

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»  
Факультет управления и прикладной математики  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

# Определение колебательных движений нежёстких элементов спутника с помощью обработки видеоизображения

Выпускная квалификационная работа (бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:

студент 272 группы

\_\_\_\_\_

Лазарев Денис Олегович

Научный руководитель:

к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_

Иванов Данил Сергеевич

Москва 2016

## Оглавление

- Введение .....	3
-1. Постановка задачи и системы координат .....	5
-2. Описание моделей и алгоритмов .....	8
-2.1. модель измерений камеры .....	8
-2.2. фильтр Калмана .....	9
-2.3. определение положения точки нежесткого элемента по ее изображению .....	12
-3. Результаты моделирования .....	14
-4. Описание экспериментов .....	20
- Заключение .....	22
- Литература .....	23

## Введение

При создании модели движения космического аппарата как правило предполагается, что он является твёрдым телом и строятся соответствующие этому предположению алгоритмы управления движением относительно центра масс. Однако, на космических аппаратах часто устанавливаются так называемые нежёсткие элементы конструкции, к которым можно отнести, например, солнечные панели, большие телекоммуникационные антенны или манипуляторы, способные изгибаться, и, как следствие, совершать колебательные движения.

Движение каждой точки на гибком элементе конструкции представимо в виде гармонических затухающих колебаний. Эти колебания могут оказывать существенное влияние на угловое движение аппарата, наиболее значительное в тех случаях, когда протяжённость нежёстких элементов превосходит длину аппарата. Неучёт этих колебательных движений может существенно ухудшить точность его стабилизации.

Наибольшее влияние на угловое движение космического аппарата оказывают низкочастотные колебания с относительно большой амплитудой и низкой скоростью затухания. Такие колебания иногда возникают при коррекции траектории космического аппарата или при разгрузке маховиков. Для погашения возмущений данного типа наиболее эффективно определять их с помощью доступных средств измерения и демпфировать с помощью системы управления ориентации или специальных актюаторов.

Частота, амплитуда и фаза колебаний гибких элементов конструкции косвенно и со значительной погрешностью могут быть оценены либо по показаниям бортовых датчиков определения углового

движения космического аппарата, либо с помощью специальных измерительных устройств. Можно также оценить текущие параметры колебаний можно по косвенным измерениям колебательных движений корпуса космического аппарата при использовании сложных моделей, учитывающих гибкие элементы конструкции. Для более точного определения движения используются оптические измерения видеокамерой, установка которой специально проводится с целью уменьшения ошибки измеряемых отклонений нежёсткого элемента. Имеется множество способов решения поставленной задачи, но всё же вопрос построения оптимальных методов оценки движения по зашумленным измерениям остаётся по сей день открытым, вследствие чего возникают сложные задачи нахождения таких параметров алгоритмов, которые бы обеспечивали максимальную точность определения.

Данная работа разделена на четыре части. В первой части введены системы координат, используемые при решении задачи, а также сформулирована проблема, решению которой посвящена настоящая работа, описаны приборы и оборудование, используемое при проведении опытов и экспериментов. Во второй части подробно разобран рекурсивный алгоритм, используемый при прогнозировании движения космического аппарата с гибкими элементами конструкции – фильтр Калмана. Третья часть посвящена описанию результатов численного моделирования, полученных при решении задачи. В четвёртой части описаны эксперименты, на которых продемонстрирован итог работы использованных методов в решении задачи определения колебательных движений нежесткого элемента конструкции, установленного на макете системы управления спутником.

Полученный метод может быть применён независимо для фильтрации горизонтальных и вертикальных колебаний стержня, давая, таким образом, возможность построения полной модели сложных движений нежёстких элементов. Однако стоит отметить, что данная работа не охватывает тот узкий класс задач и миссий, в которых необходим учёт продольных и поперечных деформаций стержня.

## 1. Постановка задачи и системы координат

В настоящей работе рассматривается система, состоящая из трёх частей: макет спутника (считается твёрдым телом), камера, установленная на теле спутника, и нежёсткий элемент конструкции, совершающий слабозатухающие колебания (Рис.1.1).

