



# Определение колебательных движений нежёстких элементов спутника с помощью обработки видеоизображения

Д.О. Лазарев

*Московский физико-технический институт*

*Научный руководитель, к.ф.-м.н.:*

Д.С. Иванов,

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*

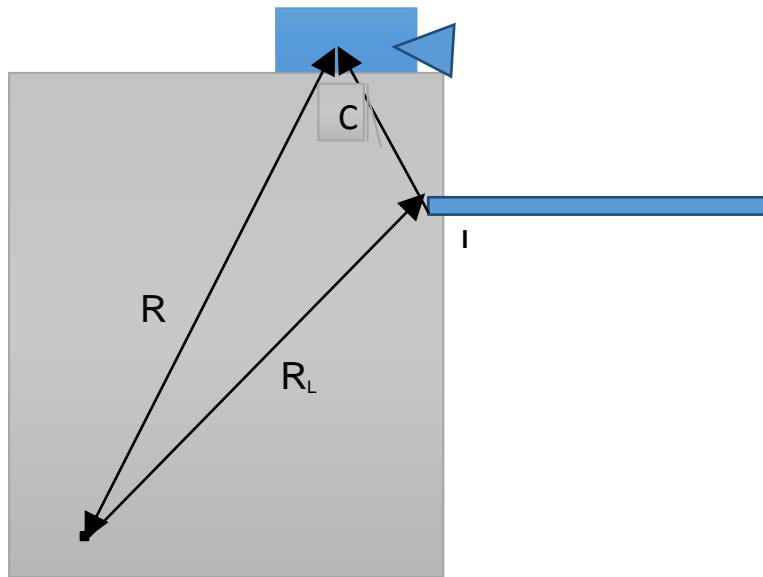
# *Введение*



При создании модели движения КА зачастую предполагается, что он является твёрдым телом, однако для спутников, содержащих нежёсткие элементы полезной нагрузки данная модель оказывается неточной.

# Постановка задачи и системы координат

Системы координат:



$O^1XYZ$  – система координат, связанная с нежёстким элементом спутника (ССК).

Её ось  $O^1Z$  перпендикулярна плоскости колебаний линейки,  $O^1X$  направлена вдоль покоящегося стержня,  $O^1Y$  дополняет тройку до правой.

$O^2xyz$  – связанная с линзой камеры система координат. Её начало лежит в оптическом центре линзы камеры, ось  $O^2z$  перпендикулярна плоскости линзы, оси  $O^2x$  и  $O^2y$  – образуют декартов базис в плоскости линзы

$O^3\xi\eta$  – пиксельная система координат, т.е. система координат, в которой ось  $O^3\xi$  - координата по горизонтали изображения (на котором отображаются колебания нежестких элементов), а ось  $O^3\eta$  - координата по вертикали.

Переход от связанной системы координат со стержнем к связанной с камерой СК выражается формулами:

$$\mathbf{r}^C = A\mathbf{r}^l + \mathbf{r}(O^1, O^2),$$

Где  $\mathbf{r}^C$  – радиус-вектор в системе координат, связанной с камерой,  $\mathbf{r}^l$  – тот же радиус – вектор в системе координат, связанной с линейкой

# Описание моделей и алгоритмов:

## 1. Модель измерения камеры

Переход из ортонормированного базиса, связанного с линзой камеры к пиксельному базису ( $O^2xyz \rightarrow O^3\xi\eta$ ) осуществляется проективным преобразованием трёхмерного пространства в двумерное пространство изображений колебаний стержня на экране камеры, выражаемого формулами:

$$\xi = fN \frac{x}{z} + c_\xi,$$
$$\eta = fM \frac{y}{z} + c_\eta,$$

где  $x, y, z$  – координаты в системе  $Oxyz$ , связанной с центром линзы камеры;  $N$  и  $M$  – число пикселей по вертикали и диагонали экрана соответственно,  $f$  – фокальное расстояние линзы;  $c_\xi$  и  $c_\eta$  – специфические, зависящие от данной камеры смещения по горизонтали и вертикали камеры соответственно.

o

## 2. Фильтр Калмана

Модель движения:

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = F \vec{x} + \delta \vec{w}$$

Где  $\delta \vec{w}$  - нормально распределённая ошибка измерения модели с нулевым математическим ожиданием  $M(\delta \vec{w}) = 0$ , а ковариационная матрица которой  $M(\delta \vec{w} \delta \vec{w}^T) = Q$  и  $\vec{x}$  - вектор состояния.

