**Московский физико-технический институт (ГУ)**
**Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН**

## Выпускная бакалаврская квалификационная работа

# Исследование и сравнительный анализ алгоритмов управления движением группы спутников с помощью аэродинамической силы

**Кушнирук Максим Сергеевич**

**Научный руководитель**
**Мирер С.А., д.ф.-м.н., проф.**

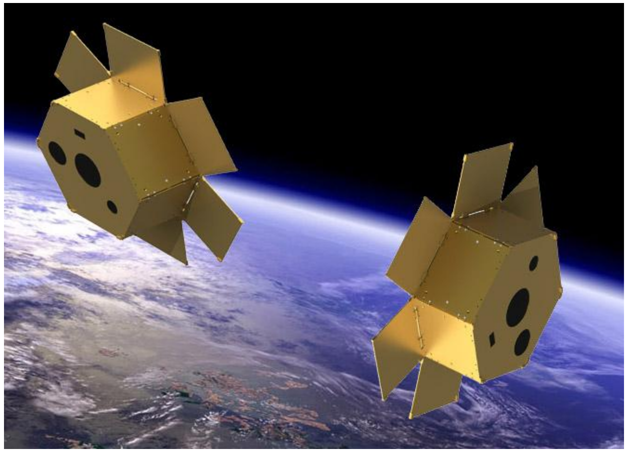
**Научный консультант**
**Иванов Д.С., к.ф.-м.н.**

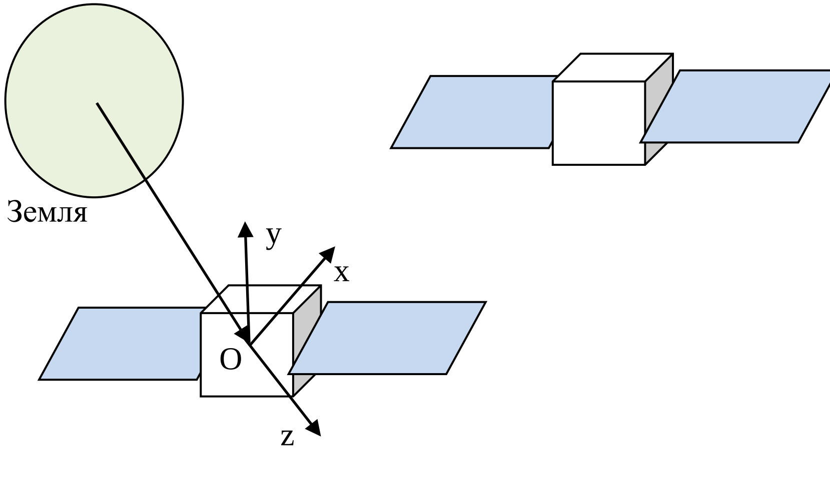
# Содержание

- Постановка задачи
- Управление с помощью линейно-квадратичного регулятора
- Управление с помощью функции Ляпунова
- Быстродействие алгоритмов
- Поддержание относительной траектории

# Постановка задачи

- Рассматривается два спутника, летящих в группе, имеющих форму, близкую к плоской
- За счет поворота относительно центра масс изменяется площадь сечения аппарата относительно набегающего потока
- Возникает разница между действующими на два спутника силами аэродинамического сопротивления
- Необходимо разработать и исследовать алгоритмы управления относительным движением с помощью аэродинамической силы сопротивления






Система координат

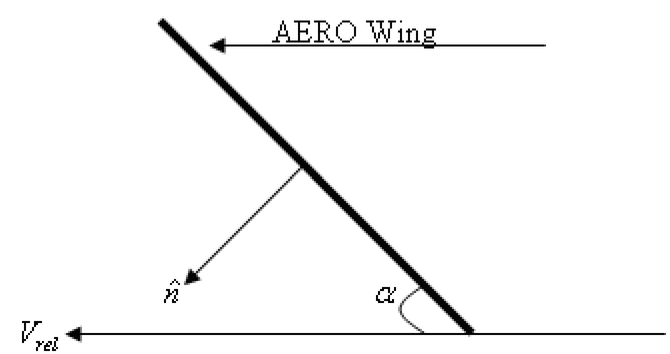
# Уравнения относительного движения

Уравнения Хилла (линеаризованные уравнения в проекциях на орбитальную систему координат) и их решения при $f_x = 0$:

$$\begin{cases} \ddot{z} = 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2, \\ \ddot{x} = -2\dot{z}\omega + f_x, \\ \ddot{y} = -y\omega^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} z(t) = 2c_1 + c_2 \sin\omega t + c_3 \cos\omega t, \\ x(t) = -3c_1\omega t + 2c_2 \cos\omega t - 2c_3 \sin\omega t + c_4, \\ y(t) = c_5 \sin\omega t + c_6 \cos\omega t, \end{cases}$$

$f_x$ – аэродинамическая сила

$$f_x = -\frac{1}{2}\rho C V^2 S\left(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right)$$



# Уравнения относительного движения

Также уравнения Хилла можно записать в нормальном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u,$$

где $u = (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2),$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathrm{B}_y \end{bmatrix}, \mathrm{B}_y = -\frac{1}{2}\rho \mathrm{C}\mathrm{V}^2\mathrm{S}$$

Движение по координате $y$ неуправляемо с помощью аэродинамической силы.

