

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**  
(государственный университет)  
**ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
(Специализация «Управление динамическими системами»)

**ИССЛЕДОВАНИЕ И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ**  
**УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ ГРУППЫ СПУТНИКОВ**  
**С ПОМОЩЬЮ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИЛЫ**

**Выпускная бакалаврская квалификационная работа**  
**студента 072 группы**  
**Кушнирука Максима Сергеевича**

**Научный руководитель**  
**Мирер С.А., д.ф.-м.н., проф.**

**Научный консультант**  
**Иванов Д.С., к.ф.-м.н.**

**г. Москва**  
**2014**

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ .....	6
1.1 Уравнения движения .....	6
1.2 Модель аэродинамической силы .....	7
1.3 Исследование быстродействия .....	8
2 АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ .....	10
2.1 Задача оптимального управления .....	10
2.2 Управление на основе функции Ляпунова .....	13
3 ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ И ИХ СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ .....	15
3.1 Параметры моделирования .....	15
3.2 Исследование быстродействия алгоритмов .....	15
3.2.1 Линейно-квадратический регулятор .....	15
3.2.2 Функция Ляпунова .....	19
4 УЧЁТ ВЛИЯНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ .....	24
4.1 Уравнения возмущенного движения .....	24
4.2 Поддержание относительной траектории .....	25
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	29
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	30

## ВВЕДЕНИЕ

Групповой полет – формация спутников, движущихся по орбите на небольшом удалении (от нескольких метров до нескольких километров) друг от друга и решающих единую задачу – расширяет возможности наблюдений, решения прикладных задач в космосе. Основными его преимуществами является способность одновременного выполнения множества экспериментов и повышенная работоспособность: неисправность одного из спутников не приводит к утрате работоспособности всей группы. Однако, для проведения исследований требуется возможность управления относительным движением спутников в группе. В связи с увеличением роли малых спутников, имеющих ограничения по массе, запасу топлива и энергетике на борту, наибольший интерес представляют алгоритмы управления относительным движением, не требующие расхода рабочего тела. Существуют методы управления, основанные на магнитных [1,2] и электростатических силах [3–5], переброса дополнительного тела между спутниками [6]. В настоящей работе исследуется способ управления относительным движением, основанным на использовании аэродинамической силы сопротивления о верхние слои атмосферы.

Рассматривается группа, состоящая из двух спутников на близких низких орбитах Земли. Предполагается, что спутники имеют форму, близкую к плоской. За счет поворота относительно центра масс изменяется площадь сечения аппарата относительно набегающего потока, которая определяет величину аэродинамической силы, действующей на аппараты. Когда спутники имеют различную ориентацию относительно набегающего потока, их эффективные сечения отличаются, то возникает разница между действующими на два спутника силами (Рис. 1).



Рис. 1 Группа спутников OrbComm.

Таким образом, управляя взаимной ориентацией двух аппаратов можно управлять относительным движением их центров масс. Впервые такой подход к управлению был предложен в 1986 году Леонардом [7], в предположении дискретного эффективного сечения спутников, летящих в группе.

Управление групповым полетом с использованием аэродинамической силы сопротивления является довольно популярным и широко исследуется в литературе, хотя было реализовано всего несколько миссий группового полета с таким управлением, таких как группа спутников OrbComm [8], и миссия JC2Sat-FF [9]. Популярность этого метода управления обусловлена упрощенным запуском малых спутников именно на низкие круговые орбиты и представляется наиболее эффективным бестопливным методом управления.

Точность того или иного алгоритма управления зависит от принятой модели относительного движения. В большинстве работ рассматривается наиболее простая модель Хилла–Клохесси–Уилтшира [10], [11], которая получена при линеаризации кеплерового движения двух близколетящих спутников относительно некоторой круговой орбиты. Для эллиптических невозмущенных орбит для описания группового полета используются уравнения Лоудена [12]. При исследовании возмущенного управляемого движения часто используются уравнения Швайгарда-Седвика [13], которые учитывают вторую гармонику при разложении гравитационного потенциала Земли.

Леонард [7] предложил алгоритм управления групповым полетом с помощью аэродинамической силы на основе пропорционально-дифференциального (ПД) регулятора. Пропорционально-дифференциальный (ПД) регулятор [14] формирует управляющий сигнал, являющийся суммой двух слагаемых, один из которых пропорционально ошибкам по координатам, второй- ошибки по скоростям.

В работе [15] предложено релейное управление. Предполагается, что спутник может принимать только два угловых положения: одно положение, в котором на аппарат не действуют силы, и другое обеспечивающие возникновение аэродинамической силы сопротивления. Такое управление проще реализовать с технической точки зрения.

Перец и Белаква [16] разработали алгоритм для движения спутников в нижних слоях атмосферы на функции Ляпунова. Они сравнили работу алгоритма управления при использовании уравнений Картера-Хуми и Клохесси-Уилтшира для поддержания требуемой траектории при возмущении со стороны второй гармоники разложения гравитационного потенциала.

Кумар, Банг и Тахк [17] предложили алгоритм управления движением спутников летящих в группе на основе пропорционально-интерально-дифференциального (ПИД) регулятора. Алгоритм рассчитывает управление, используя текущее состояние одного аппарата в системе координат, связанной со вторым. Для тестирования алгоритма использовался пакет Satellite Tool Kit.

Вышеописанные работы по управлению групповым полетом с помощью аэродинамической силы сопротивления, однако в них не исследовались переходные процессы во время управления, что представляется весьма важным аспектом их применения. Настоящая работа посвящена исследованию различных по построению алгоритмов – линейно-квадратический регулятор и управление на основе функции Ляпунова – с точки зрения зависимости быстродействия системы от параметров алгоритмов, проводится их сравнительный анализ. Во второй части работы рассматривается возмущенное движение группы спутников под воздействием второй гармоники гравитационного потенциала Земли, исследуется точность поддержания заданного движения с использованием двух алгоритмов.

# 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

## 1.1 Уравнения движения

Рассмотрим два спутника на близких орбитах. Пусть один из спутников движется по круговой околоземной орбите радиуса  $r_0$  и угловой скоростью  $\omega = \sqrt{\mu/r_0^3}$ , где  $\mu$  гравитационный параметр Земли. Рассмотрим систему координат, связанную с центром масс этого спутника: ось  $Oz$  направлена от центра Земли, ось  $Oy$  направлена по нормали к плоскости орбиты, ось  $Ox$  дополняет тройку до правой (Рис.2).

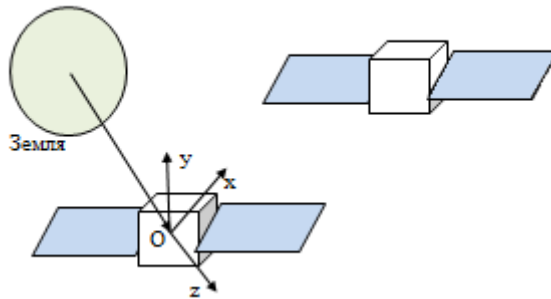


Рис.2 Система координат

Система уравнений, описывающая относительное движение второго спутника в системе координат, связанной с первым, задается системой уравнений Хилла–Клохесси–Уилтшира, которая соответствует движению двух спутников, один из которых движется по круговой орбите, а второй по близкой около круговой в центральном поле тяготения Земли [11], [13]. Система уравнений описывающая движение второго спутника имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot{z} = 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2, \\ \ddot{x} = -2\dot{z}\omega, \\ \ddot{y} = -y\omega^2, \end{cases}$$

Решение системы:

$$\begin{cases} z(t) = 2c_1 + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t, \\ x(t) = -3c_1 \omega t + 2c_2 \cos \omega t - 2c_3 \sin \omega t + c_4, \\ y(t) = c_5 \sin \omega t + c_6 \cos \omega t, \end{cases} \quad (1)$$

где константы интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$  выражаются через начальные условия

$x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0), \dot{x}_0 = \dot{x}(0), \dot{y}_0 = \dot{y}(0), \dot{z}_0 = \dot{z}(0)$ , следующим образом:

$$c_1 = 2z_0 + \frac{\dot{x}_0}{\dot{\theta}}, c_2 = \frac{\dot{z}_0}{\dot{\theta}}, c_3 = -3z_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\dot{\theta}},$$

$$c_4 = x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\dot{\theta}}, c_5 = \frac{\dot{y}_0}{\dot{\theta}}, c_6 = y_0,$$

Как видно, относительная траектория бросаемого спутника замкнута тогда и только тогда, когда  $c_1 = 0$ .

Заметим, что в системе уравнений третье уравнение не зависит от решения первых двух, поэтому траектория по оси  $Oy$  не рассматривается.

