождения уравнений движения. Введём матрицу:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда уравнения углового движения принимают вид:

$$\dot{\mathbf{q}} = \Omega \frac{\mathbf{q}}{2}$$

$$J\dot{\omega} + [\omega, \mathbf{J}\omega] = \mathbf{U},$$

где  $J = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$  – тензор инерции космического аппарата,  $U$

– управляющий момент от маховиков. Их интегрирование производится с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка, после чего, осуществляется нормировка кватерниона. Но перед тем, как приступить к моделированию углового движения, необходимо рассчитать и подать в эти уравнения управляющие моменты.

Угловое положение аппарата, которое необходимо получить, следующее: ось  $O'X$ , которая совпадает с оптической осью камеры, должна быть направлена по радиус-вектору, соединяющему центр масс КА с центром масс планеты, положение остальных осей не принципиально, поэтому они определяются таким образом, чтобы получилась правая тройка; угловые скорости нулевые. В результате получаем параметры опорного движения:

$$\omega_0 = [0, 0, 0]^T$$

$$\dot{\omega}_0 = [0, 0, 0]^T$$

$B = [\vec{P}, \vec{P}_n, \vec{P}_\tau]$  – матрица перехода от текущей системы координат к итоговой,  $\vec{P} = \vec{R} - \vec{X}$ ,  $\vec{P}_n = [\vec{P}, \vec{X}]$ ,  $\vec{P}_\tau = [\vec{P}, \vec{P}_n]$ , все вектора после вычисления нормируются на длину.



В качестве управления используется PD-регулятор. Слова "proportional = пропорциональный" и "derivative = дифференциальный" в названии описывают простейшие элементы контроллера. Выражение для управляющего импульса имеет вид:

$$U = [\omega, J\omega] - J[\omega_{rel}]_x A \omega_0^T + J A \dot{\omega}_0^T - k_a S - k_w \omega_{rel},$$

$\omega_{rel} = \omega - A \omega_0^T$ ,  $A = C B^T$ ,  $C$  – матрица направляющих косинусов, получаемая из кватернионов,  $S = \begin{pmatrix} A_{23} - A_{32} \\ A_{31} - A_{13} \\ A_{12} - A_{21} \end{pmatrix}$ . Параметры PD-контроллера в данной задаче  $k_a = 1$ ,  $k_w = 1$ .

После получения оценки вектора состояния с помощью фильтра Калмана осуществляется сравнение расстояний до наблюдаемой планеты с расстояниями до других планет. Если какая-либо из планет оказывается ближе, подается команда на КА для его переориентации. При этом движение планет считается полностью известным.

## Глава 3.

### Численное моделирование

Перейдём теперь к численному моделированию. Элементы используемых методов и моделей уже были освещены ранее, а именно: фильтр Калмана, метод РК 4-го порядка, используемые уравнения орбитального и углового движений космического аппарата. В этой главе описано, как проводится моделирование движения планет, определены параметры ФК и начальные условия задачи, а также проведён сравнительный анализ точности оценки вектора состояния с помощью рассматриваемых алгоритмов алгоритмов.

#### 3.1. Параметры моделирования

##### 3.1.1. Начальные условия

В качестве начальных условий космического аппарата и планет используются классические элементы орбиты:  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $\omega$  – аргумент перицентра,  $i$  – наклонение (расположение углов изображено на рис. 4),  $e$  – эксцентриситет,  $a$  – большая полуось,  $\tau_\pi$  – время прохождения через перицентр. По этим элементам в любой момент времени можно вычислить положение тела. Сначала, решая уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau_\pi), \mu = GM = 132712440018 km^3 c^{-1}$$

находим величину эксцентрической аномалии  $E$ . Решение находится численно методом Ньютона, итерационная формула имеет вид:

$$E_{n+1} = \frac{e \sin E_n + \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau_\pi) - e E_n \cos E_n}{1 - e \cos E_n}.$$

В результате получаем  $E$  с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