Модель измерений:

$$\vec{z} = H \vec{x} + \delta \vec{z}$$

Где  $\vec{z}$  - вектор измерений,  $H$  - матрица измерений,  $\delta \vec{z}$  — нормально распределённая ошибка измерений с  $M(\delta \vec{z}) = 0$  и ковариационной матрицей ошибок измерения

$$M(\delta \vec{z} \delta \vec{z}^T) = R,$$

Работа фильтра Калмана состоит из двух этапов – прогноза и коррекции.

Решением уравнения движения является матричная экспонента  $\Phi = e^F$  :

$$\vec{x}_{k+1}^- = \Phi \vec{x}_k^+ \quad (4)$$

на этапе прогноза также нужно проинтегрировать ковариационную матрицу ошибок вектора состояния  $P = M(\vec{\delta x}, \vec{\delta x}^T)$ . Для этого вычисляем апостериорную матрицу  $P^{k+1}$ :

$$P_{k+1}^- = \Phi P_k^+ \Phi^T + Q, \quad (5)$$

На этапе коррекции с целью расчёта апостериорной оценки  $x_{k+1}^+$  и апостериорной матрицы ковариации, необходимо вычислить оптимальную по Калману матрицу усиления  $K_{k+1}$ :

$$K_{k+1} = \frac{P_{k+1}^- H^T}{H P_{k+1}^- H + R}. \quad (6)$$

С помощью неё рассчитываем апостериорные по их априорным значениям вектор состояния

$$\vec{x}_{k+1}^+ = \vec{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (\vec{z}_{k+1} - H \vec{x}_{k+1}^-), \quad (7)$$

и ковариационную матрицу вектора состояния

$$P_{k+1}^+ = (E - K_{k+1} H) P_{k+1}^-, \quad (8)$$

Вычисление фильтра Калмана для случая периодических незатухающих колебаний:

Вектор состояния:

$$\vec{x} = \left( y, \frac{dy}{dt}, \omega \right)$$

Линеаризованная матрица эволюции процесса:

$$F_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & -2\omega y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор измерений:

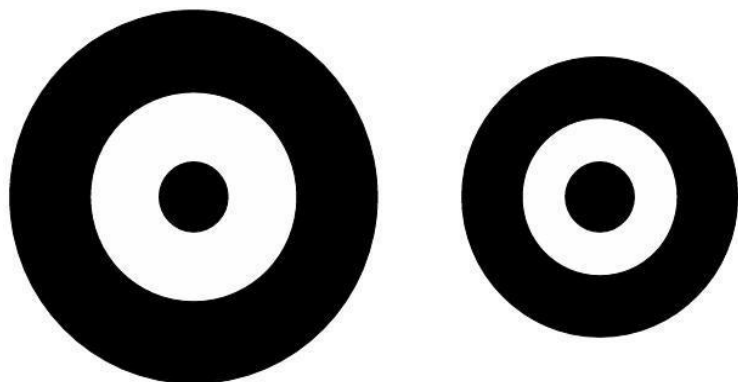
$$\vec{z} = (\xi, \eta)$$

Для корректной работы фильтра Калмана необходимо задать начальные значения вектора состояния  $x^0$ , матрицы ошибок вектора состояния  $P^0$ , ковариационные матрицы вектора состояния  $Q$  и измерений  $R$ .



## 3.Обработка изображений

Цель обработки изображений – найти центр внутреннего чёрного круга.



