Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Аэрокосмических Технологий
Кафедра математического моделирования и прикладной математики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Геокосмические науки и технологии

ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КВАЗИСПУТНИКОВЫХ ОРБИТ

(бакалаврская работа)

Студент:
Адыгезалов Нураддин Эльдар оглы

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Широбоков Максим Геннадьевич,
канд. физ.-мат. наук

____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)*:
____
____
(подпись консультанта)

Москва 2022

Аннотация

Работа посвящена построению квазиспутниковых орбит в плоской модели задачи Хилла. Для построения квазиспутниковых орбит применяется метод Хори–Деприи. С использованием средств символьной алгебры выведены разложения координат плоских орбит. Орбиты, построенные при помощи разложений до 7 порядка теории возмущений включительно, сраниваются с орбитами, построенными численно.

Оглавление

Введение

Квазиспутниковыми орбитами называют орбиты в рамках ограниченной задачи трех тел, расположенные вне сферы Хилла тела меньшей массы и с ретроградным движением вокруг тела меньшей массы [1]. Квазиспутниковые орбиты начали изучать еще в начале двадцатого века [2]. Было показано, что большинство орбит из семейства квазиспутниковых орбит устойчивы [3] и из-за своих геометрических характеристик могут быть использованы в таких прикладных задачах, как отслеживание небесных объектов, сближающихся с Землей [4], создание инфраструктуры для освоения Луны и окололунного пространства, исследования астероидов и малых спутников планет [5]. Например, такие орбиты планировалось использовать в совесткой космической миссии «Фобос» [6], так как сфера Хилла Фобоса очень близка к его поверхности, все орбиты вокруг него – квазиспутниковые.Также эти орбиты планируется использовать в будущей миссии Artemis I [7], космический корабль «Орион» должен выйти на квазиспутниковую орбиту вокруг Луны.

Несмотря на то, что для каждой конкретной задачи можно численно построить требуемые квазиспутниковые орбиты, есть также и другой подход, аналитический, с использованием методов теории возмущений , связанный с тем что притяжение вне сферы Хилла достаточно слабое и поэтому квазиспутниковая орбита может считаться возмущенной эллиптической траекторией [5]. Этот метод оказывается полезным для исследования квазиспутниковых орбит [8, 9], а аналитические формулы для аппроксимации таких орбит можно использовать в оптимизационных переборных процедурах. Основные аналитические подходы к проектированию квазиспутниковых орбит основаны на применении различных методов теории возмущений к системе канонических уравнений с целью поиска почти тождественного канонического преобразования, упрощающего в каком-то смысле гамильтониан. Наиболее удобным и популярным в данное время методом является метод Хори–Деприи, когда производящая функция канонического преобразования ищется в виде ряда Ли [11]. М.Л. Лидов и М.А. Вашковьяк использовали данный метод для построения квазиспутниковых орбит сразу в трехмерной постановке эллиптической ограниченной задачи трех тел [10], однако авторы столкнулись со сложным интегрированием специальных функций, что ограничило применение этого аналитического подхода.

Целью настоящей работы является описание метода Хори–Деприи и применение его для построения квазиспутниковых орбит, а также получение с помощью средств компьютерной алгебры выражения координат для построения квазиспутниковых орбит и сравнение этих выражений с квазиспутниковыми орбитами построенными численно.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы. Первая глава посвящена подробному описанию метода Хори–Деприи, его применению для упрощения гамильтониана, а в конце первой главы приводится алгоритм метода. Во второй главе рассматривается применение метода Хори–Деприи в случае плоской постановки задачи Хилла и выводятся выражения координат до высокого порядка теории возмушений для построения квазиспутниковых орбит, затем сравниваются орбиты построенные численно и при помощи полученных аналитических выражений.

1. Метод Хори–Деприи

Часто в задачах небесной механики функция Гамильтона, которая задает дифференциальные уравнения описывающие задачу, содержит малый параметр. Пусть данная система канонических дифференциальных уравнений становится интегрируема при обращении малого параметра в ноль, тогда методами теории возмущений можно искать близкую к тождественной замену координат, которая позволила бы упростить функцию Гамильтона, например, для нахождения приближенных решений системы, либо для упрощения исследования свойств механической системы. Рассматриваемый метод как раз является одним из описанных выше. Его преимущества перед остальными методами состоят в том, что с его помощью получаются явные выражения для замены переменных, обратное преобразование находится достаточно просто из прямого преобразования, формулы справедливы для произвольной функции канонических переменных, а не только для функции Гамильтона. В данной главе введем преобразование Ли и его действие на произвольую функцию канонических переменных, на котором основан данный метод, рассмотрим применение метода для упрощения гамильтониана системы и в конце приведем понятную схему работы данного метода.