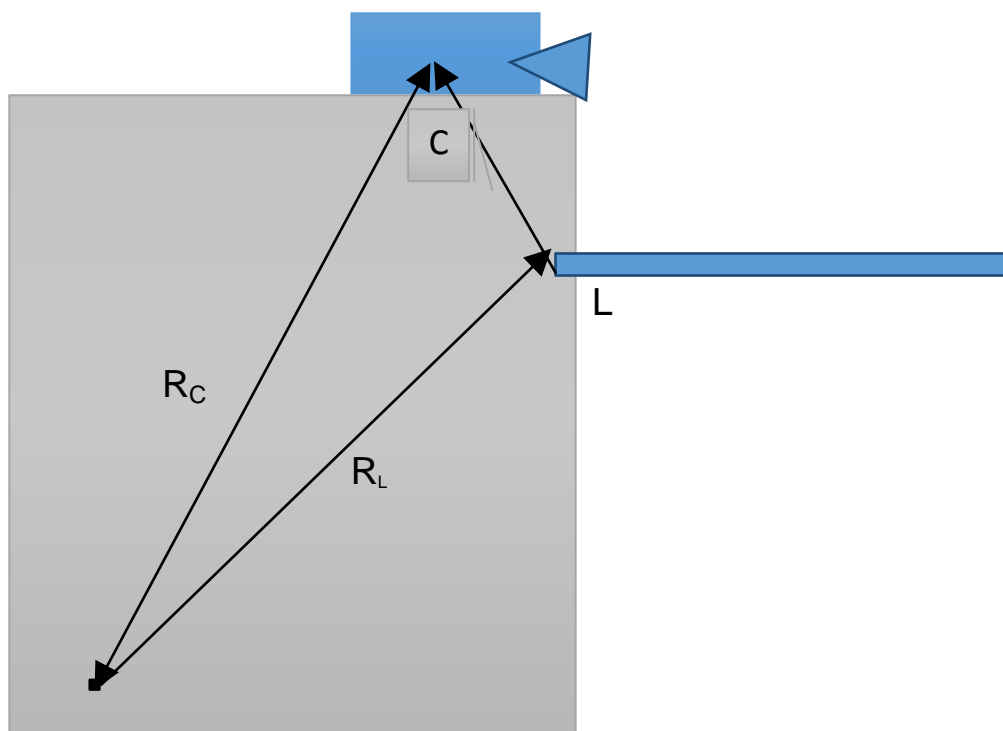


Рис.1.1. Схема макета спутника

На рис.1.1 векторы  $R_c$  и  $R_L$  определяют положение линзы камеры и точки крепления гибкого элемента в связанной со спутником системе координат. В работе используются следующие правые ортогональные системы координат:

$O^1XYZ$  – система координат, связанная с нежёстким элементом спутника (ССК). Центр системы  $O^1$  находится в центре основания нежёсткого элемента. Её ось  $O^1Z$  перпендикулярна плоскости колебаний линейки,  $O^1X$  направлена вдоль покоящегося стержня,  $O^1Y$  дополняет тройку до правой.

$O^2xyz$  – связанная с линзой камеры система координат. Её начало лежит в оптическом центре линзы камеры, Ось  $O^2z$  перпендикулярна плоскости линзы, оси  $O^2x$  и  $O^2y$ – образуют декартов базис в плоскости линзы, с которой они связаны;

$O^3\xi\eta$  – пиксельная система координат, т.е. система координат, в которой ось  $O^3\xi$  - координата по горизонтали изображения (на котором отображаются колебания нежёстких элементов), а ось  $O^3\eta$  - координата по вертикали.

Последовательность переходов между системами координат производится в порядке:

$$O^1XYZ \rightarrow O^2xyz \rightarrow O^3\xi\eta.$$

Положения камеры и панели, соответственно, задаются (рис.1) векторами  $R_c$  и  $R_L$ .

Ниже приведён фотоснимок макета космического устройства с нежёсткими элементами, на котором созданная программа тестировалась и проверялась в действии.(Рис 1.2)



Рис. 1.2. Макет системы управления

Модель космического аппарата имеет плоское основание в форме окружности, шесть боковых стенок, сделанных из пластмассы. На стенки макета крепятся элементы системы управления движением макета. Сверху макет накрыт плоской крышкой прямоугольной формы. На боковой панели у макета имеется камера. Наверху модели закреплен нежёсткий элемент – длинная металлическая пластина длиной 117,5 сантиметра: 23,2 сантиметра – длина закреплённой части; длина же колеблющейся части стержня составляет 94,2 сантиметра. Более подробно макет описан в разделе «описание экспериментов».

Нежёсткий элемент спутника при движении в космическом пространстве может совершать колебания, оказывающие влияние на угловое движение спутника. Целью настоящей работы является

построение алгоритма определения движения реперной точки нежёсткого элемента конструкции с использованием обработки видеоизображения.

## 2. Описание моделей и алгоритмов.

### 2.1. Модель измерений камеры

Переход из ортонормированного базиса, связанного с линзой камеры к пиксельному базису ( $O^2xyz \rightarrow O^3\xi\eta$ ) осуществляется посредством проективного преобразования трёхмерного пространства (в котором колеблется нежёсткий элемент) в двумерное пространство изображений колебаний стержня на экране камеры, выражаемого формулами

$$\xi = fM \frac{x}{z} + c_\xi,$$

$$\eta = fM \frac{y}{z} + c_\eta,$$

где  $x, y, z$  – координаты в системе  $Oxyz$ , связанной с центром линзы камеры;  $N$  и  $M$  – число пикселей по вертикали и диагонали экрана соответственно,  $f$  – фокальное расстояние линзы;  $c_\xi$  и  $c_\eta$  – специфические, зависящие от данной камеры смещения по соответствующим осям.

Стоит обратить внимание на выбор правильного положения камеры: нужно её, во-первых, расположить достаточно далеко от стержня по оси  $Oz$ , чтобы интересующий нас нежёсткий элемент полностью попадал в объектив; но, с другой стороны, для увеличения точности измерений, важно, чтобы как можно большая часть экрана покрывалась изображениями положений колеблющегося стержня в некие моменты времени, чего можно добиться выбором подходящих значений координат  $x$  и  $y$ .



Переход же от связанной системы координат со стержнем к связанной с камерой СК выражается, в общем случае, стандартными формулами линейной алгебры:

$$\mathbf{r}^C = A\mathbf{r}^l + \mathbf{r}(O^1, O^2),$$

Где  $\mathbf{r}^C$  – радиус-вектор в системе координат, связанной с камерой,  $\mathbf{r}^l$  – тот же радиус – вектор в системе координат, связанной с линейкой,  $\mathbf{r}(O^1, O^2)$  – вектор с началом в начале связанной со стержнем системе координат и с концом в начале связанной со стержнем системе координат,  $A$  – ортогональная матрица перехода от базиса связанного со стержнем к базису, связанному с линейкой.

