

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Факультет управления и прикладной математики  
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

**УПРАВЛЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ДВУХ  
СПУТНИКОВ СО СФЕРИЧЕСКИМ ПАРУСОМ С  
ИЗМЕНЯЕМЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ОТРАЖЕНИЯ**

Выпускная квалификационная работа  
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:  
студент 172 группы \_\_\_\_\_ Досаев Роман Владимирович

Научный руководитель:  
к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Ткачев Степан Сергеевич

Научный консультант:  
\_\_\_\_\_ Маштаков Ярослав Владимирович

Москва 2015

# Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Системы координат, постановка задачи.....	5
1.1 Системы координат и матрицы перехода.....	5
1.2 Постановка задачи.....	7
1.3 Учет возмущений.....	9
Глава 2. Вычисление силы солнечного давления и коэффициента отражения.....	10
2.1 Вычисление силы солнечного давления.....	10
2.2 Компоненты результирующей силы.....	14
Глава 3. Построение управления.....	15
3.1 ПД-регулятор.....	15
3.2 Модификация параметров управления.....	16
3.3 Оценка абсолютной величины SRP.....	17
Глава 4. Численное моделирование.....	18
Заключение.....	22
Благодарности.....	23
Список литературы.....	24

## Введение

Удержание спутников в формации на относительно близком расстоянии друг от друга является неотъемлемой частью групповых полетов в космосе. Для этого в настоящий момент существуют различные способы, основанные, например, на использовании магнитного или электростатического взаимодействия [1], [2], силы сопротивления атмосферы [3], силы солнечного давления [4], [5].

Известно [6], что в отсутствие внешних возмущений при определенных начальных условиях для группового полета спутников существуют периодические траектории дочернего спутника относительно материнского, движущегося по круговой траектории, даже в отсутствие управления. Это следует из уравнений Хилла, которые получаются путем линеаризации уравнений относительного движения близко летящих друг от друга спутников в центральном гравитационном поле Земли. При наличии возмущений, таких как несферичность гравитационного поля Земли, влияние сопротивления атмосферы, влияние солнечного давления, относительное движение в формации спутников может претерпевать значительные вековые уходы. Однако многие из этих возмущающих факторов, напротив, можно использовать для устранения относительного векового ухода. Данная работа посвящена применению одного из таких факторов – силы светового давления для поддержания пространственной формации спутников.

В работе рассматривается относительное движение двух спутников: материнского – пассивного (без наличия какого-либо способа управления положением в пространстве) и дочернего – активного (с солнечным парусом). Оба спутника имеют сферическую форму. Угловое движение спутников не рассматривается. Требуемое управление, приводящее движение дочернего спутника в замкнутое относительно , строится на основе ПД-регулятора. [7]

В роли параметра управления выступает переменный, распределенный по сферической поверхности дочернего спутника, коэффициент отражения. С практической точки зрения самой сложной задачей, требующей высокой точности, является изменение коэффициента отражения за определенный промежуток времени, которое может быть проведено путем разбиения поверхности на пиксели и регулирования цвета каждого из них. Регулирование цвета в свою очередь можно реализовать с помощью плоских квадратных поворачивающихся пластин, черных с одной стороны и отражающих свет с другой. Энергию на поворот аппарат может получать либо от солнечных батарей, либо от изотопной атомной батареи. Другой возможностью является изготовление пластин из материала, который меняет свою отражательную способность под действием электрического тока [8], [9].

В свою очередь, изменение цвета ячейки производится путем подачи электрического напряжения или иного источника энергии.

Стоит отметить, что применение переменной отражательной способности уже испытывалось в космических миссиях, например при исследовании движения солнечного паруса Icaros в 2010 году [10]. Поверхность этого паруса была покрыта жидкокристаллической пленкой, способной изменять коэффициент отражения. Благодаря этому можно изменять давление в различных частях паруса, тем самым поворачивать его и изменять угол падения солнечных лучей. Таким образом, появляется возможность существенно влиять на направление полета.

Из возмущений, влияющих на относительное движение аппаратов, в работе учитываются несферичность Земли и слабая эллиптичность орбиты материнского спутника, тогда как атмосферное сопротивление и тень Земли не рассматриваются.

# Глава 1. Системы координат, постановка задачи.

## 1.1 Системы координат и матрицы перехода

В работе используются следующие системы координат

$O_a Y_1 Y_2 Y_3$  инерциальная система координат (ИСК): начало координат расположено в центре масс Земли,  $O_a Y_1$  направлена в точку весеннего равноденствия,  $O_a Y_3$  направлена перпендикулярно плоскости экватора,  $O_a Y_2$  дополняет систему до правой ортогональной системы координат. Орты вдоль осей  $O_a Y_1, O_a Y_2, O_a Y_3$  обозначим за  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  соответственно.

$Oxyz$  – орбитальная система координат (ОСК): точка  $O$  совпадает с центром масс основного спутника. Ось  $Oz$  направлена по радиус-вектору спутника в текущей точке орбиты, ось  $Ox$  направлена по нормальной составляющей скорости спутника. Ось  $Oy$  дополняет систему координат до правой тройки (рис.2).

$Ox_1 x_2 x_3$  – солнечная система координат (ССК): ось  $Ox_3$  направлена по вектору на Солнце  $\mathbf{s}$ ,  $Ox_1$  перпендикулярна плоскости эклиптики,  $Ox_2$  дополняет до правой тройки. Орты вдоль осей  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  обозначим за  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  соответственно.