1.1. Преобразование Ли

Пусть $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ – векторы обобщенных координат и сопряженных импульсов, имеющие по l компонент, соответственно, $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \epsilon)$ – гамильтониан системы, а $W = W(\epsilon; \mathbf{q}, \mathbf{p})$ – аналитическая функция ϵ, имеющая следующее разложение ряд Тейлора:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} W_{n+1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{1}$$

Тогда решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_k}{d\epsilon} = \frac{\partial W}{\partial p_k},\ \frac{dp_k}{d\epsilon} = -\frac{\partial W}{\partial q_k},\ k = \overline{1, l}, \tag{2}$$

с начальными условиями при $\epsilon = 0$

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q},\ \mathbf{p} = \mathbf{P}, \tag{3}$$

определяет инфинитезимальное преобразование $\phi : (\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon) \to (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ выражающееся как:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon),\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon), \tag{4}$$

такое преобразование называют *преобразованием Ли*. Преобразование Ли является каноническим [11].

Далее рассмотривается как данное преобразование действует на функцию. Пусть $F = F(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon)$ аналитическая функция, зависящая от канонических переменных и малого параметра ϵ. Тогда F может быть разложена в ряд Тейлора:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} F_{n,0}(\mathbf{q}, \mathbf{p}),\ F_{n,0} = \frac{d^n F}{d\epsilon^n}\Big|_{\epsilon=0}, \tag{5}$$

Теперь применим преобразование ϕ к функции F:

$$G = \phi F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} F_{n,0}(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, \epsilon)), \tag{6}$$

Полученный ряд не является рядом Тейлора, так как коэффициенты этого ряда зависят от параметра по которому функция была разложена в ряд. Выражение (6) можно привести к виду ряда Тейлора, преобразовав выражение находящееся под суммой. Требуется получить ряд Тейлора функции

G:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} G_n(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \;\; G_n = \frac{d^n G}{d\epsilon^n}\Big|_{\epsilon=0}. \tag{7}$$

Поскольку G есть сложная функция, то ее первая производная по ϵ принимает вид

$$\frac{dG}{d\epsilon} = \frac{\partial F}{\partial \epsilon} + \{F; W\}, \tag{8}$$

здесь $\{F; W\}$ есть скобка Пуассона функций F и W берется в базисе $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Первое слагаемое в правой части выражения (8) легко получается из (5). Выражение для скобки Пуассона получается сложнее. Подставив в скобку Пуассона (1) и (5) и преобразовав суммы получим [12]:

$$\{F; W\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \{F_{n-m,0}; W_{m+1}\}, \tag{9}$$

где $\binom{n}{m}$ есть число сочетаний из n по m. Теперь для (8) и, следовательно, для G_1 можем получить следующие выражения:

$$\frac{dG}{d\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} F_{n,1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$
$$F_{n,1} = F_{n+1,0} + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \{F_{n-m,0}; W_{m+1}\},$$
$$G_1 = \frac{dG}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = F_{0,1}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}).$$

Проделывая аналогичные выкладки до q-ой производной можно прийти к так называемой *рекурсии Деприн*:

$$F_{n,q} = F_{n+1,q-1} + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \{F_{n-m,q-1}; W_{m+1}\}. \tag{10}$$

Выражение (10) справедливо также и для векторов канонических переменных с учетом того, что при разложении в ряд по ϵ, как в (5), компонент координат слагаемые с $n > 0$ смысла не имеют. Можно записать:

$$\mathbf{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{q}_{0,n}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \;\; \mathbf{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{p}_{0,n}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}). \tag{11}$$

Выражение (11) называют прямым преобразованием Ли, и как видно, оно выражает старые переменные через новые. Аналогично можно записать и обратное преобразование Ли:

$$\mathbf{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{Q}_{0,n}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \;\; \mathbf{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \mathbf{P}_{0,n}(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \tag{12}$$

При этом производящая функция обратного преобразования зависит от новых переменных и производящей функции прямого преобразования знаком. В следующем параграфе рассмотрим работу метода применительно к системам с данным гамильтонианом.