## 1.2 Модель аэродинамической силы

Рассмотрим управляемое движение группы спутников. Будем предполагать, что оба спутника имеют форму, близкую к плоской, и на оба спутника действуют аэродинамическая сила сопротивления, которая зависит от угла между нормалью к плоскости и направлением набегающего потока. Запишем уравнения движения с учетом аэродинамической силы:

$$\begin{cases} \ddot{z} = 2\dot{x}\omega + 3z\omega^2, \\ \ddot{x} = -2\dot{z}\omega + f_x, \\ \ddot{y} = -y\omega^2, \end{cases} \quad (2)$$

где  $f_x$  — это аэродинамическая сила сопротивления, которую можно представить в следующем виде

$$f_x = \left(-\frac{1}{2}\rho CV^2 S \sin \alpha_1 - \left(-\frac{1}{2}\rho CV^2 S \sin \alpha_2\right)\right),$$

где  $\rho$  — местная плотность атмосферы в текущей точке,  $C$  — коэффициент сопротивления,  $V$  — скорость спутника относительно набегающего потока,  $S$  — наибольшая поперечная площадь сечения спутника,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — углы между направлением набегающего потока и нормалью к плоскостям спутников. Заметим, что эти углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  всегда неотрицательны и лежат в пределах  $[0; \pi/2]$ , отрицательные углы приводят к отрицательной эффективной площади  $S \sin \alpha$ , что противоречит физике рассматриваемой силы. Если же угол  $\alpha > \pi/2$ , следует рассматривать нормальный вектор к противоположной поверхности. Будем рассматривать настолько близкотящие спутники, что плотность атмосферы для в точках их полета можно считать одинаковой, не

изменяющейся со временем, так как спутники летят на околокруговой орбите. Коэффициент сопротивления  $C$  также предполагается для двух спутников одинаковым. Если углы достаточно малы, можно пользоваться приближенной формулой:

$$f_x = -\frac{1}{2} \rho C V^2 S (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \approx -\frac{1}{2} \rho C V^2 S \delta \alpha.$$

Известно, что уравнения Хилла в плоскости  $Oxz$  можно переписать в виде линейной системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \quad (3)$$

где приняты следующие обозначения.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_x \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$B_x = -\frac{1}{2} \rho C V^2 S, \quad u = \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2.$$

Изменяя разность углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , создается управляющее воздействие, пропорциональное разности синусов этих углов  $\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2$ . Управляющее воздействие рассчитывается на основе принятого алгоритма управления. Однако следует заметить, что разность синусов не может лежать вне интервала  $[-1; 1]$  при условии  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; \pi/2]$ . Это накладывает ограничения на возможное значение управляющего воздействия. Вне интервала  $[-1; 1]$  управление не реализуемо и не имеет физического смысла.

### 1.3 Исследование быстродействия

При исследовании управляемого движения большое внимание всегда уделяется переходным процессам. Наибольший интерес представляет быстродействие алгоритмов, которое определяет время сходимости. Для линейных непрерывных систем быстродействие определяется степенью устойчивости, которая рассчитывается, как самое правое собственное число характеристического уравнения с отрицательной действительной частью. Однако в случае нелинейной системы быстродействие в общем



случае необходимо рассчитывать численно, например, методом Флоке. Рассмотрим его подробнее.

Пусть задача управления сводится к тому, чтобы перейти от текущей траектории в фазовом пространстве к некоторой требуемой траектории. В каждый момент можно вычислить вектор рассогласования, на основе которого строится алгоритм управления и на устранение которого он направлен. Необходимо исследовать поведение вектора рассогласования во времени. Это позволит оценить быстродействие алгоритма.

Уравнение ошибок траектории можно записать в следующем дискретном виде

$$\mathbf{e}_k = \left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{e}_i} \right) \mathbf{e}_i \quad (5)$$

где  $\mathbf{e}$  - вектор ошибок траектории. Матрица перехода от ошибки  $\mathbf{e}_i$  к ошибке  $\mathbf{e}_k$   $\left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{e}_i} \right)$  может рассчитываться численно при моделировании работы алгоритма управления. Потребуем, чтобы ошибка на  $k$ -ом шаге не превышала ошибки на  $i$ -ом. То есть,  $\|\mathbf{e}_k\| < q^{k-i} \|\mathbf{e}_i\|$ , где  $q < 1$ .

Из курса вычислительной математики известно, что итерационный метод (5) сходится к нулевому решению при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда максимальное собственное значение матрицы  $\left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{e}_i} \right)$  по модулю меньше единицы

Таким образом, для исследования быстродействия алгоритма нужно найти собственные значения  $\lambda_i$  матрицы перехода для ошибок траектории  $\left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{e}_i} \right)$ . Быстродействие будет определяться как максимальное по модулю собственное число. Таким образом, проведя серию численных экспериментов с исследуемым алгоритмом управления и рассчитав численно  $\left( \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \mathbf{e}_i} \right)$ , можно найти быстродействие системы. Как правило, алгоритмы управления зависят от ряда параметров, подобрав которые, можно добиться наиболее приемлемых свойств поведения управляемой системы с точки зрения быстродействия. Такое исследование является наиболее интересным, так как позволит необходимым образом настроить алгоритм управления.

## 2 АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим два типа алгоритмов управления групповым полете с использованием аэродинамической силы сопротивления – оптимальное управление на основе линейно-квадратического регулятора (ЛКР) и управление на основе функции Ляпунова. Эти совершенно разные алгоритмы основаны на различных посылах – ЛКР минимизирует функционал, зависящий от ошибок и управления, а функция Ляпунова обеспечивает сходимость ошибки траектории. Представляется интересным исследовать как их быстродействие в зависимости от параметров алгоритмов, так и точность поддержания заданной траектории при воздействии возмущений, а также сравнить эти алгоритмы.

В настоящей главе сформулируем эти алгоритмы управления.

### 2.1 Задача оптимального управления

Рассмотрим линеаризованную систему с управлением вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор ошибок траектории,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – некоторые матрицы  $n \times n$ , характеризующие движение и управление соответственно,  $\mathbf{u}$  – вектор управления.

При синтезе управления дополнительно к задаче обеспечения асимптотической устойчивости тривиального решения системы, замкнутой управлением  $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ , потребуем, чтобы управление также минимизировало некоторую величину, характеризующую качество переходных процессов, называемую далее функционалом и выражаемую, например, в виде:

$$J = \int_0^{\infty} F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt.$$

Указанный функционал может характеризовать, например, расход ракетного топлива при полете ракеты, либо какие-то другие важные величины, «запас» которых весьма ограничен. Рассмотрим обратную связь вида  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$  обеспечивающую минимизацию вдоль любой траектории системы критерий качества

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (7)$$

где  $\mathbf{Q}$  – заданная неотрицательно определенная  $n \times n$ -матрица, а  $\mathbf{R}$  – заданное фиксированное положительно число. Матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  имеют физическую интерпретацию – весовая матрица ошибки по вектору состояния и весовая матрица расхода ресурса управления соответственно. Будем считать, что в произвольный момент времени  $t$  система (6) имеет состояние  $\mathbf{x}$ . Введем функцию Беллмана  $S(\mathbf{x})$ , определяемую следующим образом

$$S(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u}} \int_t^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

Эта функция определяет минимальное значение функционала для системы (7), начиная с момента времени  $t$ . Известно, что функция Беллмана удовлетворяет функциональному уравнению Беллмана:

$$\min_{\mathbf{u}} \left[ \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + (\nabla S)^T (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}) \right] = 0. \quad (8)$$

Запишем необходимое условие минимума по  $\mathbf{u}$  в форме равенства нулю градиента по этой переменной от выражения в квадратных скобках. В результате получим уравнение:

$$2\mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \nabla S = 0.$$

Выразив отсюда  $\mathbf{u}$ , получим

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \nabla S. \quad (9)$$

Подставив (9) в уравнение (8), после приведения подобных членов, получим

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} - \frac{1}{4} (\nabla S)^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T (\nabla S) + (\nabla S)^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) представляет собой уравнение в частных производных относительно неизвестной функции Беллмана  $S(x)$ . Решение этого уравнения будем искать в виде положительно определенной квадратичной формы, определяемой симметрической матрицей  $P$ :

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}.$$

Вычисляя далее градиент, получаем

$$\nabla S = 2P\mathbf{x}. \quad (11)$$

Представляя выражение (11) в (10) и учитывая симметричность матрицы  $P$ , получаем

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - \mathbf{x}^T P B R^{-1} B^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} = 0.$$

Левую часть последнего равенства можно также записать в виде квадратичной формы

$$\mathbf{x}^T [Q - P B R^{-1} B^T P + P A + A^T P] \mathbf{x} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, квадратичная форма (12) обращается в нуль для произвольного вектора  $\mathbf{x}$ . Очевидно, что это возможно лишь в том случае, если матрица, определяющая эту квадратичную форму является нулевой, т.е.

$$Q - P B R^{-1} B^T P + P A + A^T P = 0. \quad (13)$$

С другой стороны, если существует неотрицательно определенная симметрическая матрица  $P$ , являющаяся решением матричного уравнения (13), то существует и соответствующее решение уравнения Беллмана (8). Заметим, что уравнение (13) называется матричным уравнением Риккати. Итак, если указанное выше решение (13) существует, то искомое оптимальное управление имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{x},$$

Таким образом, задав весовые матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$ , можно вычислить уравнение Риккати (13) относительно матрицы  $\mathbf{P}$ , и, зная текущий вектор ошибок траектории  $\mathbf{x}$ , вычислить вектор управления. Однако, параметры алгоритма – матрицы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  – определяют качество переходных процессов. Возникает задача выбора таких параметров, которые бы обеспечили требуемое быстродействие алгоритма при заданных ограничениях управления.