:

- Подсчёт количества точек в каждом из контуров чёрных замкнутых объектов на снимке
- Вычисление «среднего диаметра»
- Нахождения «средней ширины»
- Определение экспериментальным способом границ трёх величин стержня.

# Результаты моделирования.

Модель идеальных гармонических колебаний, представленная синусоидой с неизвестной фазой и амплитудой (см. график 3.1), прогнозируется с точностью 0.001 при амплитуде, равной 2.3 см; причём начальное расхождение между оценкой и прогнозом, ликвидируется за несколько первых шагов, в то время, как частота колебаний в модели фильтра Калмана, составляющая 40 Гц, начинает подходить к своему значению лишь за 120 - 160 шагов

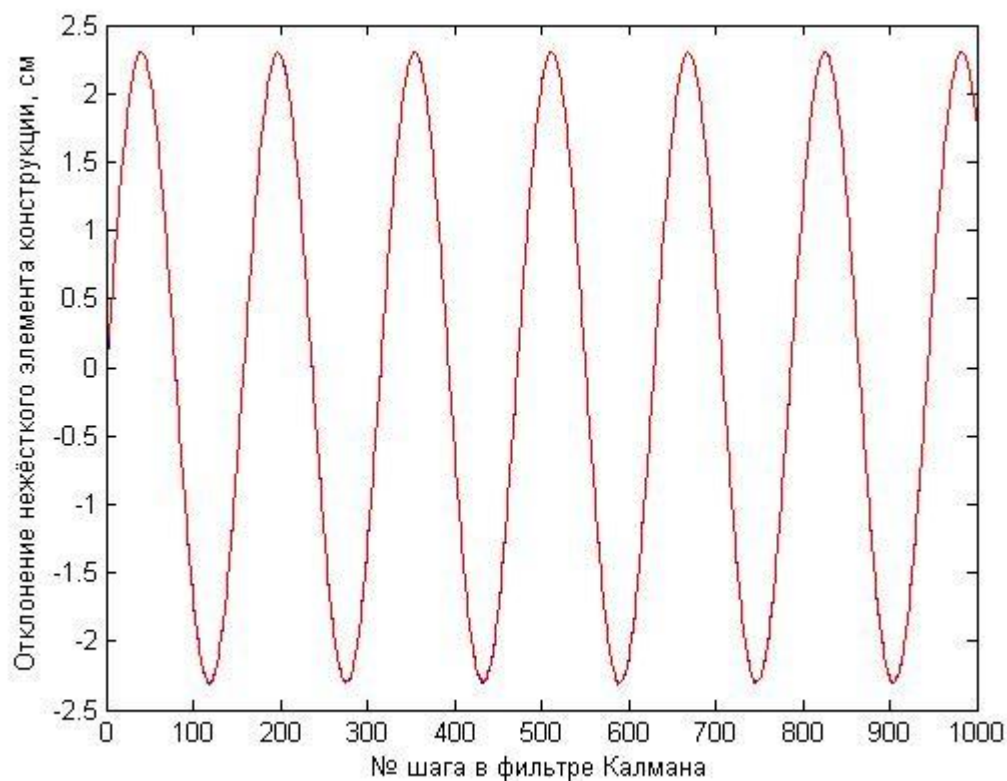


Рисунок 3.1. Зависимость отклонения нежёсткого элемента от шага фильтра Калмана в модели с идеальной системой движения.