1.2. Упрощение гамильтониана системы

Главная цель применения методов теории возмущений в гамильтоновых системах это поиск такого канонического преобразования переменных, что преобразованный гамильтониан будет в каком-то смысле проще первоначального. Чаще всего пытаются избавиться от обобщенных координат, чтобы получить циклические первые интегралы и упростить интегрирование уравнений Гамильтона. Итак, есть гамильтониан:

$$H = H_0 + D. \tag{13}$$

Здесь H_0 – это невозмущенный гамильтониан, которому соответствуют интегрируемые уравнения Гамильтона, D – это возмущение такое, что $|D|$<<$|H_0|$ в любой момент времени. Опишем процедуру упрощения первоначального гамильтониана с помощью преобразований Ли. Перепишем (13)

в следующем виде:
$$H = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_{m,0}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{14}$$
Повторим процедуру, описанную в предыдущем параграфе, но теперь роль функции F будет играть H. Пусть также задано преобразование Ли: $\varphi : (q, p) \to (Q, P; \epsilon)$. Применим его к первоначальному гамильтониану и получим преобразованный гамильтониан.

$$\varphi \circ H = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_{0,m}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}). \tag{15}$$

Здесь важно то, что в отличие от того, как излагался метод в 1.1 теперь функция канонического преобразования неизвестна. $H_{0,m}$ выбирается исходя из того, требуется упростить гамильтониан. Соответственно известен гамильтониан первоначальный и требуемый, опираясь на формулы параграфа 1.1 будут найдена производящая функция канонического преобразования. Используется формула (10) при $n = 0$ и $q = 1$:

$$H_{0,1} = \{H_{0,0}; W_1\} + H_{1,0} \to \{W_1; H_{0,0}\} = \widetilde{H}_{0,1} - H_{0,1}. \tag{16}$$

Здесь $\widetilde{H}_{0,1} = H_{1,0}$, а W_1 определяется из дифференциального уравнения (16), в общем случае в частных производных. После вычисления W_1, можно переходить к вычислению W_2, используя формулу (10). Так как методами теории возмущений мы ищем приближенные решения, процедуру нужно продолжать до тех пор, пока, не достигнут желаемый порядок, который определяется нужной точностью решения. Выражения аналогичные (16) можно записать для любого порядка $W_m : \{W_m; H_{0,0}\} = \widetilde{H}_{0,m} - H_{0,m}$ отличие от (16) будет лишь в том, что члены $H_{0,m}$ будут выглядеть сложнее, чем в (16). Это также обобщают в виде так называемого гомологического уравнения:

$$L(W_m) = \widetilde{H}_{0,m} - H_{0,m} \tag{17}$$

$L(\cdot) = \{\cdot; H_{0,0}\}$ – производная Ли порожденная $H_{0,0}$.

В заключение параграфа опишем схему метода которая представлена на Рис. 1.

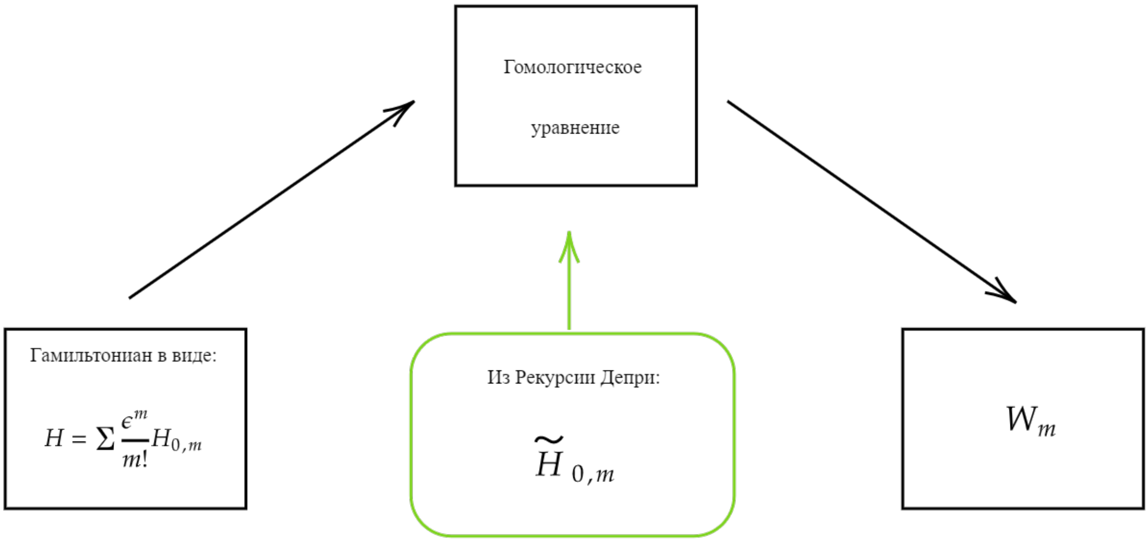

Рис. 1 – Схема метода Хори–Депри.