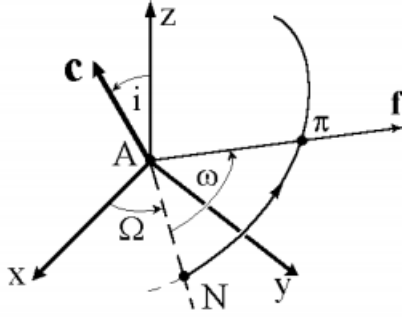


Рис. 4: Элементы орбиты

Затем, по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} a(\cos E - e) \\ b \sin E \\ 0 \end{pmatrix}$$

находим координаты радиус-вектора тела в  $OXYZ$ . Матрица  $B$  есть произведение трёх матриц поворота на углы  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $i$  соответственно:  $B = A_1^T A_2^T A_3^T$ , её компоненты:

$$b_{11} = \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i$$

$$b_{12} = -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i$$

$$b_{13} = \sin \Omega \sin i$$

$$b_{21} = \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i$$

$$b_{22} = -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i$$

$$b_{23} = -\cos \Omega \sin i$$

$$b_{31} = \sin \omega \sin i$$

$$b_{32} = \cos \omega \sin i$$

$$b_{33} = \cos i$$

Построенные в результате моделирования траектории изображены на рис. 5. В дальнейшем модель ограничивается использованием двух ближайших планет: Марса и Венеры.