# Линейно-квадратичный регулятор

Рассмотрим обратную связь вида

$$\mathbf{u} = \mathrm{K}\mathbf{e},$$

где $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d$

обеспечивающую минимизацию функционала

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{e}^T \mathrm{Q}\mathbf{e} + \mathbf{u}^T \mathrm{R}\mathbf{u})\,dt,$$

где $\mathrm{Q},\ \mathrm{R}$ – заданные положительно определенные матрицы.

Для этого функционала управление

$$\mathbf{u} = -\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^T \mathrm{P}\mathbf{e},$$

где матрица P есть решение уравнения Риккати

$$\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{B}\mathrm{R}^{-1}\mathrm{B}^T\mathrm{P} + \mathrm{P}\mathrm{A} + \mathrm{A}^T\mathrm{P} = 0.$$

# Управление на основе функции Ляпунова

Введем функцию Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}S^2, \text{ где } S = \dot{e}_x + K_1 e_z + K_2 \dot{e}_z + K_3 e_x.$$

Диффиринцируем $V$

$$\dot{V} = S\dot{S} < 0, \text{ тогда требуем } \dot{S} = -n\,\mathrm{sign}(S), \quad \text{где } n = const.$$

Учитывая, что

$$\ddot{e}_x = [\ddot{x} - \ddot{x}_d], \ddot{x} = -2\dot{z}\omega + u,$$

можно выразить управление

$$u = -K_1\dot{e}_z - K_2\ddot{e}_z - K_3\dot{e}_x - nsign(S) + 2\dot{z}\omega + \ddot{x}_d.$$