Рисунок 1 показывает основные этапы применения метода, поясним их подробнее.

Шаг 1

Раскадываем гамильтониан по малому параметру, физическому или формальному.

Шаг 2

Коэффициент разложения с m-ым вторым индексом подставляем в правую часть гомологического уравнения, соответствующего выражению (17).

Выбираем желаемый m-ый коэффициент ряда по малому параметру преобразованного гамильтониана $H_{0,m}$. При этом на каждом m-ом шаге из (10) выражаем $\widetilde{H}_{0,m}$.

Шаг 3

Решаем гомологическое уравнение, получаем W_m. Получив W_m и используя рекурсию Депри можно записать выражения для прямого и обратного преобразования Ли канонических переменных.

В следующей главе будет показан конкретный пример применения метода для построения квазиспутниковых орбит.

2. Построение квазиспутниковых орбит методом Хори–Депри

В данной главе рассмотрено применение метода Хори–Депри для построения квазиспутниковых орбит в случае плоской задачи Хилла. Выведены выражения координат для квазиспутниковых орбит,прямого и обратного преобразований Ли, а также построены примеры квазиспутниковых орбит и сравним орбиты построенные только численно и орбиты построенные с помощью полученных аналитических выражений.

2.1. Задача Хилла

Гамильтониан задачи Хилла:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_x + \omega y\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_y - \omega x\right)^2 - \frac{3}{2}\omega^2 x^2 - \frac{\mu}{r} = H_0 - \frac{\mu}{r}, \qquad (18)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, H_0 есть часть гамильтониана без возмущений. Уравнения Гамильтона соответствующие H_0 известны, они совпадают с уравнениями Хилла–Клохесси–Уилтшира, соответственно, они интегрируются. Особенно просто они интегрируются при переходе к новым, так называемым, эпициклическим [13] переменным.

$$
\begin{aligned}
x &= a\xi + b\sin\phi, \\
y &= a\eta + a\cos\phi, \\
p_x &= -2B\eta - B\cos\phi, \\
p_y &= -B\xi - B\sin\phi,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где $a = 2b,\ b = (2p_\phi/\omega)^{1/2},\ B = \omega b,\ \xi = \dfrac{p_q}{2kB},\ \eta = k\dfrac{q}{b}$. Первые два уравнения (19) определяют эллипс с центром $(a\xi, a\eta)$, при этом $a\xi = \dfrac{p_q}{k\omega}, a\eta = 2k$, то есть координаты эллипса напрямую связаны с p_q и q. В новых переменных невозмущенный гамильтониан принимает следующий вид:

$$
H = \omega p_\phi - \frac{3}{8}\left(\frac{p_q}{k}\right)^2. \tag{20}
$$

Видно, что (20) не зависит от координат, а только от сопряженных импульсов, которые являются циклическими первыми интегралами. Уравнения Гамильтона в этом случае легко интегрируются, и их решение есть:

$$
\phi = \phi_0 + \omega t, q = q_0 - \frac{3}{4k^2}p_q t, \tag{21}
$$

то есть, фаза меняется периодически, а вот ордината центра эллипса растет линейно. Здесь, k является параметром масштаба и в дальнейшем, для простоты, зафиксимруем $k = \sqrt{3/4}$.

Используя (19) перейдем в (21) к декартовым координатам:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2p_q}{\omega} + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \\
y &= q_0 - 3p_q t + 2C_2 \cos \omega t - 2C_1 \sin \omega t, \\
C1 &= \sqrt{2p_\phi / \omega} \cos \phi_0, \\
C2 &= \sqrt{2p_\phi / \omega} \sin \phi_0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

При построении графиков здесь и далее будем использовать безразмерные единицы измерения где $\mu = 1$ и $\omega = 1$.

$$
t = nt', \;\; (x, y) = (x', y') / l, \;\; l = \left(\frac{\mu}{n^2}\right)^{1/3}, \tag{23}
$$

где n – частота обращения двух крупных тел вокруг барицентра, l– единица расстояния, t', x', y' – размерные переменные.Построим пример такой орбиты с начальными условиями $(x, y, p_x, p_y) = (0, 20, 0.5, -0.1)$ здесь построена абстрактная, не прикрепленная к какой-либо конкретной системе тел, квазиспутниковая орбита.