## 2.2 Управление на основе функции Ляпунова

Алгоритмы управления на основе функции Ляпунова как правило задают такое управление, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость уравнения ошибок траектории – с течением времени ошибка асимптотически стремится к нулю. Для этого выбирают некоторую функцию  $V$  от ошибок и управления, которая может принимать значения только одного знака ( $V \geq 0$  или  $V \leq 0$ ) и обращается в ноль только в начале координат. Далее требуют, чтобы производная функции  $\dot{V}$  была знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$ . Из этого условия в силу уравнений движения можно найти такое управление, которое будет обеспечивать асимптотическую устойчивость уравнениям ошибки траектории.

Введем функцию Ляпунова следующего вида

$$V = \frac{1}{2}S^2. \quad (14)$$

Здесь

$$S = \dot{e}_x + K_1 e_z + K_2 \dot{e}_z + K_3 e_x, \quad (15)$$

где  $e_z = [z - z_d]$ ,  $\dot{e}_z = [\dot{z} - \dot{z}_d]$ ,  $e_x = [x - x_d]$ ,  $\dot{e}_x = [\dot{x} - \dot{x}_d]$ , ошибки движения по координатам и скоростям,  $z_d, x_d, \dot{z}_d, \dot{x}_d$  требуемые координаты и скорости по осям  $Oz$  и  $Ox$  соответственно,  $z_d, x_d, \dot{z}_d, \dot{x}_d, z, x, \dot{z}, \dot{x}$  рассчитываются по формулам (1) и (2).  $K_i, i = 1, 2, 3$  константы. Главная идея этого управления заключается в том, что  $S \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow \infty$ . Для

этого требуем, чтобы знак функции  $\dot{V}$  был противоположный  $V$ , то есть  $\dot{V} = S\dot{S} < 0$ . Отсюда получаем, что  $\dot{S} = -n \text{sign}(S)$ , где  $n = \text{const}$

Дифференцируя равенство (15) по времени, получается следующее равенство:

$$\dot{S} = [\ddot{x} - \ddot{x}_d] + K_1 \dot{e}_z + K_2 [2\dot{x}\omega + 3z\omega^2 - \ddot{z}_d] + K_3 \dot{e}_x = -n \text{sign}(S).$$

Учитывая, что  $\ddot{e}_x = [\ddot{x} - \ddot{x}_d]$ ,  $\ddot{x} = -2\dot{z}\omega + u$ , можно выразить управление

$$u = -K_1 \dot{e}_z - K_2 \ddot{e}_z - K_3 \dot{e}_x - n \text{sign}(S) + 2\dot{z}\omega + \ddot{x}_d. \quad (17)$$

Из формулы (17) видно, что управление зависит от трех констант  $K_i, i=1,2,3$ , которые в данном случае являются параметрами алгоритма. Представляется интересным исследовать качество переходных процессов в зависимости от этих параметров.

## 3 ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ И ИХ СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Проведем исследование алгоритмов на основе ЛКР и функции Ляпунова на конкретном примере маневра спутников, летящих в групповом полете. Исследуем, как зависит быстродействие алгоритмов в зависимости от их параметров при ограничении управления, а также проведем сравнительный анализ этих алгоритмов.

### 3.1 Параметры моделирования

Рассмотрим круговую орбиту с высотой 400 км от поверхности Земли, по которой движется один из спутников, а второй движется на небольшом относительном расстоянии. Плотность воздуха на этой высоте достигает  $\rho = 10^{-11} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ , будем считать её постоянной. Коэффициент сопротивления не зависит от ориентации спутника относительно набегающего потока и равен  $C = 2$ . Максимальная эффективная площадь обоих спутников одинакова и равна  $S = 1 \text{ м}^2$ . Следовательно, коэффициент при управлении в формуле (4) приблизительно равен  $B_y \approx 10^{-4} \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$ . Пусть в начальный момент один из спутников движется по круговой относительной орбите с радиусом  $R_{\text{real}} = 400 \text{ м}$ . Рассмотрим в качестве примера переход с этой начальной орбиты на другую круговую замкнутую относительную орбиту с радиусом  $R_d = 200 \text{ м}$ , который осуществляется с помощью линейно-квадратического регулятора и управления на основе функции Ляпунова.

### 3.2 Исследование быстродействия алгоритмов

#### 3.2.1 Линейно-квадратический регулятор

Пусть для линейно-квадратического регулятора

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_y \end{pmatrix}; R = \text{const.}$$

Таким образом, зафиксируем вес, соответствующей ошибке траектории, сделав матрицу  $Q$  единичной. Вес  $R$  при управлении будем считать изменяемым параметром алгоритма.

Рассмотрим, как будет изменяться быстродействие системы при изменении параметра  $R$ , с учетом того, что величина управления лежит в пределах  $u \in [-1; 1]$ , так как угол между нормалью к плоскости спутников и направлением набегающего потока  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; \pi / 2]$ .

На рис.3 и на рис.4, приведен пример маневра под действием ЛКР при разных значениях весового коэффициента  $R$ . Как видно из рис.4, чем больше вес при управлении, тем дольше происходит переход к требуемой траектории.

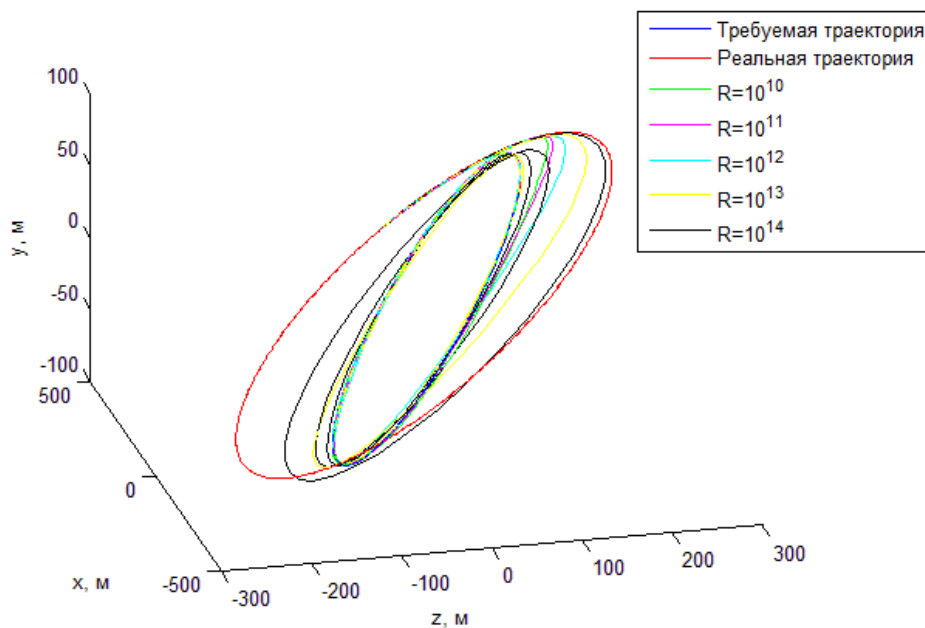


Рис.3 Пример траектории под действием ЛКР при разных значениях весового коэффициента

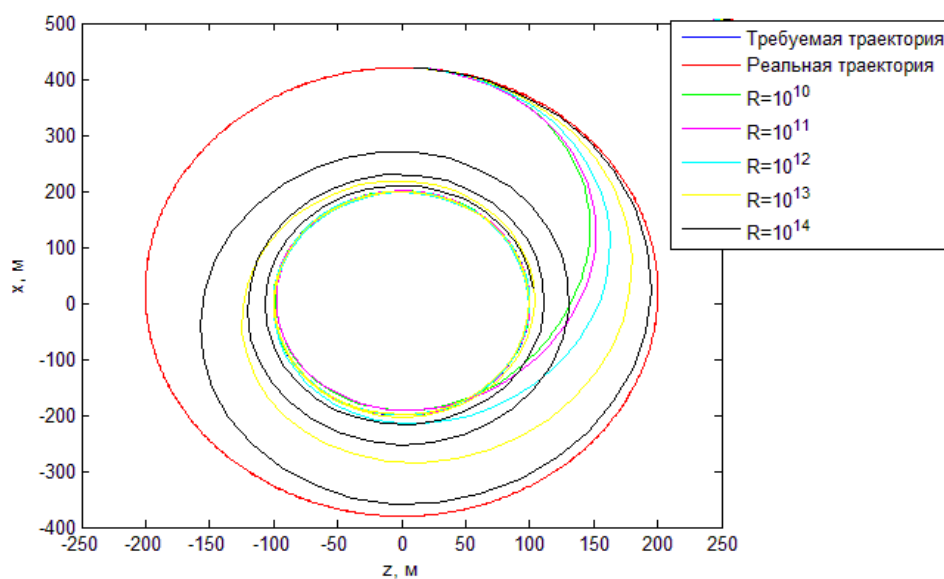


Рис.4 Пример траектории в плоскости  $Ozx$  под действием ЛКР при разных значениях весового коэффициента



На рис.5 представлена зависимость максимального собственного числа от весового коэффициента. Из графика можно найти критическое значение  $R_{cr}$ , которое приблизительно равно  $10^{10}$ . Для любого  $R \geq R_{cr}$  данный маневр реализуем.