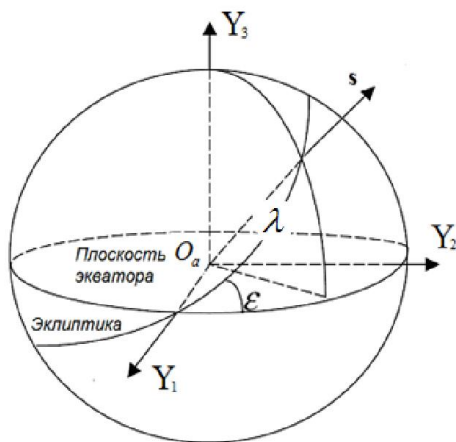


Рис. 1. ИСК

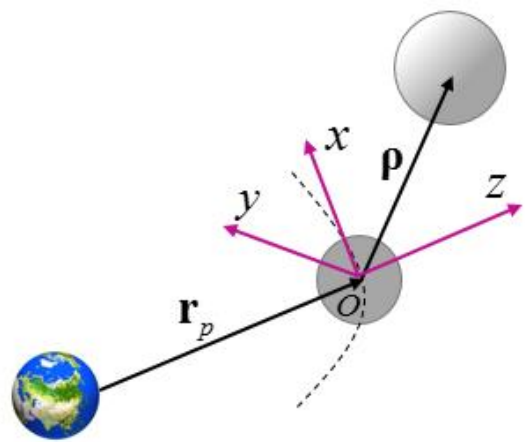


Рис. 2. ОСК

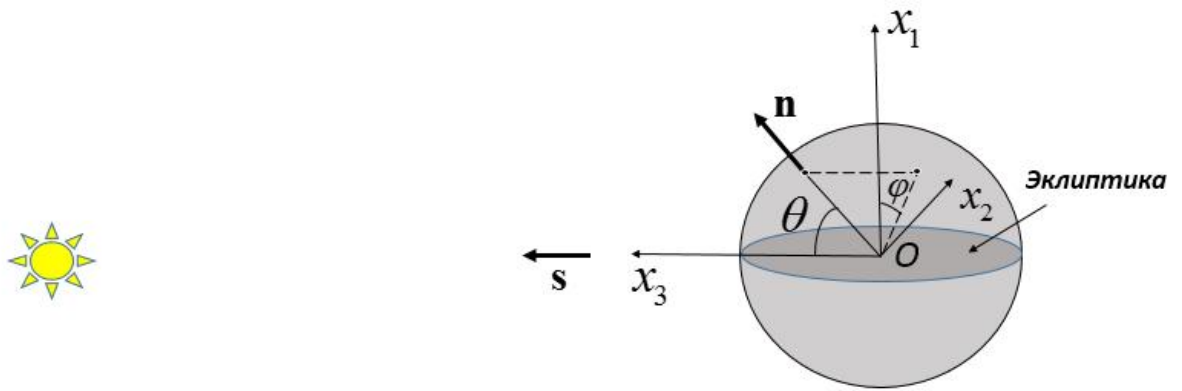


Рис. 3 ССК

Используются следующие матрицы перехода между системами отсчета:

**A** – матрица перехода из ИСК в ОСК. Если вектор  $\mathbf{r}$  задан в ССК, то вектор  $\mathbf{r}'$  в ИСК равен:  $\mathbf{r}' = \mathbf{A}\mathbf{r}$ .

**B** – матрица перехода из ССК в ИСК. Ниже приведен ее вывод.

В ГСК вектор направления на Солнце  $\mathbf{s}$  выглядит следующим образом (Рис.1):

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ \sin \lambda \cos \varepsilon \\ \sin \lambda \sin \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (|\mathbf{s}|=1)$$

где  $\lambda$  – долгота Солнца,  $\varepsilon = 23^\circ 27'$  – наклон эклиптики к экватору (рис. 3).

Соответственно,

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{s},$$

$$\mathbf{e}_2 = [\mathbf{E}_1, \mathbf{s}] = (0 \quad -\sin \varepsilon \quad \cos \varepsilon)^T,$$

$$\mathbf{e}_1 = [\mathbf{s}, \mathbf{E}_2] = (\sin \theta \quad -\cos \theta \cos \varepsilon \quad -\cos \theta \sin \varepsilon)^T.$$

Таким образом, матрица перехода **B** равна:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & \sin \lambda & \cos \lambda \\ -\sin \varepsilon & -\cos \lambda \cos \varepsilon & \sin \lambda \cos \varepsilon \\ \cos \varepsilon & -\cos \lambda \sin \varepsilon & \sin \lambda \sin \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода **A** из ИСК в ОСК представляется в виде [11]:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\cos\Omega \sin u - \sin\Omega \cos i \cos u & -\sin\Omega \sin u + \cos\Omega \cos i \cos u & \sin i \cos u \\ \sin\Omega \sin i & -\cos\Omega \sin i & \cos i \\ \cos\Omega \cos u - \sin\Omega \cos i \sin u & \sin\Omega \cos u + \cos\Omega \cos i \sin u & \sin i \sin u \end{pmatrix}$$

где  $\Omega$  – долгота восходящего узла,  $i$  – наклонение орбиты,  $u$  – аргумент широты.

Две предыдущие матрицы нужны для основной матрицы  $\mathbf{D}$ , которая служит для перехода из ССК в ОСК:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (0.1)$$

Также стоит отметить, что в численном интегрировании уравнений движения, долгота Солнца принята постоянной, что допустимо, так как ее изменение значительно мало по сравнению с изменением аргументом широты.

## 1.2 Постановка задачи

В работе исследуется способ управления относительным движением двух спутников с использованием силы солнечного давления (SRP – Solar Radiation Pressure). В качестве источника управления выступает переменный коэффициент отражения поверхности дочернего спутника. Оба спутника имеют сферическую форму.

Управление строится на основе невозмущенного уравнения Хилла [12], описывающее относительное движение в ОСК, в случае круговой орбиты материнского спутника представимое в векторном виде:

$$\ddot{\mathbf{p}} + (\boldsymbol{\omega}_0, \mathbf{p})\boldsymbol{\omega} + 2[\boldsymbol{\omega}_0, \dot{\mathbf{p}}] = 3\omega_0^2 (\mathbf{E}_3, \mathbf{p})\mathbf{E}_3 \quad (0.2)$$

где точкой обозначены производные по времени,  $\mathbf{p}$  – радиус-вектор, направленный от материнского спутника к дочернему (Рис. 2),  $\boldsymbol{\omega}_0$  – угловая скорость вращения материнского спутника вокруг Земли,  $\mu$  – гравитационный параметр Земли.