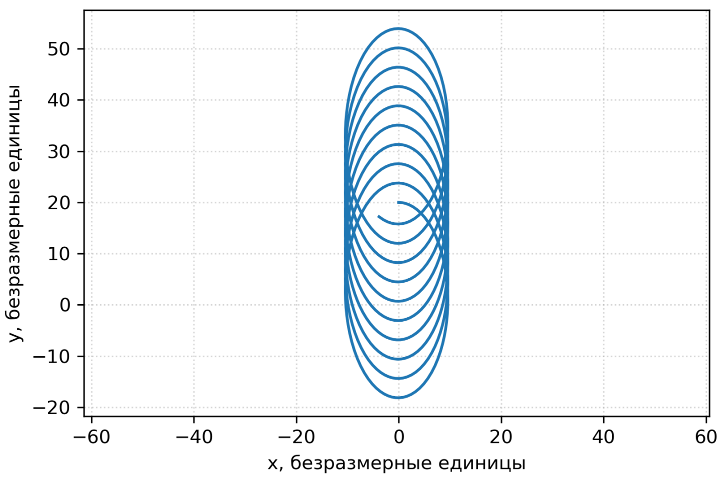

Рис. 2 – Пример квазиспутниковой орбиты с дрейфом центра эллипса.

Линейный рост ординаты можно исключить выбором начальных условий, а именно, исключив величину p_q, которая, являясь первым интегралом, зависит от начальных условий.

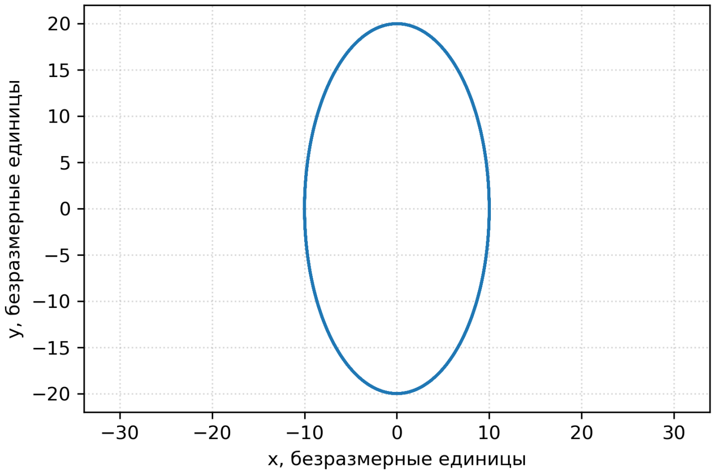

Рис. 3 – Линейный дрейф центра эллипса, изображенный на предыдущем рисунке, устранен выбором начальных условий.

Перейдем к рассмотрению гамильтониана с возмущением и применим к нему метод Хори–Деприи. В эпицикических переменных он принимает следующий вид:

$$H = \omega p_\phi \left(1 - 3\xi^2 - \frac{\gamma}{\sqrt{\Delta^2 + \xi \sin\phi + 2\eta\cos\phi + \xi^2 + \eta^2}} \right). \tag{24}$$

Здесь $\Delta = \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin\phi^2}$, $\gamma = \frac{\mu}{a\omega p_\phi}$. Именно слагаемое Δ будет причиной возникновения специальных функций в дальнейших выкладках. Применим метод Хори–Деприи. Итак, будем искать преобразование Ли, которое до определенного порядка исключит ϕ из гамильтониана:

$$(\phi, q, p_\phi, p_q) \to (\Phi, Q, P_\phi, P_q; \epsilon). \tag{25}$$

Выберем $H_{0,0} = \omega p_\phi$, для того, чтобы соответсвующая производная Ли считалась просто и впоследствии можно было бы получить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными из гомологического уравнения. Запишем решение гомологического уравнения:

$$L(W_m) = \omega \frac{\partial W_m}{\partial \phi} = \widetilde{H}_{0,m} - H_{0,m} \to W_m = \frac{1}{\omega} \int \widetilde{H}_{0,m} - H_{0,m}\, d\phi. \tag{26}$$

