

Содержание

| | |
|--|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ | 7 |
| 1 Научно – исследовательская часть | 11 |
| 1.1 Постановка задачи | 11 |
| 1.1.1 Области интереса и параметры опорной орбиты | 11 |
| 1.1.2 Желаемая конфигурация и функционал качества формации | 13 |
| 1.2 Системы координат и уравнения движения | 18 |
| 1.2.1 Геоцентрическая инерциальная и орбитальная системы координат | 18 |
| 1.2.2 Оскулирующие и равноденственные элементы | 20 |
| 1.2.3 Регуляризация и обезразмеривание уравнений движения | 23 |
| 1.2.4 Уравнения относительного движения | 26 |
| 1.2.5 Учет внешних возмущений | 29 |
| 1.2.6 LQR-управление | 31 |
| 2 Технологическая часть | 36 |
| 2.1 Оптимальная инициализация орбит КА. Выбор количества КА в формации | 36 |
| 2.1.1 Опорная орбита и области интереса | 36 |
| 2.1.2 Пассивное движение формации | 38 |
| 2.1.3 Подбор начальных параметров орбит КА на сетке | 40 |
| 2.1.4 Оптимальная инициализация орбит КА | 45 |
| 2.2 Поддержание геометрической конфигурации формации | 48 |
| 2.2.1 Целевое положение управляемого КА | 48 |
| 2.2.2 Применение LQR-управления для улучшения качества формации | 49 |

| | |
|---|-----------|
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 58 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ | 60 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А Иллюстративный материал доклада | 62 |

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы все больше внимания уделяется исследованию магнитосферы Земли – области пространства вокруг планеты, поведение плазмы в которой зависит от магнитного поля Земли. Это в первую очередь связано с тем, что геомагнитное поле является основополагающим фактором для зарождения жизни на планете, поскольку именно оно защищает Землю от губительных потоков солнечного ветра – потока ионизированных частиц, испускаемых Солнцем. Одним из способов изучения магнитосферы является непосредственное измерение ее параметров с помощью космических аппаратов (далее – КА). За последние 30 лет в России, США, Европе, Китае и Японии было запущено несколько десятков спутников и спутниковых группировок (проекты ISEE, AMPTE, «Интербол», Geotail, Wind, Polar, Cluster, Double Star, THEMIS, в 2015 году – MMS) [1, 2, 3, 4], с установленной на борту научной аппаратурой массой от нескольких десятков до нескольких сотен килограммов, которая предназначалась для измерения всего набора параметров электромагнитных полей.

Одним из наименее изученных процессов, происходящих в магнитосфере, является магнитное пересоединение – явление, при котором силовые линии магнитного поля сходятся и быстро перестраиваются, изменяя локальную структуру магнитного поля [5]. Этот процесс сопровождается высвобождением колоссального количества энергии. Схематично процесс магнитного пересоединения изображен на рис. 1.

Магнитное пересоединение – одна из основных причин появления магнитных бурь, которые как вызывают невероятно красивые полярные сияния, так и создают серьезные помехи в работе радиосвязи на Земле.

Большая часть того, что известно о физической природе явления магнитного пересоединения, получено с помощью теоретических исследований,

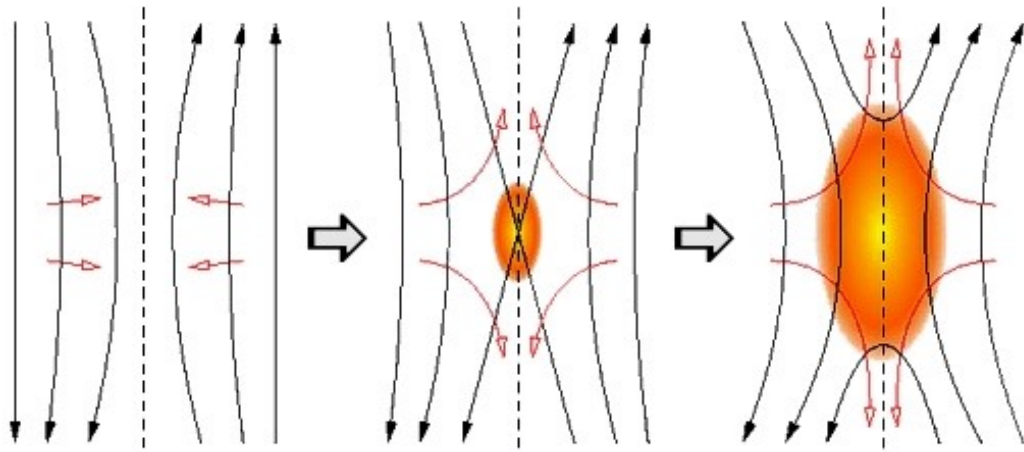


Рис. 1: Процесс магнитного пересоединения [6]

компьютерного моделирования или наблюдений магнитного пересоединения, происходящего на поверхности Солнца. Лучшее понимание этого явления может быть получено только при непосредственном измерении локальных характеристик магнитосферы Земли. Известно, что магнитное пересоединение можно наблюдать в некоторых областях на границе земной магнитосферы, однако такие области имеют довольно малую толщину, порядка нескольких километров. Этот факт накладывает сильные ограничения на выбор орбиты для КА, а также появляются требования к геометрической конфигурации спутниковой группировки.

Совсем недавно, в 2015 году, агентством NASA была реализована миссия Magnetospheric Multiscale (MMS). Ее основная цель состоит именно в изучении явления магнитного пересоединения. Для получения интересных измерений необходимо как минимум четыре аппарата, при этом нужно, чтобы в интересующей области пространства аппараты находились в вершинах правильного тетраэдра с заданной длиной сторон [7]. Поддержание такой формации является одной из важных особенностей миссии; поэтому, помимо научного оборудования, на борту спутников находится массивная система управления движением, включающая в себя двигатели с необходимым запасом топлива. В итоге каждый из четырех аппаратов на старте весил 1362 килограмма.

Необходимо понимать, что большое количество служебной аппаратуры и

исполнительных органов системы управления имеет немалую стоимость, еще дороже обходится космическому агентству каждый килограмм, выводимый на орбиту.

Одним из возможных способов снизить итоговую стоимость миссии является применение нано- и микроспутников – аппаратов с массой от 1 до 10 или от 10 до 100 килограммов соответственно. Они являются наиболее доступными с точки зрения цены и сроков создания из ныне используемых классов КА, однако обладают рядом ограничений. Самое важное ограничение связано с возможностью маневрирования: из-за малых размеров таких КА на них не могут быть установлены маршевые двигатели с достаточно большим уровнем тяги для управления орбитальным движением. В лучшем случае возможно использование электрореактивных двигателей малой тяги, активно разрабатывающихся в настоящее время, но пока не прошедших достаточного количества летных испытаний.

Целью данной работы является исследование возможности применения роя наноспутников для проведения требуемых измерений магнитосферы Земли. Предлагается выбирать орбиты наноспутников в рое так, чтобы в каждый момент времени находилась четверка, которая имеет конфигурацию, наиболее близкую к желаемой – правильному тетраэдру заданного размера. Поскольку наноспутники невелики и относительно дешевы в изготовлении, даже большое их количество по итоговым затратам будет уступать стандартной миссии типа MMS.

В первой части данной работы описывается динамика пассивного (т.е. без применения управляющих воздействий) полета роя наноспутников, исследуется влияние параметров выведения на орбиту (начальных данных) на геометрическую конфигурацию формации, а также определяется необходимое количество наноспутников.

Во второй части добавляется опция управления орбитальным движением одного из КА в формации с помощью двигателя малой тяги с тем, чтобы

попытаться улучшить результаты, полученные при пассивном движении.

В заключении проводится анализ полученных данных применительно к возможностям современных наноспутников и двигателей малой тяги.

1 Научно – исследовательская часть

1.1 Постановка задачи

1.1.1 Области интереса и параметры опорной орбиты

Задача об измерении магнитного поля определяет интересующие области в пространстве, в которых должна будет находиться группировка КА для проведения требуемых измерений. Перезамыкание магнитных линий может наблюдаться в двух зонах магнитосферы, отмеченных красным на рис. 2.

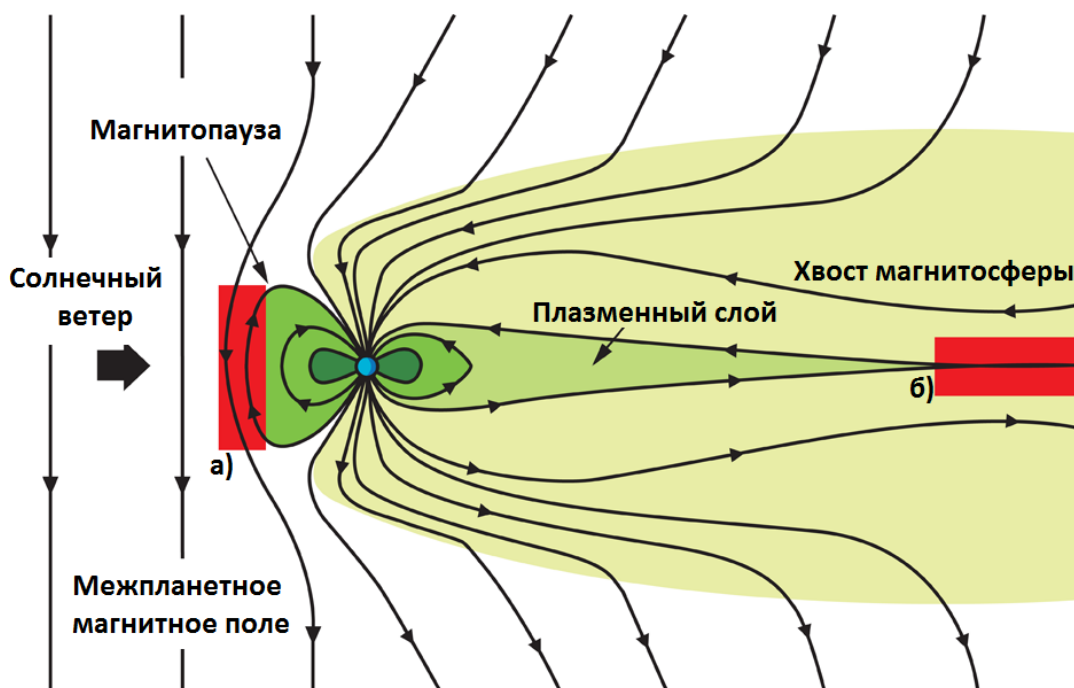


Рис. 2: Структура магнитного поля Земли. [8]

Зона *а)* удалена от Земли примерно на 80 тысяч километров. В этом регионе межпланетное магнитное поле сливается с геомагнитным полем, вызывая явление магнитного пересоединения. Зона *б)* же лежит в хвосте магнитосферы на значительном удалении от планеты — 200 тысяч километров. Здесь магнитное пересоединение высвобождает магнитную энергию, запасенную в хвосте магнитосферы и вызывает так называемые магнитные суббури.

Американская миссия MMS состоит из двух фаз — в течение первой исследуется регион *a*), а затем орбита корректируется, чтобы группировка аппаратов пролетала через область *b*). Для определенности будем рассматривать лишь вторую фазу с исследованием более удаленной части магнитосферы. В качестве опорной орбиты — орбиты, к которой близки орбиты всех спутников — примем высокоэллиптическую орбиту с высотой перигея (ближайшей к Земле точки) 2000 км и высотой апогея (наиболее удаленной от Земли точки) 200000 км. Регион, представляющий интерес — это все точки орбиты, удаленные от Земли более, чем на 110 тысяч километров.

Важно заметить, что в процессе движения Земли по орбите хвост магнитосферы ориентирован примерно вдоль линии Земля-Солнце, вращающейся в инерциальном пространстве за счет движения Земли по орбите со скоростью порядка одного градуса в сутки. В то же время произвольная околоземная орбита свойством гелиосинхронности обладать не будет. Возникает еще одна задача — подбор таких параметров опорной орбиты, чтобы ее линия апсид (линия, соединяющая перигей и апогей) поддерживала ориентацию на Солнце. Однако в этой работе задачу достижения необходимой прецессии околоземной орбиты рассматривать не будем.

Другая проблема касается наклона орбиты — угла наклона плоскости, в которой лежит орбита, к плоскости земного экватора. Поскольку интересующие области магнитного поля Земли преимущественно находятся вблизи плоскости эклиптики (т.е. в плоскости, примерно совпадающей с плоскостью орбиты Земли вокруг Солнца), необходимо, чтобы плоскость орбиты была близка к ней. Земной экватор наклонен к плоскости эклиптики примерно на 23.5° . Кроме того, при одноимпульсном выведении на орбиту наклонение не может быть меньше широты точки старта [9]. Из этого следует, что идеальным будет старт с низких широт. Американская миссия MMS находилась в выгодном положении, поскольку пуск осуществлялся с мыса Канаверал, имеющего широту 28.5° . За неимением подобных альтернатив для

отечественных миссий, будем рассматривать выведение аппаратов на орбиту с космодрома Байконур, которое обеспечивает наклонение орбиты 51.6° .

1.1.2 Желаемая конфигурация и функционал качества формации

Рассмотрим теперь положение аппаратов группировки друг относительно друга. Чтобы провести измерение некоторой физической характеристики геомагнитного поля в фиксированной точке пространства, достаточно и одного аппарата. Однако, чтобы получить представления о пространственном распределении значений этой характеристики в один момент времени, необходимо большее количество синхронных измерений в различных точках пространства. Так, разместив два аппарата, по их измерениям можем получить представление о распределении измеряемой величины на прямой; воспользовавшись тремя КА, можем судить о поведении этой величины в плоскости. Чтобы исследовать магнитное поле в пространстве, важно иметь как минимум четыре КА. Очевидно также, что наилучшей будет ситуация, когда все четыре аппарата равноудалены друг от друга, т.е. образуют правильный тетраэдр (см. рис. 3).

Важно определить масштабы тетраэдра. За определяющий фактор примем длину стороны тетраэдра. Для научных целей интерес представляют величины 10000 км, 1000 км, 100 км, 10 км. Скажем, в миссии MMS масштаб колеблется от 10 до 400 километров. Следует отметить, что, чем меньше расстояние между КА, тем сложнее поддерживать формацию. В дальнейшем для определенности рассмотрим один из масштабов и будем считать, что идеальным является расположение аппаратов в вершинах правильного тетраэдра со стороной 100 км. Чтобы как-то формализовать это требование, введем показатель качества формации – некоторый коэффициент, который по положению четырех аппаратов в данный момент времени будет оценивать близость образованного этими КА тетраэдра к заданному.

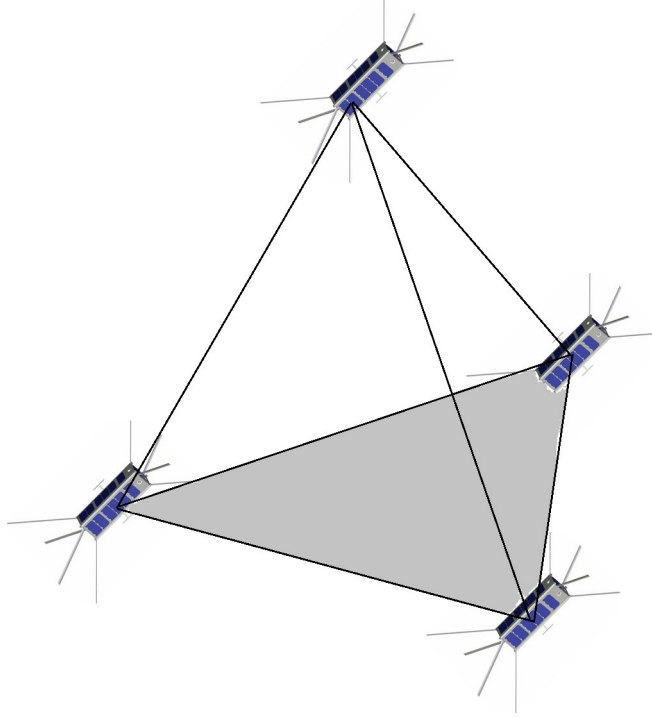


Рис. 3: Оптимальная геометрическая конфигурация четырех спутников

Показатель качества Q представим в виде произведения двух составляющих: коэффициента Q_v , отвечающего за качество формы тетраэдра, и коэффициента Q_s , характеризующего его размеры (масштаб) [10]. Опишем эти множители подробнее.