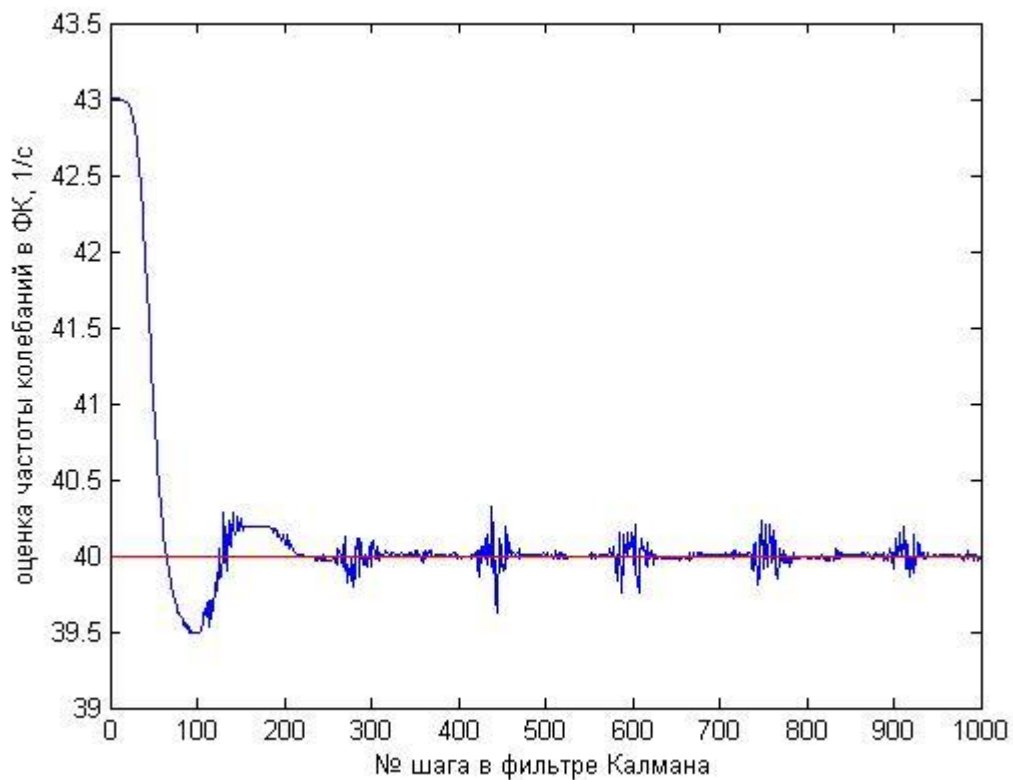
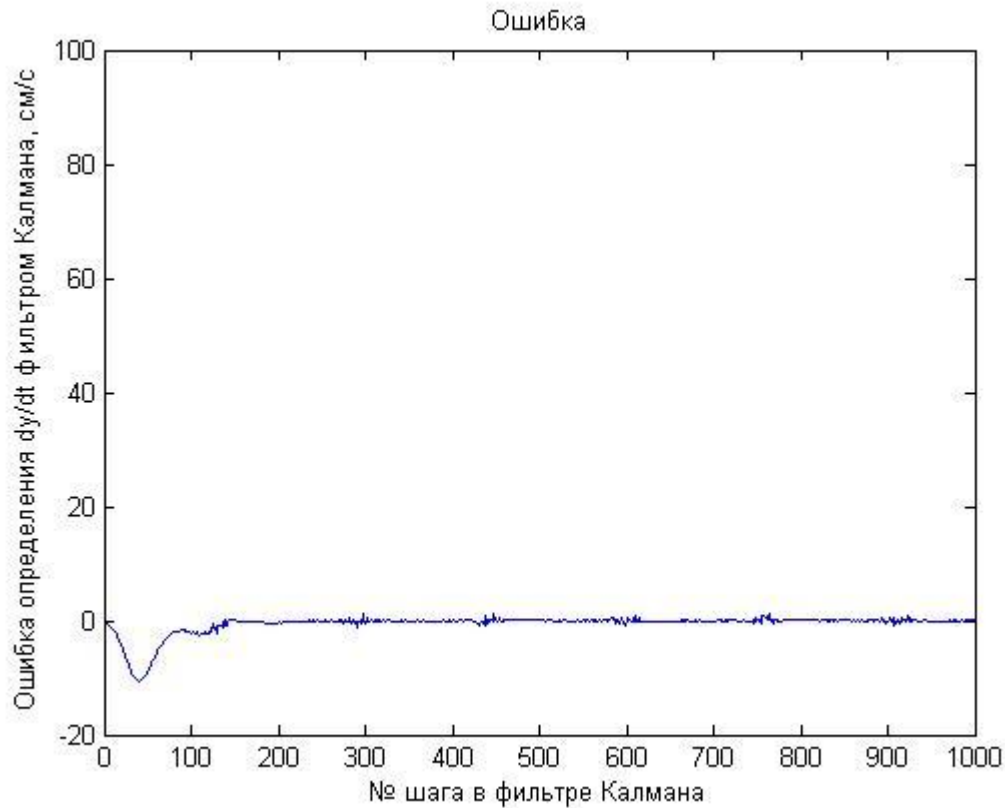