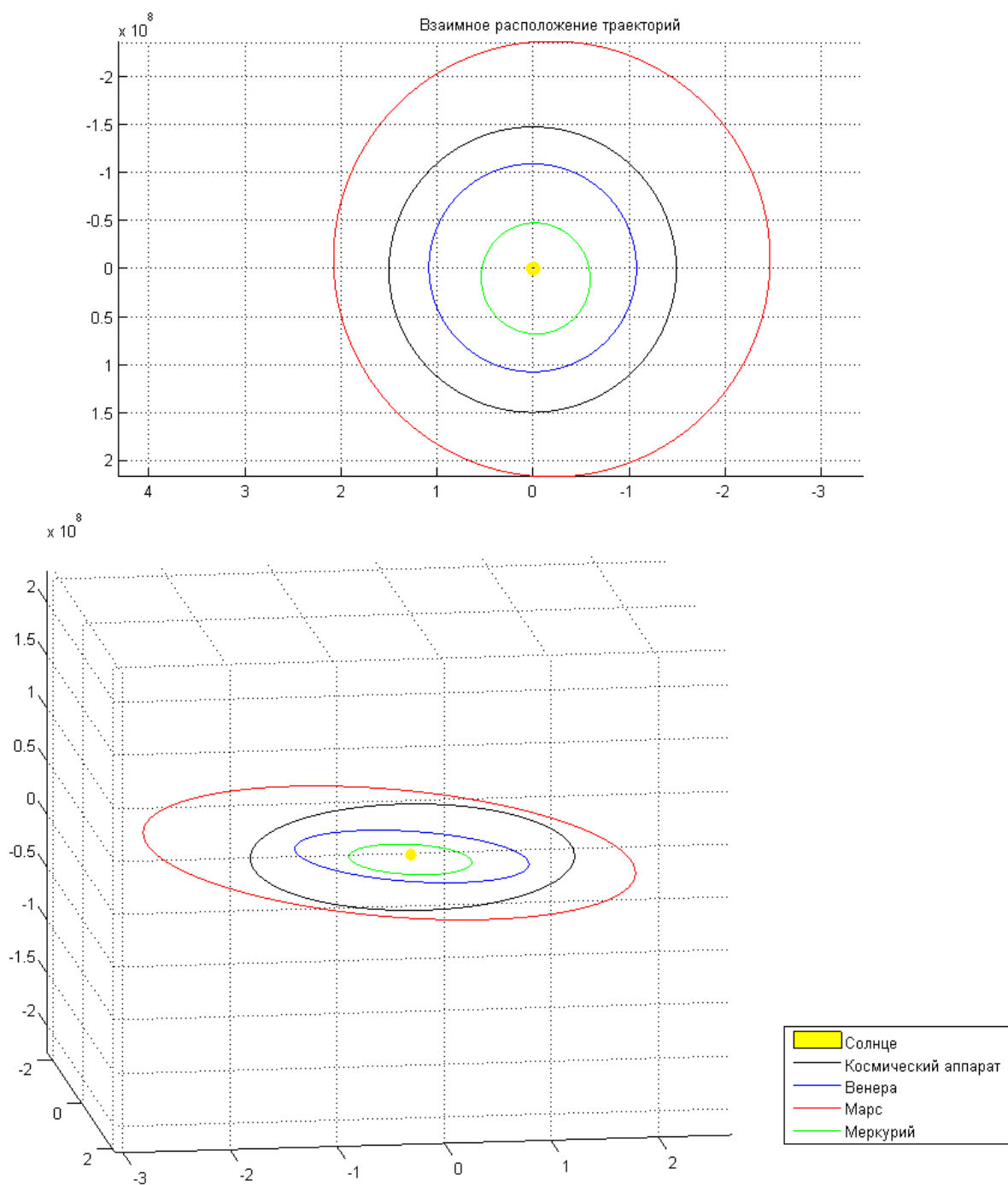


Рис. 5

Таким образом вычисляются координаты тела в каждый момент времени. Для космического аппарата эти расчеты используются только в начальный момент, так как под воздействием внешних сил его элементы орбиты нельзя считать постоянными, в свою очередь для

планет этот способ используется на протяжении всего моделирования. Для космического аппарата, помимо положения, необходимо вычислить скорости. Это делается также с использованием элементов орбиты по формулам:

$$q = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}\right)$$

$$u = \omega + q$$

$$p = (1 - e^2)a$$

$$v_x = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin q (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) +$$

$$+(1 + e \cos q)(-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i)$$

$$v_y = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin q (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) +$$

$$+(1 + e \cos q)(-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i)$$

$$v_z = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e \sin q \sin u \sin i + (1 + e \cos q) \cos u \sin i)$$

### 3.1.2. Параметры фильтра Калмана

Матрицы  $Q_k$  и  $R_k$ , отвечающие за погрешность моделей движения и измерений положим постоянными и диагональными, таким образом используется приближение, что ошибки в моделях движения и измерения по раным осям независимы между собой. Элементы матрицы  $Q$  равны  $10^{-4}$ , сама матрица имеет размер  $6 \times 6$ , в связи с размерностью вектора состояний. Размер матрицы  $R_k$  зависит от выбранной модели измерений, её элементы порядка  $10^{-6}$ , так как точность определения направления соответствует порядка 3-4 угловым секундам. Начальная матрица ошибок  $P_0$  также диагональная размера  $6 \times 6$ , элементы равны  $10^3$  в соответствии с ожидаемой точностью.

### 3.1.3. Звёздный датчик

Точность звёздного датчика принимается равной примерно 3-4 угловым секундам. Фокусное расстояние камеры  $f = 20\text{мм}$ , а погрешность определения диаметра по изображению составляет 2-3 пикселя.

## 3.2. Сравнение алгоритмов.

### 3.2.1. Анализ ошибок при добавлении измерения углового размера

Рассмотрим результаты, полученные при моделировании с использованием разных моделей измерений. На рисунках ниже представлены графики, отображающие разность между модельными значениями компонент вектора состояния и значениями, полученными в результате работы фильтра Калмана. Для удобства координаты в пространстве отделены от скоростей. Было проведено моделирование на двух временных отрезках: длиной в час и шагом интегрирования  $h = 1\text{с}$  и длиной суток с шагом  $h = 1\text{мин}$ . Результаты получены для Марса при первой модели измерений (рис.6).