Чтобы оценить, насколько пирамида, в вершинах которой лежат четыре аппарата, близка к правильному тетраэдру, можно посмотреть на отношение объема этой фигуры V_a к объему правильного тетраэдра V_r , имеющего сторону, равную среднему расстоянию между аппаратами \bar{L} . Будем рассматривать КА как материальные точки. Принимая одну из них за начало отсчета, будем считать, что положения трех других КА заданы радиус-векторами \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 , \mathbf{r}_3 соответственно. Тогда объем пирамиды, в вершинах которой лежат КА, равен:

$$V_a = \frac{1}{6} |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)|. \quad (1)$$

Также известно, что объем правильного тетраэдра со стороной \bar{L} равен

$$V_r = \frac{\bar{L}^3 \sqrt{2}}{12}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что:

$$Q_v = \frac{V_a}{V_r} = \frac{\sqrt{2}}{\bar{L}^3} |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)|. \quad (3)$$

Введенный показатель обладает следующим важным свойством [10]:

$$0 \leq Q_v \leq 1.$$

Q_v будет равен 1, если имеющийся тетраэдр правильный, и нулю, если все четыре КА лежат в одной плоскости.

Чтобы составить коэффициент масштаба, воспользуемся простой полиномиальной функцией [10]:

$$Q_s(\bar{L}) = \begin{cases} 0, & \bar{L} < l_1. \\ \frac{(\bar{L} - l_1)^2 (\bar{L} + l_1 - 2l_2)^2}{(l_2 - l_1)^4}, & l_1 \leq \bar{L} < l_2; \\ 1, & l_2 \leq \bar{L} \leq l_3; \\ \frac{(\bar{L} - l_4)^2 (\bar{L} - 2l_3 + l_4)^2}{(l_4 - l_3)^4}, & l_3 \leq \bar{L} < l_4; \\ 0, & \bar{L} > l_4. \end{cases} \quad (4)$$

В выражении (4) константы l_1 , l_2 , l_3 , и l_4 характеризуют отклонение размеров тетраэдра от заданного масштаба формации. Так, поскольку нас интересует тетраэдр со стороной 100 километров, примем $l_1 = 65$ км, $l_2 = 85$ км, $l_3 = 115$ км, $l_4 = 135$ км. Действительно, как было выявлено ранее для миссии MMS [7], отклонение в пределах 15% не ухудшает качества измерений.

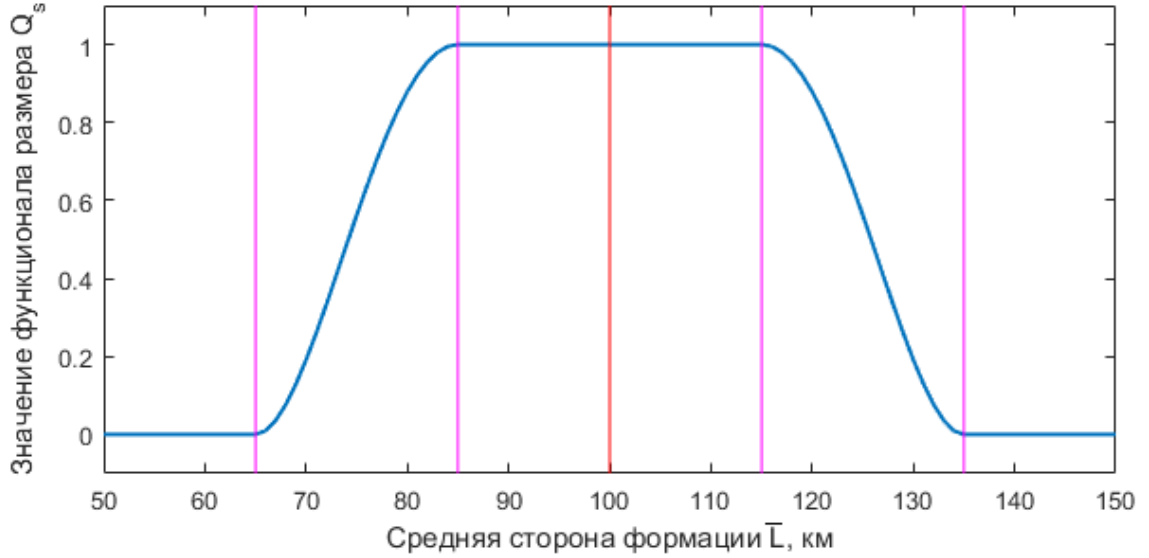


Рис. 4: График $Q_s(\bar{L})$. Розовым отмечены значения констант l_i , а красным — требуемая средняя сторона формации, равная 100 км

Таким образом, для функционала качества формации имеем:

$$Q = Q_s Q_v = \frac{\sqrt{2} Q_s}{L^3} |\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)|. \quad (5)$$

При этом, когда конфигурация формации близка к правильному тетраэдру со стороной 100 километров, значение функционала Q стремится к единице, а с ухудшением качества формации, величина Q убывает вплоть до нуля.

Поскольку нас интересует качество формации не только в какой-то момент времени, но и на заданном участке орбиты, введем интегральный показатель среднего качества формации на временном интервале $[t_1, t_2]$:

$$\bar{Q} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q dt. \quad (6)$$

Базируясь на опыте миссии MMS [10], будем считать, что для получения хороших измерений качество формации в областях интереса не должно быть ниже 0.7.

Далее необходимо определиться с временным интервалом для поставлен-

ной задачи. Будем полагать, что достаточно проводить измерения в течение месяца, что на высокоэллиптической орбите с высотой апогея 200 тыс. км примерно равно десяти оборотам вокруг Земли.

В американской миссии MMS используются аппараты большой массы, однако если использовать наноспутники, то необходимо учитывать ограничения на управляющие воздействия. Поэтому немаловажной частью работы будет исследование пассивного движения роя аппаратов.

Реальным является сценарий, при котором на орбиту выводится относительно большой микроспутник, несущий на борту как необходимую аппаратуру для измерений и радиосвязи с другими КА в рое и наземными станциями, так и некоторый запас топлива. От микроспутника в дальнейшем в нужных направлениях отделяются вспомогательные наноспутники с измерительной аппаратурой. В этой работе вопросы выведения аппаратов на необходимые орбиты рассматривать не будем.

Промоделировав пассивное движение нескольких КА, у каждого из которых параметры начальной орбиты несколько отличаются от опорной, необходимо совершить перебор всех четверок аппаратов с тем, чтобы найти наилучшую из них в каждый момент времени. Затем нужно выбрать лучшие четверки и проследить за изменением качества их формации со временем. Разумно уже сейчас предположить, что тетраэдр будет "разваливаться" ввиду внешних возмущений: нецентральности гравитационного поля Земли, притяжения Луны и Солнца, светового давления и т.д. Для длительного поддержания качества формации и предотвращения ее деградации, может потребоваться маневрирование материнским микроаппаратом.

Имеет смысл рассмотреть непрерывное управление (например, классическое для таких задач LQR-управление). Современные электрореактивные двигатели для аппаратов нано- и микро- класса могут обеспечивать продолжительные активные участки (участки орбиты, на которых двигатель включен).

Отметим основные шаги для решения поставленной задачи:

- составить динамическую модель движения КА по высокоэллиптической опорной орбите с наклоном 51.6° и апогеем 200000 км с учетом различных возмущений;
- исследовать пассивное движение роя аппаратов в окрестности опорной орбиты;
- найти оптимальные параметры начальных орбит КА в рое для максимизации функционала качества формации;
- найти алгоритм управления одним из аппаратов, обеспечивающий улучшения качества формации.

1.2 Системы координат и уравнения движения

При решении поставленной задачи понадобятся несколько систем координат и наборов переменных для описания орбитального движения. Приведем далее их краткое описание [9].

1.2.1 Геоцентрическая инерциальная и орбитальная системы координат

Будем исследовать движение КА в геоцентрической инерциальной системе координат. Как следует из названия, ее центр расположен в центре Земли, а ось z направлена перпендикулярно земному экватору. Ось x направлена в точку весеннего равноденствия, а ось y лежит в плоскости экватора и дополняет систему координат до правой (см. рис. 5).

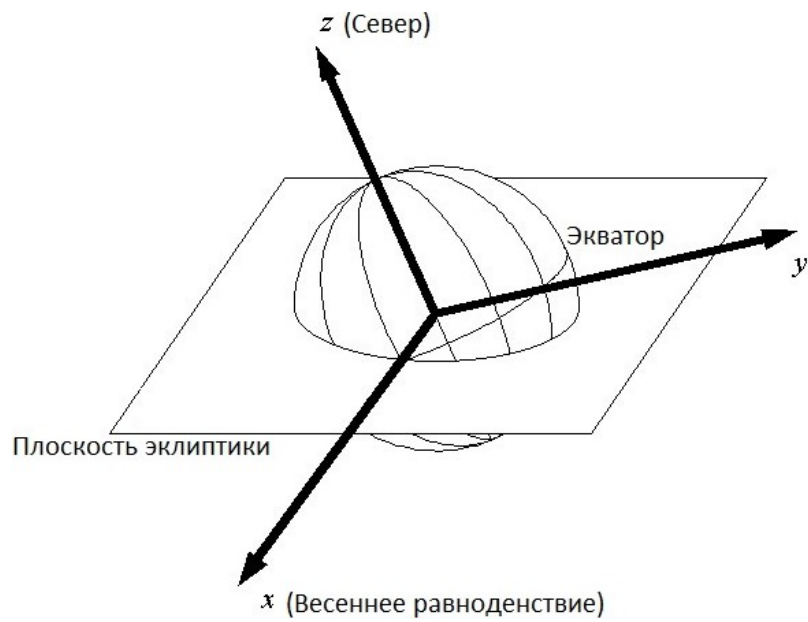


Рис. 5: Геоцентрическая инерциальная система координат.

Поскольку поставленная задача связана с формациями космических аппаратов на орбите, важной частью является исследование относительного движения. Это удобнее всего делать с использованием подвижной орбитальной системы координат (ОСК), начало которой находится в центре масс одного из КА. Ось x направлена вдоль линии, соединяющей центр Земли с КА по направлению от Земли, ось y лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону движения КА, а ось z дополняет систему до правой (см. рис. 6).

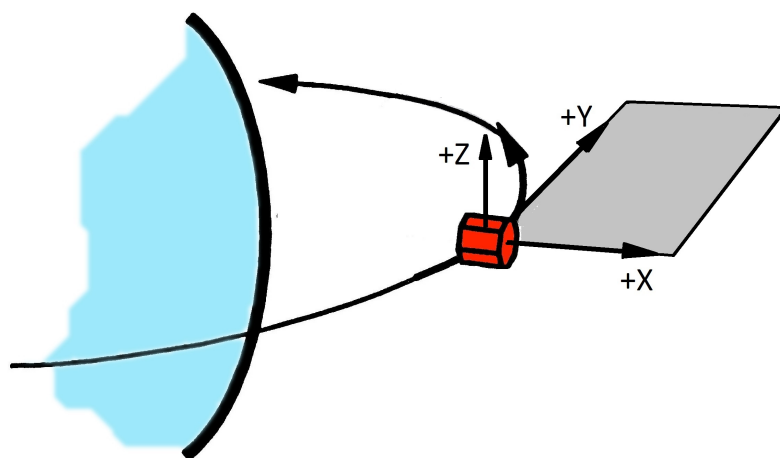


Рис. 6: Оси орбитальной системы координат.

Отметим, что в центре орбитальной системы координат может лежать как один из аппаратов роя, так и фиктивный аппарат, движущийся по опорной орбите.

Согласно второму закону Ньютона, уравнение возмущенного движения тела малой массы в гравитационном поле Земли имеет вид [11]

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{F},$$

где μ – гравитационный параметр Земли (произведение гравитационной постоянной на массу Земли), \mathbf{r} – геоцентрический радиус-вектор, \mathbf{F} – суммарный вектор внешних возмущений.

1.2.2 Оскулирующие и равноденственные элементы

Кроме того, традиционно для описания орбитального движения в возмущенной задаче двух тел используются кеплеровы элементы орбиты, также называемые оскулирующими элементами: большая полуось a , эксцентриситет e , наклонение i , долгота восходящего узла Ω , аргумент перигея ω . В качестве быстро меняющейся переменной обычно рассматривают истинную аномалию ν . Часто также вместо большой полуоси a используют фокальный параметр $p = a(1 - e^2)$. Все эти элементы и их геометрический смысл проиллюстрированы на рис. 7

У уравнений в оскулирующих элементах есть ряд преимуществ перед уравнениями в декартовых координатах. Так, в случае малых возмущающих ускорений

$$F \ll \frac{\mu}{r^2}$$

оскулирующие элементы изменяются медленно вдоль траектории и на этом обычно основываются асимптотические методы построения движения. Кроме того, полученные в результате решения системы в оскулирующих элементах

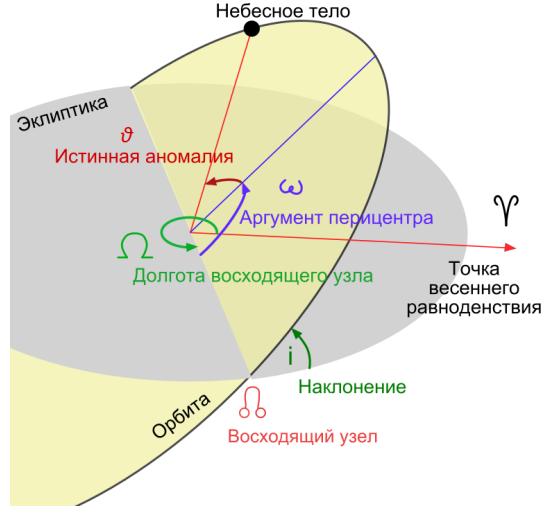


Рис. 7: Кеплеровы элементы орбиты. Адаптировано из [12].

зависимости $p(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $\Omega(t)$, $\omega(t)$, $\nu(t)$ позволяют наглядно представить эволюцию орбиты под действием возмущающих сил, т.е. провести качественный анализ движения. Система уравнений в оскулирующих элементах, описывающая орбитальное движение КА, выглядит следующим образом [11]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= 2F_y \cdot r \sqrt{\frac{p}{\mu}}, \\
 \frac{de}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ F_x \sin \nu + \right. \\
 &\quad \left. + F_y \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \nu + e \frac{r}{p} \right] \right\}, \\
 \frac{di}{dt} &= F_z \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos u, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= F_z \frac{r \sin u}{\sqrt{\mu p} \sin i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-F_x \frac{\cos \nu}{e} + \right. \\
 &\quad \left. + F_y \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \nu}{e} - F_z \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right], \\
 \frac{d\nu}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} + \frac{p}{e\mu} \left[-F_x \cos \nu - F_y \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \nu \right].
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $u = \nu + \omega$ – аргумент широты, а F_x , F_y , F_z – компоненты суммар-

ного вектора внешних возмущений в проекции на оси орбитальной системы координат.

Как известно, система уравнений, записанная в оскулирующих элементах не лишена недостатков. Так, в случае орбиты с малым эксцентриситетом, аргумент перицентра ω перестает быть медленно меняющейся величиной, при нулевом эксцентриситете (т.е. круговой орбите), он и вовсе становится неопределенным. Такое же замечание касается и наклона i , обнуление которого (случай экваториальной орбиты) вызывает неопределенность долготы восходящего узла Ω . Указанную проблему можно легко обойти, например, с помощью следующей совокупности замен:

$$\begin{aligned} e_x &= e \cos(\omega + \Omega), & i_x &= \tan \frac{i}{2} \cos \Omega, \\ e_y &= e \sin(\omega + \Omega), & i_y &= \tan \frac{i}{2} \sin \Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

$$L = \nu + \omega + \Omega.$$

Введенный набор переменных, вкуче с фокальным параметром p , называется равноденственными элементами. За быстро меняющуюся переменную примем L – истинная долгота.