В координатной форме с учетом обозначений  $\mathbf{p} = (x, y, z)^T$  и  $\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3}$  уравнение (0.2) переписывается в виде системы Хилла-Клохесси-Уилтшира [13]:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_0 \cdot \dot{z} = 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0, \\ \ddot{z} - 2\omega_0 \cdot \dot{x} - 3\omega_0^2 \cdot z = 0 \end{cases} \quad (0.3)$$

Решение этой системы при  $\omega_0 = \text{const}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{2 \cdot C_2}{\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{2 \cdot C_3}{\omega_0} \cos \omega_0 t - 1.5 \cdot C_1 \cdot \omega_0 t + C_4, \\ y(t) &= C_5 \cos \omega_0 t + C_6 \sin \omega_0 t, \\ z(t) &= \frac{C_2}{\omega_0} \cos \omega_0 t + \frac{C_3}{\omega_0} \sin \omega_0 t + C_1 \end{aligned} \quad (0.4)$$

где  $C_i, i = \overline{1,6}$  - постоянные интегрирования, зависят от начальных данных  $(\mathbf{p}(0), \dot{\mathbf{p}}(0)) = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{\omega_0} \dot{x}_0 + 4z_0, \quad C_2 = -2\dot{x}_0 - 3\omega_0 z_0, \quad C_3 = \dot{z}_0 \\ C_4 &= x_0 - \frac{2\dot{z}_0}{\omega_0}, \quad C_5 = y_0, \quad C_6 = \frac{\dot{y}_0}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Константа  $C_1$ , в общем случае не равная нулю, отвечает за вековой уход спутников. Если учесть связь

$$\dot{x}_0 = -2\omega_0 z_0 \quad (0.5)$$

подбором соответствующих начальных данных, то  $C_1 = 0$  и получится замкнутое движение дочернего спутника относительно материнского. Практический интерес представляют, как правило, именно такие траектории. Более того, из всего множества замкнутых траекторий обычно выбирают либо круговую, либо проективную круговую. Такое движение принимается за опорное при построении управления и обозначается в дальнейшем  $\mathbf{p}_0$  (Рис. 4).



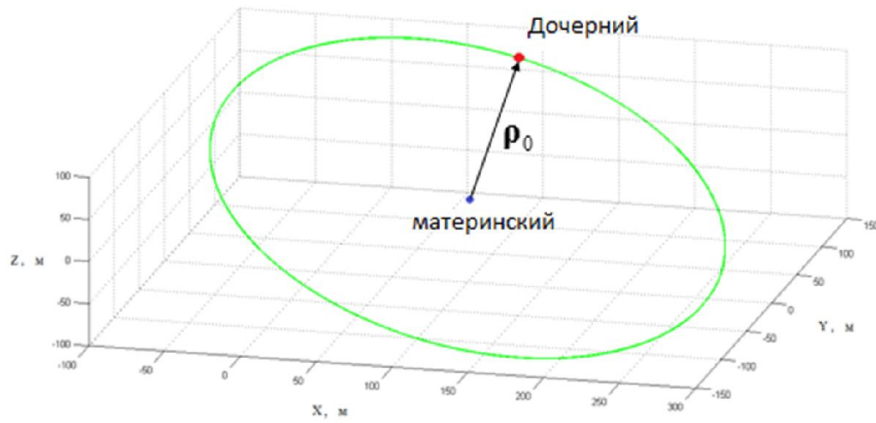


Рис. 4

Управление, которое строится в работе, должно обеспечивать асимптотическую устойчивость подобных замкнутых траекторий.

### 1.3 Учет возмущений

При наличии возмущений уравнение (0.2) переписывается следующим образом:

$$\ddot{\rho} + (\omega_0, \rho)\omega_0 + 2[\omega_0, \dot{\rho}] = 3\omega_0^2(\mathbf{E}_3, \rho)\mathbf{E}_3 + \mathbf{F} \quad (0.6)$$

где  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  – возмущающее ускорение в проекциях на оси ОСК.

В работе учитываются возмущение от эллиптичности орбиты материнского спутника и влияние второй гармоники  $J_2$ , поэтому

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{J_2}$$

где  $\mathbf{F}_e$  – возмущение от слабой эллиптичности орбиты материнского спутника, представимое в виде [14]:

$$\mathbf{F}_e = \begin{pmatrix} \omega_0^2 e \cdot \cos \vartheta \cdot x + 2e \cdot \omega_0^2 \sin \nu \cdot z - 4\omega_0^2 e \cdot \cos \nu \cdot \dot{z}, \\ -3e \cdot \omega_0^2 \cos \vartheta \cdot y, \\ 10e \cdot \omega_0^2 \cos \vartheta + 4\omega_0^2 e \cdot \cos \nu \cdot \dot{x} - 2e \cdot \omega_0^2 \sin \nu \cdot x \end{pmatrix},$$

$\vartheta$  – истинная аномалия,  $e \ll 1$  – эксцентриситет орбиты материнского спутника,

$\mathbf{F}_{J_2}$  – возмущение от гармоники  $J_2$ , которое может быть представлено в виде [15]

$$\mathbf{F}_{J_2} = \nabla \mathbf{J}_2 \cdot \boldsymbol{\rho}$$

$$\nabla \mathbf{J}_2 = Q \begin{pmatrix} 1 - 3 \sin^2 i \sin^2 \vartheta & \sin^2 i \sin 2\vartheta & \sin 2i \sin \vartheta \\ \sin^2 i \sin 2\vartheta & -\frac{1}{4} - \sin^2 i \left( \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \sin^2 \vartheta \right) & -\frac{1}{4} \sin 2i \cos \vartheta \\ \sin 2i \sin \vartheta & -\frac{1}{4} \sin 2i \cos \vartheta & -\frac{3}{4} + \sin^2 i \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \sin^2 \vartheta \right) \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{6\mu \cdot J_2 R_E^2}{r_p^2}$$

где  $J_2 = 1082.23 \cdot 10^{-6}$ ,  $R_E$  – радиус Земли,  $i$  – наклонение орбиты.

В силу того, что уравнение (0.6) значительно усложняется, в работе было проведено его численное интегрирование методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности в среде Matlab.

## Глава 2. Вычисление силы солнечного давления и коэффициента отражения

### 2.1 Вычисление силы солнечного давления

Полагается, что отражение света от поверхности спутника зеркальное, то есть угол падения равен углу отражения. Сила солнечного давления  $\mathbf{F}$ , действующая на поверхность спутника записывается в соответствии с [16] в виде:

$$\mathbf{F} = -P_c \left[ \int (1 - k) \mathbf{s}(\mathbf{s}, \mathbf{n}) dS + 2 \int k \mathbf{n}(\mathbf{s}, \mathbf{n})^2 dS \right] \quad (1.1)$$

где интегрирование ведется по освещенной поверхности спутника:  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} > 0$

или  $\varphi \in (0, 2\pi)$ ,  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Здесь  $k(\varphi, \theta)$  – коэффициент отражения

поверхности ( $0 \leq k \leq 1$ ),  $P_c = 4,56 \cdot 10^{-6} \text{ Н / м}^2$  – солнечная постоянная,  $\mathbf{s}$  –

вектор направления на Солнце,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности ( $|\mathbf{n}| = |\mathbf{s}| = 1$ ).