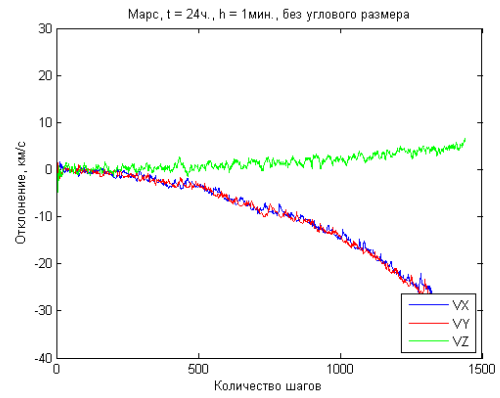
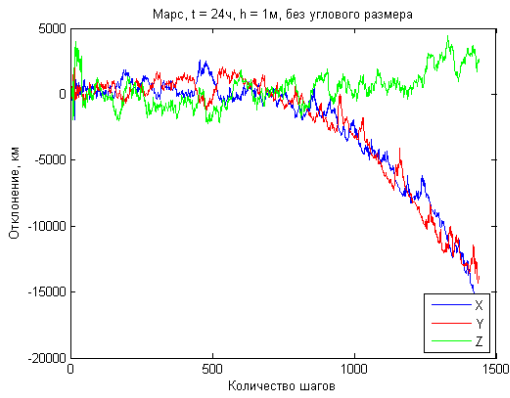
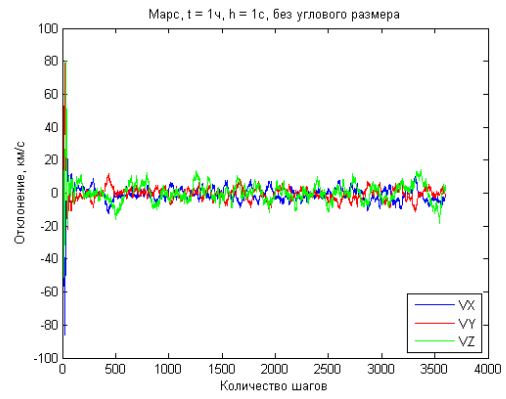
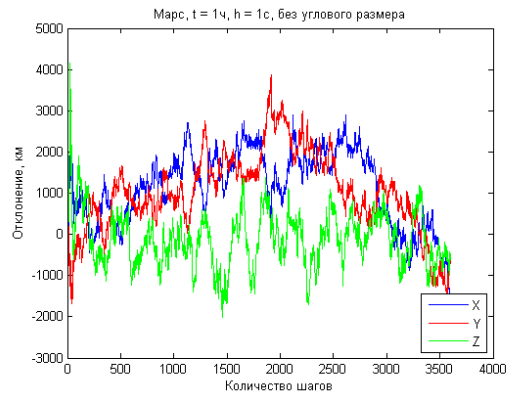


Рис. 6: Результаты моделирования движения с использованием Марса и модели измерений, не учитывающей угловой размер

С добавлением в данные модели дополнительно измерение углового размера Марса, отклонения от истинных значений принимают новый вид (рис.7).