Приведем также формулы для обратного перехода к оскулирующим элементам:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{e_x^2 + e_y^2}, \\ i &= \begin{cases} 2 \arctan \sqrt{i_x^2 + i_y^2}, & 0 < i < \frac{\pi}{2} \\ \pi - 2 \arctan \sqrt{i_x^2 + i_y^2}, & \frac{\pi}{2} < i < \pi \end{cases}, \\ \Omega &= \mathbf{atan2}(i_y, i_x), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\omega = \mathbf{atan2}(e_y, e_x) - \Omega,$$

$$\nu = L - \omega - \Omega.$$

В двух из этих формул арктангенс вычисляется с помощью функции **atan2**, реализованной в основных языках программирования (FORTRAN, C/C++, Java, Python, MATLAB, Mathematica). Она корректно определяет квадрант угловой переменной. Для удобства дальнейшей записи введем дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}\phi &= 1 + i_x^2 + i_y^2, \\ \eta &= i_x \sin L - i_y \cos L, \\ \sigma &= 1 + e_x \cos L + e_y \sin L.\end{aligned}\tag{10}$$

С учетом (8) и (10) система (7) переписется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{2p}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{p}{\mu}} F_y, \\ \frac{de_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \sin L \cdot F_x + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \cos L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_y - \frac{e_y \eta}{\sigma} F_z \right\}, \\ \frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\cos L \cdot F_x + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \sin L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_y + \frac{e_x \eta}{\sigma} F_z \right\}, \\ \frac{di_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\phi \cos L}{2\sigma} F_z, \\ \frac{di_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\phi \sin L}{2\sigma} F_z, \\ \frac{dL}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sigma^2}{p} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\eta}{\sigma} F_z.\end{aligned}\tag{11}$$

1.2.3 Регуляризация и обезразмеривание уравнений движения

При выборе формы записи системы уравнений движения КА необходимо принять во внимание второй закон Кеплера, утверждающий, что при движении по орбите за равные промежутки времени радиус-вектор КА заметает равные площади. Из этого можно сделать вывод, что при разбиении витка на участки, соответствующие равным временным отрезкам, в районе апоцентра будет заметно большее скопление точек, чем в районе перигея. Этот факт вынудит измельчать шаг интегрирования для поддержания точности, что

снижает вычислительную эффективность процедуры.

Как видно из системы (11), время t отсутствует в правой части в явном виде. Оно может содержаться только в компонентах вектора внешних возмущений F_x, F_y, F_z , однако на практике часто возмущающее ускорение \mathbf{F} не зависит явно от времени, а определяется только положением тела на орбите. В таком случае целесообразно провести регуляризацию системы и принять за независимую переменную вместо времени другую быструю переменную, называемую фиктивным временем. Наиболее популярным способом перейти к фиктивному времени является преобразование Сундмана [13]:

$$dt = \sqrt{\frac{a}{\mu}} r ds,$$

где s – фиктивное время, совпадающее при отсутствии возмущений с эксцентрической аномалией. Графическая интерпретация перехода к такому фиктивному времени показана на рис. 8.

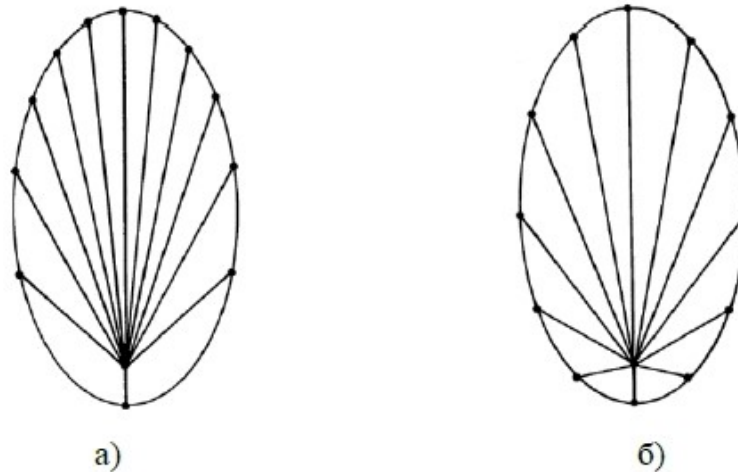


Рис. 8: Распределение 12 точек орбиты, равностоящих по а) средней аномалии б) эксцентрической аномалии

После регуляризации системы к ней надо добавить еще одно уравнение для физического времени t , чтобы уметь восстанавливать его для каждого значения фиктивного времени на сетке интегрирования. В результате система

уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{ds} &= \frac{2pr\sqrt{ap}}{\sigma\mu} \cdot F_2, \\
\frac{de_x}{ds} &= \frac{r\sqrt{ap}}{\mu} \left\{ \sin L \cdot F_1 + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \cos L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_2 - \frac{e_y\eta}{\sigma} F_3 \right\}, \\
\frac{de_y}{ds} &= \frac{r\sqrt{ap}}{\mu} \left\{ -\cos L \cdot F_1 + \left[\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right) \sin L + \frac{e_x}{\sigma} \right] F_2 + \frac{e_x\eta}{\sigma} F_3 \right\}, \\
\frac{di_x}{ds} &= \frac{r\sqrt{ap}\phi \cos L}{\mu 2\sigma} \cdot F_3, \\
\frac{di_y}{ds} &= \frac{r\sqrt{ap}\phi \sin L}{\mu 2\sigma} \cdot F_3, \\
\frac{dL}{ds} &= r\sqrt{\frac{a}{p}} \frac{\sigma^2}{p} + r\sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\eta}{\sigma} \cdot F_3, \\
\frac{dt}{ds} &= r\sqrt{\frac{a}{\mu}}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Для моделирования движения КА используются уравнения в равноденственных элементах (12), вектор координат имеет вид $(p, e_x, e_y, i_x, i_y, L, t)$. Однако для анализа и интерпретации результатов бывает желательным совершить переход к геоцентрической декартовой системе координат, совершающийся с помощью вспомогательных векторов \mathbf{f} и \mathbf{g} :

$$\mathbf{f} = \frac{\sqrt{\mu p}}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{pmatrix} 1 + i_x^2 - i_y^2 \\ 2i_x i_y \\ -2i_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \frac{\sqrt{\mu p}}{1 + i_x^2 + i_y^2} \begin{pmatrix} 2i_x i_y \\ 1 - i_x^2 + i_y^2 \\ 2i_x \end{pmatrix}.$$

Тогда геоцентрические положение и скорость КА находятся по формулам

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \frac{\sqrt{p/\mu}(\mathbf{f} \cos L + \mathbf{g} \sin L)}{1 + e_x \cos L + e_y \sin L}, \\
\mathbf{v} &= \frac{e_x + \cos L}{p} \mathbf{g} - \frac{e_y + \sin L}{p} \mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Процедура обезразмеривания в задачах орбитальной механики сводится к принятию гравитационного параметра главного тела (Земли) за единицу:

$$\mu = GM_{\oplus} \equiv 1.$$

За единицу длины DU примем экваториальный радиус Земли

$$DU = R_{\oplus} = 6378.137 \text{ км.}$$

Тогда единицей скорости VU становится первая космическая скорость

$$VU = V_1 = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}} \approx 7.906 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

После этого легко вычислить получившуюся единицу времени

$$TU = \frac{R_{\oplus}}{V_1} \approx 806.746 \text{ сек.}$$

1.2.4 Уравнения относительного движения

Записанные выше уравнения описывают динамику орбитального движения КА в инерциальной системе координат, связанной с притягивающим центром (Землей). В задачах, связанных с движением группировок спутников, также важно относительное движение аппаратов.

Рассмотрим кеплерово движение (т.е. движение в центральном поле без учета внешних возмущений) двух КА, главного и вспомогательного. Дифференциальное уравнение для радиус-вектора главного аппарата имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c, \quad (14)$$

где

$$r_c = \|\mathbf{r}_c\| = \frac{a_c(1 - e_c^2)}{1 + e_c \cos \nu_c}, \quad (15)$$

и a_c , e_c , ν_c – большая полуось, эксцентриситет и истинная аномалия для главного аппарата соответственно. Похожим образом выглядит уравнение движения вспомогательного спутника:

$$\ddot{\mathbf{r}}_d = -\frac{\mu}{r_d^3} \mathbf{r}_d + \mathbf{T}, \quad (16)$$

где \mathbf{T} – вектор ускорения тяги вспомогательного КА. Введем вектор

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c, \quad (17)$$

который обозначает положение вспомогательного КА относительно главного. Вычитая из (16) уравнение (14), получим

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mu(\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho})}{\|\mathbf{r}_c + \boldsymbol{\rho}\|^3} + \frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c + \mathbf{T}. \quad (18)$$

Чтобы получить уравнения относительного движения в орбитальной системе координат, связанной с главным аппаратом, необходимо учесть, что орбитальная система координат не является инерциальной, и добавить в левую часть (18) фиктивные ускорения:

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{инерц}} = \ddot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{орб}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{инерц}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}). \quad (19)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ означает угловую скорость вращения осей ОСК относительно инерциальной СК:

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\nu}_c). \quad (20)$$

Геоцентрический радиус-вектор главного аппарата в ОСК имеет вид

$$\mathbf{r}_c = (r_c, 0, 0). \quad (21)$$

Обозначим положение вспомогательного аппарата в ОСК вектором

$$\boldsymbol{\rho} = (x, y, z). \quad (22)$$

С учетом выражений (19), (20), (22) уравнение (18) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{\nu}_c \dot{y} - \ddot{\nu}_c y - \dot{\nu}_c^2 x &= -\frac{\mu(r_c + x)}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\mu}{r_c^2} + u_1, \\ \ddot{y} + 2\dot{\nu}_c \dot{x} + \ddot{\nu}_c x - \dot{\nu}_c^2 y &= -\frac{\mu y}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + u_2, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{[(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + u_3, \end{aligned} \quad (23)$$

где u_1 , u_2 и u_3 – компоненты вектора управления \mathbf{u} , который связан с исходным вектором ускорения тяги \mathbf{T} следующим образом:

$$\mathbf{u} = \frac{p_c^2}{\mu} \frac{\mathbf{T}}{(1 + e_0 \cos \nu_c)^3} \quad (24)$$

Воспользуемся нормировкой:

$$\bar{x} = \frac{x}{r_c}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r_c}, \quad \bar{z} = \frac{z}{r_c}, \quad (25)$$

и используем истинную аномалию ν как независимую переменную. По правилу дифференцирования сложной функции,

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = (\cdot)' \frac{d\nu}{dt},$$

где $(\cdot)'$ означает производную по истинной аномалии.

С учетом этих поправок, можем записать линеаризованную систему урав-

нений относительного движения в орбитальной системе координат, носящую название уравнений Шонера-Хемпеля [14]:

$$\begin{aligned}\bar{x}'' &= \frac{3}{1 + e_c \cos \nu_c} \bar{x} + 2\bar{y}' + u_1, \\ \bar{y}'' &= -2\bar{x}' + u_2, \\ \bar{z}'' &= -\bar{z}' + u_3,\end{aligned}\tag{26}$$

1.2.5 Учет внешних возмущений

Исходя из выбора параметров опорной орбиты, можно заключить, что из всех внешних возмущений достаточно учитывать нецентральность гравитационного поля Земли, а также притяжение аппаратов Солнцем и Луной.

Если считать планету сфероидом (эллипсоидом вращения), симметричным относительно экваториальной плоскости, то ее гравитационный потенциал представим в виде [15]

$$U = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_e}{r} \right)^n P_n(\sin \Phi) \right],\tag{27}$$

где P_n , $n = 2 \dots \infty$ – присоединенные полиномы Лежандра, а Φ – угол наклона радиус-вектора аппарата к плоскости экватора (геоцентрическая широта). Слагаемые, стоящие под знаком суммы, называются зональными гармониками. Для Земли влияние зональных гармоник выше четвертого порядка мало. $J_2 = 1.0826 \times 10^{-3}$, а J_3 и далее имеют порядок 10^{-6} и выше. Коэффициенты J_n при $n > 4$ известны достаточно грубо. Поэтому при оценке влияния несферичности Земли можно ограничиться учетом только второй зональной гармоники.

Обозначим $\delta = \frac{3}{2}J_2\mu R_\oplus^2$, тогда

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\delta}{r^3} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \Phi \right).$$

Компоненты соответствующего возмущающего ускорения $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ в проекциях на оси ОСК равны:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\delta}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1), \\ F_y &= -\frac{\delta}{r^4} \sin 2u \sin^2 i, \\ F_z &= -\frac{\delta}{r^4} (\sin u \sin 2i). \end{aligned} \tag{28}$$

Чтобы учитывать притяжение Солнцем и Луной, необходимо знать их положения в текущий момент времени. Пусть \mathbf{r}_s – вектор, связывающий КА и Солнце, а \mathbf{R}_s – вектор Земля-Солнце, а μ_s – гравитационный потенциал Солнца. Дополнительное ускорение, действующее на КА, равно

$$\mathbf{F}_s = -\frac{\mu_s}{r_s^3} \mathbf{r}_s + \frac{\mu_s}{R_s^3} \mathbf{R}_s, \tag{29}$$

поскольку необходимо также учитывать ту силу, с которой Солнце притягивает Землю. Аналогичное выражение можно составить для ускорения, сообщаемого Луной \mathbf{F}_m .

В интегрируемой системе уравнений (12) вектор внешних возмущений разложен по компонентам в ОСК, поэтому необходимо совершить переход, домножив вектора \mathbf{F}_m и \mathbf{F}_s на соответствующую матрицу А. Ввиду громоздкости записи, приведем ее поэлементно:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i, \\
A_{12} &= \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i, \\
A_{13} &= \sin u \sin i, \\
A_{21} &= -\cos \Omega \sin u - \sin \Omega \cos u \cos i, \\
A_{22} &= -\sin \Omega \sin u + \cos \Omega \cos u \cos i, \\
A_{23} &= \cos u \sin i, \\
A_{31} &= \sin \Omega \sin i, \\
A_{32} &= -\cos \Omega \sin i, \\
A_{33} &= \cos i,
\end{aligned} \tag{30}$$

где Ω , u и i – долгота восходящего узла, аргумент широты и наклонение для орбиты аппарата в геоцентрической инерциальной системе координат.

1.2.6 LQR-управление

Поскольку одной из задач данной работы является применение LQR-управления одним из аппаратов, в данной главе опишем управление, основанное на линейно-квадратичном критерии качества.

Имея в виду приведенные ранее уравнения Шонера-Хемпеля, положим, что есть некая линейная система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Psi}(t), \tag{31}$$

в которой $\mathbf{x}(t)$ – фазовый вектор, $\mathbf{u}(t)$ – вектор управлений, $\mathbf{\Psi}(t)$ – вектор внешних возмущений. Матрицы A и B – нестационарные матрицы системы. Будем считать, что есть участок времени $[t_0; t_f]$, в течение которого необходимо совместить траекторию системы с желаемой $\mathbf{x}_{des}(t)$. При этом необходимо минимизировать характерную величину управления \mathbf{u} . Другими словами, нам

нужно минимизировать функционал [16]

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_{des}(t_f))^T F(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_{des}(t_f)) + \quad (32)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{des}(t))^T Q(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{des}(t)) + \mathbf{u}(t)^T R \mathbf{u}(t)] dt.$$

В [17] приведена теорема, которая говорит о том, что для системы (31) существует управление, оптимальное в смысле функционала (32) и такое управление единственно. Приведем далее эту теорему с необходимым доказательством.