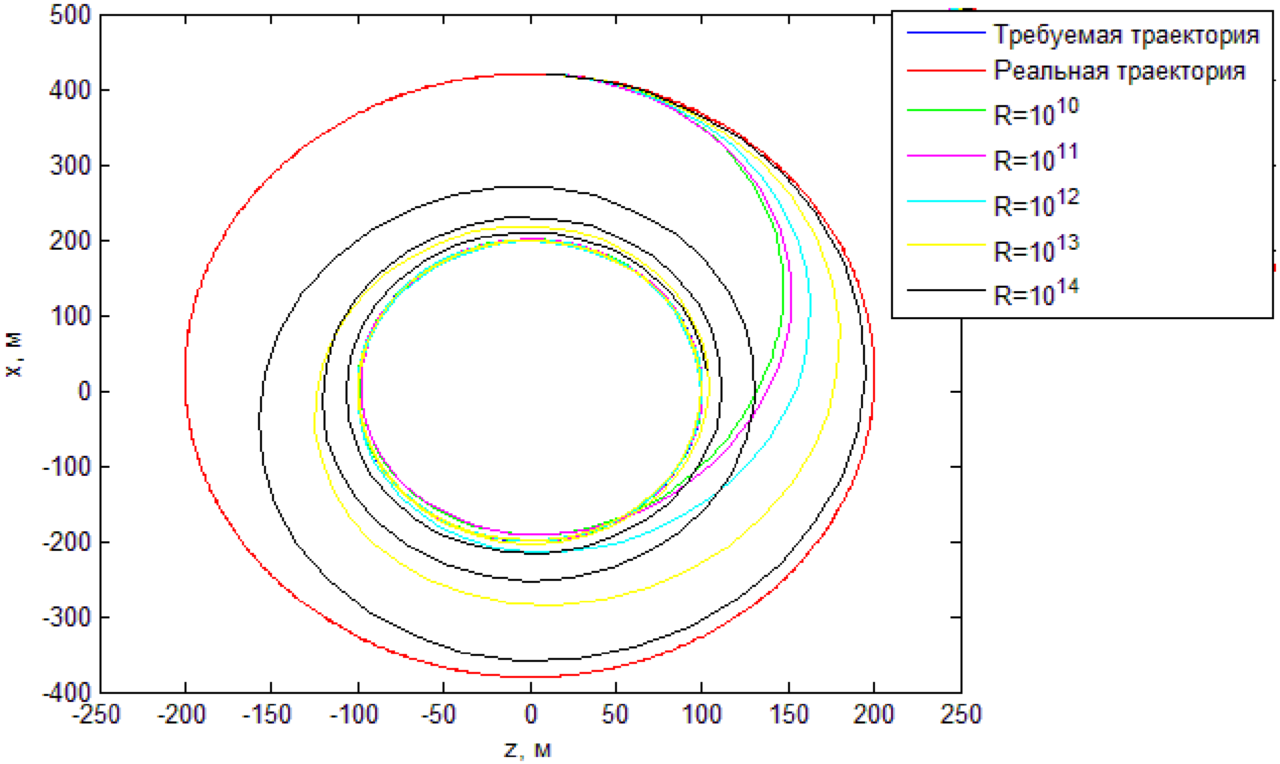
# Быстродействие алгоритмов

- Уравнение ошибок в дискретном виде

$$\mathbf{e}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{e}_i} \right) \mathbf{e}_i,$$ где $\mathbf{e}_i$ – вектор ошибок траектории.

- Для исследования быстродействия алгоритма нужно найти собственные числа $\lambda$ матрицы перехода $\left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{e}_i} \right)$.
- Быстродействие алгоритма определяется как максимальное по модулю собственное число.
- Быстродействие характеризует скорость сходимости.
- Матрица перехода $\left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{e}_i} \right)$ рассчитывается численно.

# Пример относительной траектории:
## управление с помощью линейно-квадратического регулятора

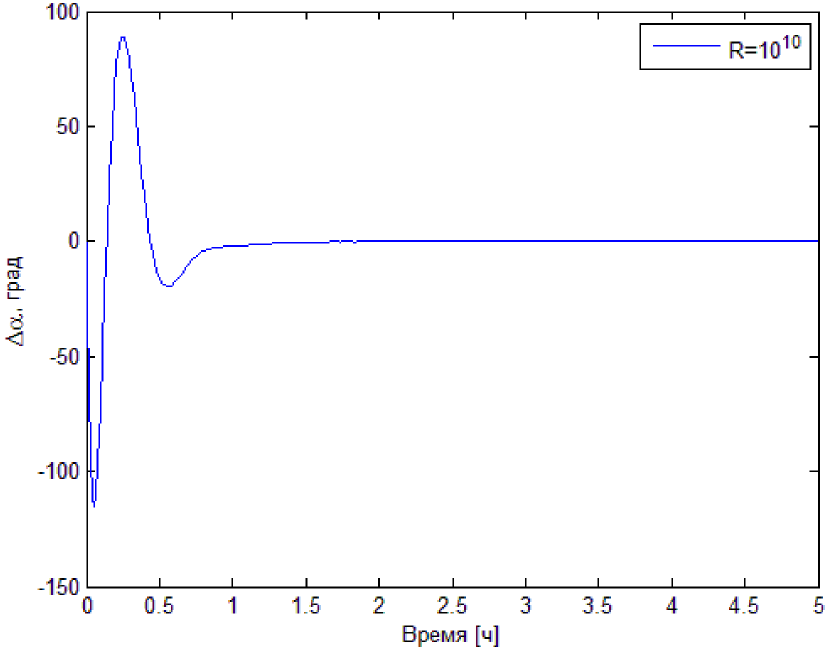


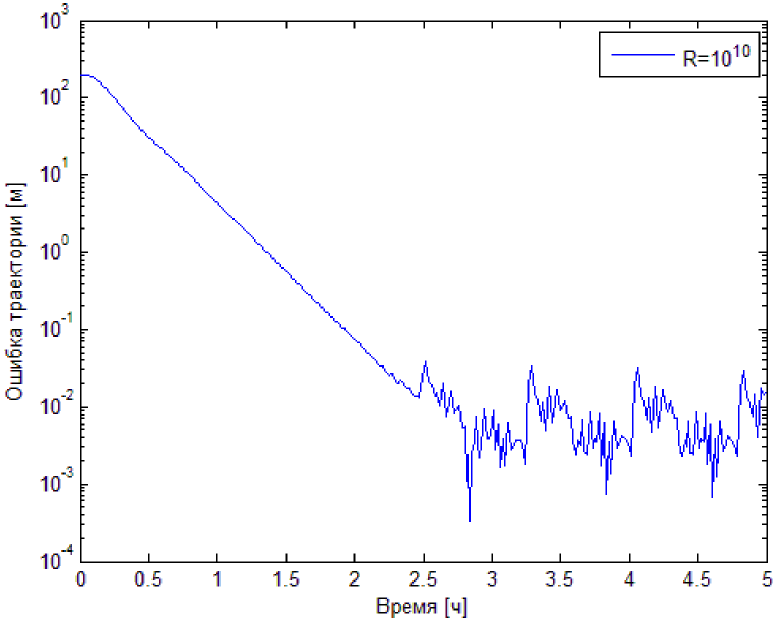

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_y \end{pmatrix}$$

Пример траектории в плоскости при управлении на основе ЛКР при разных значениях весового коэффициента