## 2.2. Фильтр Калмана.

Для рекурсивной оценки фазовых параметров и текущего вектора состояния может в работе использоваться рекурсивный алгоритм на основе фильтра Калмана для нелинейных систем, иначе называющегося расширенным фильтром Калмана. Предполагается, что модель движения известна не точно, а с некоторой ошибкой:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = F\vec{x} + \delta\vec{w}$$

Где  $\delta\vec{w}$  - нормально распределённая ошибка измерения модели с нулевым математическим ожиданием  $M(\delta\vec{w}) = 0$ , а ковариационная матрица которой  $M(\delta\vec{w} \delta\vec{w}^T) = Q$  и  $\vec{x}$  – вектор состояния, состоящий из 3-ёх компонент, полностью определяющих движение нежёсткого элемента КА в принятой модели в любой момент времени:

$$\vec{x} = \left( y, \frac{dy}{dt}, \omega \right) \quad (1)$$

Где  $y(t)$  – координата помеченной точки на стержне по оси  $y$  связанной с нежёстким элементом системы координат, по которой и происходят гармонические колебания, а  $\omega$  - частота гармонических колебаний. Матрица эволюции процесса:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Зависимость вектора измерений от вектора состояния характеризуется соотношением

$$\vec{z} = H\vec{x} + \delta\vec{z} \quad (2)$$

Где  $\vec{z}$  - вектор измерений  $\vec{z} = (\xi, \eta)$ , матрица  $H$  называется матрицей измерений и выражает измерения через вектор состояния, а  $\delta\vec{z}$  — нормально распределенная ошибка измерений с нулевым математическим ожиданием  $M(\delta\vec{z}) = 0$  и ковариационной матрицей ошибок измерения

$$M(\delta\vec{z} \delta\vec{z}^T) = R, \quad (3)$$

Работа фильтра Калмана состоит из двух этапов – прогноза вектора состояния на момент получения измерения и его коррекции при обработке при получении следующего измерения. На этапе прогноза априорная оценка вектора состояния  $\vec{x}^-$  вычисляется посредством интегрирования уравнения движения (1) с апостериорными оценками вектора состояния на предыдущем шаге, задающими начальные условия:

Решением уравнения (1), в силу его линейности, является матричная экспонента  $\Phi$  матрицы  $F$ , где  $\Phi = e^F$

$$\vec{x}_{k+1}^- = \Phi \vec{x}_k^+ \quad (4)$$

на этапе прогноза также нужно проинтегрировать ковариационную

матрицу ошибок вектора состояния  $P = M(\overrightarrow{\delta x}, \overrightarrow{\delta x}^T)$ . Для этого вычисляем апостериорную матрицу  $P^{k+1}$ :

для этого необходимо вычислить линеаризованную матрицу эволюции процесса  $F_{lin}$

$$F_{lin} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & -2\omega y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{k+1}^- = \Phi P_k^+ \Phi^T + Q, \quad (5)$$

На этапе коррекции с целью расчёта апостериорной оценки  $x_{k+1}^+$  и апостериорной матрицы ковариации, необходимо вычислить оптимальную по Калману матрицу усиления  $K_{k+1}$ :

$$K_{k+1} = \frac{P_{k+1}^- H^T}{H P_{k+1}^- H + R}. \quad (6)$$

С помощью неё рассчитываем апостериорные по их априорным значениям вектор состояния

$$\vec{x}_{k+1}^+ = \vec{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (\vec{z}_{k+1} - H \vec{x}_{k+1}^-), \quad (7)$$

и ковариационную матрицу вектора состояния

$$P_{k+1}^+ = (E - K_{k+1} H) P_{k+1}^-, \quad (8)$$

Для корректной работы фильтра Калмана необходимо задать начальные значения вектора состояния  $x^0$ , матрицы ошибок вектора состояния  $P^0$ , ковариационные матрицы вектора состояния  $Q$  и измерений  $R$ .

В связи с неточностью задания фазового вектора в начальный момент времени и ошибками измерений, возникают ошибки между значениями фазового вектора в фильтре Калмана и его истинным

значением. Учёт известных нам данных об этой неточности приводит к получению начального значения матрицы ошибок вектора состояния. Матрицу  $Q$  можно получать экспериментальным методом, следя за тем, чтобы, во-первых, алгоритм не расходился с истинным значением, то есть диагональные элементы матрицы были достаточно велики, и, во-вторых, сходился достаточно быстро, то есть, чтобы элементы ковариационной матрицы были бы достаточно малы. Матрицу же  $R$ , принимаемую в большинстве случаев априори диагональной, можно вычислить, установив значения стоящих на диагонали дисперсии ошибок измерения. Таким образом, по уравнениям (1)-(8) итерационно для каждого момента времени с помощью фильтра Калмана определяется вектор состояния  $\vec{x}$ .