Сила  $\mathbf{F}$  есть сумма двух сил: поглощения и отражения. Также считается, что поверхность материнского спутника имеет постоянный коэффициент отражения  $k$  в отличие от дочернего, у которого он зависит от сферических углов солнечной системы координат.

Так как поверхности спутников предполагаются сферическими, то интегралы, входящие в выражение (1.1) можно вычислить переходом в сферические координаты в ССК:

$$x = R \cos \varphi \sin \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta.$$

где  $R$  – радиус сферической оболочки спутника (пока без уточнения какого).

При этом в этих координатах векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{s}$  примут вид (рис.3):

$$\mathbf{n} = (\cos \varphi \sin \theta \quad \sin \varphi \sin \theta \quad \cos \theta)^T, \quad \mathbf{s} = (0 \ 0 \ 1)^T \quad (1.2)$$

Интегралы, входящие в выражение (1.1), есть поверхностные интегралы 1-го рода, которые можно вычислить по формуле [17]:

$$I = \int f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

где  $E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$ ,  $G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$ ,  $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$ .

Взяв в качестве параметров  $u, v$  углы  $\varphi, \theta$  соответственно, найдем:

$$E = R^2 \sin^2 \theta, \quad F = 0, \quad G = R^2$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \theta \cdot R^2} = R^2 \sin \theta.$$

Для постоянного  $k$  (случай родительского спутника) каждый интеграл в (1.1) можно выписать в виде конечных выражений:

$$(1 - k) \mathbf{s} \int (\mathbf{s}, \mathbf{n}) dS = (1 - k) \mathbf{s} R^2 \iint \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta = \pi R^2 (1 - k) \mathbf{s};$$

$$2 \int k \mathbf{n} (\mathbf{s}, \mathbf{n})^2 dS = 2k R^2 \iint \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\theta = k \pi R^2 \mathbf{s}.$$

Тогда (1.1) примет вид:

$$\mathbf{F} = -\pi R^2 P_c \mathbf{s}. \quad (1.3)$$

Как видно из последнего выражения  $\mathbf{F}$  не зависит от  $k$ . Также сила солнечного давления постоянна по модулю и всегда направлена вдоль одной оси (в нашем случае вдоль оси  $z$ ) в противоположном направлении вектору  $\mathbf{s}$ . Такое направление силы ожидаемо, так как Солнце «отталкивает» парус в связи со сферически симметричной формой спутника и постоянством коэффициента отражения.

В случае переменной отражательной способности  $k$  это функция от углов  $\varphi$  и  $\theta$ :

$$k = k(\varphi, \theta)$$

и (1.1) можно записать в виде

$$\mathbf{F} = -P_c R^2 \left[ \mathbf{s} \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} (1-k) \cos \theta \sin \theta d\varphi d\theta + 2 \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} \mathbf{n} k(\varphi, \theta) \cdot (\cos \theta)^2 \sin \theta d\varphi d\theta \right] (1.4)$$

Уравнение (1.4) есть интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода относительно неизвестной функции  $k(\varphi, \theta)$ . Применяя метод разделения переменных [18], будем искать функцию  $k$  в виде

$$k(\varphi, \theta) = g(\varphi) \cdot h(\theta).$$

Подставляя в (1.4) имеем:

$$\mathbf{F} = -P_c R^2 \left[ \pi \mathbf{s} - \mathbf{s} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta + 2 \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} \mathbf{n} g(\varphi) h(\theta) \cdot (\cos \theta)^2 \sin \theta d\varphi d\theta \right]$$

Учитывая выражения (1.2) для векторов  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{n}$ , получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных функций  $g$  и  $h$  при фиксированных  $F_1, F_2, F_3$ :

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{1}{4} P_c R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varphi) \cos \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta) (1 - \cos 4\theta) d\theta, \\
F_2 &= -\frac{1}{4} P_c R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi g(\varphi) \sin \varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta) (1 - \cos 4\theta) d\theta, \\
F_3 &= -P_c R^2 \left[ \pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} g(\varphi) d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(\theta) \sin 4\theta d\theta \right].
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Так как ядро в каждом из уравнений зависит только от одной переменной  $\varphi$  и представляется в виде линейной комбинации тригонометрических функций, то будем искать решения  $g$  и  $h$  этой системы в виде рядов Фурье по тригонометрической системе функций  $\{\cos nx, \sin nx\}_{n=0}^{\infty}$ ,

$$g(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi, \quad h(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.5) и учитывая ортогональность тригонометрической системы, получим следующий вид функций  $g$  и  $h$ :

$$\begin{aligned}
g(\varphi) &= a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0, \\
h(\theta) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 4\theta.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где  $a_0, a_1, \alpha$  – некоторые параметры, которые зависят от заданной силы  $\mathbf{F}$ .

Здесь взято конкретное выражение для функции  $h(\theta)$  в целях уменьшения числа изменяемых параметров.

Дополнительно нужно учесть, что коэффициент отражения  $k \in [0, 1]$

или

$$0 \leq (a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 4\theta \right) \leq 1$$

что равносильно

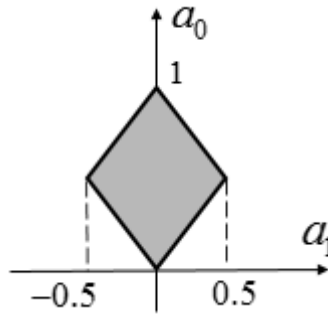
$$0 \leq a_1 \cos(\varphi + \alpha) + a_0 \leq 1 \tag{1.7}$$

так как  $0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 4\theta \leq 1$  для всех  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Поскольку неравенство (1.7) должно выполняться для всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , то оно равносильно системе:

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 + a_0 \leq 1, \\ 0 \leq a_0 - a_1 \leq 1 \end{cases} \quad (1.8)$$

Графически система (1.8) представляет собой ромб:



При этом на  $\alpha$  никаких ограничений нет:  $\alpha \in [0, 2\pi]$ .

Таким образом, если параметры  $a_0$  и  $a_1$ , вычисленные на основе требуемого управления, не попадают в данную область, то необходимо уменьшить его так, чтобы обновленные параметры уже удовлетворяли заданным ограничениям.