Теорема. [17]. Пусть дана система

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)$$

и целевой функционал

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_{des}(t_f))^T F(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_{des}(t_f)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{des}(t))^T Q(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{des}(t)) + \mathbf{u}(t)^T R \mathbf{u}(t)] dt,$$

в котором \mathbf{u} - не ограничено, задан участок (t_0, t_f) , матрицы F и Q - положительно полуопределенные, а R - положительно определенная. Тогда существует оптимальный закон управления, заданный как

$$\mathbf{u}_{opt} = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\mathbf{x}(t) - R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{G}(t),$$

где симметричная матрица $P(t)$ является решением уравнения Рикатти

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)SP(t) - Q,$$

а вектор \mathbf{G} – решение присоединенного уравнения Рикатти

$$\dot{\mathbf{G}}(t) = -(A^T(t) - P(t)S)\mathbf{G}(t) + Q(t)\mathbf{x}_{des}(t) - P(t)\Psi(t).$$

При этом выполнены условия

$$P(t_f) = F, \quad \mathbf{G}(t_f) = -F\mathbf{x}_{des}(t_f).$$

Доказательство. Запишем гамильтониан системы (31):

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) [A(t)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + \Psi(t)]. \quad (33)$$

Также

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -Q(t)\mathbf{x}(t) + Q(t)\mathbf{x}_{des}(t) - A^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \quad (34)$$

Управление будет оптимальным, если

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = R\mathbf{u} + B^T\boldsymbol{\lambda} = 0, \quad (35)$$

то есть

$$\mathbf{u}_{opt}(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t). \quad (36)$$

Таким образом, получаем, что

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) - S(t)\boldsymbol{\lambda}(t) + \Psi(t), \quad (37)$$

где $S(t) = B(t)R^{-1}(t)B^T(t)$. В матричной записи

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -S \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi \\ Q\mathbf{x}_{des} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Кроме того, должно выполняться условие трансверсальности

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = F(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_{des}(t_f)). \quad (39)$$

Будем искать $\boldsymbol{\lambda}$ в виде

$$\boldsymbol{\lambda} = P(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t).$$

Тогда уравнение на $\boldsymbol{\lambda}$ распадается на две части:

$$\dot{P}(t) = -P(t)A(t) - A^T(t)P(t) + P(t)SP(t) - Q \quad (40)$$

и

$$\dot{\mathbf{G}}(t) = -(A^T(t) - P(t)S)\mathbf{G}(t) + Q(t)\mathbf{x}_{des}(t) - P(t)\boldsymbol{\Psi}(t), \quad (41)$$

называемыми, соответственно, уравнением Рикатти и присоединенным уравнением Рикатти.

Используя условия

$$P(t_f) = F, \quad \mathbf{G}(t_f) = -F\mathbf{x}_{des}(t_f),$$

можем проинтегрировать оба уравнения в обратном времени и найти $P(t)$ и $\mathbf{G}(t)$.

Теперь исходная система примет вид:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (A(t) - S(t)P(t))\mathbf{x}(t) - S(t)\mathbf{G}(t) + \boldsymbol{\Psi}(t), \quad (42)$$

а требуемое управление выражается так:

$$\mathbf{u}_{opt} = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)\mathbf{x}(t) - R^{-1}(t)B^T(t)\mathbf{G}(t). \quad \square \quad (43)$$

Применим теперь описанный алгоритм к имеющейся задаче. Как упоминалось ранее, система (31) может быть упомянутой ранее системой уравнений

относительного движения Шонера-Хемпеля (26). Они описывают относительное движение двух аппаратов, один из которых движется по кеплеровой орбите, поэтому за начало координат примем фиктивный аппарат, двигающийся по невозмущенной орбите, параметры которой в начальный момент времени совпадают с положением реального аппарата при возмущенном движении.

Принимая вместо дифференцирования по времени производную по истинной аномалии, получим для системы (31):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3/k & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где $k = 1 + e_0 \cos \nu_0$.

$$B = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & E_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Вектор внешних возмущений Ψ состоит из трех слагаемых – возмущения Луны F_m , Солнца F_s и второй зональной гармонике F_{J_2} . Поскольку уравнения Шонера-Хемпеля предполагают нормировку, следует совершить преобразование в соответствии с (24):

$$\Psi = (F_m + F_s + F_{J_2}) \times \frac{p_0^2}{\mu(1 + e_0 \cos(\nu_0))^3}, \quad (46)$$

где p_0 , e_0 и ν_0 – параметры фиктивного аппарата на опорной орбите.

2 Технологическая часть

2.1 Оптимальная инициализация орбит КА. Выбор количества КА в формации

2.1.1 Опорная орбита и области интереса

Из постановки задачи известно, что опорная орбита должна иметь апогейное расстояние $R_a = 200000$ км и наклонение $i = 51.6^\circ$. Для определенности будем считать, что перигейное расстояние $R_\pi = 2000$ км. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} R_\pi = a(1 - e), \\ R_a = a(1 + e), \end{cases} \quad (47)$$

получим

$$\begin{cases} e = 0.922, \\ a = 16.835. \end{cases} \quad (48)$$

Положим также $\Omega = \omega = 0$. За начальное значение истинной аномалии выберем $\nu = \pi$, что соответствует точке апогея. Напомним, что после обезразмеривания длина большой полуоси эллиптической орбиты и ее фокальный параметр выражаются в экваториальных радиусах Земли.

В итоге элементы опорной орбиты имеют вид:

$$\begin{aligned} a_0 &= 16.835, \\ e_0 &= 0.922, \\ i_0 &= 0.900, \\ \Omega_0 &= 0, \\ \omega_0 &= 0, \\ \nu_0 &= \pi. \end{aligned} \quad (49)$$

Проинтегрируем движение одного аппарата с начальными условиями

(49) без учета внешних возмущений. Получившаяся орбита изображена на рис. 9.

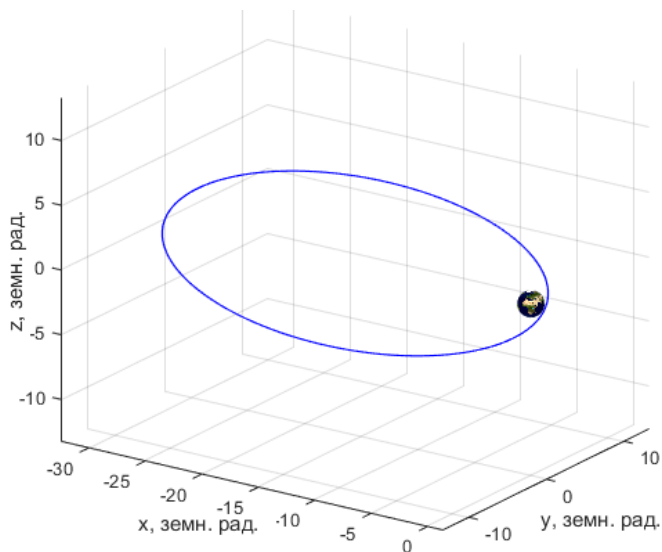


Рис. 9: Опорная орбита (невозмущенный случай).

Для наглядности в точку $(0, 0)$ помещен земной шар в правильном масштабе.

Проинтегрируем теперь движение КА по орбите с учетом несферичности Земли и притяжения Луны и Солнца. Орбита перестанет быть кеплеровой и начнет прецессировать (см. рис. 10).

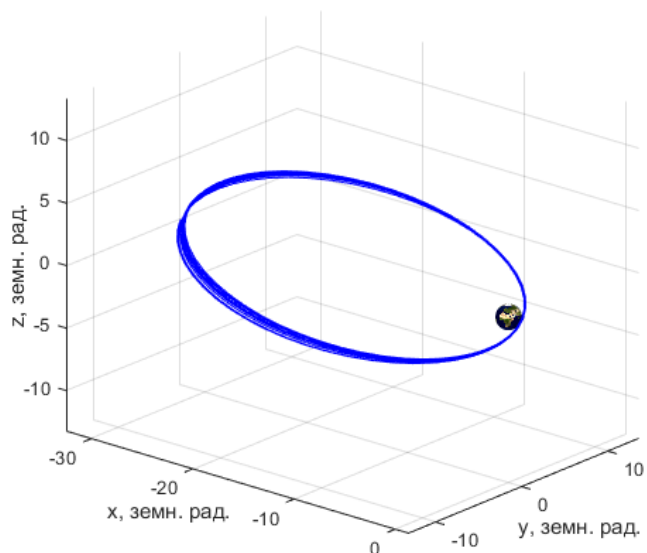


Рис. 10: Прецессия опорной орбиты под воздействием внешних возмущений.

В постановке задачи указывается, что нужно рассмотреть относительное движение аппаратов в некоторой области пространства, близкой к апогею

их орбит. Будем исследовать все точки, в которых удаленность аппаратов от Земли r превышает 15 земных радиусов, т.е. $r > 15$. Будем называть эти зоны областями интереса, см. рис. 11.

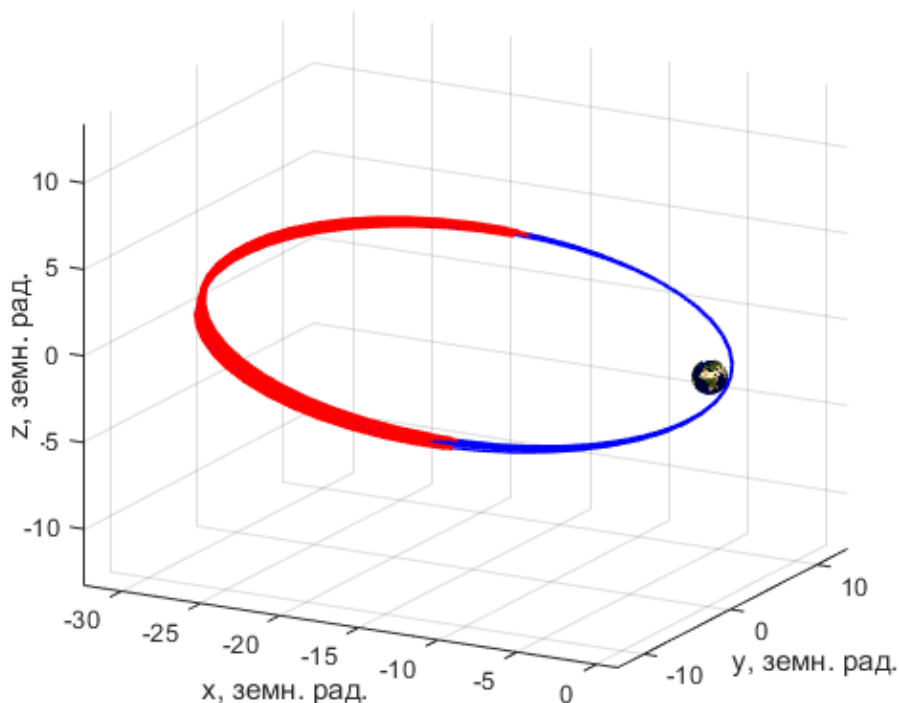


Рис. 11: Области интереса (красным) на нескольких смежных витках возмущенного движения.

2.1.2 Пассивное движение формации

Исследуем теперь пассивное движение четверки аппаратов по орбите. Для начала поместим в области апоцентра четверку аппаратов произвольным образом, лишь бы в начальный момент времени она составляла правильный тетраэдр. Соответствующие радиус-векторы для аппаратов будут иметь,

например, такой вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= (-32.3571, 0, 0), \\
 \mathbf{r}_2 &= (-32.3414, 0, 0), \\
 \mathbf{r}_3 &= (-32.3493, 0.0136, 0), \\
 \mathbf{r}_4 &= (-32.3493, 0.0045, 0.0128).
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

Положим скорости аппаратов изначально одинаковыми и соответствующими скорости движения КА по опорной кеплеровой орбите. В начальный момент качество формации – идеальное: $Q = Q_v Q_s = 1$. Образованный тетраэдр проиллюстрирован на рис. 12.

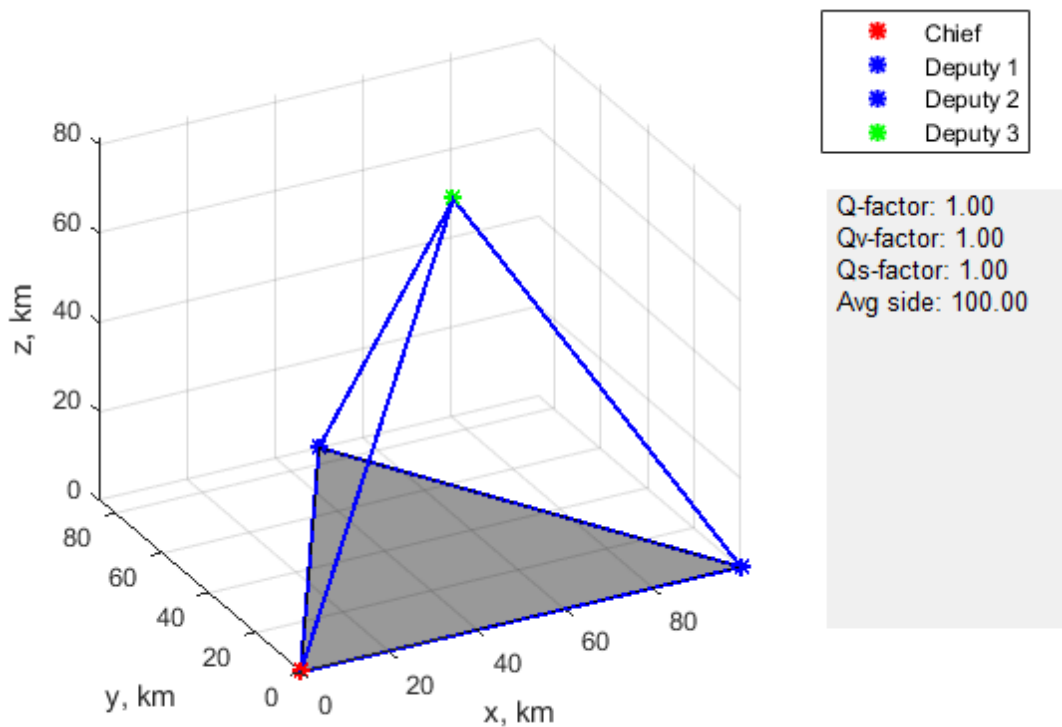


Рис. 12: Начальная конфигурация формации.

Однако с течением времени формация сильно деградирует. К третьему витку ни в одной точке области интереса формация не имеет значений функционала, отличных от нуля. График изменения качества формации показан на рис. 13.

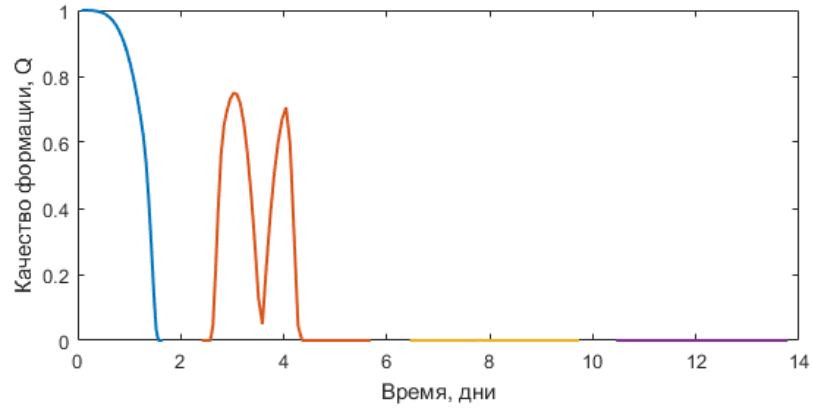


Рис. 13: Изменение функционала качества с течением времени. Разными цветами обозначены значения для разных витков.

Уже на втором витке спутники, составляющие исходный тетраэдр, начинают разбегаться, что проиллюстрировано на рис. 14.

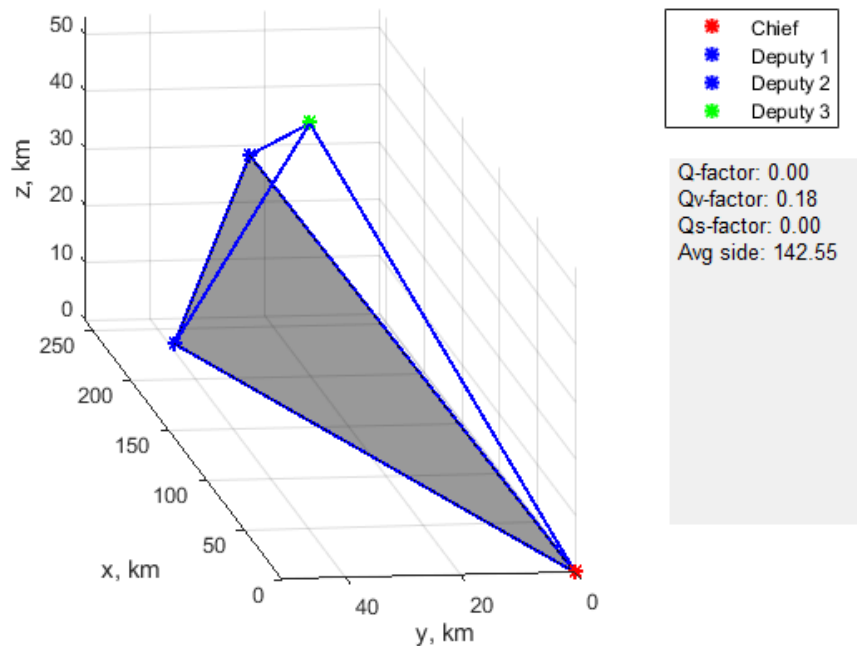


Рис. 14: Конфигурация формации в апогее на втором витке.