На рис.6 представлена зависимость ошибки траектории от времени при  $R = 10^{10}$ . Как видно ошибки с течением времени ошибка уменьшаются. После достижения требуемой траектории ошибка составляет меньше метра и обусловлена ошибками управления из-за дискретизации.

На рис.7 представлен пример зависимости разности углов от времени при  $R = 10^{10}$ . Как видно, данное значение  $R$  является критическим, потому что максимальная разность углов достигает  $\sim 90^\circ$ .

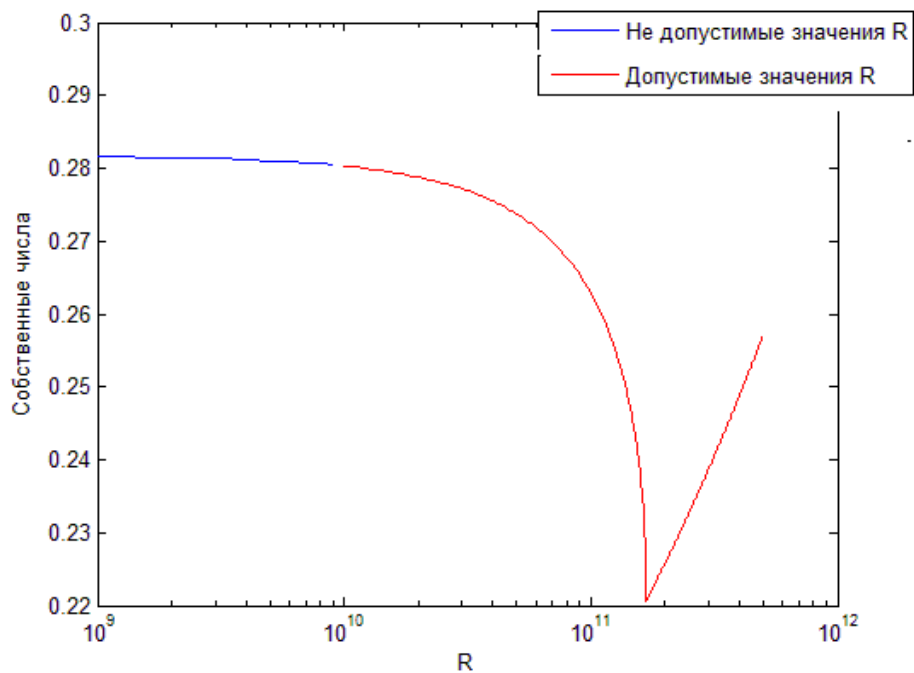


Рис.5 Зависимость максимального собственного числа от весового коэффициента  $R$ .

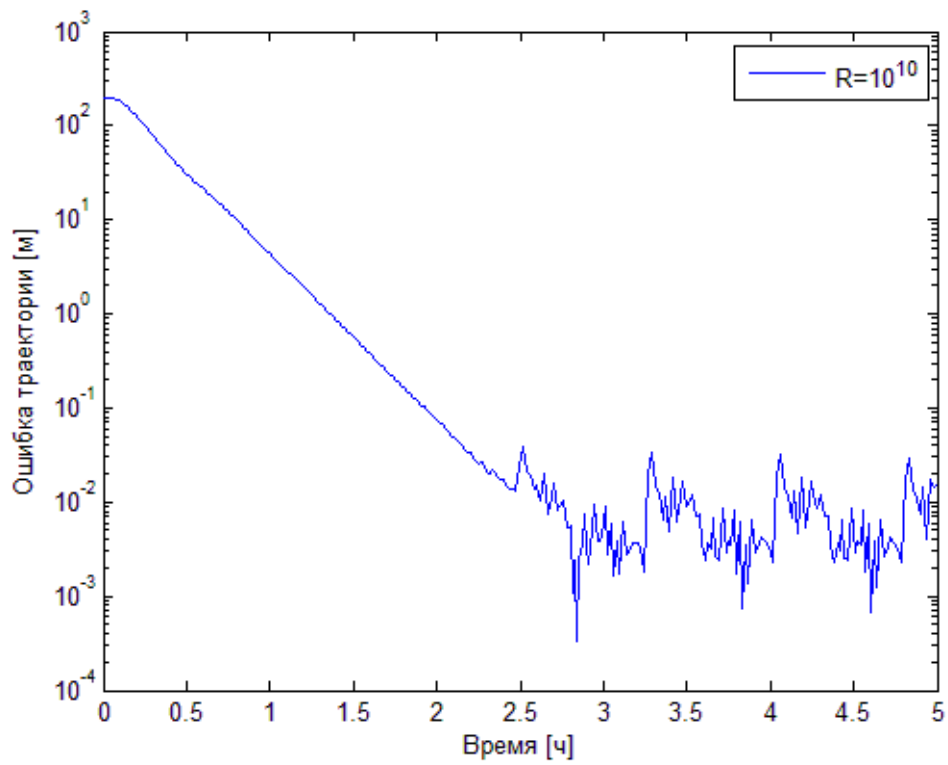


Рис.6 Зависимость ошибки траектории от времени при  $R = 10^{10}$

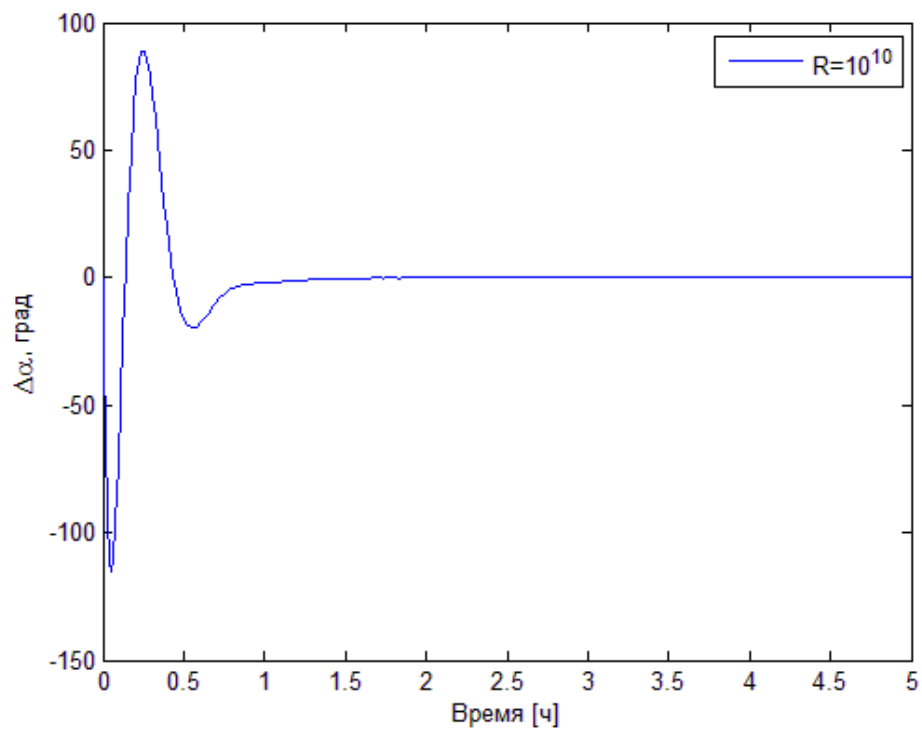


Рис.7 Зависимость разности углов от времени при  $R = 10^{10}$

Таким образом, алгоритм управления на основе линейно-квадратического регулятора успешно справляется с задачей перехода с одной относительной орбиты на другую. Однако особое внимание следует уделить выбору коэффициентов алгоритма, так как при некоторых их значениях величина управления становится нереализуемой, то есть разность синусов углов между плоскостями спутников и набегающим потоком становится по модулю больше единицы. Если такое случается, то возможно просто использовать условие: если расчетная величина управления больше возможной, то использовать максимально возможную. Однако в этом случае управление будет не оптимальным и использование ЛКР не оправдано.