## 2.2 Компоненты результирующей силы

Подставляя (1.6) в (1.5), получим:

$$F_1 = -\frac{\pi^2}{16} P_c R^2 a_1 \cos \alpha, \quad F_2 = \frac{\pi^2}{16} P_c R^2 a_1 \sin \alpha, \quad F_3 = -P_c R^2 \left( \pi + \frac{\pi^2 a_0}{16} \right) \quad (1.9)$$

Полученная сила  $\mathbf{F}_d = (F_1, F_2, F_3)$  действует на дочерний спутник. Если на материнский спутник согласно предположению действует постоянная сила  $\mathbf{F}_p = -\pi R^2 P_c \mathbf{s}$ , а на дочерний  $\mathbf{F}_d$ , определяемая (1.9), то сила, действующая на систему в постановке Хилла запишется как:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_p \quad (1.10)$$

или:

$$\mathbf{F}(a_0, a_1, \alpha) = (F_1, F_2, F_3)$$

$$F_1 = -\frac{P_c \pi^2 R_d^2}{16} a_1 \cos \alpha,$$

$$F_2 = \frac{P_c \pi^2 R_d^2}{16} a_1 \sin \alpha,$$

$$F_3 = -\frac{P_c \pi^2 R_d^2}{16} a_0 + P_c \pi (R_p^2 - R_d^2)$$
(1.11)

где  $R_p$  и  $R_d$  – радиусы материнского и дочернего спутников соответственно.

Выразим из системы (1.11) параметры  $a_0, a_1, \alpha$ :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( -\frac{F_2}{F_1} \right),$$

$$a_1 = -\frac{16}{\pi^2 P_c R_d^2} \frac{F_1}{\cos \alpha},$$

$$a_0 = -\frac{16}{\pi^2 P_c R_d^2} F_3 + \frac{16}{\pi R_d^2} (R_p^2 - R_d^2).$$
(1.12)

Таким образом, получена функциональная связь параметров  $a_0(\mathbf{F}), a_1(\mathbf{F}), \alpha(\mathbf{F})$  от действующей на поверхность силы  $\mathbf{F}$ .

## Глава 3. Построение управления

### 3.1 ПД-регулятор

Задачей управления является приведение реальной относительной траектории дочернего спутника к заданной опорной.

Систему уравнений Хилла можно привести к системе 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}, \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}. \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = (-2\omega_0 \dot{z}, -\omega_0^2 y, 3\omega^2 z + 2\omega \dot{x})^T$  правая часть системы (0.6).

Система (2.1) с управлением переписывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} + \mathbf{u}, \\ \mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\rho}}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Управление строится с помощью функции Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 + \frac{1}{2}k_\rho(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)^2,$$

где  $\boldsymbol{\rho}_0$  – опорное движение,  $\mathbf{v}_0 = \dot{\boldsymbol{\rho}}_0$ ,  $k_\rho > 0$ .

Производная по времени  $\dot{V}$  этой функции равна:

$$\dot{V} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^T (\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_0) + k_\rho(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)^T (\dot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}_0)$$

Если потребовать

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^T (\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}_0) + k_\rho(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0)^T (\dot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}_0) = -k_v(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2, \quad k_v > 0$$

то опорное движение согласно теореме Ляпунова будет асимптотически устойчивым. Учитывая  $\dot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$  и  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f} + \mathbf{u}$ , получим:

$$\mathbf{u} = -k_\rho(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) - k_v(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + \dot{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{f}.$$

Отметим, что вектор  $\mathbf{u}$  записан в ОСК. В солнечной системе координат он примет вид:

$$\mathbf{U} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}$$

где матрица  $\mathbf{D}$  определена в (0.1).

### ***3.2 Модификация параметров управления***

Выражения (1.12) позволяют определить требуемые параметры для коэффициента отражения, если вместо компонент вектора  $\mathbf{F}$  в выражении (1.12) взять соответствующие компоненты вектора  $\mathbf{U}$ . Основная проблема при этом удовлетворить ограничениям (1.8), так как не всегда управление выдает нужные параметры. Если ограничения (1.8) не выполнены, то модуль силы уменьшается в нужное число раз, оставляя направление тем же. Далее вычисляются новые параметры  $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \alpha$  по формулам (1.12). Подробнее вышесказанное выглядит следующим образом:



- Если условие (1.8) не выполнено, то ищется коэффициент сжатия  $\gamma \in (0, 1]$  такой, что новые  $\hat{a}_0(\gamma\mathbf{F})$ ,  $\hat{a}_1(\gamma\mathbf{F})$ ,  $\alpha(\gamma\mathbf{F})$  уже удовлетворяют условию (1.8);
- Поиск  $\gamma$  осуществляется как поиск максимального числа из интервала  $(0, 1]$ , удовлетворяющего неравенствам:

$$\begin{aligned} -l_2 &\leq \gamma l_1 (F_1 \cos \alpha + F_3) \leq 1 - l_2 \\ -l_2 &\leq \gamma l_1 (-F_1 \cos \alpha + F_3) \leq 1 - l_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{16}{\pi^2 P_c R_d^2}, \\ l_2 &= \frac{16}{\pi R_d^2} (R_p^2 - R_d^2) = \frac{16}{\pi} \left( \frac{R_p^2}{R_d^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

При этом такое  $\gamma$  существует лишь при следующем условии:

$$\begin{aligned} 0 &\leq l_2 \leq 1 \\ 0 &\leq \frac{16}{\pi R_d^2} (R_p^2 - R_d^2) \leq 1 \end{aligned}$$

или ограничения на размеры спутников:

$$R_d < R_p < \sqrt{1 + \frac{\pi}{16}} R_d \approx 1.09 R_d \quad (2.5)$$

Полученные ограничения на радиусы спутников вполне ожидаемы, так как в противном случае, слишком большой (маленький) радиус в силу большего (меньшего) ускорения, получаемого от солнца, может привести к отставанию или опережению спутников друг относительно друга.

### **3.3 Оценка абсолютной величины SRP.**

Для того чтобы выяснить какую минимально возможную силу можно гарантированно выдать в любом направлении, воспользуемся методом схожим с вышеизложенным для поиска коэффициента  $\gamma$ .

Обозначим  $\mathbf{F} = F\mathbf{e}$ ,  $|\mathbf{e}|^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$  – орт вдоль вектора силы  $\mathbf{F}$ .