2.1.3 Подбор начальных параметров орбит КА на сетке

Поскольку пассивное движение КА в общем случае плохо сохраняет требуемую формацию, попробуем перебором подобрать необходимые параметры

орбит аппаратов. Будем варьировать различные элементы орбиты и перебирать полученные таким образом различные комбинации четверок аппаратов с целью выбора наилучших начальных параметров вывода формации.

Начнем с варьирования только угловых переменных Ω , ω и ν , а большую полуось a , эксцентриситет e и наклонение i положим для всех КА одинаковыми и равными опорной орбите. Как известно из небесной механики [9], в этом случае для относительного движения аппаратов в формации будет отсутствовать вековой дрейф, а значит, и деградация их геометрической конфигурации.

Поскольку для рассмотрения интересны формации с относительным удалением аппаратов около 100 километров, подберем необходимый масштаб изменения параметров на сетке. Из простейшей формулы длины дуги, используя расстояние до апоцентра, получим

$$\delta = \frac{100}{R_a} = \frac{100}{200000} = 0.0005.$$

Для достижения лучших результатов примем шаг сетки равным

$$\delta = 0.0002.$$

Зафиксируем первый аппарат на исходной орбите, т.е. $\Omega_1 = \omega_1 = 0$, $\nu_1 = \pi$. Для трех других аппаратов нам необходимо перебрать все возможные комбинации из

$$\begin{aligned} \delta\Omega &= [-0.0004, -0.0002e, 0.0000, 0.0002e, 0.0004], \\ \delta\omega &= [-0.0004, -0.0002e, 0.0000, 0.0002e, 0.0004], \\ \delta\nu &= [\pi - 0.0004e, \pi - 0.0002, \pi, \pi + 0.0002, \pi + 0.0004]. \end{aligned} \tag{51}$$

Всего вариантов орбит $5^3 = 125$, кроме того нужно рассмотреть все четверки аппаратов. Однако мы условились ранее, что первый аппарат не имеет вариаций угловых переменных, т.е. его орбита всегда постоянна. Это значительно

сокращает количество вариантов и приводит нас к перебору $C_{125}^3 = 317750$ различных четверок.

Для начала проинтегрируем все 125 орбит. После этого воспользуемся простым перебором всех комбинаций аппаратов для выявления лучших формаций. Для каждого из 10 витков на орбите будем выбирать наилучшую формацию.

Приведем таблицу 1, в которой опишем среднее интегральное значение качества формации трех наилучших четверок на каждом из десяти витков.

Таблица 1: Четверки аппаратов и соответствующие значения Q_{int}

| Номер витка | \bar{Q} | №1 | №2 | №3 | №4 |
|-------------|-----------|----|----|----|-----|
| 1 | 0.6749 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| | 0.6748 | 1 | 48 | 88 | 98 |
| | 0.6746 | 1 | 73 | 88 | 118 |
| 2 | 0.6449 | 1 | 73 | 88 | 118 |
| | 0.6448 | 1 | 39 | 69 | 84 |
| | 0.6422 | 1 | 48 | 88 | 98 |
| 3 | 0.6460 | 1 | 39 | 69 | 84 |
| | 0.6459 | 1 | 73 | 88 | 118 |
| | 0.6440 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| 4 | 0.6268 | 1 | 39 | 69 | 84 |
| | 0.6267 | 1 | 73 | 88 | 118 |
| | 0.6184 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| 5 | 0.6408 | 1 | 39 | 69 | 84 |
| | 0.6407 | 1 | 73 | 88 | 118 |
| | 0.6399 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| 6 | 0.6410 | 1 | 39 | 69 | 84 |
| | 0.6409 | 1 | 73 | 88 | 118 |
| | 0.6400 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| 7 | 0.6412 | 1 | 39 | 69 | 84 |
| | 0.6412 | 1 | 73 | 88 | 118 |
| | 0.6404 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| 8 | 0.6458 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| | 0.6457 | 1 | 48 | 88 | 98 |
| | 0.6429 | 1 | 39 | 69 | 84 |
| 9 | 0.6430 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| | 0.6429 | 1 | 48 | 88 | 98 |
| | 0.6420 | 1 | 39 | 69 | 84 |
| 10 | 0.6443 | 1 | 59 | 69 | 109 |
| | 0.6442 | 1 | 48 | 88 | 98 |
| | 0.6429 | 1 | 39 | 69 | 84 |

Как видно из таблицы, состав четверок с наилучшим показателем качества составяемого тетраэдра меняется для разных витков. Одной из четверок с наилучшими результатами на различных витках является четверка аппаратов под номерами 1, 59, 69 и 109, имеющая следующие начальные параметры $\mathbf{ce} = (e, p, \Omega, i, \omega, \nu)$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{ce}_1 &= (0.9220, 2.5247, 0, 0.9006, 0, 3.1416), \\
 \mathbf{ce}_{59} &= (0.9220, 2.5247, -0.0002, 0.9006, -0.0004, 3.1418), \\
 \mathbf{ce}_{69} &= (0.9220, 2.5247, -0.0002, 0.9006, 0.0002, 3.1418), \\
 \mathbf{ce}_{109} &= (0.9220, 2.5247, 0.0004, 0.9006, -0.0004, 3.1418),
 \end{aligned} \tag{52}$$

Изменение интегрального показателя качества формации для этих четырех КА показано на рис. 15. На рис. 16 показано значение функционала качества формации в каждой точки области интереса для каждого витка.

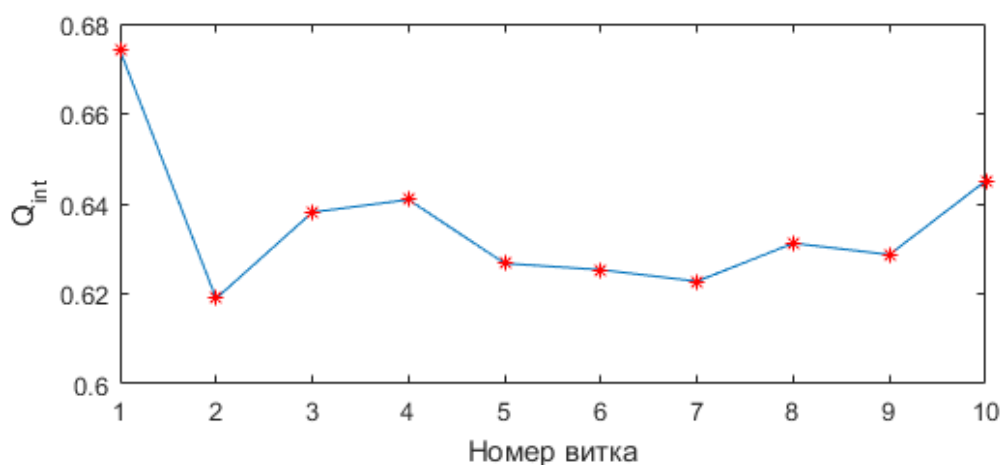


Рис. 15: Изменение интегрального показателя качества формации при пассивном движении.

Рассмотрим теперь изменение показателя качества формации в области интереса на отдельном витке (рис. 16).

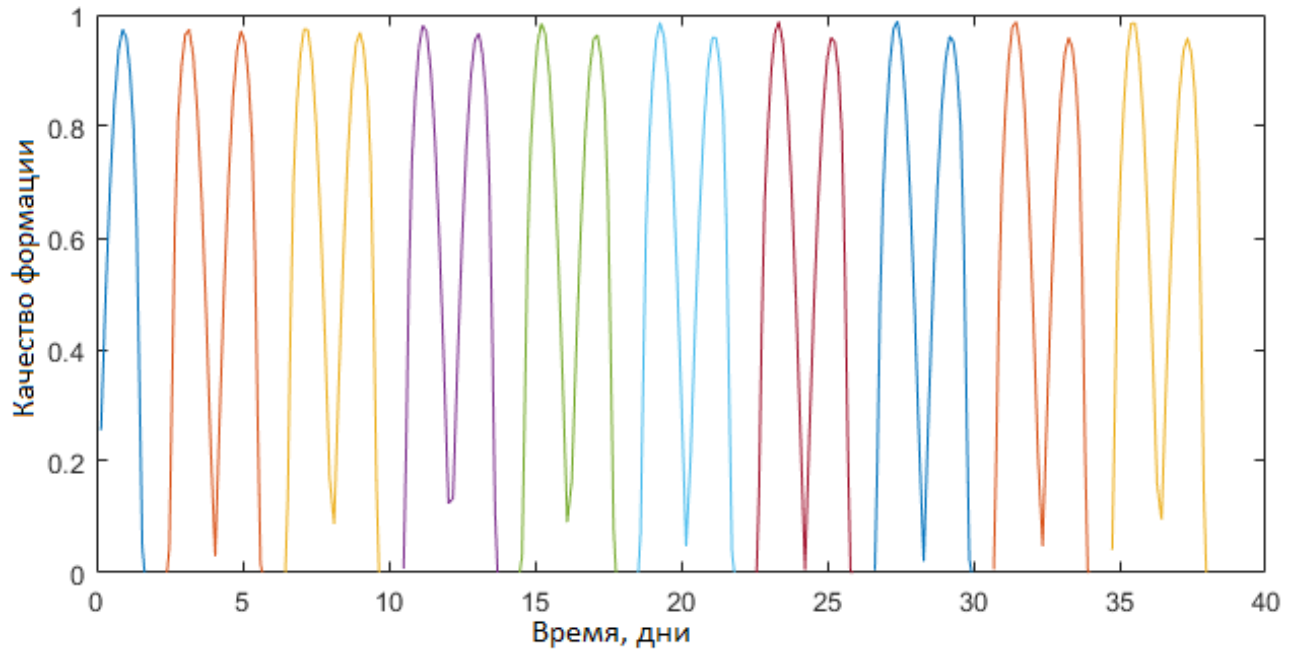


Рис. 16: Изменение показателя качества формации при пассивном движении. Разные цвета для разных витков.

Как видим, в середине области интереса на каждом витке происходит серьезное ухудшение качества формации. В соответствии с рис. 11, точки ухудшения качества формации находятся в апоцентре орбиты. Это объясняется тем, что у орбит аппаратов совпадает значение большой полуоси a , и в окрестности апоцентра все КА находятся примерно в одной плоскости, касающейся сферы с радиусом, равным апогейному расстоянию.

Поскольку в постановке задачи указано, что минимальное значение показателя качества формации равно 0.7, необходимо подбирать исходные параметры орбиты, варьируя все шесть параметров.

2.1.4 Оптимальная инициализация орбит КА

Построим функцию, которая подберет оптимальные сдвиги шести начальных параметров орбит четырех КА относительно соответствующих значений для исходной орбиты, с тем, чтобы максимизировать интегральный показатель качества формации на каждом витке. Минимизируемый функцио-

нал J будет выглядеть как

$$J = -\bar{Q}.$$

В данном подходе допустим также малые вариации ранее неизменявшихся параметров орбиты: большой полуоси a , эксцентриситета e и наклона i .

Как и раньше будем считать, что орбита первого аппарата в четверке совпадает с опорной в начальный момент времени. Для варьирования остается по 6 элементов для трех аппаратов. Это приводит нас к задаче 18-ти мерной оптимизации.

Воспользуемся встроенным в среду *Matlab* оптимизатором *fmincon*. Эта функция использует sqp-метод, основанный на последовательном сведении исходной задачи к задаче квадратичной оптимизации. В качестве начального приближения подставим полученные ранее при подборе значения начальных параметров.

В результате оптимизации получим некоторый локальный минимум по начальным условиям выведения на орбиту:

$$\begin{aligned} A_1 &= (0.9220, 2.5247, 0, 0.9006, 0, 3.1416), \\ A_2 &= (0.9218, 2.5309, -0.0004, 0.9005, -0.0002, 3.1417), \\ A_3 &= (0.9216, 2.5368, -0.0003, 0.9005, 0.0003, 3.1416), \\ A_4 &= (0.9216, 2.5360, 0.0002, 0.9006, -0.0004, 3.1417). \end{aligned} \tag{53}$$

Эволюция значений показателя качества формации на витках и изменение интегрального показателя показаны на рисунках 17 и 18 соответственно.

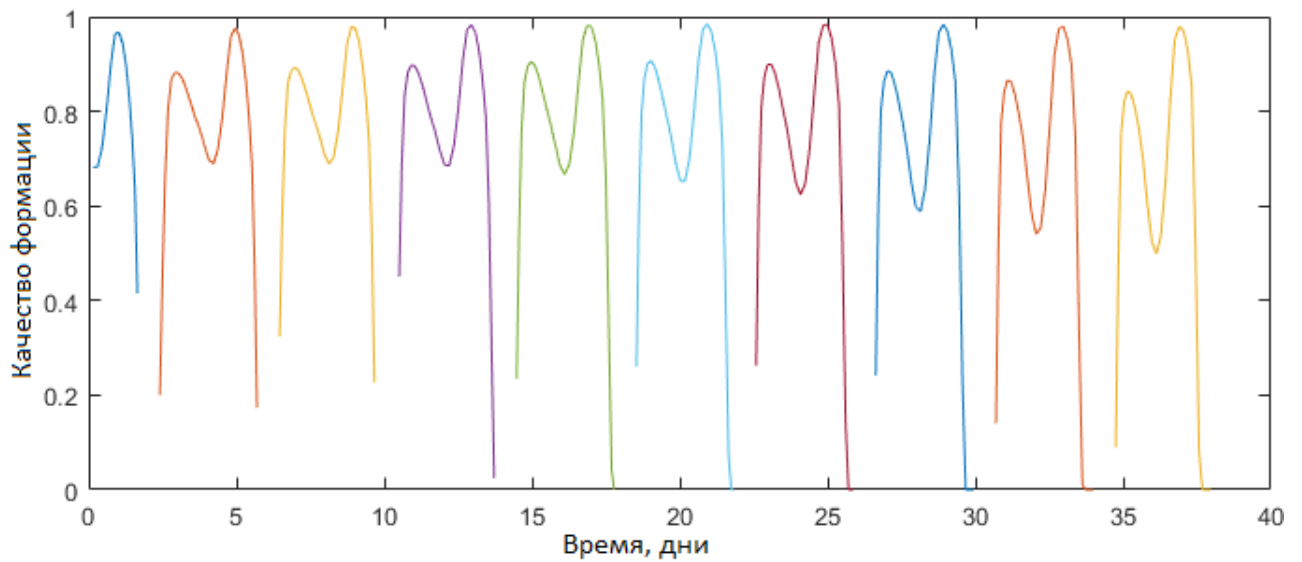


Рис. 17: Изменение показателя качества формации при оптимальном подборе шести параметров.

Как видим провалы в апоцентре стали намного слабее, однако полностью избавиться от них не удалось.