# Пример относительной траектории:
## управление с помощью линейно-квадратического регулятора

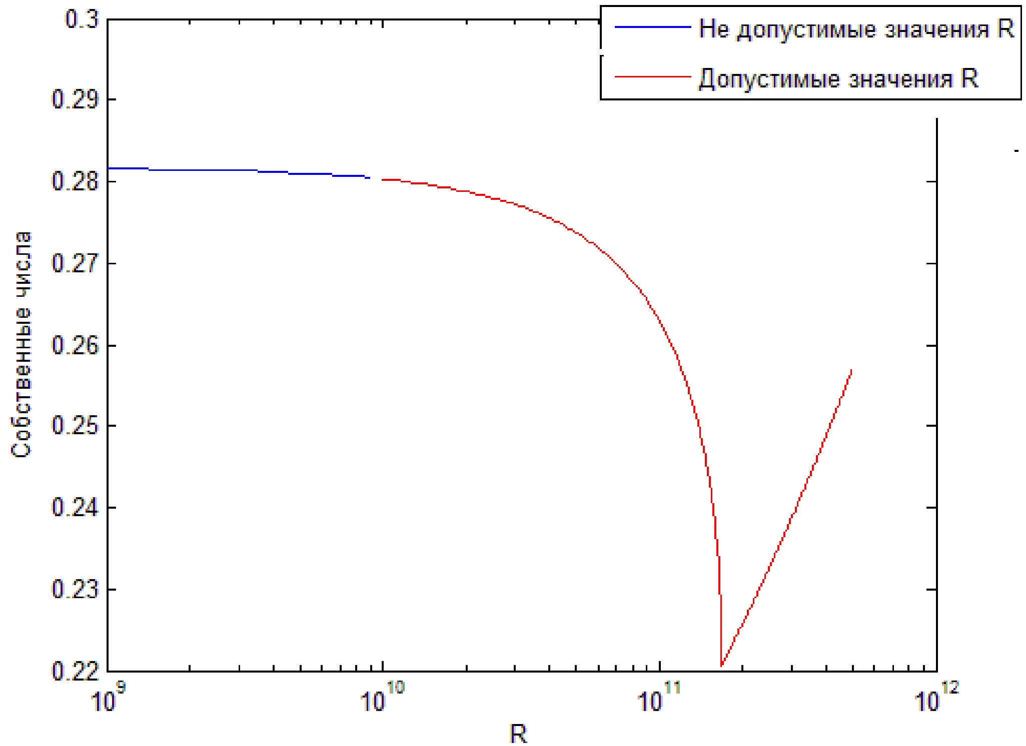



Зависимость разности углов от времени при $R = 10^{10}$.

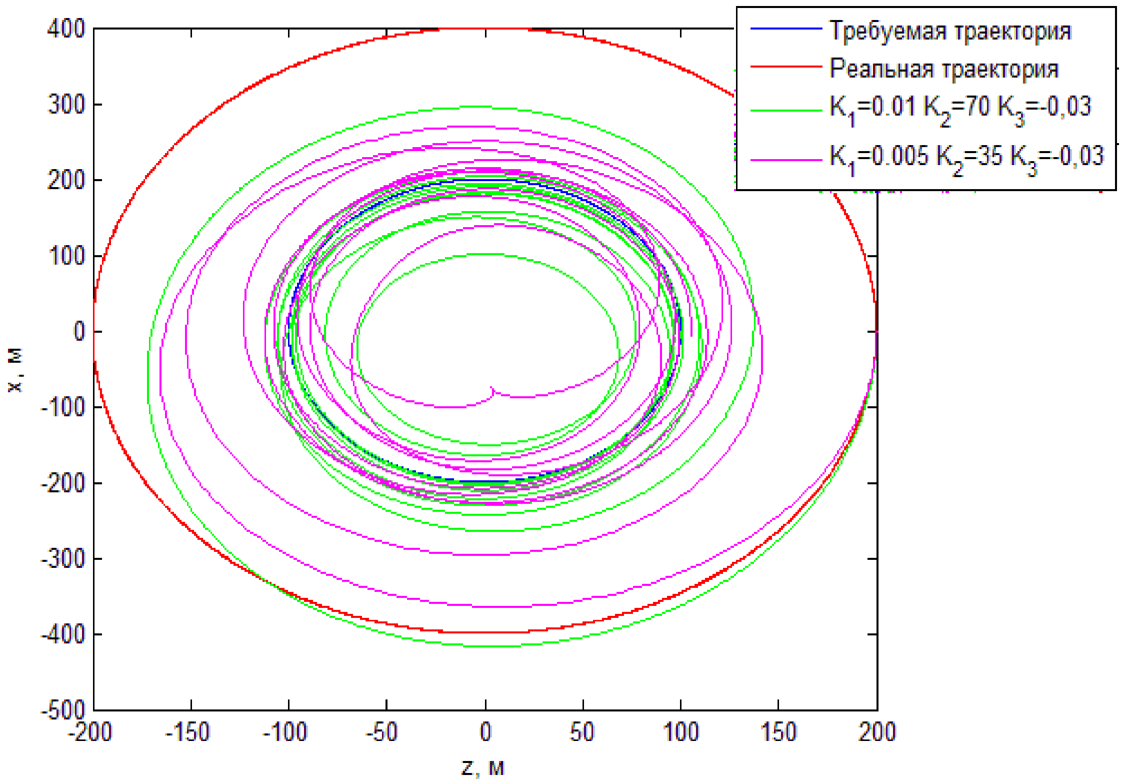
Зависимость ошибки траектории от времени при $R=10^{10}$