Рисунок 3.2. Частота колебаний в модели фильтра Калмана

Сходимость же Фильтра Калмана по второй компоненте фазового вектора – достигает своего стабильного значения 1 – 1,2 см/с за 120-150 шагов алгоритма:



С другой стороны, приближенная к реальной модель, в которой ошибка измерения составляет 5%, даёт более низкий порядок аппроксимации, связанный с неточностью уравнений движения и относительно большей ковариационной матрицей системы при добавлении в систему случайных возмущений, имеющих нормальное распределение. В данной модели отклонения достигают 0.2 см

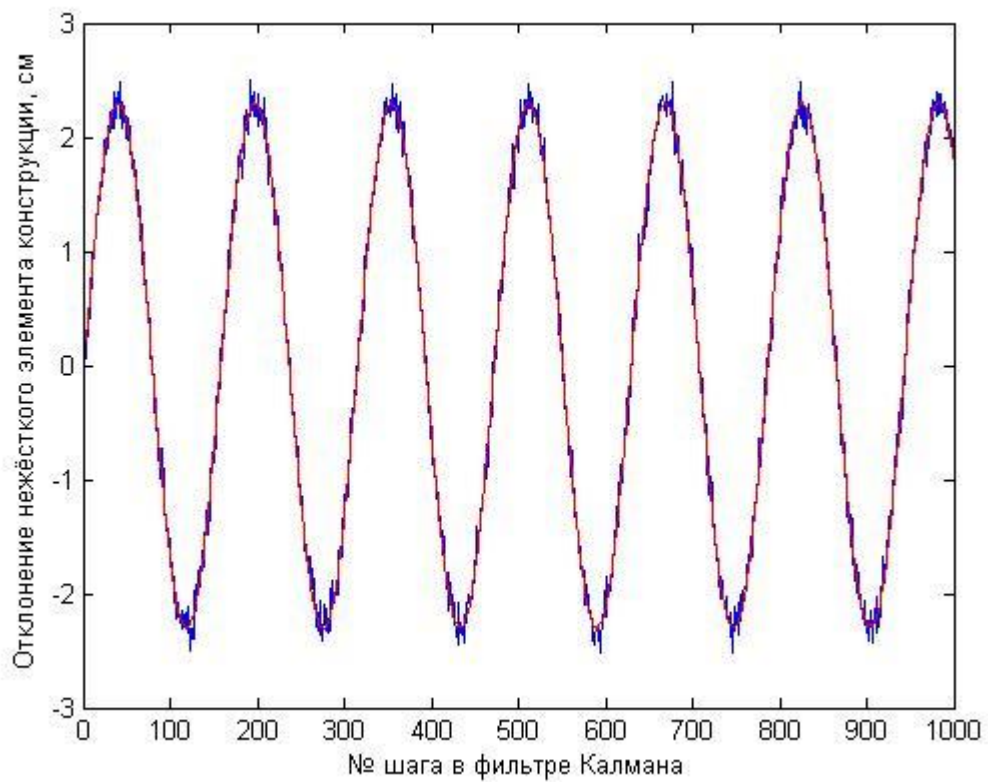


Рисунок 3.3. отклонение результатов, прогнозируемых фильтром Калмана с реальными данными

# Описание экспериментов

Отведение нежёстких элементов от положения равновесия с целью прогнозирования их положения осуществлялось вручную.