### **2.3. Определение положения выбранной точки нежёсткого элемента по её изображению**

С целью определения выбранной точки на стержне съёмка ведётся в режиме с повышенной контрастностью, причём, к тому же, снимок, после наложения контрастного режима, переводится в чёрно – белый. К концу колеблющегося стержня крепится картонный лист с чёрными метки на белом фоне в виде чёрного круга, имеющего общий центр с кольцом того же цвета и расположенный внутри того. Подробнее о составлении меток и обработке видеоизображения рассказано в разделе «Описание экспериментов». Данный раздел посвящён обработке изображений.

Обработка изображений происходила в программной среде 'Matlab' с использованием средств работы с изображениями из 'Image Processing Toolbox'. В данной среде реализован алгоритм определения замкнутых контуров чёрных фигур на чёрно – белом снимке, который и получил применение в настоящей работе. Алгоритм определения среди множества

контуров чёрных замкнутых фигур контура внутреннего круга, проецируемого на экране в виде эллипса при отклонении стержня от положения равновесия, о котором писалось выше, заключался в следующем:

- Подсчёт количества точек в каждом из контуров чёрных замкнутых объектов на снимке

- Вычисление «среднего диаметра» - расстояние от нулевой точки контура до точки с номером  $0,5*n$ , где  $n$  – общее количество точек на контуре для каждой из границ определяемых фигур

- Определение величины, допускающей возможность интерпретации для эллиптического контура с большой полуосью, направленной по вертикали, как «средней ширины» - абсолютное значение разности координат по пиксельной оси от точки с номером  $0,25*n$  до точки с номером  $0,75*n$ , где  $n$  – общее количество точек на контуре для каждой из границ определяемых фигур

-Определение экспериментальным способом границ трёх величин, описанных выше: количество точек контура, «среднего диаметра», «средней ширины» для контура внутреннего чёрного круга, макет которого расположен на конце стержня, и определение среди полного множества контуров тех, которые удовлетворяли бы наиболее узким условиям, налагаемым на данные величины. Методом подбора верхних и нижних границ для всех трёх величин, было получено, что одно единственное множество точек контуров удовлетворяет всем данным условиям – чёрный круг, макет с изображением которого крепился на конце колеблющегося стержня.

Искомую же точку стержня можно без труда восстановить по границе чёрного контура, насаженного на нежёсткий элемент, если

вспомнить о том, что образ круга при проективном изображении, обладает важным свойством - он центрально симметричен. С учётом последнего факта искомый конец стержня совпадает с центром тяжести контура центрального круга, вычисляемого по формуле

$$C = \sum_{k=1}^n x(k)/n,$$
 где  $n$  – количество точек контура центрального круга,  $k$  – номер текущей точки контура.

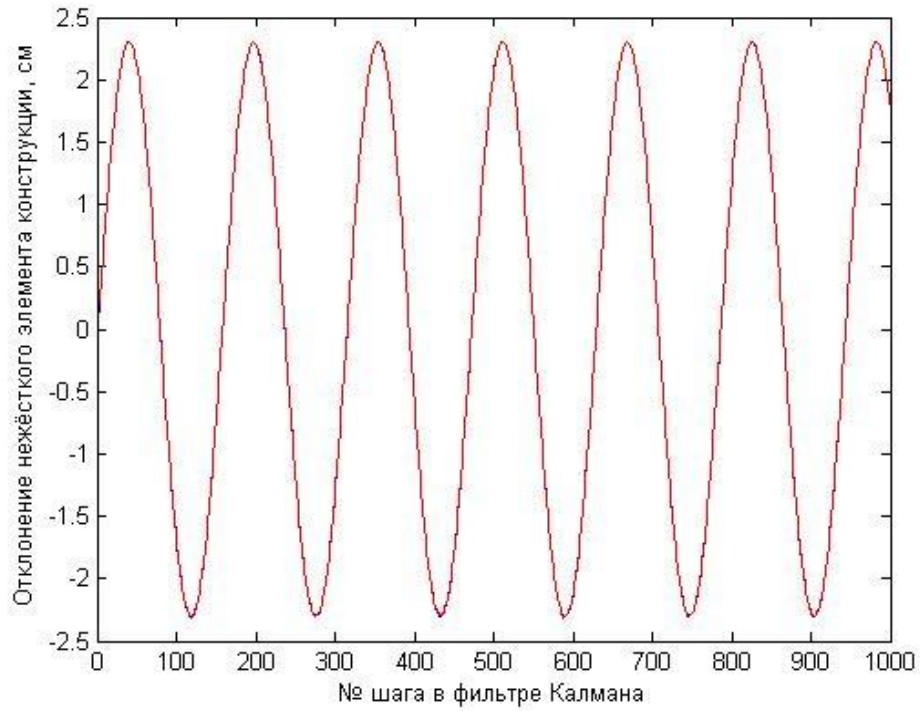
Ниже приведены снимки, на которых определён среди множества других контуров и обведён красным цветом нужный контур, содержащий в своём центре точку стержня, колебания которой определяются.

### 3. Результаты моделирования

Моделирование полученных алгоритмов (подробное описание которых можно найти в разделе №2 под названием «Описание моделей и алгоритмов» в подпунктах 2.2. «Фильтр Калмана» и 2.3. «Определение положения выбранной точки нежёсткого элемента по её изображению») проверялось сначала на идеализированной модели, потом – на примере модели слабозатухающих, близких к гармоническим колебаний, возникающих в реальных процессах.