### 3.2.2 Функция Ляпунова

Пусть для управления на основе функции Ляпунова будут зафиксированы следующие параметры из закона управления (17)

$$K_3 = -0.2, n = 10^{-5}.$$

Параметры  $K_1$  и  $K_2$  будем считать изменяемыми параметрами алгоритма.

На рис.8 представлены примеры траекторий относительного движения спутника под действием управления на основе функции Ляпунова при различных параметрах  $K_1$  и  $K_2$ . Как видно из рисунка скорость сходимости и величина ошибки траектории после сходимости сильно зависят от выбранных параметров. На рис.9 представлен пример зависимости управления, выраженного в углах поворота спутника, от времени во время совершения маневра при значении параметров  $K_1$  и  $K_2$ , а на рис.10 график ошибки траектории от времени. Как видно из рисунков, ошибка траектории асимптотически стремится к нулю, а после достижения требуемой траектории колеблется около нуля из-за ошибок управления.

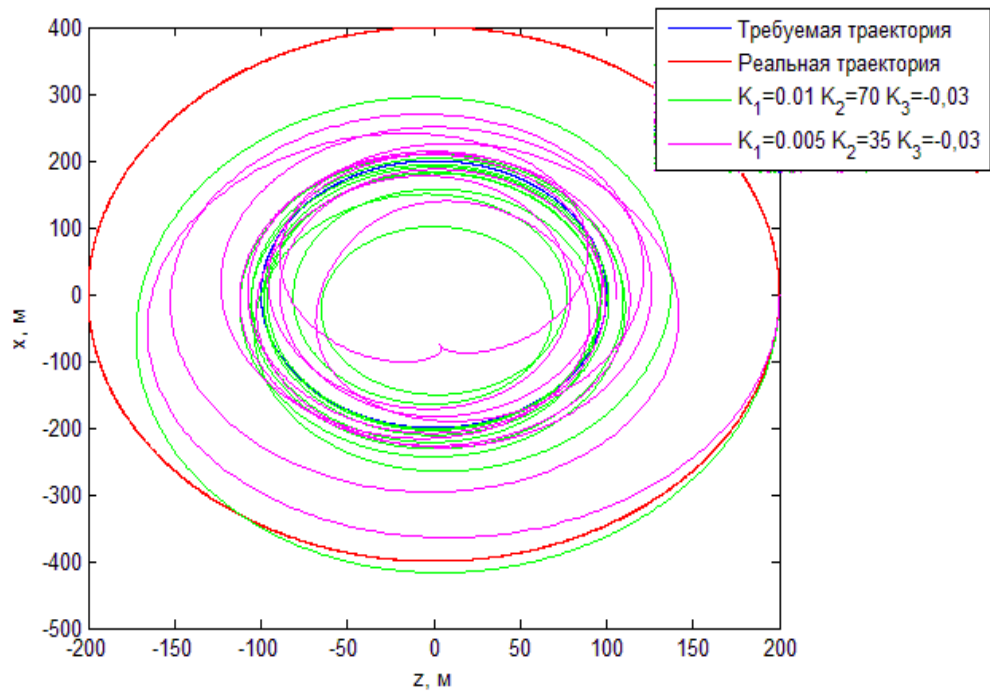


Рис.8 Пример траектории в плоскости  $Ozx$  под действием управления на основе функции Ляпунова при разных значениях весовых коэффициентов

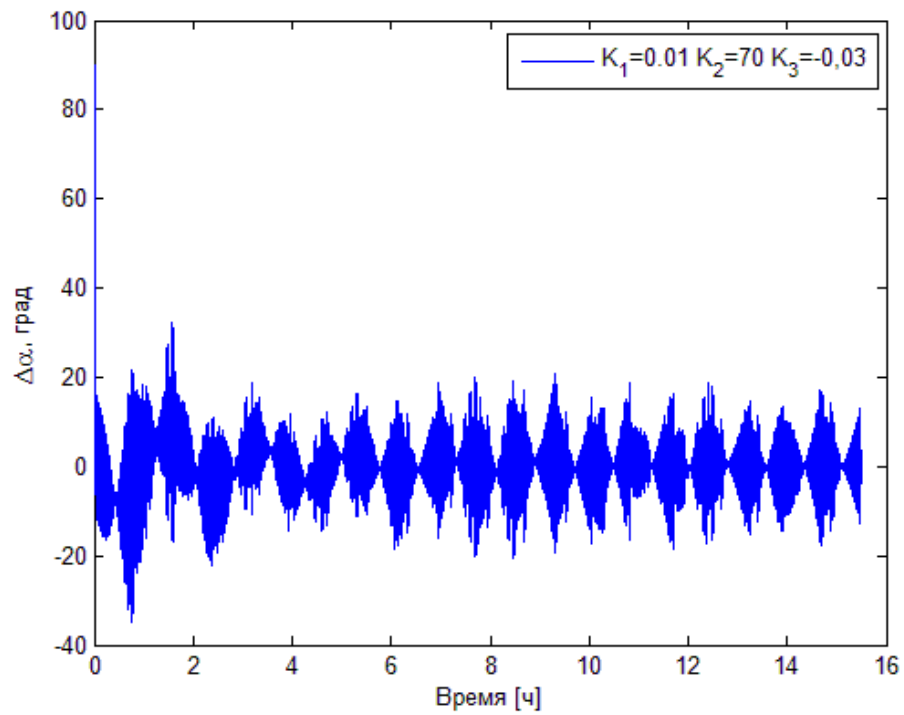


Рис.9 Зависимость разности углов времени при  $K_1 = 0.01$ ,  $K_2 = 70$ ;

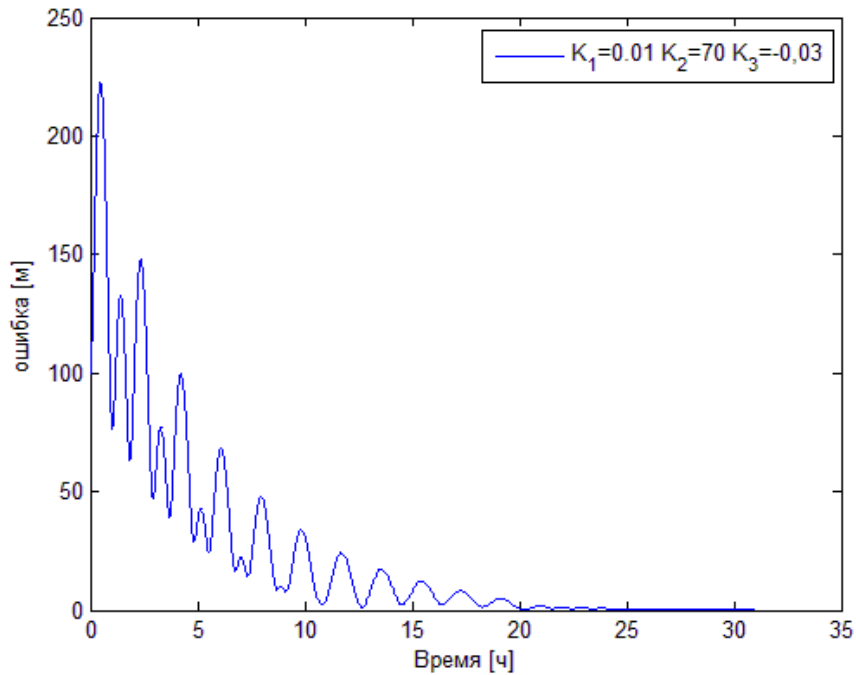


Рис.10 Зависимость ошибки траектории от времени при  $K_1 = 0.01$ ,  $K_2 = 70$ ;

Рассмотрим, как будет изменяться быстродействие системы при изменении этих параметров с учетом того, что величина управления лежит в пределах  $u \in [-1; 1]$ , так как угол между нормалью к плоскости спутников и направлением набегающего потока  $\alpha_1, \alpha_2 \in [0; \pi / 2]$ . Будем рассматривать тот же переход с одной относительной круговой орбиты на другую относительную круговую орбиту меньшего радиуса (как описано в начале этого раздела). На рис.11 представлен двухмерный график с изолиниями величины максимального собственного числа матрицы перехода в уравнении ошибок (5), которая характеризует быстродействие алгоритма, скорость сходимости. На этом рисунке выбрана некоторая область значений параметров  $K_1$  и  $K_2$ , однако не все пары коэффициентов обеспечивают значение величины управления в пределах  $u \in [-1; 1]$ . На рисунке параметры  $K_1$  и  $K_2$ , которые обуславливают управление вне допустимых пределов выделены специальной изолинией.

На рис.12 представлен двухмерный график с изолиниями величины максимальной разности углов при различных коэффициентах  $K_1$  и  $K_2$ . На этом рисунке видна область значений  $K_1$  и  $K_2$ , при которых управление реализуемо  $u \in [-1; 1]$ .