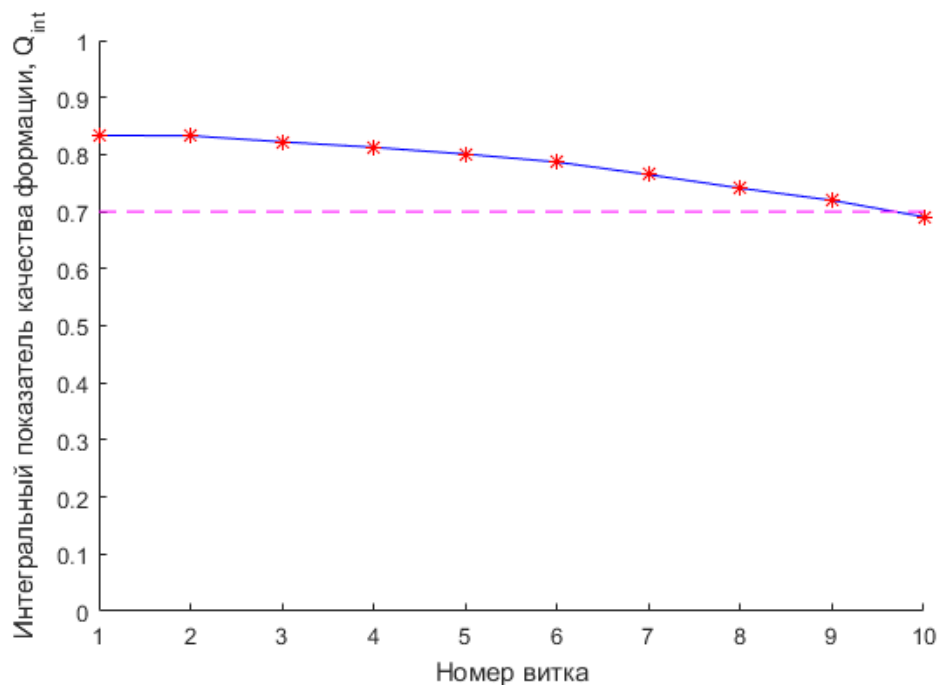


Рис. 18: Изменение интегрального показателя качества формации при пассивном движении и оптимальном подборе параметров. Пунктиром показано минимально допустимое для получения качественных измерений значение.

Полученные результаты уже являются приемлемыми для поставленной задачи. При пассивном движении и на десяти витках функционал качества поддерживается выше, чем требуемое значение. Однако, если есть цель поддерживать формацию на большем временном интервале, необходимо управлять главным КА-микроспутником.

2.2 Поддержание геометрической конфигурации формации

2.2.1 Целевое положение управляемого КА

Будем управлять четвертым аппаратом, имеющим исходное положение, задаваемое радиус-вектором \mathbf{r}_4 . Пусть три других аппарата имеют соответственно радиус векторы \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 . Они образуют треугольник, лежащий в основании тетраэдра. Чтобы найти координаты точки, лежащей в вершине наилучшего тетраэдра, необходимо провести перпендикуляр требуемой высоты из центра треугольника. Для этого воспользуемся свойствами векторного произведения. Найдем геометрический центр треугольника

$$\mathbf{r}_m = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)$$

и положения двух КА относительно центра:

$$\mathbf{r}_{2o} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_m,$$

$$\mathbf{r}_{3o} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_m.$$

Единичный вектор нормали, перпендикулярный плоскости треугольника, равен

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_{2o} \times \mathbf{r}_{1o}}{|\mathbf{r}_{2o} \times \mathbf{r}_{1o}|}.$$

На этом шаге следует удостовериться, что нормаль направлена в сторону управляемого аппарата. Оценим угол с помощью скалярного произведения. Если $(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_m, \mathbf{n}) < 0$, то нужно поменять направление нормали $\mathbf{n} = -\mathbf{n}$.

Координаты точки, лежащей в вершине требуемого тетраэдра, есть

$$\mathbf{x}_{des} = \mathbf{r}_m + H\mathbf{n},$$

где H – расстояние от плоскости треугольника до искомой точки. Для правильного тетраэдра со стороной L

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}}L.$$

2.2.2 Применение LQR-управления для улучшения качества формации

Для начала попробуем управлять четверым аппаратом непосредственно в интересующей нас области на одном из витков. Как уже было сказано в теоретической части, требуется зафиксировать кеплерову орбиту, параметры которой в начальный момент времени совпадают с параметрами возмущенного движения реального аппарата. Чтобы сопоставить положение фиктивного аппарата на опорной орбите с положением формации в данный момент времени t , необходимо решить уравнение Кеплера

$$E - e_0 \sin E = \sqrt{\frac{1}{a_0^3}}(t - t_0), \quad (54)$$

где e_0 и a_0 – эксцентриситет и большая полуось опорной орбиты соответственно, t_0 – момент прохода аппаратом перигея, а E – эксцентрическая аномалия,

связанная с истинной в соответствии с формулами

$$\begin{aligned}\nu &= \mathbf{atan2}(\sqrt{1 - e_0^2} \sin E, \cos E - e_0) \\ E &= \mathbf{atan2}(\sqrt{1 - e_0^2} \sin \nu, e_0 + \cos \nu)\end{aligned}\tag{55}$$

Можем записать уравнение Кеплера для опорной орбиты в момент времени \tilde{t} входа в область интереса:

$$\tilde{E} - e_0 \sin \tilde{E} = \sqrt{\frac{1}{a_0^3}}(\tilde{t} - t_0),\tag{56}$$

где \tilde{E} – соответствующая этому моменту времени эксцентрическая аномалия.

Вычитая (56) из (54), получим закон изменения положения фиктивного аппарата на опорной орбите с течением времени:

$$E - \tilde{E} - e_0(\sin E - \sin \tilde{E}) = \sqrt{\frac{1}{a_0^3}}(t - \tilde{t}).\tag{57}$$

Применяя управление (43) на первом витке, получим изменение показателя качества формации, показанное на рис. 19.

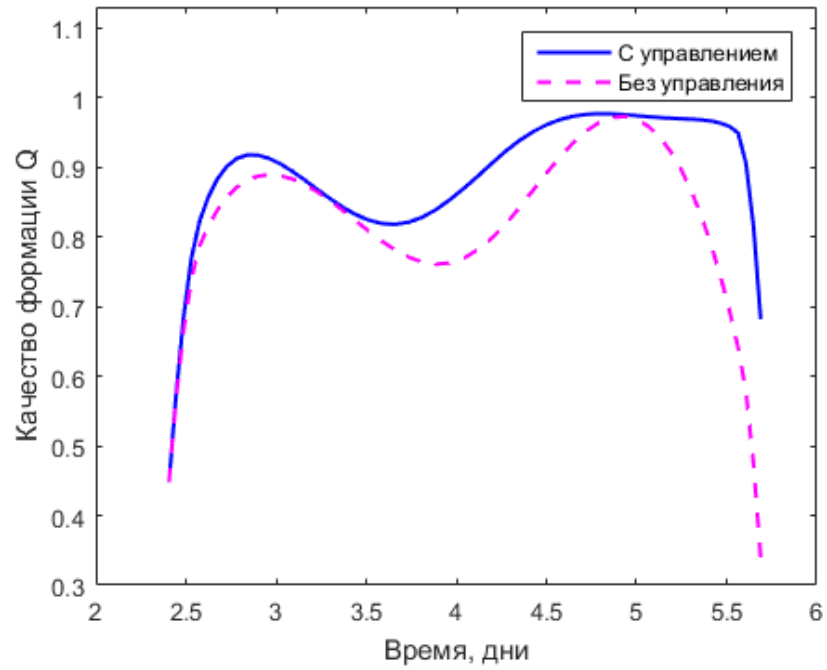


Рис. 19: Изменение качества формации с течением времени на первом витке с использованием LQR управления и без него.

На рис. 20 и 21 представлены графики для ускорения тяги и расстояния до требуемой точки как функций времени.

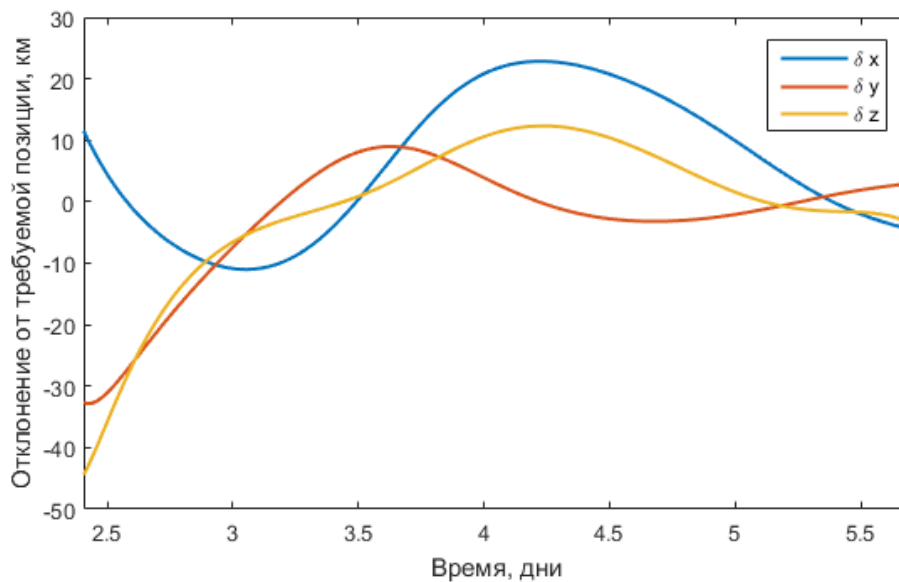


Рис. 20: Расстояние до требуемой точки как функция времени.

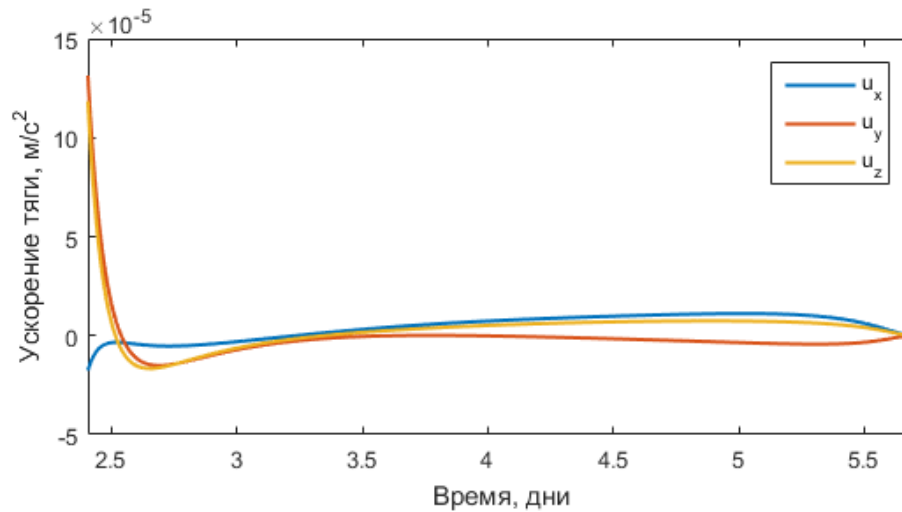


Рис. 21: Ускорение тяги как функция времени.

Введем величину характеристической скорости, определяемой как

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{u}| dt.$$

Согласно формуле Циолковского

$$\Delta v = I \ln \left(\frac{M_1}{M_2} \right),$$

где I – удельный импульс, M_1 и M_2 – начальная и конечная массы КА соответственно, с помощью Δv можно оценить, насколько затратен в смысле запаса топлива имеющийся алгоритм управления. При использовании LQR-управления на первом витке имеем:

$$\Delta v = 3.3690 \text{ м/с.}$$

Такое управление реализуемо с помощью современных электроспрейных двигателей (рис. 22). Последние достижения в этой области позволили создать панель размером 1.4 см^2 , обладающую тягой порядка 50 мкН и возможностью объединить несколько таких элементов в единый массив. Так, 100 подобных

двигателей эквивалентны для наноспутника запасу характеристической скорости в несколько сотен м/с, занимая всего 10 см^2 площади на борту аппарата [18].

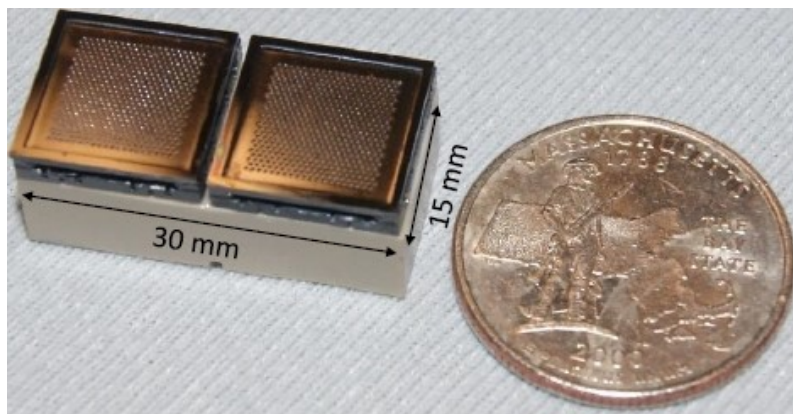


Рис. 22: Блок из двух электроспрейных двигателей в сравнении с монеткой.

Ясно, что полученный при использовании управления интегральный показатель качества превосходит таковой при пассивном движении, однако у данной схемы управления есть недостатки. На рис. 23 приведено изменение качества формации при включении управляющей тяги в областях интереса на трех витках.

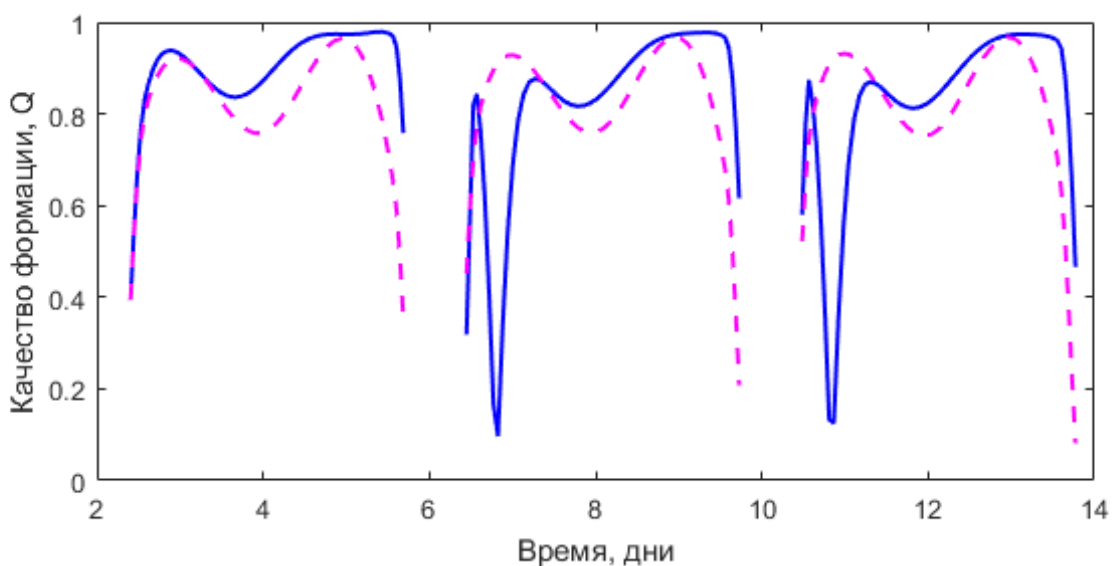


Рис. 23: Изменение качества формации при использовании LQR управления на трех витках подряд.

На втором и третьем витке видны провалы в качестве формации. Это

обусловлено тем, что при пассивном движении между областями интереса, вследствие примененных управляющих воздействий, аппарат отклоняется от требуемой позиции к началу следующей области интереса. Расстояние до требуемой точки на втором витке показано на рис. 24.

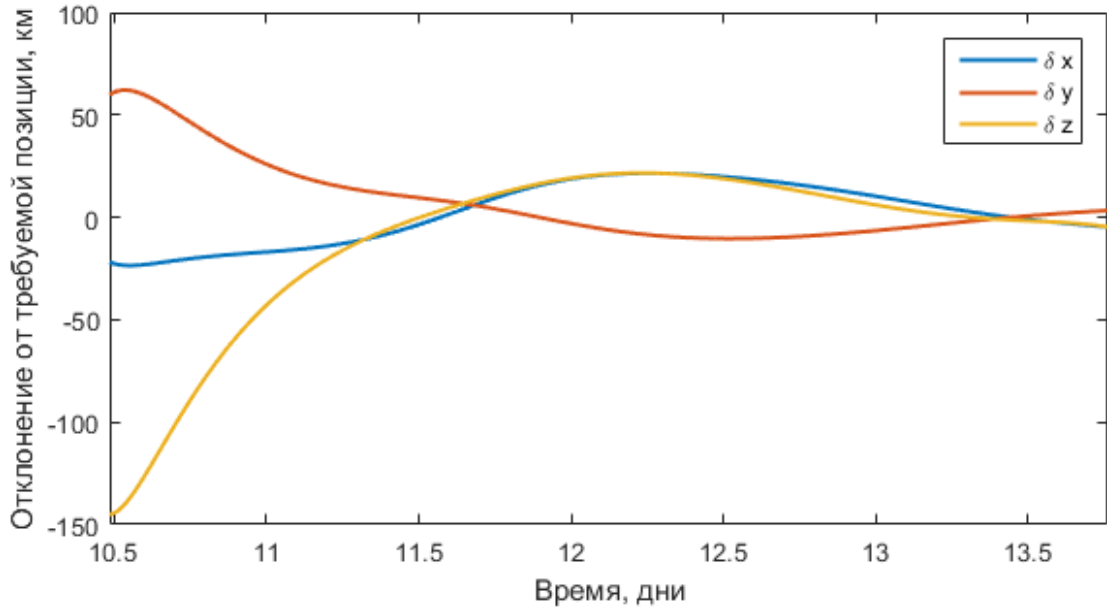


Рис. 24: Расстояние до требуемой точки на втором витке.