Тогда выражения для  $a_0, a_1$  из (1.12) можно переписать следующим образом:

$$a_1 = \pm \frac{16F}{\pi^2 P_c R_d^2} \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = \pm \frac{16F}{\pi^2 P_c R_d^2} \sqrt{1 - e_3^2},$$

$$a_0 = -\frac{16F}{\pi^2 P_c R_d^2} e_3 + \frac{16}{\pi R_d^2} (R_p^2 - R_d^2).$$

Подставляя это в систему неравенств (1.8), имеем:

$$\begin{aligned} -l_2 &\leq l_1 \cdot F \left( \sqrt{1 - e_3^2} + e_3 \right) \leq 1 - l_2 \\ -l_2 &\leq l_1 \cdot F \left( -\sqrt{1 - e_3^2} + e_3 \right) \leq 1 - l_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

В зависимости от знака функций  $f_{\pm}(x) = \pm\sqrt{1-x^2} + x$  на отрезке  $[-1, 1]$ , минимальное  $F$ , удовлетворяющее системе (2.6), может быть найдено как

$$F = \min \left\{ \frac{1-l_2}{l_1(\sqrt{1-e_3^2} - e_3)}, \frac{1-l_2}{l_1(-\sqrt{1-e_3^2} - e_3)}, \frac{-l_2}{l_1(\sqrt{1-e_3^2} - e_3)}, \frac{-l_2}{l_1(-\sqrt{1-e_3^2} - e_3)} \right\}$$

Этот минимум достигается в точке  $e_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  в зависимости от  $l_2$ :

$$F_{min} = \frac{\sqrt{2}}{l_1} \cdot \begin{cases} 1-l_2, & \text{если } l_2 > \frac{1}{2} \\ l_2, & \text{если } l_2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

где выражения  $l_1, l_2$  определяются выражениями (2.4).

Таким образом, если возмущения будут превосходить данную величину, то управление не будет справляться с поддержанием замкнутой относительной траектории.

## Глава 4. Численное моделирование

Подтвердим выводы проведенного аналитического исследования на численных примерах. Начальное положение материнского спутника  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$  выберем в точке перигея на высоте  $r_0 = 2000$  км. Такой выбор оправдан тем,

что влияние сопротивления атмосферы на такой высоте становится значительно меньше влияния солнечного давления [19].

Опорную траекторию дочернего спутника определим следующими начальными условиями уравнения движения:

$$\begin{aligned}x_0 &= 20 \text{ м}, \quad y_0 = 20 \text{ м}, \quad z_0 = 20 \text{ м} \\ \dot{x}_0 &= -32.97 \text{ мм/с}, \quad \dot{y}_0 = 16.48 \text{ мм/с}, \quad \dot{z}_0 = 16.48 \text{ мм/с}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь соблюдена связь (0.5) между  $\dot{x}_0$  и  $z_0$ , поэтому  $C_1 = 0$ , как и должно быть.

Однако на практике добиться идеальных начальных данных обычно не удается. В связи с этим были внесены абсолютные погрешности порядка 1% от начальных условий (3.1) по координатам и скоростям. В этом случае константа  $C_1 = 0.72$ .

Орбита материнского спутника выбрана следующей:  $e = 0.004$  (слабая эллиптичность),  $i = 0$  (экваториальная),  $a = 8371$  км (большая полуось),  $T \approx 2$  ч (период). Габариты спутников:  $R_d = 2$  м,  $R_p = 2.1$  м, суммарная масса  $m = 5$ . Учтем, что здесь соблюдено условие (2.5). При этом габариты выбраны так, чтобы парусность была равна 10. Параметры ПД-регулятора выбраны следующие:  $k_v = 0.01$ ,  $k_r = \frac{k_v^2}{4} = 2.5 \cdot 10^{-5}$ .

На первых двух рисунках изображены опорная и реальная траектории в ОСК. Родительский спутник находится в точке с координатами (0,0,0). Из этих графиков видно, что управление на основе силы солнечного давления успешно справляется с поддержанием относительной замкнутой траектории.

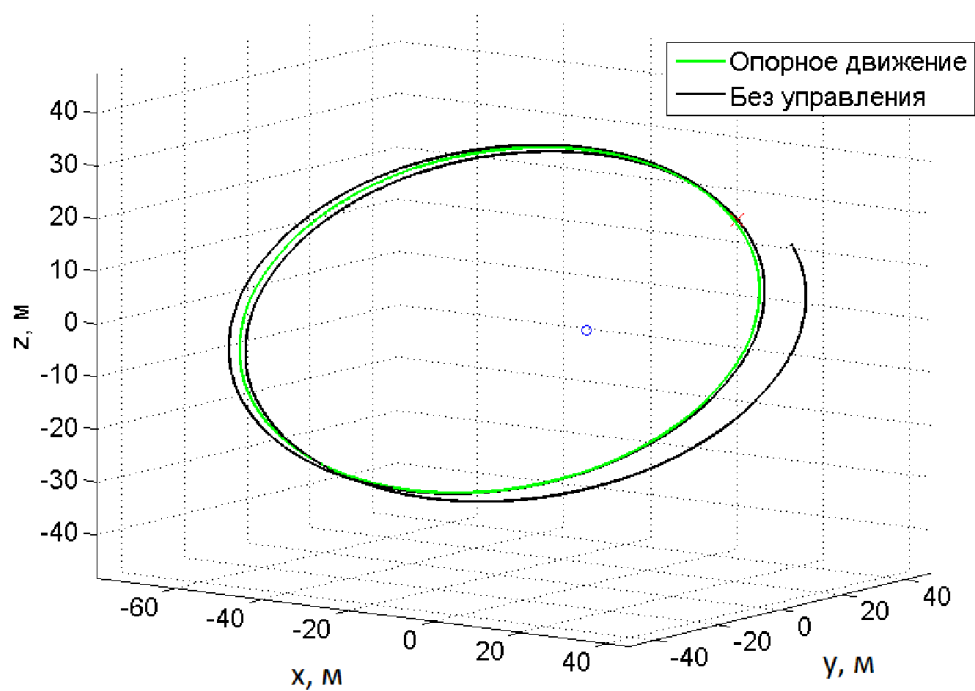


Рис. 5. Относительное движение без управления.