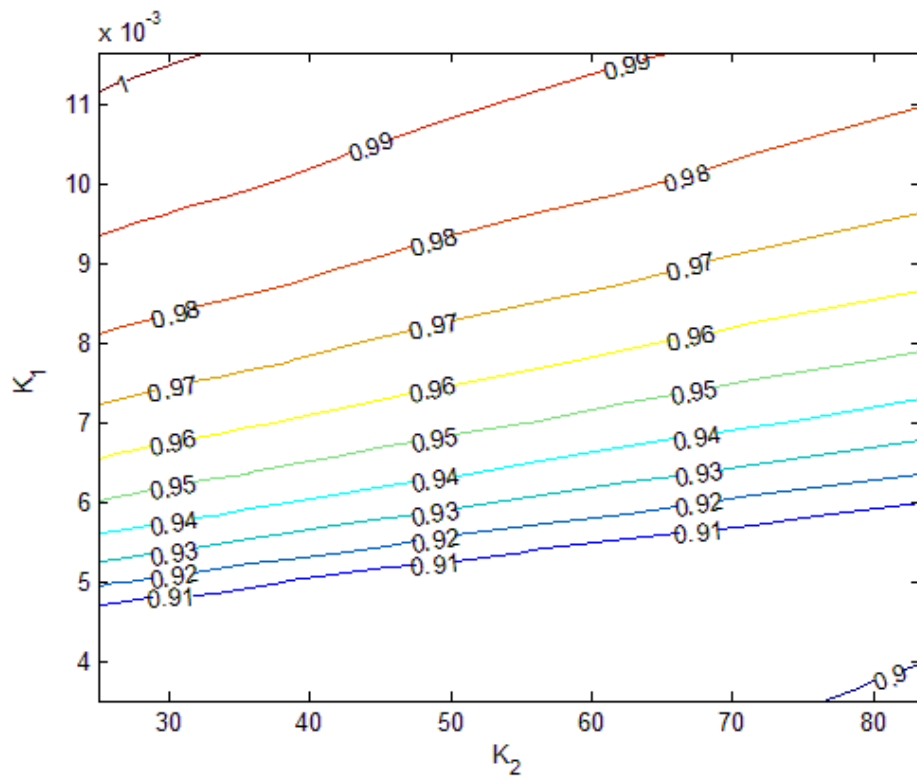


Рис.11 Изолинии степени устойчивости при различных коэффициентах  $K_1, K_2$

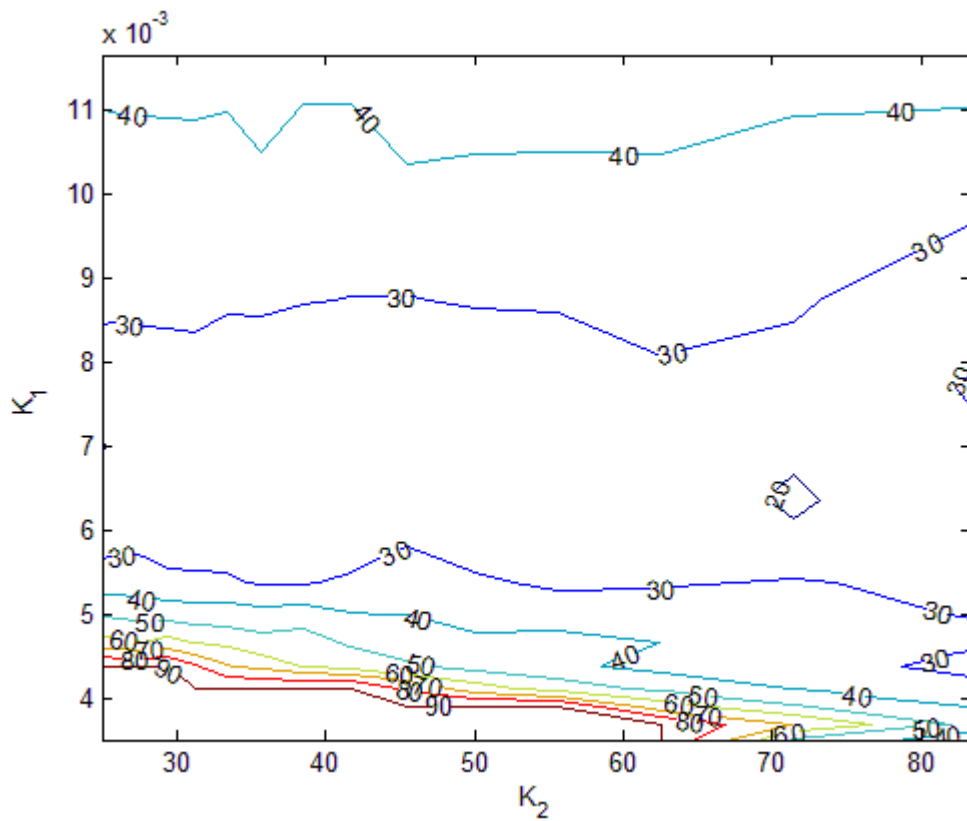


Рис.12 Изолинии максимальной разности углов при различных коэффициентах  $K_1, K_2$

Таким образом, управление на основе функции Ляпунова также как и управление на основе ЛКР позволяет совершать переходы между относительными орбитами при выполнении ограничения на возможную величину управления  $u \in [-1; 1]$ . Однако следует обратить внимание, что выбор параметров алгоритмов значительным образом влияет на быстродействие алгоритма. Если рассмотреть графики зависимости управления от времени для двух алгоритмов - рис. 7 и рис. 9 - видно, что управление на основе ЛКР является более гладким. Частое изменение знака при управлении на основе функции Ляпунова обусловлено наличием в формуле расчета управления слагаемых, которые зависят от знака функции от ошибок (см. (17)), а также наличие пяти слагаемых приводит к частой смене знака из-за периодического превалирования одного из слагаемых. Это свойство управления на основе функции Ляпунова является недостатком, так как при реализации такого управления, конечно, постоянное и частое изменение ориентации приводит к большим нагрузкам на систему управления ориентацией, которая может иметь такие параметры, которые не обеспечат реализацию такого резкого поворота. Следует также отметить, что это свойство, возможно, обусловлено неудачным выбором самой функции Ляпунова. Возможно, с другой функцией Ляпунова такого недостатка не будет.

## 4 УЧЁТ ВЛИЯНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим задачу поддержания заданной относительной орбиты с помощью управления на основе ЛКР и на основе функции Ляпунова при воздействии возмущения — второй гармоники гравитационного потенциала Земли. Исследуем точность поддержания с помощью данных алгоритмов при ограничении на минимальную величину управления.

### 4.1 Уравнения возмущенного движения

Чтобы учесть влияние второй гармоники разложения гравитационного потенциала Земли на движение спутников вместо воспользуемся модифицированными уравнения Седвика и Швайгарда [13].

Пусть орбиты двух спутников близки к некоторой опорной круговой орбите.  $i_0, i_1, i_2$  — наклонение опорной орбиты и двух спутников соответственно. Пусть  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  — координаты первого и второго спутников в опорной системе координат. Тогда для  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  имеем следующую систему с учетом аэродинамической силы сопротивления:

$$\begin{cases} \ddot{x} + A\dot{z} = f_x, \\ \ddot{z} - A\dot{x} - Bz = 0, \\ \ddot{y} + q^2 y = 2lq \cos(qt + \phi), \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2\omega c, \\ B &= \omega^2 (5c^2 - 1), \\ c &= \sqrt{1 + \frac{3J_2 R_\oplus^2}{8r_0^2} (1 + 3\cos 2i_0)}, \\ q &= \omega c + \frac{3J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \left( \cos^2 i_2 - \frac{(\cos i_1 - \cos i_2)(\cot i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0 - \cos i_2)}{\sin^2 \Delta\Omega_0 + (\cos i_1 \sin i_2 - \cos i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2} \right), \\ l &= -\frac{3J_2 R_\oplus^2}{2r_0^2} \frac{(\cos i_1 - \cos i_2) \sin i_1 \sin i_2 \sin \Delta\Omega_0}{\sqrt{1 - (\cos i_1 \cos i_2 + \sin i_1 \sin i_2 \cos \Delta\Omega_0)^2}}, \\ \Delta\Omega_0 &= \frac{y_0}{r_0 \sin i_0}, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $R_\oplus$  — радиус Земли,  $r_0$  — радиус опорной орбиты,  $\omega$  — угловая скорость вращения по опорной орбите.