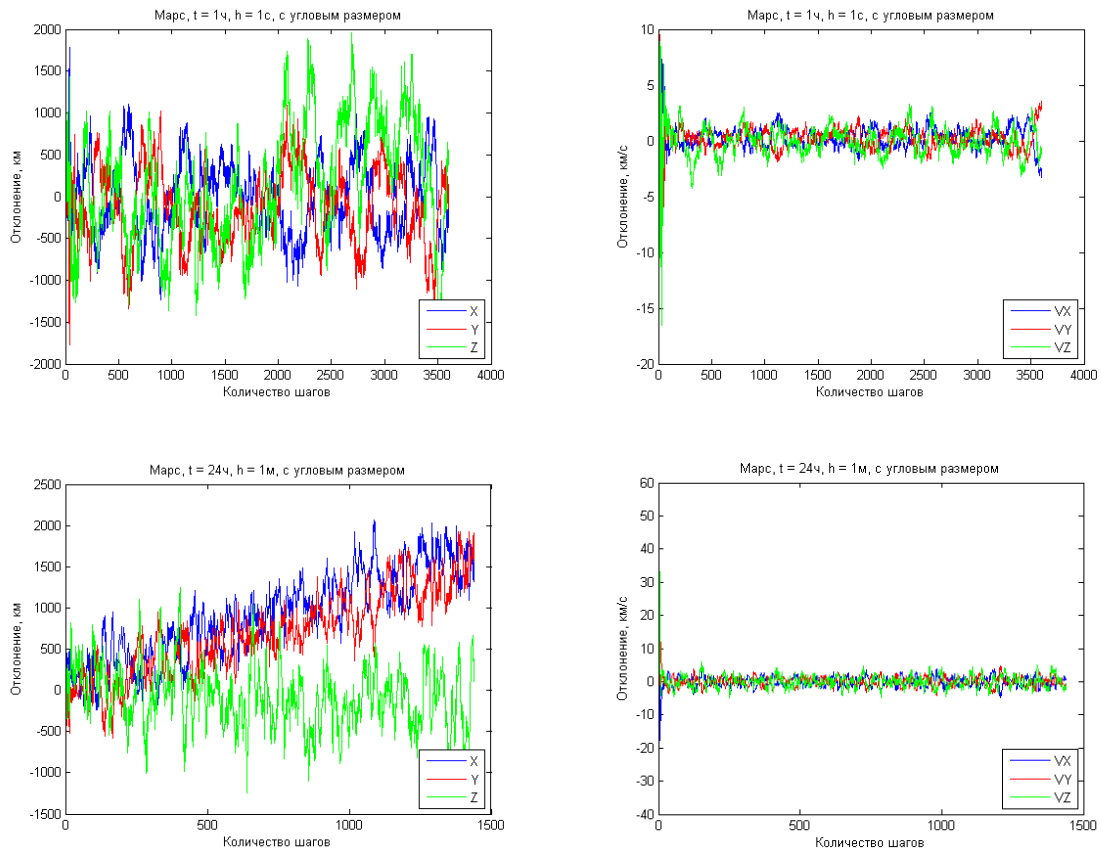


Рис. 7: Результаты моделирования движения с использованием Марса и модели измерений, учитывающей угловой размер

Отсюда становится очевидным улучшение точности определения вектора состояния, причем в большей мере это сказывается на определении именно радиус вектора, в то время как скорости при разных измерениях показывают достаточно близкие значения. Кроме того можно заметить, что ошибка скоростей претерпевает некоторое уменьшение с течением времени. Погрешность же нахождения координат, напротив, имеет тенденцию к росту, в связи с нарастанием ошибки определения углового размера планеты.



### 3.2.2. Переориентация на другую планету

Сравним угловой размер Марса и Венеры, изображенный на рис.8.

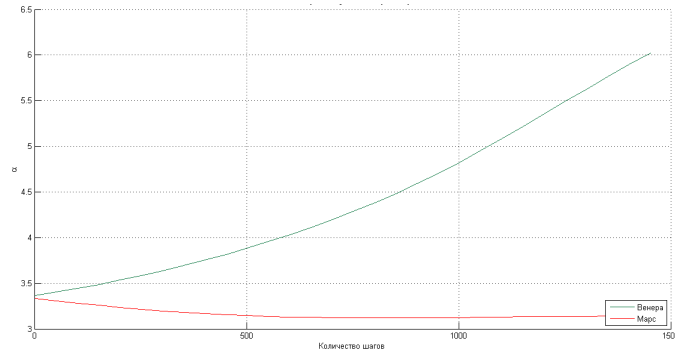


Рис. 8: Угловой размер

Очевидно, что Венера превосходит Марс на рассматриваемых промежутках. Тогда повторим моделирование, используя ближайшую планету(рис.8,9).