# Исследование быстродействия в зависимости от R




Зависимость $\max_i(\lambda_i)$ от весового коэффицента R

# Пример относительной траектории:
## управление с помощью функции Ляпунова



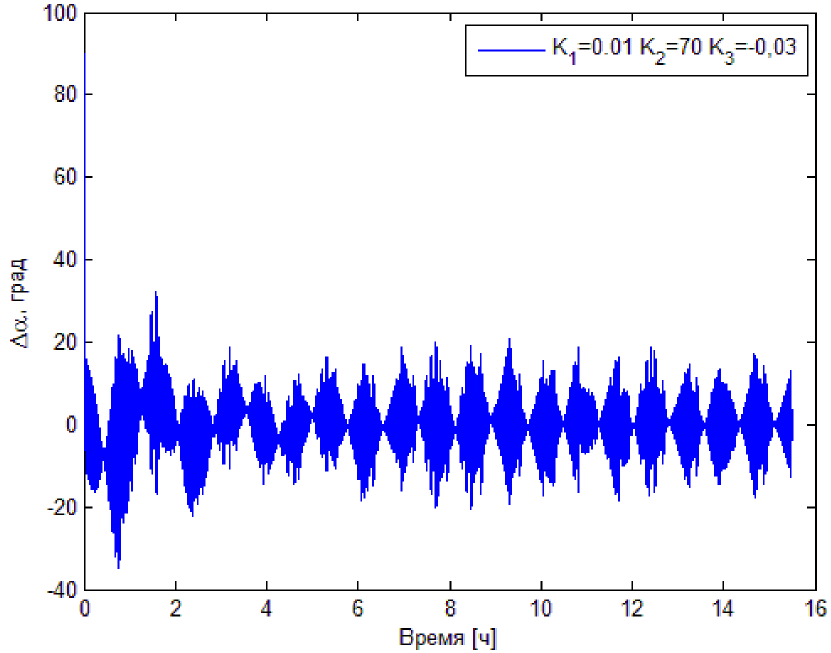

$$K_3 = -0.2,$$

$$n = 10^{-5}$$

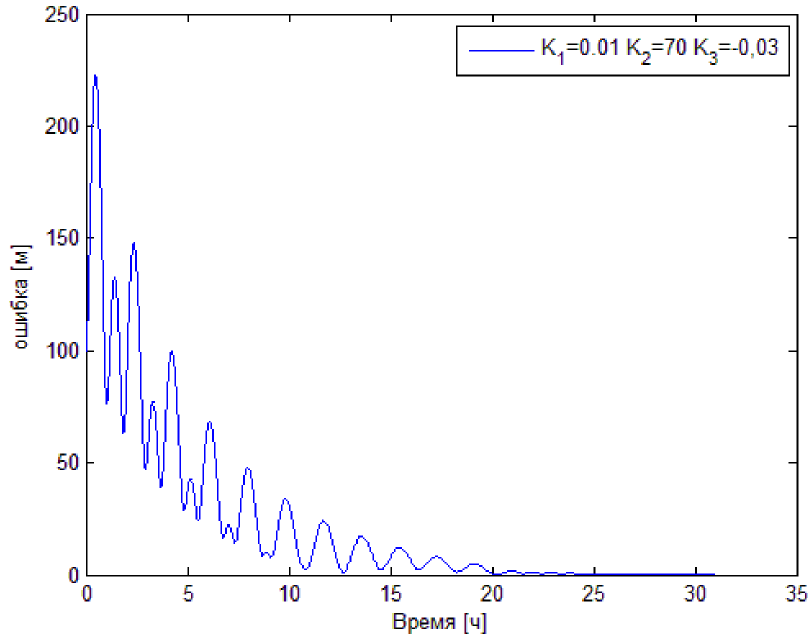
Пример траектории в плоскости  под действием управления на основе функции Ляпунова при разных значениях весовых коэффициентов