$\phi$  находим из уравнения

$$l \sin \phi + qy_0 \cot \phi = \dot{y}_0. \quad (20)$$

У системы (18) есть аналитическое решение при  $f_x = 0$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{A}{a^3} (A\dot{x}_0 + Bz_0) \sin at + \frac{A\dot{z}_0}{a^2} (\cos at - 1) - \frac{B}{a^2} (\dot{x}_0 + Az_0)t, \\ y = \left( lt + \frac{y_0}{\sin \phi} \right) \sin(qt + \phi), \\ z = \frac{A}{a^2} (\dot{x}_0 + Az_0) + \frac{\dot{z}_0}{a} \sin at - \frac{1}{a^2} (A\dot{x}_0 + Bz_0) \cos at, \end{cases} \quad (21)$$

где  $a = \sqrt{A^2 - B}$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$ ,  $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  — координаты и скорости в момент времени  $t = 0$ .

Следует заметить, что  $\dot{y}_0$  присутствует в (21) неявно, влияя на  $\phi$ .

## 4.2 Поддержание относительной траектории

Рассмотрим следующий пример: начальные условия обеспечивают круговую относительную орбиту, однако вследствие влияния члена  $J_2$  орбиты спутников становятся не замкнутой, орбита одного спутника относительно другого смещается. Требуется управлять их движением с использованием аэродинамической силы сопротивления таким образом, чтобы спутники двигались по требуемой относительной траектории.

Ограничим минимальное значение угла поворота плоскости спутников относительно набегающего потока. Это значение будет соответствовать Будем поступать следующим образом: с некоторым шагом по времени проверять, не достигло ли управление  $u$  определённого критического значения. Если это произошло, то спутник поворачивается относительно набегающего потока, тем самым совершая манёвр и возвращаясь на требуемую траекторию.

На рис. 13 приведен пример траектории без управления. Можно заметить, что под действием данного возмущения орбита второго спутника смещается относительно первого. На рис. 14 приведен пример траектории под действием ЛКР. Требуемая траектория поддерживается.

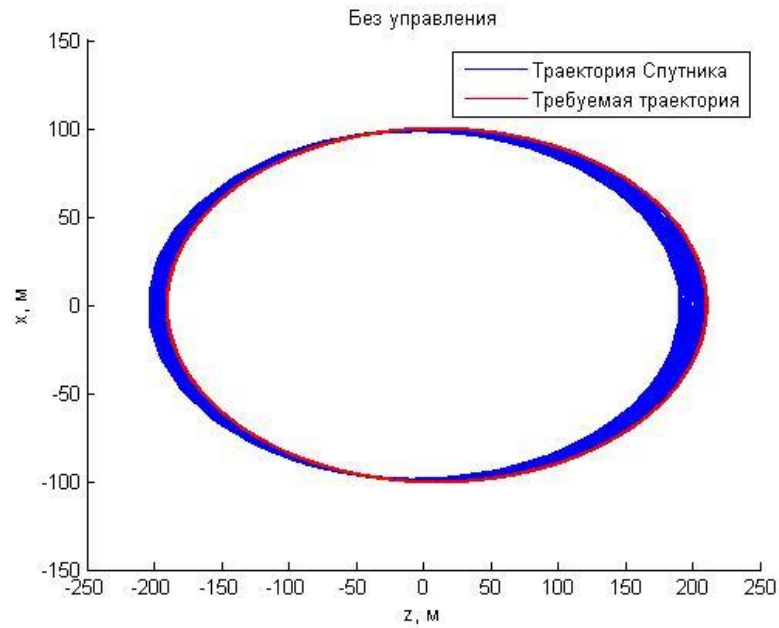


Рис.13 Пример траектории в плоскости  $Ozx$  без управления

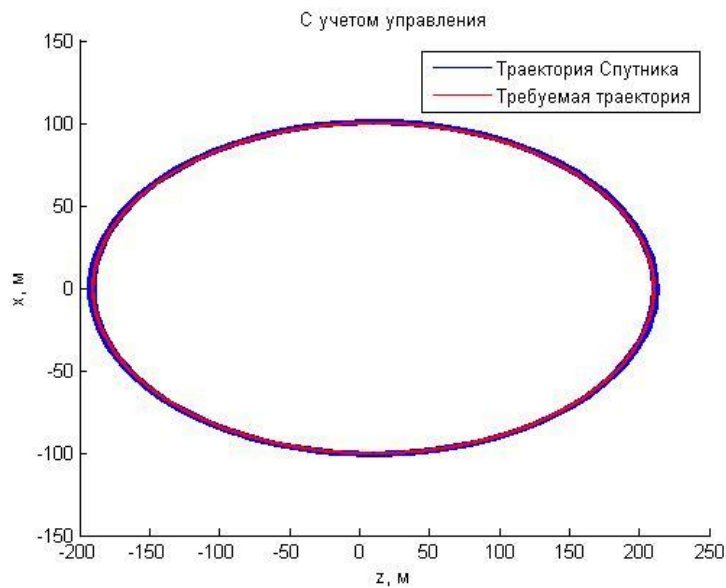


Рис.14 Пример поддержания траектории в плоскости  $Ozx$  при управлении на основе ЛКР

На рис.15 представлена зависимость ошибки траектории от времени при  $R = 10^{10}$ . Как видно ошибки с течением времени ограничены некоторой константой, а на рис.16 представлена зависимость релейного управления от времени при  $R = 10^{10}$ . Из этих рисунков видно, что для поддержания заданной относительной траектории с помощью ЛКР необходимо периодически поворачивать аппарат на некоторый угол, в результате чего аэродинамическая сила возвращает траекторию аппарата в пределы заданной погрешности 1 м.

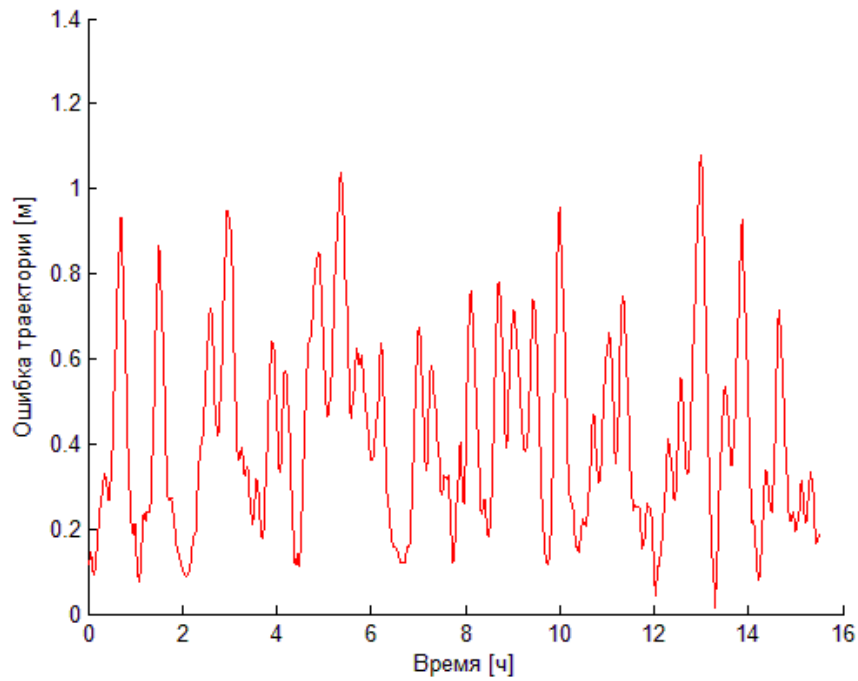


Рис.15 Зависимость разности углов от времени при  $R = 10^{10}$

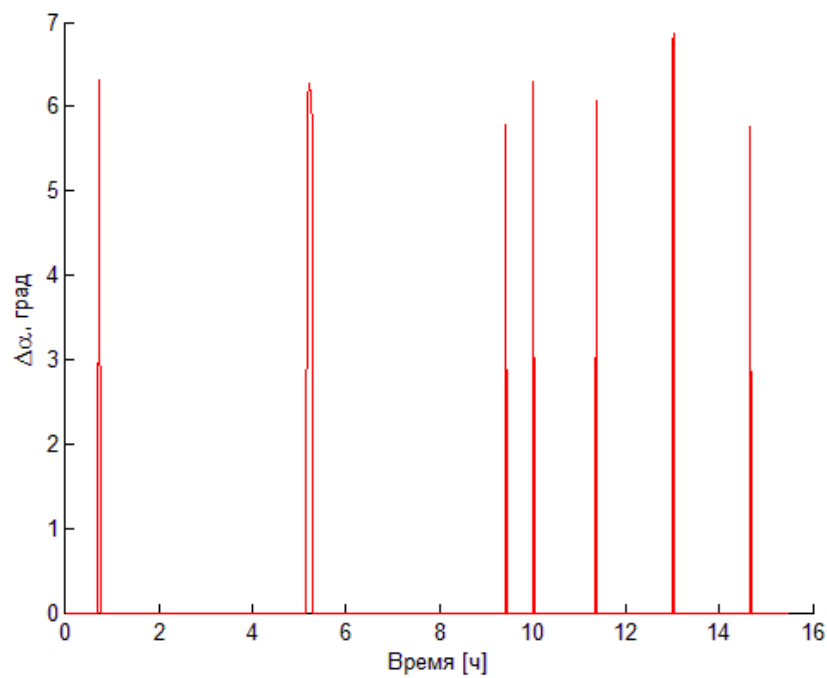


Рис.16 Зависимость ошибки траектории под действием ЛКР от времени при  $R = 10^{10}$

На рис.17 представлены графики зависимости ошибки траектории от времени при поддержании траектории с использованием алгоритма на основе функции Ляпунова при значении параметров  $K_1 = 0.01$  и  $K_2 = 0,03$ , а на рис.18 представлена зависимость релейного управления от времени при  $K_1 = 0.01$  и  $K_2 = 0,03$ . Из этих рисунков видно, что

для поддержания заданной относительной траектории с помощью управления на основе функции Ляпунова необходимо периодически поворачивать аппарат на некоторый угол, в результате чего аэродинамическая сила возвращает траекторию аппарата в пределы заданной погрешности 1.5 м.