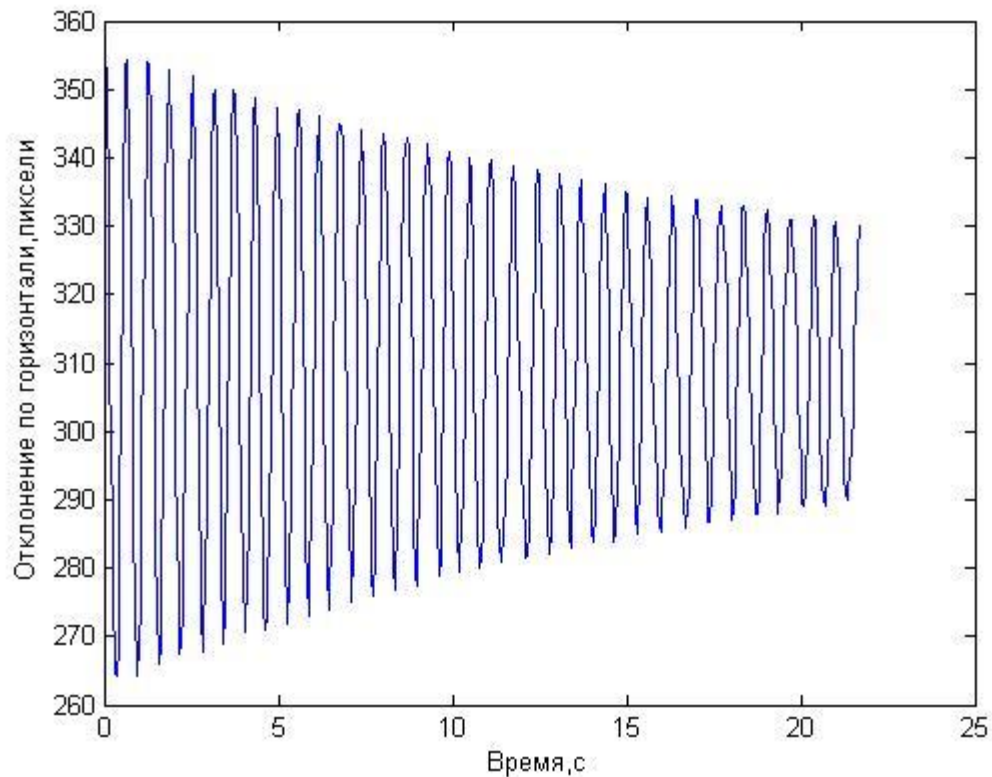
Ниже приведён фотоснимок отклонённого стержня, из которого можно судить об оптимальном начальном отклонении последнего.



Рисунок 4.2. Макет с отклонённым от положения равновесия нежёстким элементом

Приведём результаты обработки видеоизображения для колебаний стержня, полученных при проведении эксперимента: по оси x присутствовали лишь незначительные осциллирующие колебания: по оси же y, как и предполагалось, были получены слабозатухающие периодические колебания.

Колебания по горизонтали:



# Заключение

В работе решена задача определения слабозатухающих движений нежёсткого элемента конструкции макета системы управления, а также определения самой низкой собственной частоты колебаний.

-Для решения задачи разработан и применён итерационный алгоритм на основе расширенного фильтра Калмана.

-Алгоритм протестирован с использованием численного моделирования, а также применен для определения колебательного движения нежесткого элемента конструкции макета системы управления микроспутником.

-Обработано видео движения колебательного элемента с закрепленной реперной контрастной точкой.

-Полученная точность определения движения и собственной частоты позволяет использовать эти оценки как входные данные для системы демпфирования колебаний нежестких элементов конструкции.



Спасибо за внимание!