Поскольку интегрирование членов с μ/r потребовало бы использования сложных специальных функций, r будет разложено в ряд при следующих предположениях [14]:

$$\eta = O(\epsilon),\ \xi = O(\epsilon^2), \gamma = O(\epsilon^4),\ \epsilon \to 0$$

. Дальнейшие выкладки были проделаны с использованием средств компьютерной алгебры SymPy [15] и Wolfram Mathematica [16]. В силу выше описанных допущений следует, что первые три члена ряда (14) для гамильтониана (24) обнуляются а члены с 4-го до 10-го порядка включительно равны:

$$\begin{aligned}
H_{4,0} &= \frac{4!B^2}{2}\left(-3\xi^2 - \frac{\gamma}{\Delta}\right), \\
H_{5,0} &= \frac{5!B^2}{2}\frac{\gamma}{\Delta^3}\eta\cos\phi, \\
H_{6,0} &= \frac{6!B^2}{2}\frac{\gamma}{\Delta^5}\left(\xi a_1 + \eta^2 a_2\right), \\
H_{7,0} &= \frac{7!B^2}{2}\frac{\gamma}{\Delta^7}\eta\cos\phi\left(a_3\xi + \eta^2 a_4\right), \\
H_{8,0} &= 8!\frac{B^2\gamma}{2\Delta^9}\left(a_5\xi^2 + a_6\eta^2\xi + a_7\eta^4\right), \\
H_{9,0} &= 9!\frac{B^2\gamma}{2\Delta^{11}}\left(a_8\xi^2 + a_9\eta^2\xi + a_{10}\eta^4\right),
\end{aligned} \tag{27}$$

$$H_{10,0} = 10!\frac{B^2\gamma}{2\Delta^{13}}\left(a_{11}\xi^3 + a_{12}\eta^2\xi^2 + a_{13}\eta^4\xi + a_{14}\eta^6\right),$$

$$s = \sin\phi,$$

$$c = \cos\phi.$$

Коэффициенты a_i:

$$a_1 = \frac{s}{2} - \frac{3s^3}{8}, \qquad a_2, = \frac{9s^2}{8} - 1,$$

$$a_3 = \frac{9s^3}{8} - \frac{3s}{2}, \qquad a_4 = 1 - \frac{11s^2}{8},$$

$$a_5 = -\frac{27s^6}{64} + \frac{45s^4}{32} + \frac{1-3s^2}{2}, \qquad a_6 = \frac{153s^5}{64} - \frac{87s^3}{16} + 3s,$$

$$a_7 = -\frac{227s^4}{128} + \frac{11s^2}{4} - 1,$$

$$a_8 = \frac{27s^6}{16} - \frac{171s^4}{32} + \frac{21s^2}{4} - 1.5,$$

$$a_9 = -\frac{285s^5}{64} + \frac{156s^3}{16} - 5s,$$

$$a_{10} = \frac{303s^4}{128} - \frac{13s^2}{4} + 1,$$

$$a_{11} = -\frac{189s^9}{512} + \frac{459s^7}{256} - \frac{207s^5}{64} + \frac{41s^3 - 12s}{16},$$

$$a_{12} = \frac{297s^8}{64} - \frac{4761s^6}{256} + \frac{849s^4}{32} - \frac{249s^2 - 48}{16},$$

$$a_{13} = -\frac{7965s^7}{1024} + \frac{6075s^5}{256} - \frac{375s^3}{16} + 7.5s,$$

$$a_{14} = \frac{3309s^6}{1024} - \frac{909s^4}{128} - \frac{39s^2}{8} - 1,$$

$$\widetilde{K} = \frac{K(3/4)}{\pi}, \qquad \widetilde{E} = \frac{E(3/4)}{\pi}.$$

Коэффициенты ряда преобразованного гамильтониана будем выбирать равными осредненным по ϕ коэффициентам ряда первоначального гамильтониана, тогда $H_{0,3} = H_{0,2} = H_{0,1} = 0$ и соответственно $W_1 = W_2 = W_3 = 0$.