Модель идеальных гармонических колебаний, представленная синусоидой с неизвестной фазой и амплитудой (см. график 3.1), прогнозируется с точностью 0.001 при амплитуде, равной 2.3; причём начальное расхождение, составляющее 0.3, ликвидируется за несколько первых шагов, в то время, как частота колебаний в модели фильтра Калмана, составляющая 40 Гц, начинает подходить к своему значению лишь за 120 -160 шагов, после чего оценки идут вблизи уже истинного значения, отклоняясь от него, на 0,28 Гц максимум (см. рисунки 3.1 и 3.2,

где красным цветом показана прогнозируемая модель, а синим – апостериорная оценка фильтра Калмана на соответствующих шагах).



*Рисунок 3.1. Зависимость отклонения нежесткого элемента от шага фильтра Калмана в модели с идеальной системой движения.*

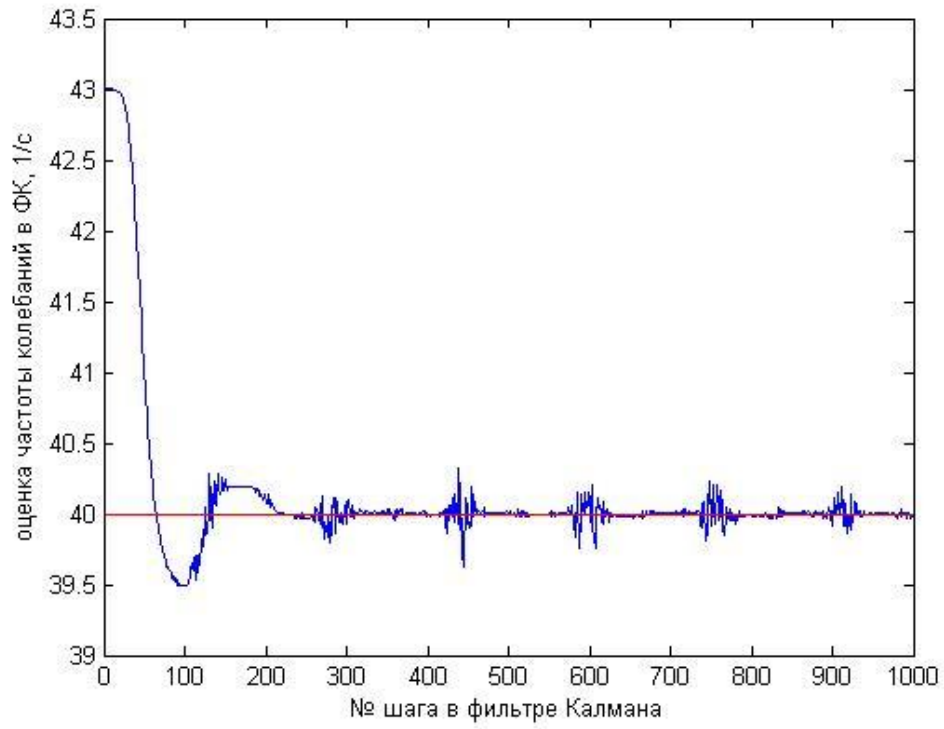


Рисунок 3.2. Частота колебаний в модели фильтра Калмана

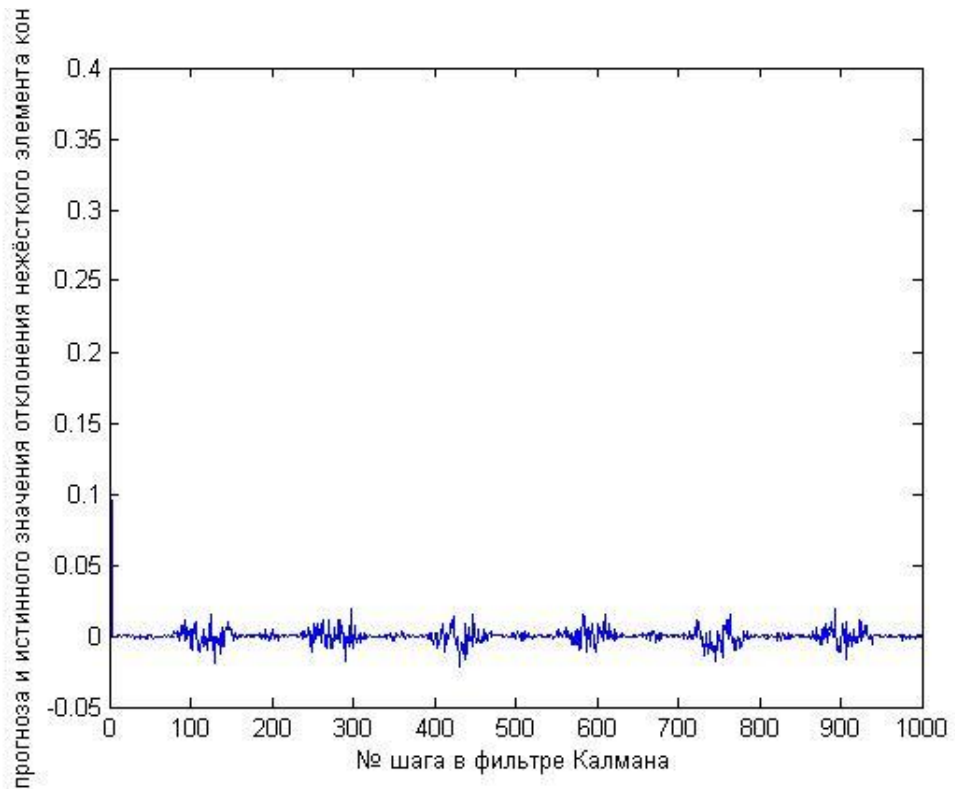


Рисунок 3.3. Ошибка определения движения



Сходимость же Фильтра Калмана по второй компоненте фазового вектора – достигает своего стабильного значения 1 – 1,2 см/с за 120-150 шагов алгоритма:

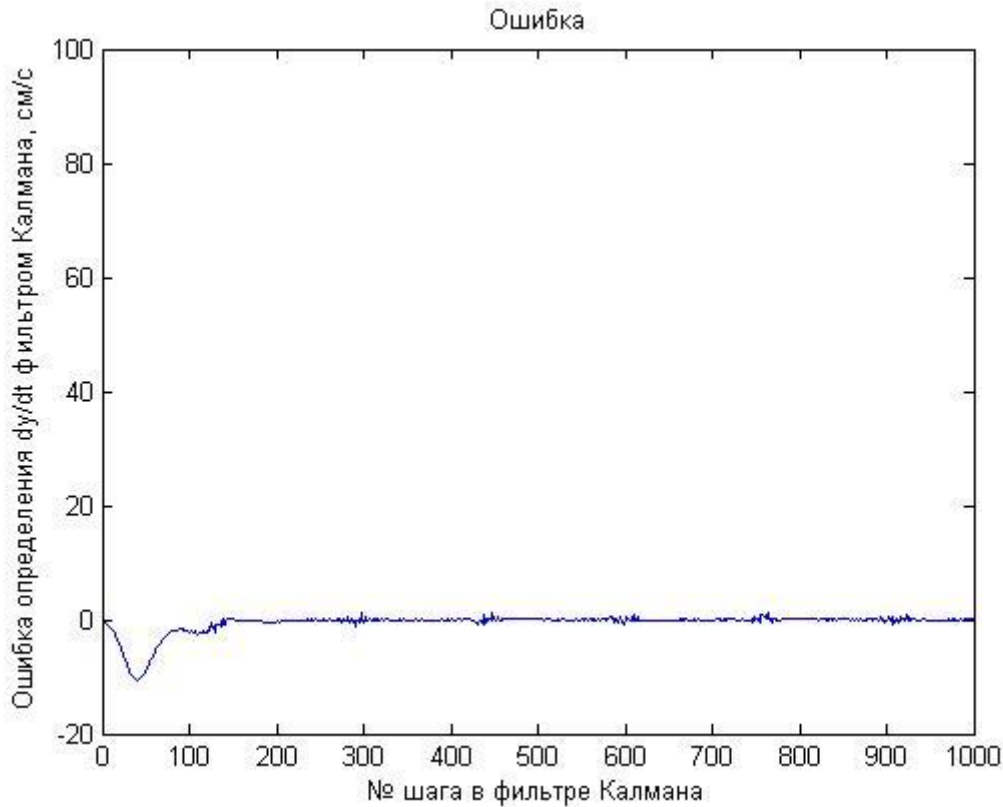


Рисунок 3.4. Ошибка определения скорости

С другой стороны, приближенная к реальной модель, в которой ошибка измерения составляет 5%, даёт гораздо более низкий порядок аппроксимации, связанный с неточностью уравнений движения и относительно большей ковариационной матрицей системы при добавлении в систему случайных возмущений, имеющих нормальное распределение. В данной модели отклонения составляют