# Пример относительной траектории:

## управление с помощью функции Ляпунова

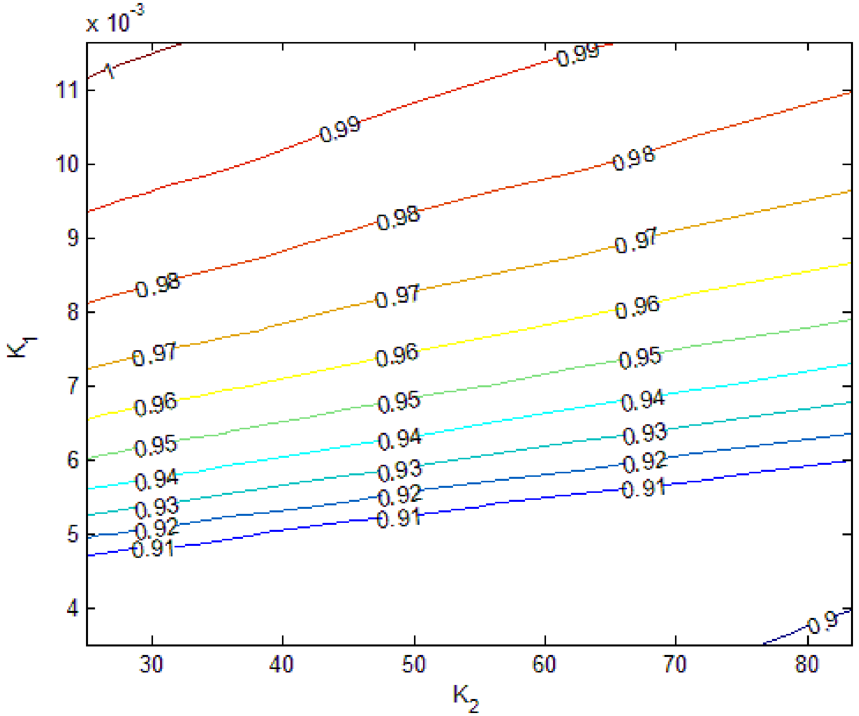



Зависимость разности углов от времени при при $R=10^{10}$

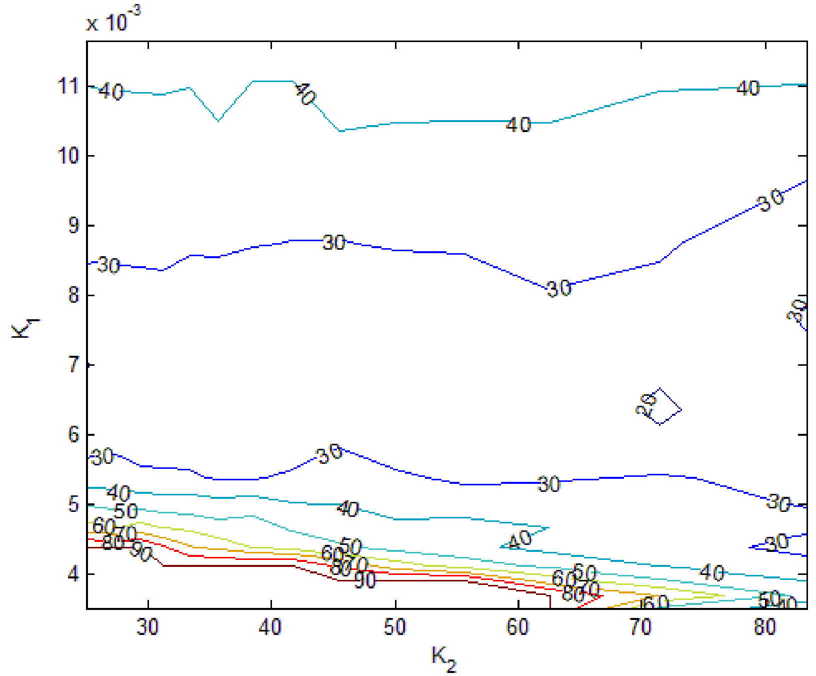



Зависимость ошибки траектории от времени при $R=10^{10}$

# Быстродействие алгоритмов в зависимости от $K_1$ и $K_2$ для управления с помощью функции Ляпунова

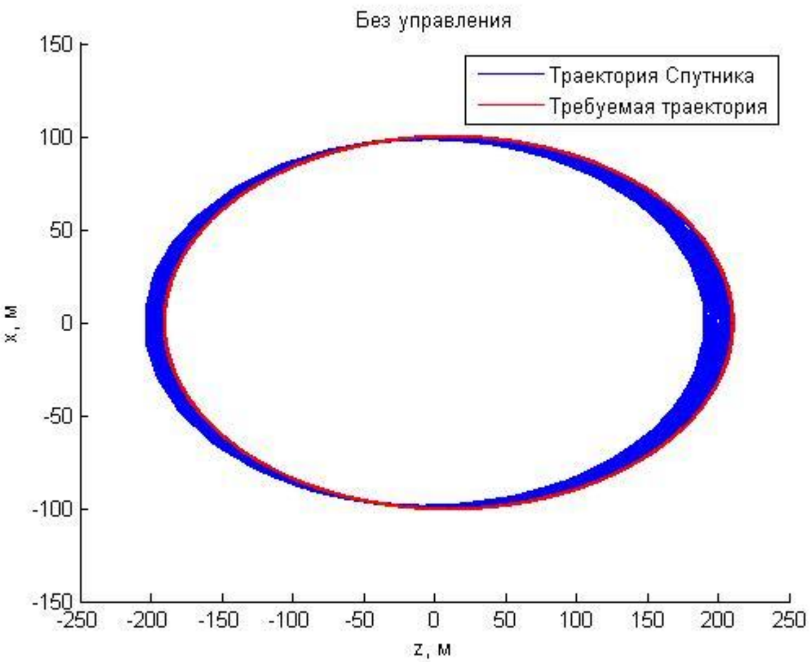



Изолинии степени устойчивости при различных коэффициентах

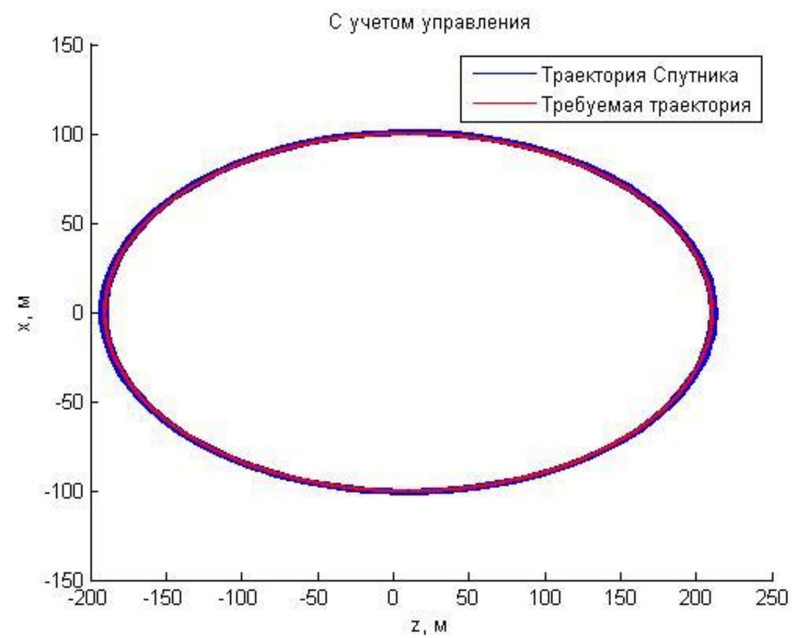



Изолинии максимальной разности углов при различных коэффициентах