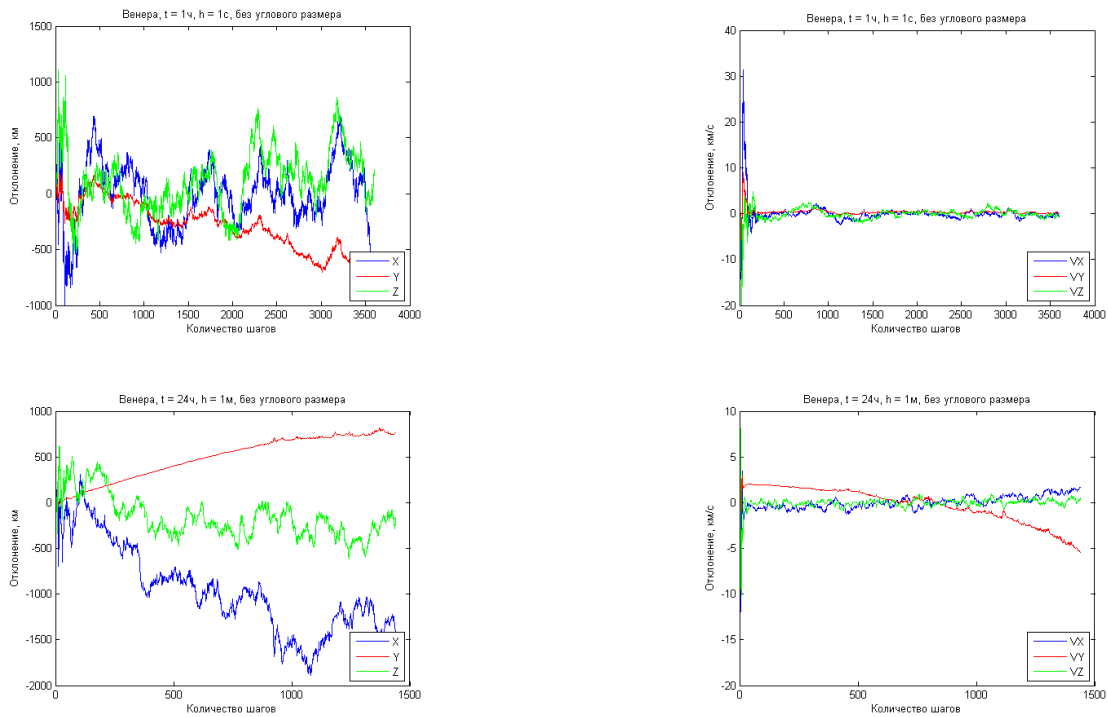


Рис. 9: Результаты моделирования движения с использованием Венеры и модели измерений, не учитывающей угловой размер

На полученных графиках видно уменьшение отклонения от истинного значения, причем это проявляется как в модели, использующей угловой размер, так и в ограничивающейся только направлением на планету. Таким образом выбор ближайшей планеты, если такая попадает в обзор камеры, дополнительно улучшает определение вектора состояния.