$$H_{0,4} = -4!B^2\left(\frac{3}{2}\xi^2 + \gamma\widetilde{K}\right),$$

$$H_{0,5} = 0, \qquad ,$$

$$H_{0,6} = \frac{6!B^2 2}{3}\gamma\eta^2(\widetilde{E} - \widetilde{K}),$$

$$H_{0,7} = 0,$$

$$H_{0,8} = 8!B^2\gamma\left(\gamma - 2\gamma\widetilde{K} + \eta^4\frac{14\widetilde{E} - 11\widetilde{K}}{9} + \xi^2\frac{4\widetilde{K} - 16\widetilde{E}}{3}\right),$$

$$H_{0,9} = 0,$$

$$H_{0,10} = 10!B^2\eta^2\gamma\left(\gamma + \widetilde{K}\widetilde{E}\gamma\frac{8}{3} - \widetilde{K}^2\gamma\frac{8}{3} + \eta^4\frac{71\widetilde{E} - 50\widetilde{K}}{27} + 8\xi^2\widetilde{K} - 20\xi^2\widetilde{E}\right).$$

Полученные решения гомологических уравнений:

$$\begin{aligned}
W_4 &= 4!p_\phi\gamma F^*,\\
W_5 &= 5!p_\phi\frac{\eta}{\Delta}\gamma s,\\
W_6 &= 6!p_\phi\gamma\left(\frac{2\eta^2}{3}\left(F^* - E^* - \frac{3sc}{4\Delta} - \frac{3sc}{4\Delta^3}\right) - 2\frac{\xi c}{\Delta}\right),\\
W_7 &= \frac{2\cdot 7!}{3}p_\phi\eta\gamma\left(\frac{\eta^2}{32\Delta^5}\left(21s^5 - 70s^3 + 48s\right) - \left(\frac{1 - 8\widetilde{E}\Delta^3}{\Delta^3}\right)\xi\right),
\end{aligned} \tag{28}$$

где $F^* = 2\widetilde{K}\phi - F(\phi|3/4)$; $E^* = 2\widetilde{E}\phi - E(\phi|3/4)$.

Используя рекурсию Деприи (10), запишем выражения для прямого и обратного преобразований Ли:

$$\phi_{0,4} = -\frac{4!}{2}\gamma F^*, \quad q_{0,4} = 0, \quad p_{\phi 0,4} = 4! P_\phi \gamma \left(\frac{1}{\Delta} - 2\widetilde{K}\right), \quad p_{q0,4} = 0. \tag{29}$$

$$\phi_{0,5} = -\frac{5!\gamma\eta s}{\Delta}, \quad q_{0,5} = 0, \quad p_{\phi 0,5} = -\frac{5! p_\phi \gamma\eta c}{\Delta^3}, \quad p_{q0,5} = -\frac{5! B\sqrt{3}\gamma s}{4\Delta}. \tag{30}$$

Коэффициенты разложения координат и импульсов старше 5 порядка:

$$\begin{aligned}
\phi_{0,6} &= 6!\gamma\left(\frac{3cs\eta^2 + 12cs\eta^2 + 8\xi c\Delta^3}{4\Delta^3} + \eta^2 E^* - \eta^2 F^*\right), \\
q_{0,6} &= 6! b\frac{\gamma c}{\Delta\sqrt{3}}, \\
p_{\phi 0,6} &= 6! p_\phi \left(\frac{4\eta^2\widetilde{E} - 4\eta^2\widetilde{K}}{3} - \frac{3\eta^2\Delta^2 - \eta^2 - \xi s\Delta^2}{2\Delta^5}\right), \\
p_{q0,6} &= 6!\frac{B\gamma\eta}{\sqrt{3}}\left(\frac{3cs + 12cs\Delta^2 + 4\Delta^3 E^* - 4\Delta^3 F^*}{4\Delta^3}\right),
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{0,7} &= 7!\gamma\eta\left(\frac{1 - 8\Delta\widetilde{E}}{\Delta^3}\xi + \frac{3\eta^2 s - 7s\eta^2\Delta^2 - 14s\eta^2\Delta^4}{9\Delta^5}\right), \\
q_{0,7} &= -7! b\frac{\gamma\eta}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1 - 8\Delta\widetilde{E}}{\Delta^3}\right), \\
p_{\phi 0,7} &= 7!\frac{p_\phi c\gamma\eta}{2\Delta^5}\left(\frac{5\eta^2 - 33\Delta^2 + 9\xi s\Delta^2}{3\Delta^2}\right), \\
p_{q0,7} &= 7!\frac{B\gamma}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1 - 8\Delta\widetilde{E}}{\Delta^3}\xi + \frac{3\eta^2 s - 7s\eta^2\Delta^2 - 14s\eta^2\Delta^4}{4\Delta^5}\right).
\end{aligned} \tag{32}$$