# Поддержание относительной траектории

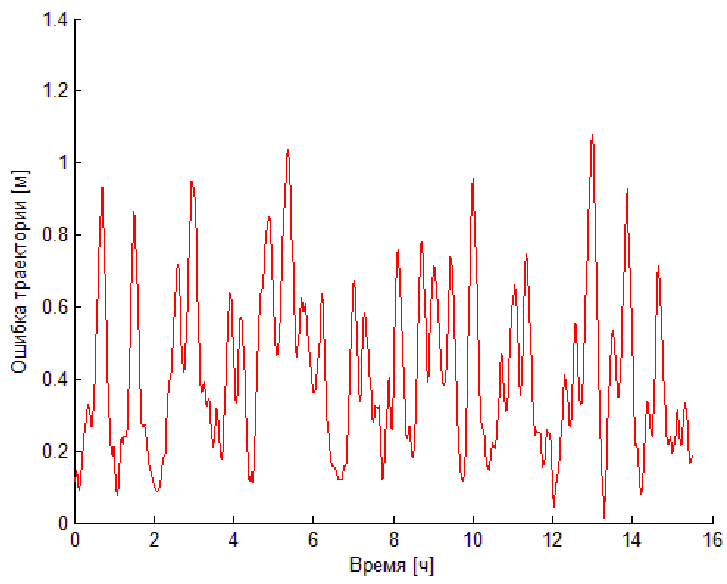


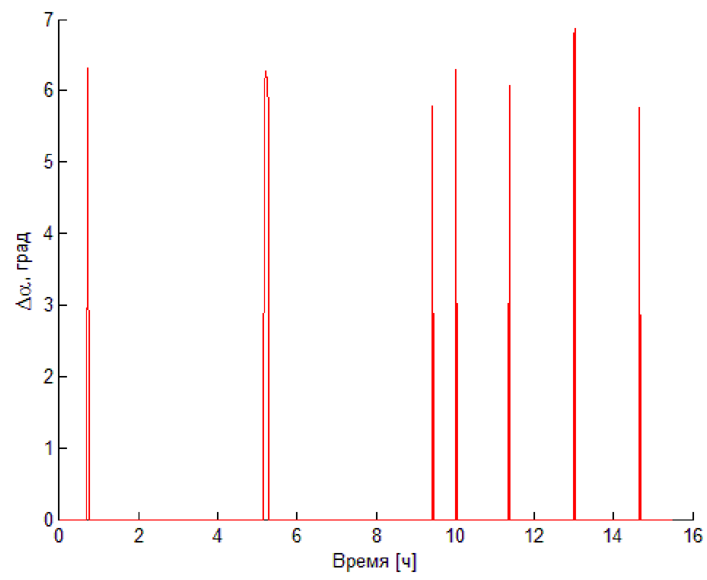

Пример траектории в плоскости без управления




Пример поддержания траектории в плоскости при управлении на основе ЛКР

# Поддержание относительной траектории при управлении на основе ЛКР

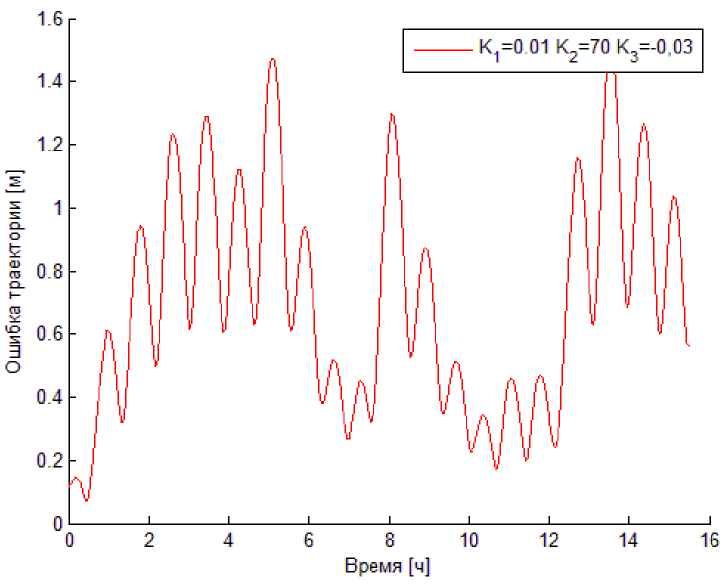


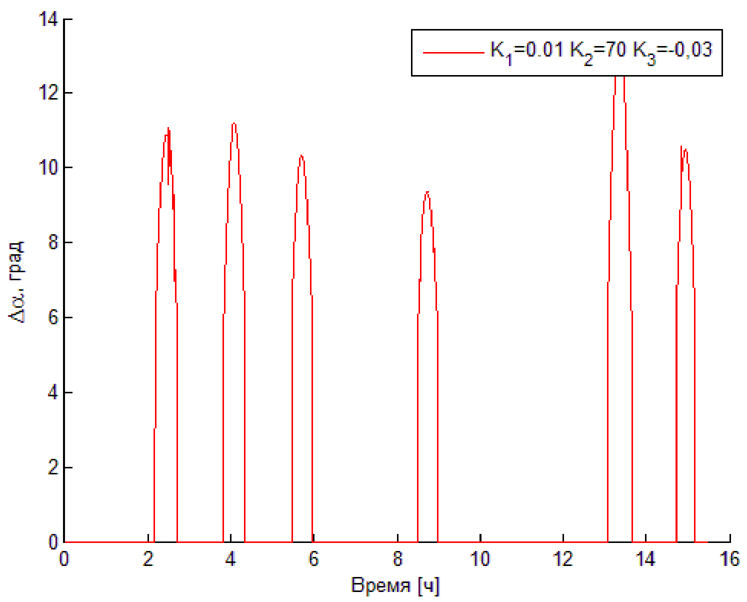

Зависимость разности углов под действием ЛКР от времени

Зависимость ошибки траектории под действием ЛКР от времени

# Поддержание относительной траектории при управлении на основе функции Ляпунова




Зависимость ошибки траектории под действием управлением функции Ляпунова  от времени




Зависимость разности углов под действием управлением функции Ляпунова от времени

# Заключение

- В настоящей работе для решения задачи управления относительного движения применены два алгоритма: линейно-квадратичный регулятор и управление на основе функции Ляпунова.
- Найдено критическое значение для весового коэффициента для ЛКР.
- Для конкретного маневра относительного движения исследовано быстродействие алгоритмов.
- В дальнейшем планируется исследовать точность поддержания заданного относительного движения с использованием этих алгоритмов с учетом неточности исполнения управляющих команд.

Спасибо за внимание!