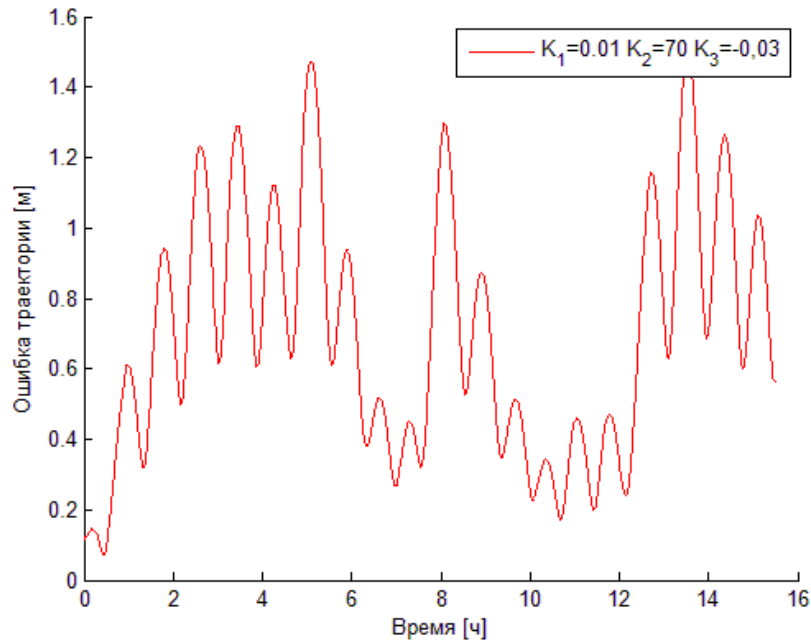


Рис.17 Зависимость ошибки траектории под действием управлением на основе функции Ляпунова от времени при  $K_1 = 0.01$ ,  $K_2 = 70$ ;

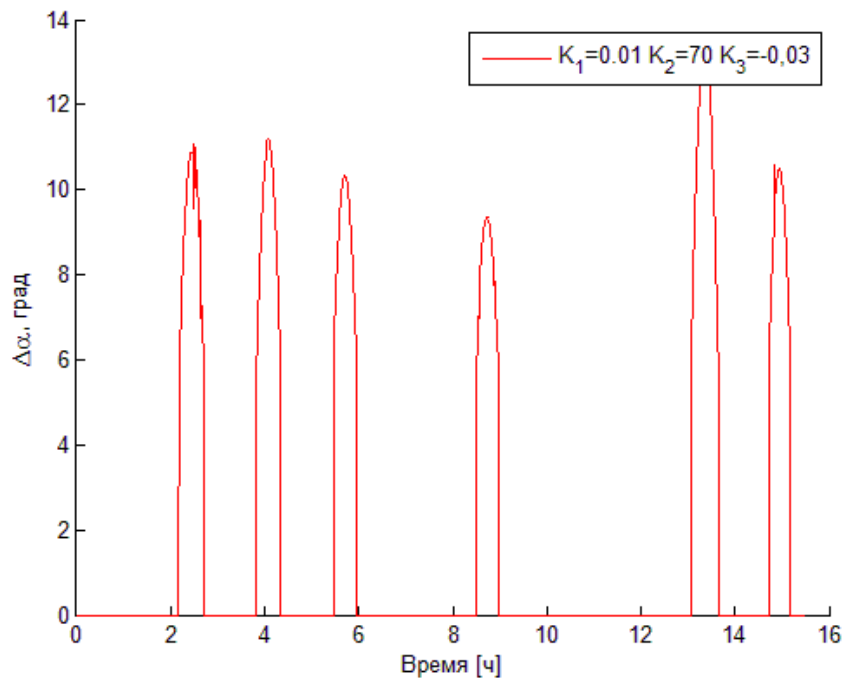


Рис.18 Зависимость разности углов от времени при  $K_1 = 0.01$ ,  $K_2 = 70$ ;

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для решения задачи управления относительного движения с использованием аэродинамической силы сопротивления атмосферы применены два алгоритма: управление на основе линейно-квадратичного регулятора и управление на основе функции Ляпунова. На примере перехода с одной относительной орбиты на другую продемонстрирована работоспособность этих алгоритмов. Проведено исследование быстродействия этих алгоритмов управления от их параметров при ограничениях на величину управляющего воздействия. Сравнительный анализ алгоритмов показал, что для реализации управление на основе линейно-квадратичного регулятора является более удобным, так как является гладким, тогда как управление на основе функции Ляпунова из-за наличия нескольких слагаемых приводит к частому довольно резкому изменению величины угла поворота нормали к плоскости спутников относительно набегающего потока.

В работе была рассмотрена задача поддержания заданной относительной траектории при влиянии второй гармоники разложения гравитационного поля Земли. На конкретном примере было показано, что линейно-квадратичный регулятор и управление на основе функции Ляпунова успешно справляются с этой задачей при ограничении на минимально возможный угол поворота спутников, то есть минимальное значение управления. Управление с помощью ЛКР похоже на импульсное, а ошибка траектории удерживается в заданном пределе 1 м.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peck M.A., Streetmani B., Pas V.L.A.P. FT FORMATION FEUING USING LOWENTZ FORCES.
2. Saaj A.C.M. et al. ELECTROSTATIC FORCES FOR SATELLITE SWARM NAVIGATION AND Final Report.
3. Joe H. et al. Aeronautics SATELLITES Cranfield College of 6th International Conference on Dynamics and Control of Systems and Structures in Space. 2004.
4. King L.B., Parker G.G. Spacecraft Formation-flying using Inter-vehicle Coulomb Forces // tech. rep. NASA/NIAC, 2002. P. 103.
5. Schaub H. et al. Challenges and Prospects of Coulomb Spacecraft Formation Control of the Astronautical Sciences Challenges and Prospects of Coulomb Spacecraft Formation Control. 2004. Vol. 52. P. 169–193.
6. Шестаков С.А., Иванов Д.С. О.М.Ю. Управление движением группового полета спутников с помощью переброса масс. 2013.
7. Leonard C.L. Formation Keeping of Spacecraft via Differential Drag // Master Thesis, Massachusetts Inst. Technol. 1986.
8. Maclay C.T. Satellite station-keeping of the ORBCOMM constellation via active control of atmospheric drag: operations, constraints, and performance // Adv.Astronaut.Sci. 2005. Vol. 120. P. 763–773.
9. De Ruiter A., Lee J., Ng A. A fault-tolerant magnetic spin stabilizing controller for the JC2Sat-FF Mission // AIAAGuidance,Navigation Control. 21August 2008.AIAA-2008-7486.
10. Clohessy W.H., Wiltshire R.S. Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // J. Astronaut. Sci. 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–678.
11. Hill G.W. Researches in Lunar Theory // Am. J. Math. 1878. Vol. 1. P. 5–26.
12. Lawden D.F. Fundamentals of space navigation // J. Br. Interplanet. Soc. 1954. Vol. 13, № 2. P. 87–101.
13. Schweighart S., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J2 Model for Satellite Formation Flight // J. Guid. Control. Dyn. 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
14. Kristiansen R., Nicklasson P.J. Spacecraft formation flying: A review and new results on state feedback control // Acta Astronaut. Elsevier, 2009. Vol. 65, № 11-12. P. 1537–1552.

15. Zeng G., Hu M., Yao H. Relative orbit estimation and formation keeping control of satellite formations in low Earth orbits // *Acta Astronaut.* Elsevier, 2012. Vol. 76. P. 164–175.
16. Perez D., Bevilacqua R. Lyapunov-based Spacecraft Rendezvous Maneuvers Using Differential Drag // AIAA-2011-6630Paper, AIAA Guid. Dyn.
17. Kumar B.S., Ng A., Bang-Bang A. Control approach to maneuver spacecraft in a formation with differential drag // *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, AIAA Pap.