Оценим влияние LQR-управления на интегральный показатель качества формации (рис. 25).

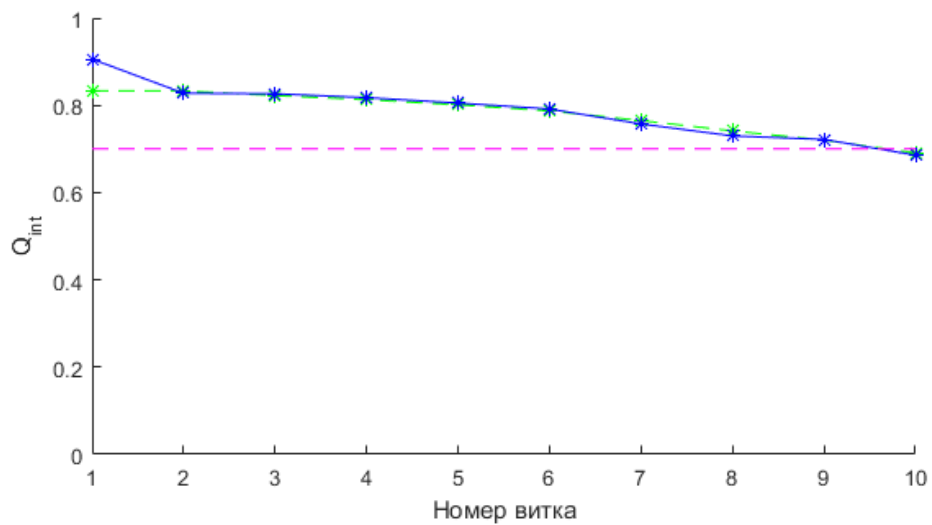


Рис. 25: Изменение интегрального показателя качества формации при пассивном движении (зеленый пунктир) и LQR управлении (синим).

В среднем результат оказывается таким же, что и при пассивном движении, однако нельзя не принимать во внимание провалы в началах областей интереса при использовании LQR-управления. Суммарное значение характеристической скорости Δv при такой схеме управления

$$\Delta v = 79.8651 \text{ м/с.}$$

Приведенные выше результаты показывают, что LQR-управление работает, однако качественных улучшений использованная схема управления не дает. Кроме того, есть и физические причины, по которым управлять аппаратом во время прохождения им области интереса нельзя. Из-за активной работы двигателей снижается точность научных измерений. В связи с этим попробуем приводить управляемый аппарат не непрерывно к требуемой позиции, а в оптимальную позицию для пассивного движения к началу области интереса.

Рассмотрим случай, в котором управление четвертым КА осуществляется после области интереса на 9-м витке. В соответствии с рис. 18 именно после него интегральный показатель качества формации становится ниже требуемого. Попробуем продлить время активного функционирования формации, найдя оптимальное положение для управляемого КА, методом схожим с использованным ранее для получения оптимальных параметров выведения аппаратов.

Проведя оптимизацию, получим требуемые координаты \mathbf{x}^* для положения четвертого аппарата в момент начала прохождения формацией области интереса на 10-м витке.

После этого проинтегрируем систему (12) в обратном направлении из точки \mathbf{x}^* , чтобы восстановить траекторию, по которой КА может попасть в найденное оптимальное положение. Затем применим LQR-управление к четвертому аппарату в области интереса на 9-м витке. Графики управления, отклонения от требуемой позиции, а также показателя качества формации

приведены на рис. 26, 27 и 28 соответственно.

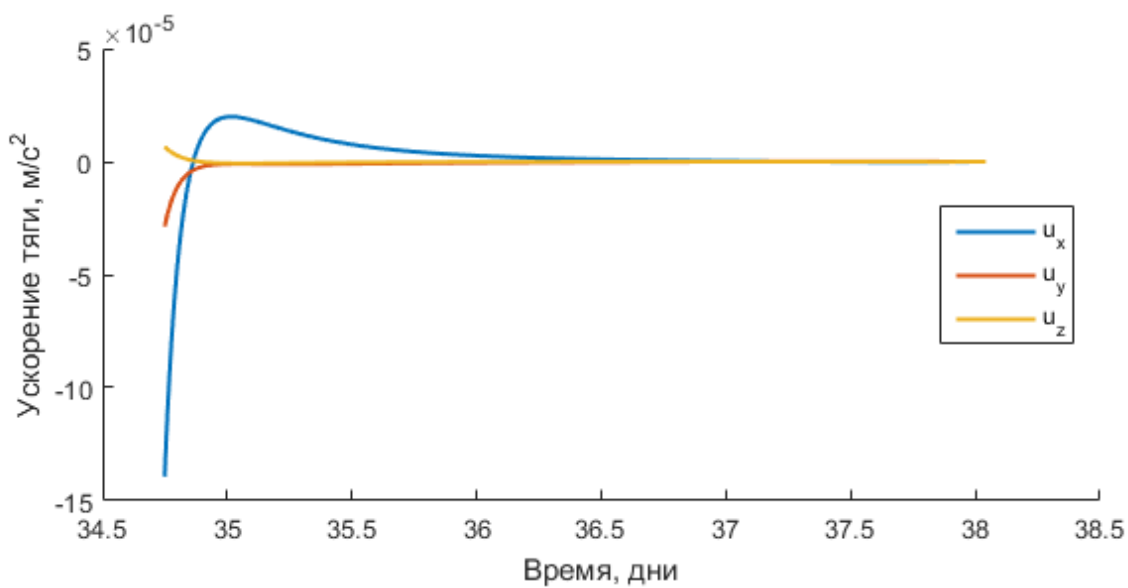


Рис. 26: Управляющее ускорение как функция времени.

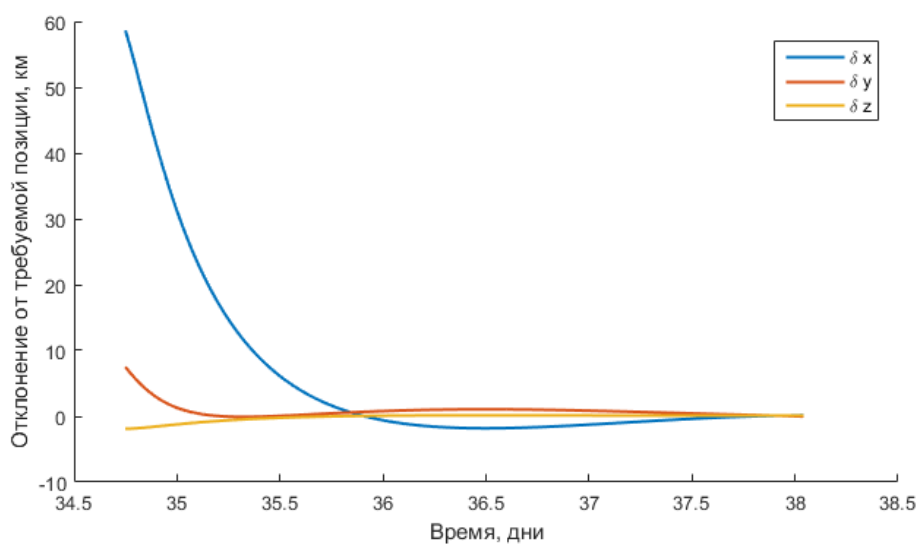


Рис. 27: Расстояние до требуемой позиции как функция времени.

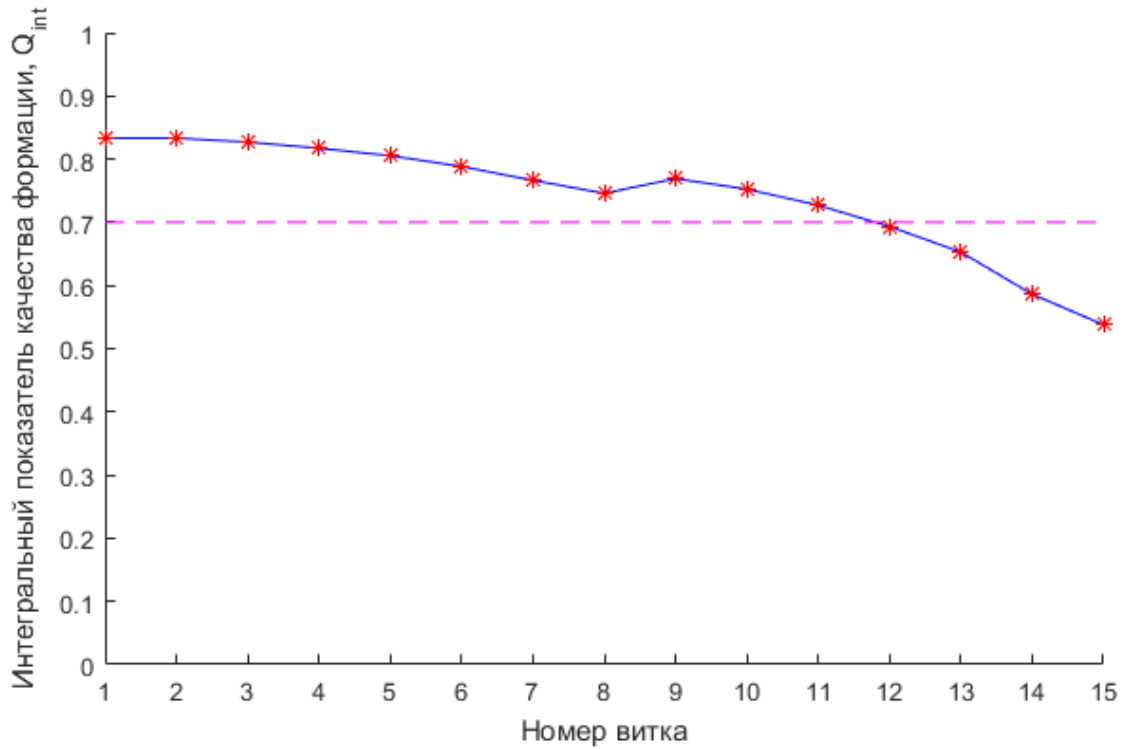


Рис. 28: Интегральный показатель качества формации после применения корректирующего LQR-управления

Получившийся результат позволяет продлить время поддержания формацией хорошей конфигурации на несколько витков (до 12-го). Затраты характеристической скорости при приведении аппарата в желаемое положение в области интереса на 9-м витке равны

$$\Delta v = 1.5923 \text{ м/с.}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В квалификационной работе проанализирована динамика движения роя наноспутников на высокоэллиптической околоземной орбите. Рассмотрены различные системы координат и уравнения движения в них.

С помощью численного моделирования в среде MATLAB исследовано пассивное движение формации и эволюция функционала ее качества со временем. Осуществлен прямой перебор параметров выведения роя, на основе которого далее были найдены оптимальные параметры инициализации аппаратов на орбите.

Установлено, что при пассивном движении геометрическая конфигурация деградирует с течением времени, однако показатель качества не падает ниже минимально требуемого значения на необходимом количестве витков. Чтобы продлить время активного существования формации, были применены различные схемы LQR-управления.

Управление одним из аппаратов в области интереса на одном из витков действительно улучшает итоговый результат и достигается при сравнительно небольших затратах характеристической скорости $\Delta v = 3.3690$ м/с. Однако применение такого управления на нескольких витках подряд ($\Delta v = 79.8651$ м/с) не имеет практического смысла, поскольку итоговый интегральный показатель качества формации почти совпадает с таковым при пассивном движении.

Наилучшие результаты показала схема, при которой управление включалось только в области интереса на 9-м витке, с тем, чтобы к 10-му витку аппарат пришел в заранее найденное оптимальное положение. Затраты характеристической скорости оказались минимальными ($\Delta v = 1.5923$ м/с), а качество формации стало выше требуемого на нескольких последующих витках.

В качестве продолжения настоящего исследования представляет интерес рассмотреть применение оптимального 4-х импульсного управления для коррекции орбиты одного из аппаратов вместо изученного непрерывного LQR-управления. Также можно провести исследование, в котором будет рассматриваться количество аппаратов, превышающее 4, а образуемые тетраэдры будут иметь различные масштабы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Проект ИНТЕРБОЛ: [Электронный ресурс].
URL: <http://www.iki.rssi.ru/interball/>. (Дата обращения: 12.04.2016).
- [2] NASA. Mission Geotail: [Электронный ресурс].
URL: <http://science.nasa.gov/missions/geotail/>. (Дата обращения: 12.04.2016).
- [3] NASA. Mission THEMIS: [Электронный ресурс].
URL: <http://www.nasa.gov/mission-pages/themis/>. (Дата обращения: 12.04.2016).
- [4] NASA. Mission MMS: [Электронный ресурс].
URL: <http://www.nasa.gov/mission-pages/mms/>. (Дата обращения: 12.04.2016).
- [5] Википедия. Магнитное пересоединение: [Электронный ресурс].
URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Магнитное-пересоединение>. (Дата обращения: 12.04.2016).
- [6] MAGNETIC RECONNECTION: [Электронный ресурс].
URL: <http://www.aldebaran.cz/astrofyzika/plazma/reconnection.html>.
(Дата обращения: 12.04.2016).
- [7] Guzman, J. J.; Edery, A., Mission design for the MMS tetrahedron formation, 2004 Ieee Aerospace Conference Proceedings, Vols 1-6 Pages: 533-540
- [8] NASA. Mission MMS. Science: [Электронный ресурс].
URL: <http://mms.gsfc.nasa.gov/science.html>. (Дата обращения: 12.04.2016).
- [9] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
- [10] Roscoe C.W.T., Vadali S.R., Alfriend K.T., Optimal Formation Design for Magnetospheric Multiscale Mission Using Differential Orbital Elements // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34. No. 4. P. 974–985. URL: <http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2010-7958>

- [11] Мирер С.А. Механика космического полета. Орбитальное движение. М.: Резолит, 2007. 270 с.
- [12] Wikipedia. Orbital elements: [Электронный ресурс].
URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital-elements>. (Дата обращения: 12.04.2016).
- [13] Szebehely V., Bettis D.G. Recent Developments of Integrating the Gravitational Problem of N Bodies // *Astrophys. Space Sci.* 1971. Vol. 13, No 2. P. 365–376.
- [14] Alfriend K., Vadali S.R., Gurfil P., How J., Breger L., Spacecraft Formation Flying. Dynamics, control and navigation // *Elsevier Astrodynamics Series* – 2010. 378 p.
- [15] Аксёнов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М: Наука, 1977. 360 с.
- [16] P.A. Capo-Lugo, P.M. Bainum, Active Controls Schemes Based on the Linearized Tschauner-Hempel Equations to Maintain the Separation Distance Constraints for the NASA Bechmark Tetrahedron Constellation// *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. — 2007. — Vol. 2. — No. 8. — P. 1541–1559. — URL: <http://msp.org/jomms/2007/2-8/p12.xhtml>.
- [17] M. Athans, P. L. Falb, *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*, Dover Publications, 2006. 880 p.
- [18] L. Perna, F. Mier-Hicks and P. Lozano. 2012. Miniature Ion Electrospary Thrusters and Performance Tests on CUBESATs, Proceedings of the AIAA/USU Conference on Small Satellites, Mission Lessons, SSC12-VI-5. <http://digitalcommons.usu.edu/smallsat/2012/all2012/50/>.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Иллюстративный материал доклада

В иллюстративный материал доклада входят 20 слайдов.