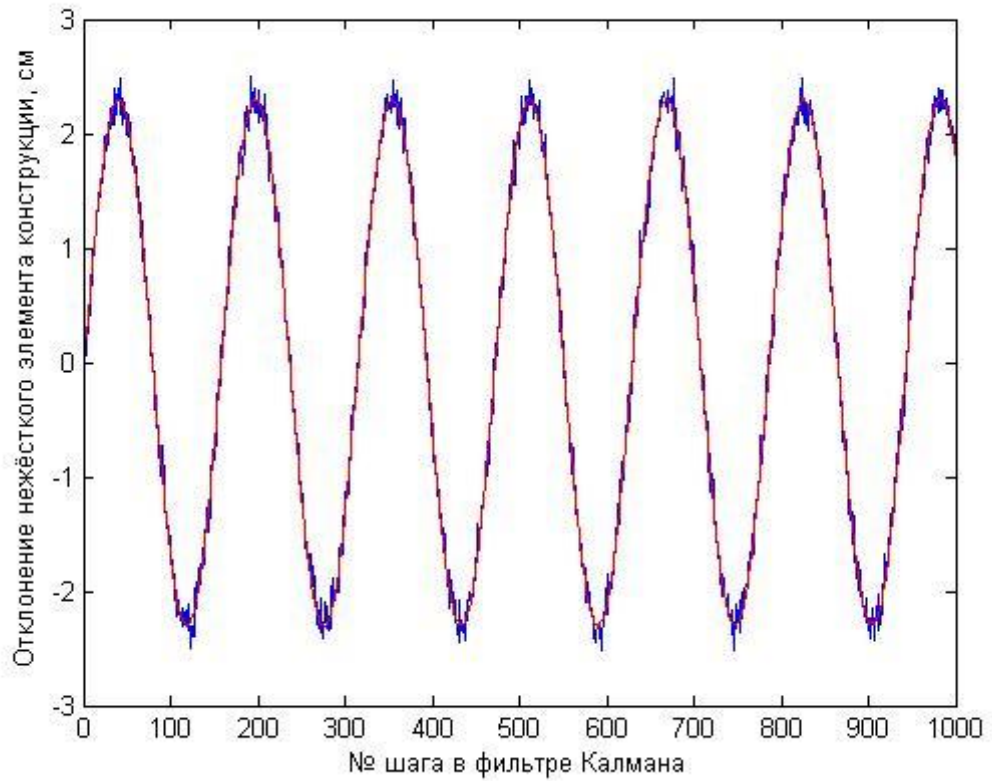


Рисунок 3.5. отклонение результатов, прогнозируемых фильтром Калмана с реальными данными

Приведём результаты обработки видеоизображения для колебаний стержня, полученных при проведении эксперимента: по оси  $x$  присутствовали лишь незначительные осциллирующие колебания: по оси же  $y$ , как и предполагалось, были получены слаботухающие периодические колебания.

## 4. Описание экспериментов

В ходе выполнения работы была проведена серия экспериментов, с целью съёмки колебаний выбранной точки на гнущемся стержне, прикреплённому к модели КА. Описание макетов с фотоснимками можно также найти в разделе «Постановка задачи и системы координат-определение положения выбранной точки нежёсткого элемента по её видеоизображению»

Главной задачей при установке и составлении макета являлось уменьшение погрешности измерений путём правильной установки стержня и камеры. Камеру следовало устанавливать таким образом, чтобы начало визуальной системы координат располагалось как можно ближе к той части стержня, где нежёсткий элемент крепился к макету, а главная оптическая ось была бы параллельна стержню в положении покоя. При данном выборе положения камеры большая часть кривой, покрываемой колеблющемся концом стержня попадает в объектив, чего также следует добиваться выбором оптимальной амплитуды колебаний.

Следующая задача состояла в определении колебания искомой точки – конца стержня по фотоснимку. Ввиду разнообразия цветовой гаммы, так или иначе возникающего, даже при съёмке на монотонном светлом фоне, первоочередным шагом к решению поставленного вопроса был перевод камеры в чёрно-белый режим. Однако одного этого было недостаточно: на полученных снимках слишком явно виднелись чёрные помехи, некоторые имели достаточно большие размеры, так что задача по отбору лишь центра кольца со вложенным круглым пятном облегчалась лишь немного, оставаясь, фактически нерешаемой. Чтобы

всё же убрать нежелательные помехи, приводящие лишь к незначительному продвижению в решении поставленной задачи, необходимо было найти способ различать оттенки чёрного цвета в исходном, цветном снимке. С этой целью сначала стоит сделать снимок максимально контрастным, и только после этого перевести его в чёрно-белый режим.

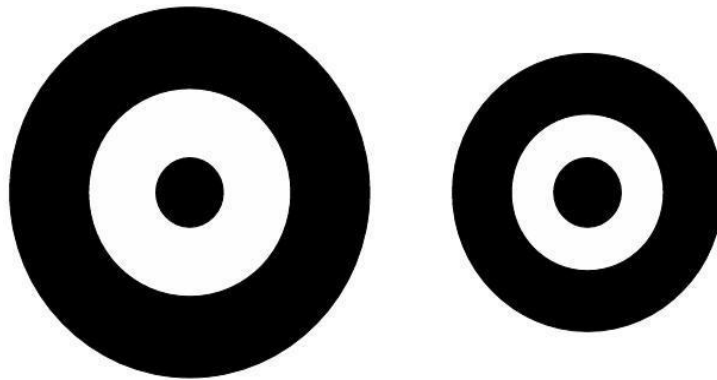


Рисунок 4.1. Метка на конце стержня в виде окружности и концентрического кольцом

Отведение нежёстких элементов от положения равновесия с целью прогнозирования их положения осуществлялось вручную. Начальное отклонение выбиралось таким образом, чтобы, во-первых, уменьшить биения в системе и наиболее соответствовать реальной модели, имеющей место на космических аппаратах с нежёсткими элементами панели, а, с другой стороны, чтобы иметь возможность наиболее точно определять конец стержня. Начальное отклонение выбиралось не слишком большим, чтобы удовлетворить первому условию, но и не слишком малым – чтобы удовлетворять второму.

Ниже приведён фотоснимок отклонённого стержня, из которого можно судить об оптимальном начальном отклонении последнего.



Рисунок 4.2. Макет с отклонённым от положения равновесия нежёстким элементом.