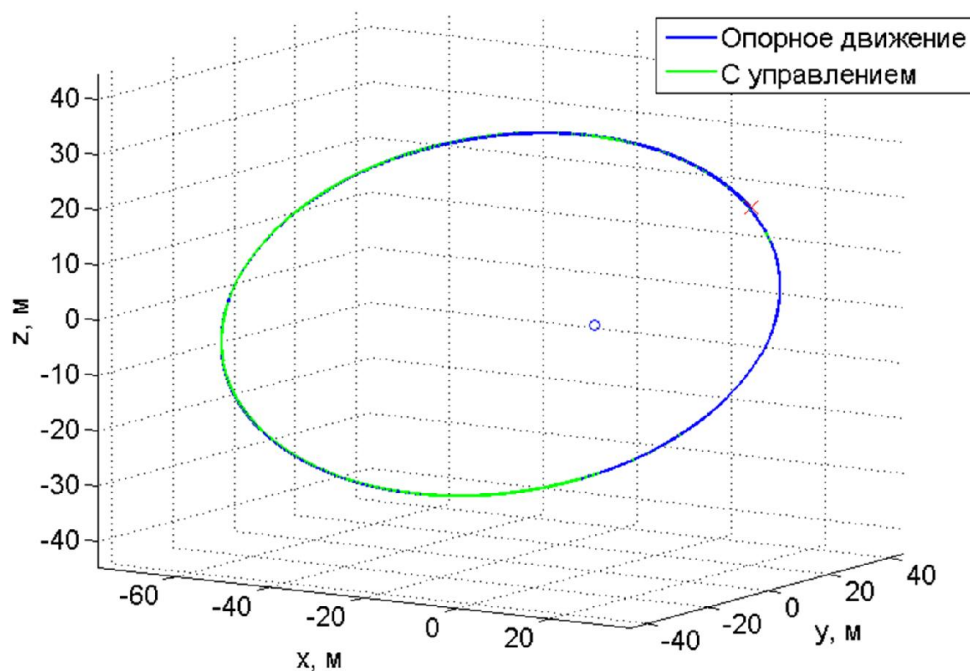


Рис. 6. Относительное движение с управлением.

На следующих 4-х графиках (Рис.7-10) изображена величина ошибки реальной траектории по по трем координатам в ОСК. Из этих графиков видно, что выход на требуемый режим поддержания замкнутой орбиты обеспечивается меньше чем за 1 виток (период).

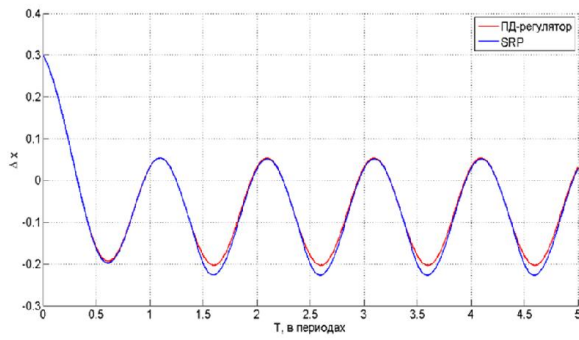


Рис.7 Ошибка по x-координате

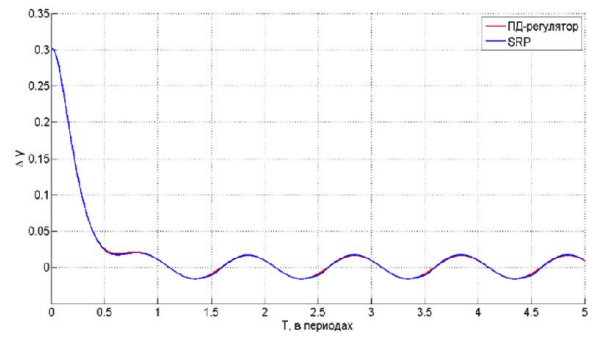


Рис.8 Ошибка по y-координате

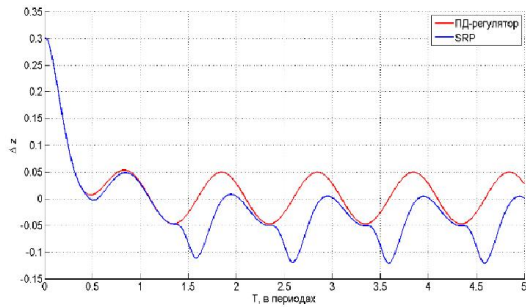


Рис.9 Ошибка по z-координате

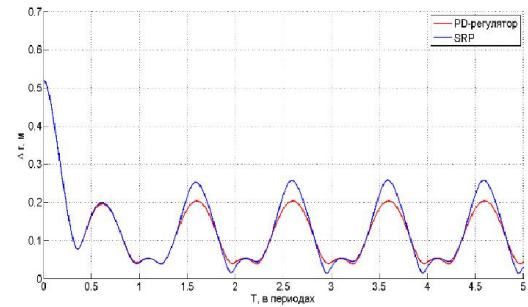


Рис.10 Модуль ошибки

На следующем графике Рис. 11 изображена абсолютная величина силы солнечного давления, возмущения от эллиптичности и гармоники  $J_2$ . Из него видно, что сила солнечного давления (SRP) преобладает над возмущениями от гармоники  $J_2$  и эллиптичности орбиты в течении конечных промежутков времени.