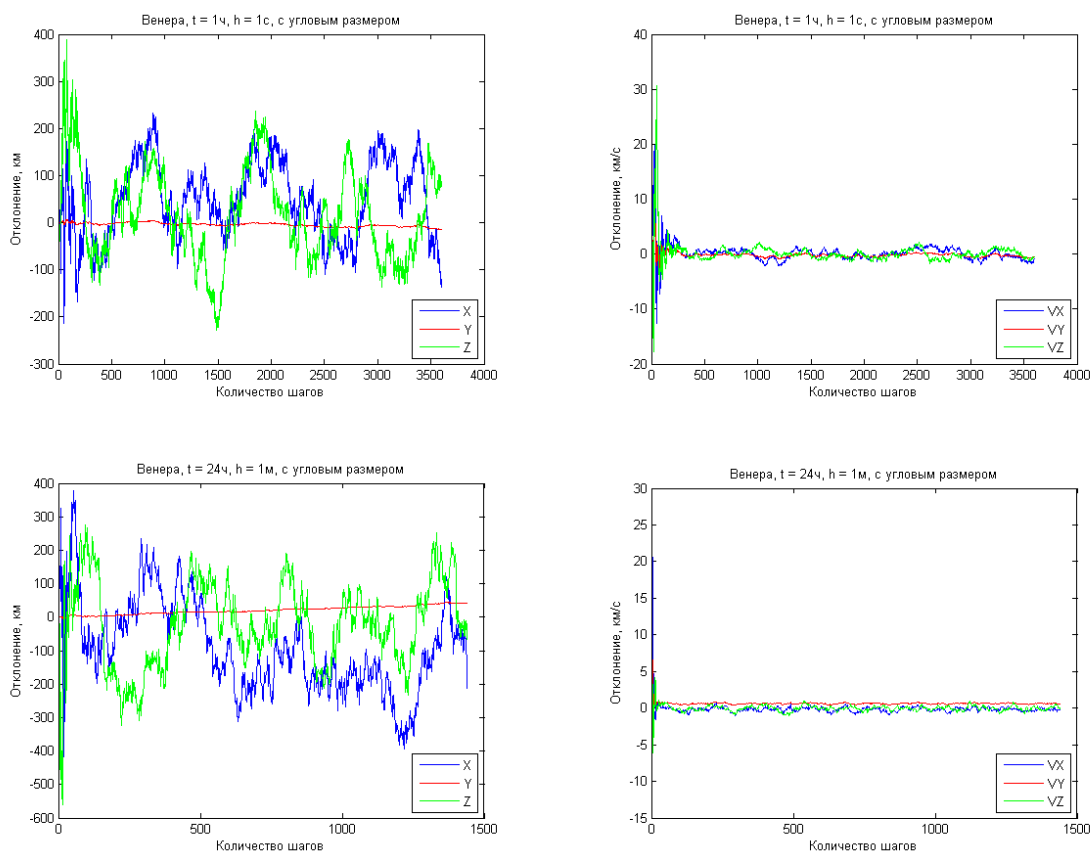


Рис. 10: Результаты моделирования движения с использованием Венеры и модели измерений, учитывающей угловой размер

## Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм автономной навигации на основе расширенного фильтра Калмана с использованием измерений, получаемых с помощью звездного датчика. Таким образом, звездный датчик используется не только для определения углового движения, но и движения центра масс космического перелета. Исследование показало, что добавление измерения углового размера наблюдаемых планет Солнечной системы повышает точность определения движения, хотя алгоритм усложняется при этом незначительно. Отслеживание ближайшей к космическому аппарату планеты (или планеты с наибольшим угловым размером) позволяет сохранять точность определения движения даже в случае удаления наблюдаемых планет.

В качестве развития настоящей работы необходимо более приближенно к реальной системе определения движения моделировать измерения звездного датчика. Также необходимо отказаться от предположения, что наблюдаемые планеты освещены Солнцем полностью, и решить задачу определения направления на планету и его размера в случае частичного освещения. Представляет интерес апробация разработанного алгоритма с использованием реальных снимков планет во время межпланетных перелетов таких миссий как NewHorizons, Cassini, Hayabusa.

## Список литературы

[1] 'Adaptive Orbit Determination for Interplanetary Spacecraft' P. Daniel Burkhart (Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California 91109), Robert H. Bishop (University of Texas at Austin, Austin, Texas 78712)

[2] 'Interplanetary Autonomous Navigation Using Visible Planets' Reza Raymond Karimi and Daniele Morta

[3] 'Система навигации космического аппарата в межпланетном пространстве' А.Н. Липатов, В.М. Линкин, О.Н. Андреев, В.С. Маркаров, Л.И. Хлюстова (Учреждение Российской академии наук Институт космических исследований РАН (ИКИ РАН), Москва), С.А. Антоненко, Г.В. Захаркин (ЗАО СП «ИНТЕРАСТРО», Москва)

[4] 'Autonomous Spacecraft Navigation With Pulsars' Werner Becker, Mike G. Bernhardt, Axel Jessner

[5] 'Кинематика и динамика твердого тела (кватернионное изложение)' Н.И.Амелькин

[6] 'Определение движения макетов системы управления микро-спутников на аэродинамическом столе с использованием видеокамеры', Коптев М.Д., Прошунин Н.Н., Иванов Д.С.