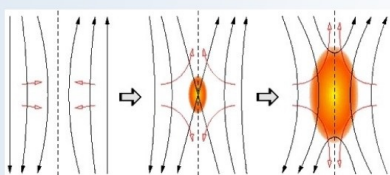
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Э. БАУМАНА»

КАФЕДРА «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Выпускная квалификационная работа «Динамика и управление роем наноспутников в задаче исследования магнитосферы Земли»

| | | |
|------------------|---|---------------|
| Выполнил | студент группы ФН2-83 | Коптев М.Д. |
| Руководитель ВКР | д.ф.-м.н., профессор | Ткачёв С.Б. |
| Консультант | к.ф.-м.н., ассистент м.н.с. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН | Трофимов С.П. |

Исследование магнитосферы



Магнитное пересоединение



Миссия NASA - MMS



Наноспутник

Области интереса и опорная орбита

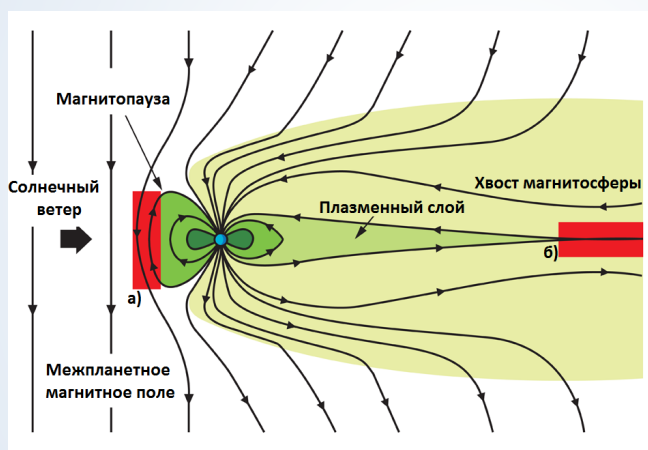
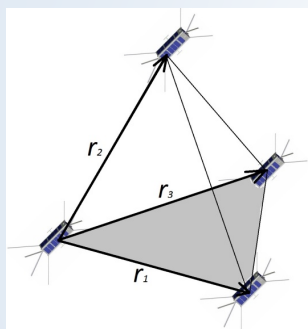


Схема магнитосферы Земли

$R_{\text{П}} = 200000 \text{ км}$
 $R_{\text{а}} = 2000 \text{ км}$
 $i = 51.6^\circ$
 10 ВИТКОВ

3

Функционал качества формации



$$V_a = \frac{1}{6} r_1 (r_2 \times r_3)$$

$$L = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 l_i; \quad V_r = \frac{\sqrt{2} L^3}{12}$$

$$Q_v = \frac{V_a}{V_r}$$

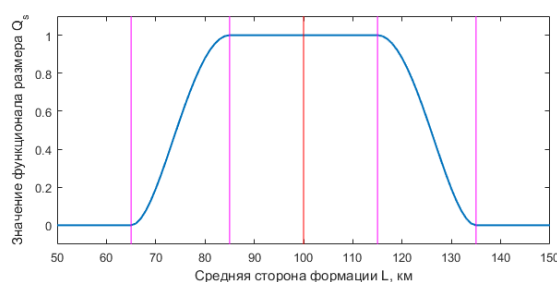


График Q_s

$$Q = Q_v \cdot Q_s$$

$$Q_{int} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt$$

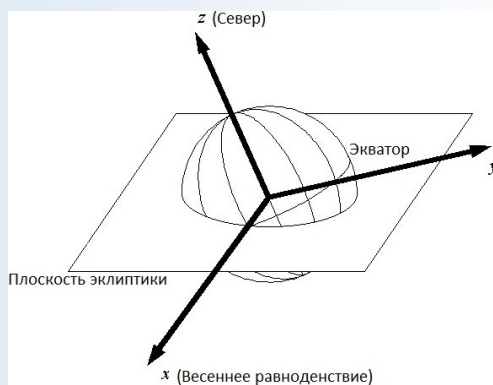
4

Задача

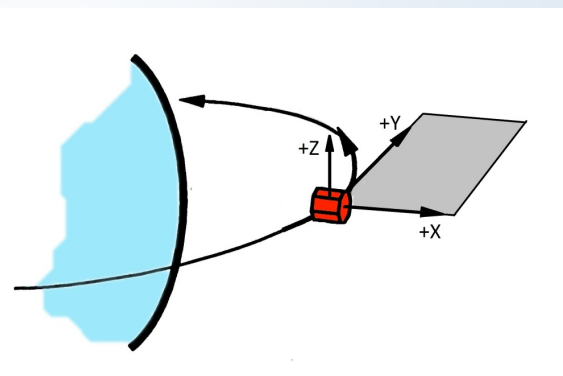
- Определить минимальное количество аппаратов в группировке, а также параметры их инициализации для обеспечения наилучшего показателя качества формации в регионе интереса;
- Выработка алгоритма управления одним из аппаратов для улучшения полученных результатов.

5

Системы координат



Геоцентрическая С.К.



Орбитальная С.К.

6

Элементы орбиты



Кеплеровы элементы
(a, e, i, Ω, ω)

Равноденственные элементы:

$$e_x = e \cos(\omega + \Omega)$$

$$e_y = e \sin(\omega + \Omega)$$

$$i_x = tg \frac{i}{2} \cos(\Omega)$$

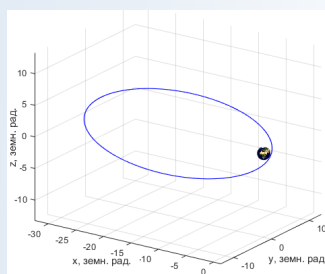
$$i_y = tg \frac{i}{2} \sin(\Omega)$$

$$p = a(1 - e^2)$$

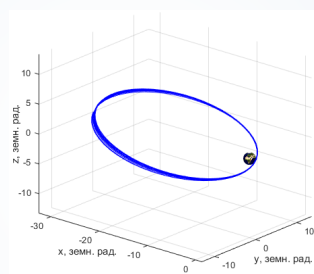
Преобразование Сундмана

$$dt = \sqrt{\frac{a}{\mu}} r ds$$

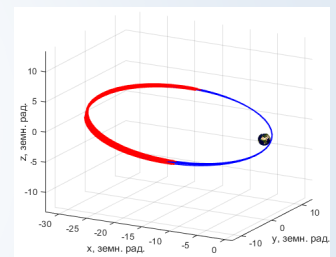
Орбитальное движение



Опорная орбита

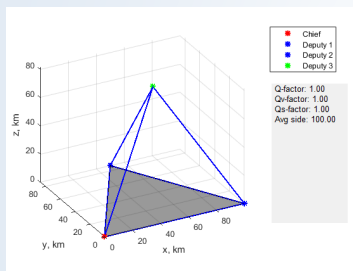


Возмущенное движение

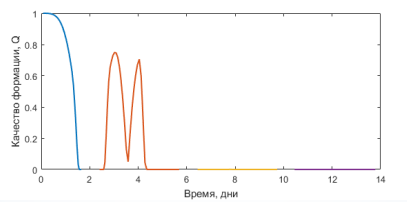


Области интереса

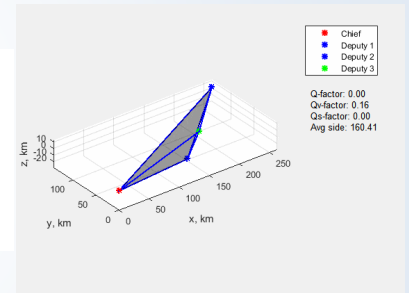
Пассивное движение формации 4-х КА



В начальный момент времени



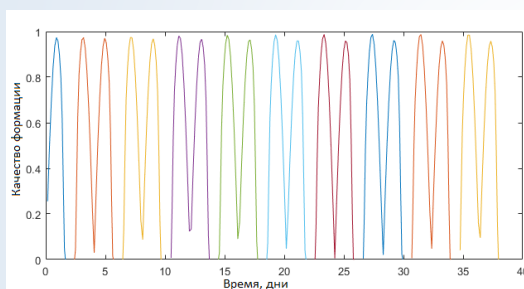
Деградация формации



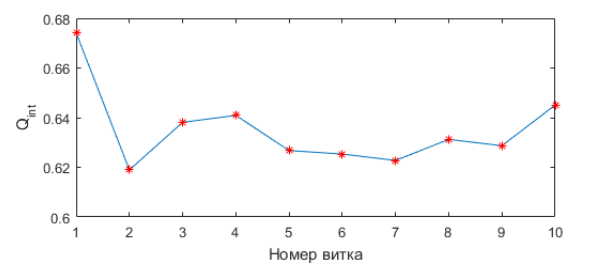
На втором витке

9

Подбор параметров $\delta\Omega, \delta\omega, \delta\vartheta$



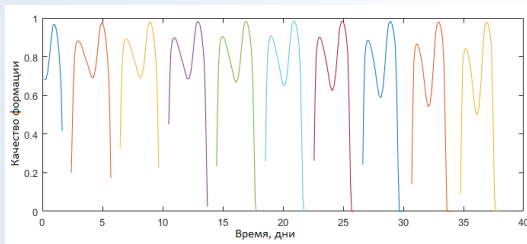
Качество формации на 10 витках



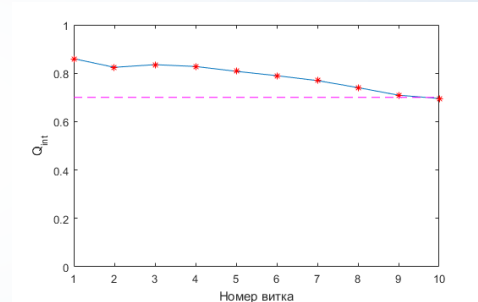
Интегральный показатель качества формации

10

Оптимизация по всем шести начальным параметрам

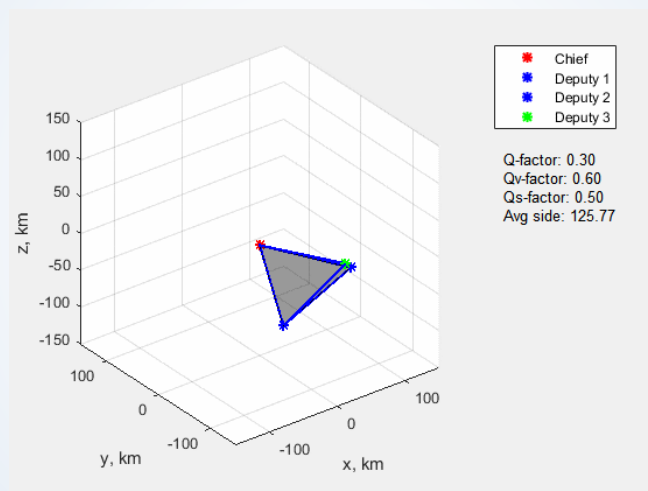


Качество формации на 10 витках



Интегральный показатель качества формации

Эволюция тетраэдра



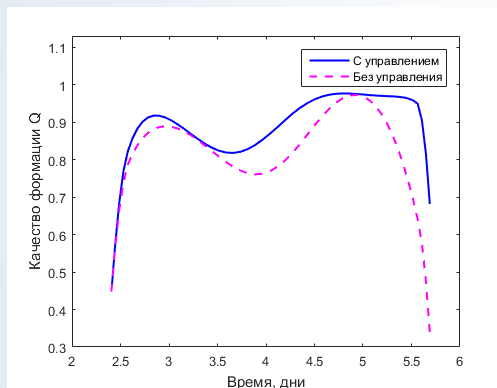
LQR-управление

Линейно-квадратичный регулятор:

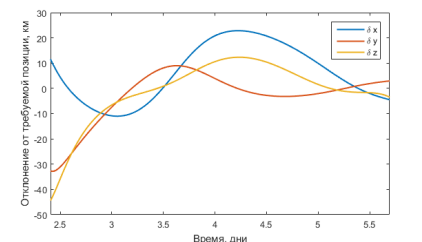
$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_{des}(t_f))^T F(\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_{des}(t_f)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{des}(t))^T Q(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{des}(t)) + \mathbf{u}(t)^T R \mathbf{u}(t)] dt$$

13

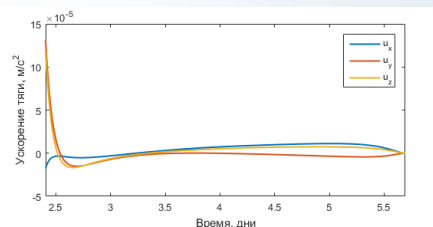
Применение LQR-управления



Качество формации



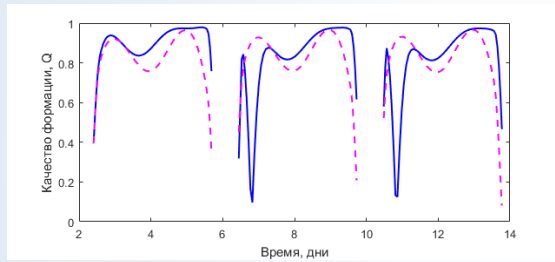
Отклонение



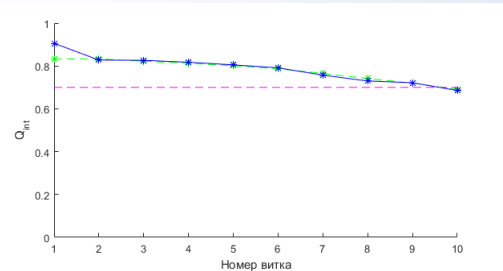
Управление

14

Многовитковое LQR

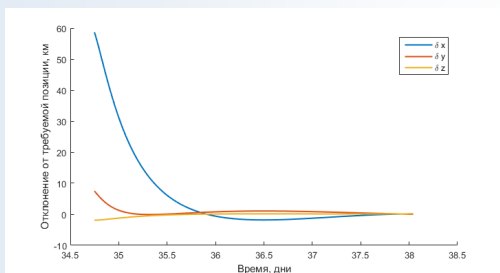


Качество формации

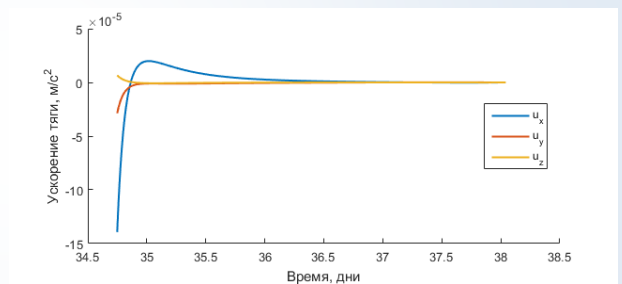


Интегральный показатель

Пролонгация миссии

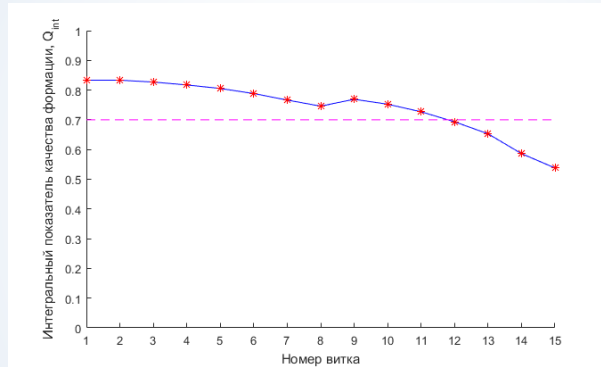


Отклонение от желаемой позиции



LQR-управление

Результат LQR схемы 2



Интегральный показатель после приведения КА в оптимальную позицию на 10 витке

17

Результаты работы

- приобретен опыт работы с механикой космического полёта
- проведено моделирование пассивного движения с учётом внешних возмущений
- выполнен подбор наилучших параметров выведения
- реализовано LQR-управление для продления времени миссии.

18

Направления дальнейшей работы

- Поддержание качества формации с помощью оптимального 4-х импульсного управления
- Динамика и управление роем с увеличенным числом аппаратов для проведения мультимасштабных измерений

19

Спасибо за внимание!

20