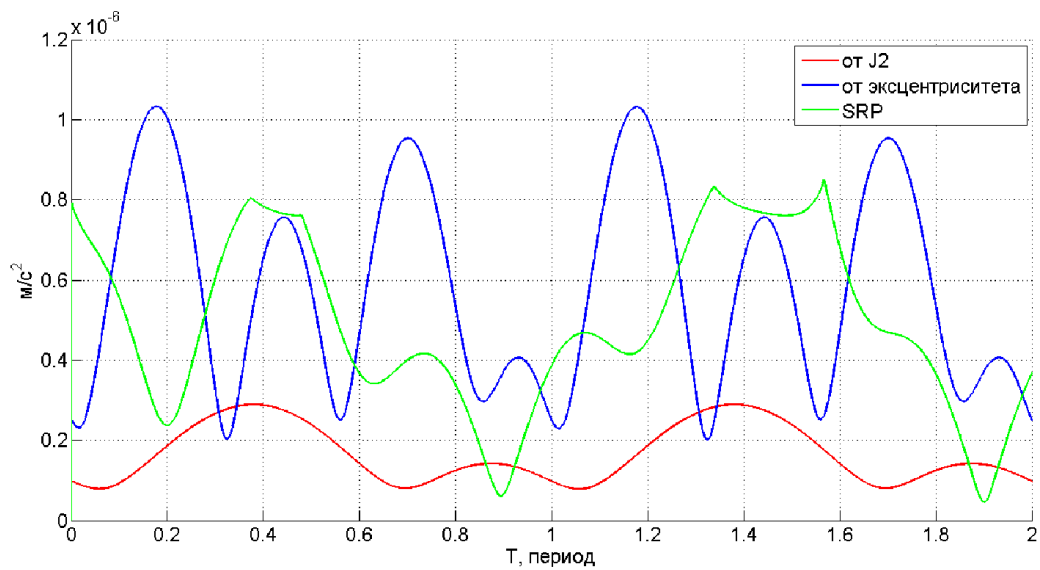


Рис.11 Возмущения и SRP

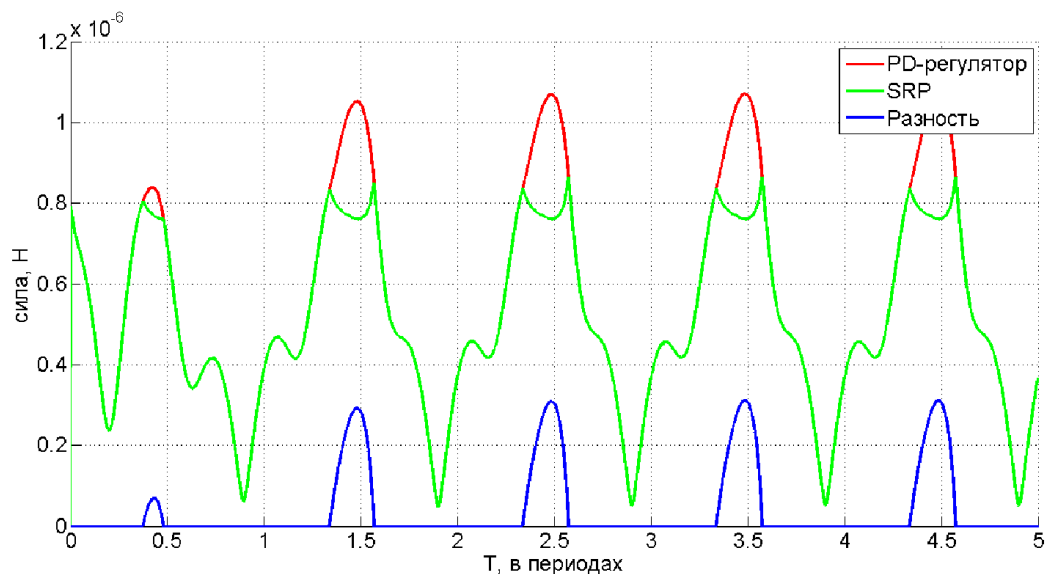


Рис. 12 ПД-регулятор и SRP

Последний график рис.12 показывает, что ПД-регулятор периодически требует ускорение, которое не достижимо силой солнечного давления. На этих этапах включается модификация параметров управления, описанная в Главе 3, что приводит к уменьшению силы. Тем не менее, предыдущие графики показывают, что данное уменьшение приемлемо, так как оно не приводит к относительному разлету спутников.

## Заключение

В настоящей работе было проведено исследование возможности управления формацией двух спутников с помощью сферического солнечного паруса с переменным коэффициентом отражения. Получен общий вид коэффициента отражения и соответствующие компоненты силы солнечного давления. Также оценена снизу абсолютная величина этой силы и получены ограничения на размеры спутников, при котором возможен синтез управления. Численно проанализировано построение замкнутой траектории с учетом возмущений: второй гармоники геопотенциала Земли и слабой эллиптичности орбиты материнского спутника. При этом была учтена абсолютная ошибка в начальных данных.

В работе не освещается вопрос о границах применимости полученных результатов. В дальнейшем планируется рассмотреть плоский парус вместо сферического и учесть тень Земли.

## **Благодарности**

Автор выражает большую благодарность Я. В. Маштакову за конструктивные замечания и ценные идеи.

## Список литературы

1. Peck M. a. et al. Spacecraft formation flying using Lorentz forces // JBIS - J. Br. Interplanet. Soc. 2007. Vol. 60, № 7. P. 263–267.
2. Wawrzaszek R., Banaszkiwicz M. Control and reconfiguration of satellite formations by electromagnetic forces. P. 1–5.
3. Maclay T.D., Tuttle C. Satellite Stationkeeping of the ORBCOMM Constellation Via Active Control of Atmospheric Drag: Operations, Constraints, and Performance (AAS 05-152) // Adv. Astronaut. Sci. Published for the American Astronautical Society by Univelt; 1999, 2005. Vol. 120, № 1. P. 763.
4. Smirnov G. V., Ovchinnikov M., Guerman A. Use of solar radiation pressure to maintain a spatial satellite formation // Acta Astronaut. 2007. Vol. 61, № 7-8. P. 724–728.
5. Williams T., Wang Z.-S. Uses of solar radiation pressure for satellite formation flight // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2002. Vol. 12, № 2-3. P. 163–183.
6. Использование давления солнечной радиации для компенсации влияния полярного сжатия Земли на относительное движение формации спутников. 2009.
7. Vaddi V.V.S.S. Modelling and control of satellite formations // Vasa. 2003. № May. P. 1–121.
8. Borggr A. et al. ATTITUDE CONTROL OF LARGE GOSSAMER SPACECRAFT USING SURFACE REFLECTIVITY MODULATION. 2014. P. 1–8.
9. Малашкин А.В., Эйсмонт Н.А., Федоренко А.Н. Ключевые слова и фразы: излучение и переизлучение; космические миссии; математическое и компьютерное моделирование; ориентация; солнечный парус; управление. 2011. P. 1044–1052.
10. Mori O. et al. First Solar Power Sail Demonstration by IKAROS // Trans. Japan Soc. Aeronaut. Sp. Sci. Aerosp. Technol. Japan. 2010. Vol. 8, № ists27. P. To\_4\_25 – To\_4\_31.
11. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета: Учебное пособие. Наука, 1990.
12. Hill G.W. Researches in the lunar theory // Am. J. Math. JSTOR, 1878. Vol. 1, № 1. P. 5–26.
13. Wiltshire R.S., Clohessy W.H. Terminal Guidance for Rendezvous in Space // J. Aerosp. Sci. 1960. Vol. 27, № 9. P. 653–658.
14. Овчинников М.Ю., Ткачев С.С. Влияние слабых возмущений на относительное движение двух спутников // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. Институт прикладной математики им. МВ Келдыша РАН, 2005. № 0. P. 29–92.



15. Schweighart S. a., Sedwick R.J. High-Fidelity Linearized J Model for Satellite Formation Flight // J. Guid. Control. Dyn. 2002. Vol. 25, № 6. P. 1073–1080.
16. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
17. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа // М. Физико-математическая литература. 2001.
18. Полянин А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. Физматлит М., 2003.
19. Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. 1965.