Колебания по вертикали:

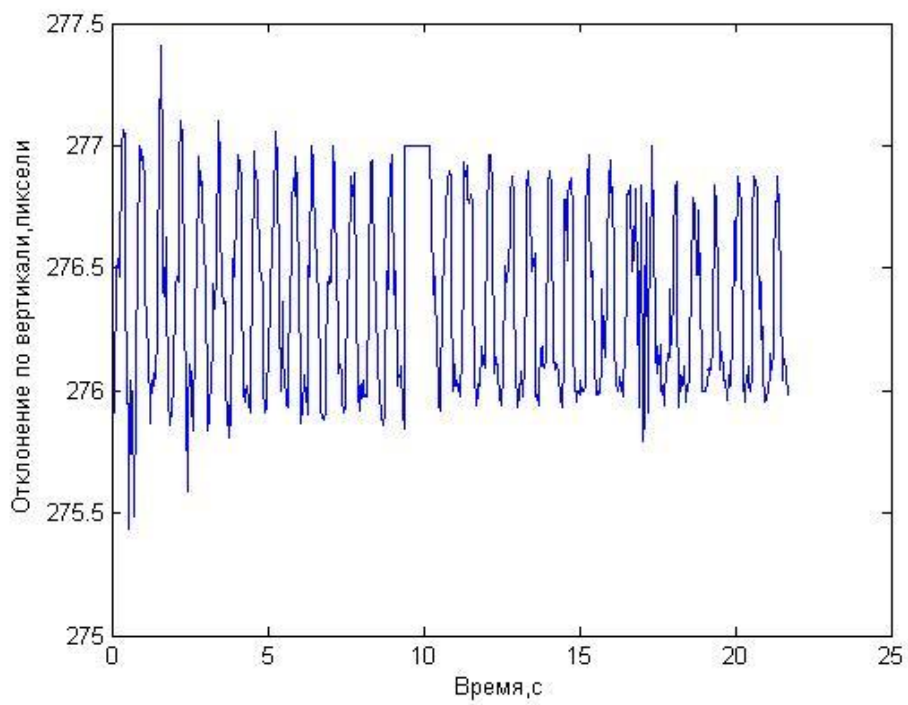


Рисунок 4.3. Измерения отклонения метки

Колебания по горизонтали:

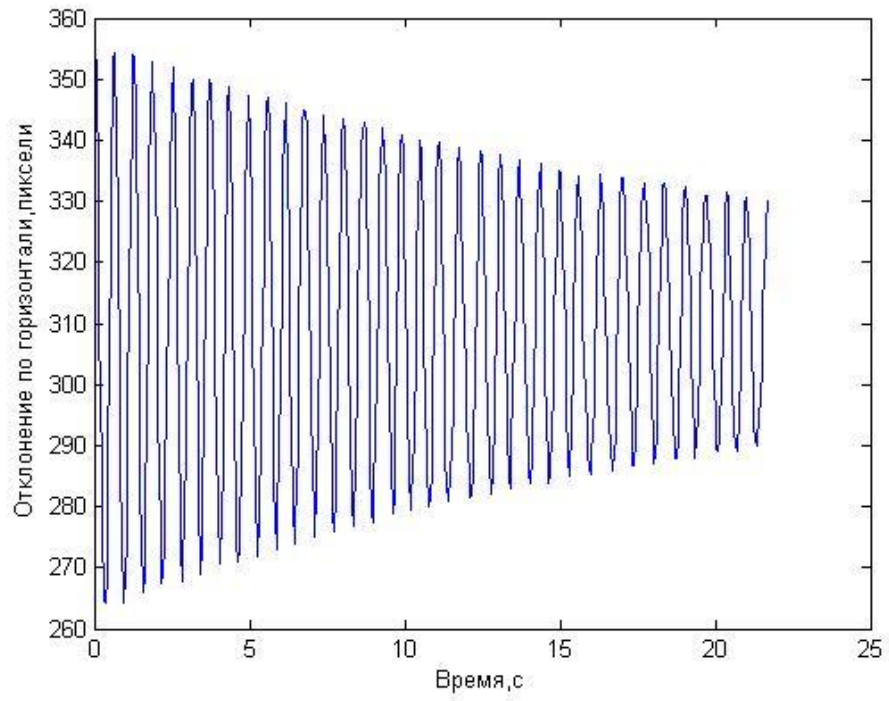


Рисунок 4.4. Измерения отклонения метки

## Заключение

В работе решена задача определения слабозатухающих движений нежёсткого элемента конструкции макета системы управления, а также определения самой низкой собственной частоты колебаний. Для решения задачи разработан и применён итерационный алгоритм на основе расширенного фильтра Калмана. Алгоритм протестирован с использованием численного моделирования, а также применен для определения колебательного движения нежесткого элемента конструкции макета системы управления микроспутником. Обработано видео движения колебательного элемента с закрепленной реперной контрастной точкой. Точность определения движения составила порядка 1 мм для отклонения от положения равновесия, а точность определения собственной частоты - порядка  $0.2 \text{ с}^{-1}$ . Полученная точность определения движения и собственной частоты позволяет использовать эти оценки как входные данные для системы демпфирования колебаний нежестких элементов конструкции.

## Литература

- 1) Д.С. Иванов, М.Ю. Овчинников, С.С. Ткачев Использование фильтра Калмана в задаче определения ориентации тела, подвешенного на струне: Руководство по лабораторной работе— М.: МФТИ, 2008
- 2) Коптев М.Д., Прошунин Н.Н., Иванов Д. Определение движения макетов системы управления микроспутников на аэродинамическом столе с использованием видеокамеры
- 3) Д.С. Иванов, С.А. Шестаков, М.Ю. Овчинников, А.В. Овчинников Методы идентификации динамических параметров и оценки колебаний КА с нежесткими элементами конструкции
- 4) Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю., Сакович М.А. Определение относительного движения спутников при их разделении по результатам обработки видеоизображения
- 5) Р. Хартсхорн. Основы проективной геометрии. – М. Мир, 1970
- 6) Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Алгоритм оценки параметров ориентации малого космического аппарата с использованием фильтра Калмана