Запишем преобразованный гамильтониан до 7-го порядка которому соответствуют более простые уравнения Гамильтона и выражения (29)-(32) которые понадобятся для подстановки начальных условий в уравнения Гамильтона. Упрощенный гамильтониан:

$$\begin{aligned} H' &= \omega P_\phi - \frac{1}{2}\left(P_q^2 + \Omega^2 Q^2\right), \\ \Omega &= \sqrt{\frac{\mu}{b^3}\left(\widetilde{K} - \widetilde{E}\right)}. \end{aligned} \tag{33}$$

Видно, что в (33) не входит координата ϕ, а это значит что P_ϕ является циклическим первым интегралом. Уравнения Гамильтона для (Q, P_q) соответствующие (33) имеют вид уравнений для гармонического осциллятора с частотой Ω:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -P_q, \\ \frac{dP_q}{dt} &= \Omega^2 Q, \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial P_\phi}. \end{aligned} \tag{34}$$

Они интегрируются, их решения записываются в виде:

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 \cos\Omega t - \frac{P_{q0}}{\Omega}\sin\Omega t, \\ P_q &= P_{q0}\cos\Omega t + \Omega Q_0 \sin\Omega t, \\ \Phi &= \Phi_0 + \omega(1+\delta)t + \frac{\Omega}{\omega}\left(p(t) - p(0)\right), \\ \delta &= \frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(\frac{\widetilde{K}}{\widetilde{K} - \widetilde{E}} + \frac{Q_0^2 + (Q_0/\Omega)^2}{4b^2}\right), \\ p &= \frac{3Q_0 P_{q0}}{4b^2\Omega}\cos 2\Omega t + \frac{Q_0^2 - (P_{q0}/\Omega)^2 P_{q0}}{8b^2}\sin 2\Omega t. \end{aligned} \tag{35}$$

В следующем параграфе построим численное решение уравнений с гамильтонианом (18) и сравним с выражениями (35).

2.2. Сравнение орбит построенных численно и аналитически

Перейдем в канонических уравнениях Гамильтона с гамильтонианом (18) от обобщенных импульсов к скоростям так как в этом виде проще понять физический смысл начальных условий:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v_x, \\
\frac{dy}{dt} &= v_y, \\
\frac{dv_x}{dt} &= 2v_y + 3x - \frac{x}{r^3}, \\
\frac{dv_y}{dt} &= -2v_x - \frac{y}{r^3}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Так как квазиспутниковые орбиты находятся вне сферы действия Хилла, было бы полезно отметить на графиках коллинеарные точки Лагранжа. Особенно интересно то, что их положение не зависит от физических параметров системы и они имеют координаты $\left(3^{-1/3}, 0\right)$ и $\left(-3^{-1/3}, 0\right)$ в безразмерных единицах таких (23), безразмерные единицы сопоставляются разным расстояниям и времени для разных систем. Покажем, что координаты действительно такие. Точки либрации являются положениями относительного равновесия, значит правые части (32) должны быть равны нулю, тогда:

$$v_x = v_y = 0 \rightarrow y = 0 \text{ и } r^3 = \frac{1}{3} \rightarrow y = 0 \text{ и } r = 3^{-1/3}. \tag{37}$$

Хоть приближенные начальные условия и период для численного построения квазиспутниковой орбиты следуют из (34), они неточны и численно построенная орбита не замыкается. Для точного подбора начальных условый был применен метод дифференциальной коррекции. Суть метода состоит в выборе фиксированных параметров, в данной задаче это x, y, v_x и оптимизационных, варьируемых параметров, которыми в данной задаче являются v_y и T, компонента скорости по y и период соответственно. Далее составляется вектор функция F норму которой требуется минимизировать, в данной задаче она была составлена так:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} x(T) - x(0) \\ v_x(T) - v_x(0) \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Затем, выбирается метод которым минимизируется составленная функция, в настоящей работе для этого был выбран метод Левенберга–Марквардта. Сравнение орбит построенных численно и приближенной учитывающей разложения до 7-го порядка с начальными условиями $(5, 0, 0, -10.01998553)$ для проинтегрированной численно и $(5, 0, 0, -10)$ для приближенной. В

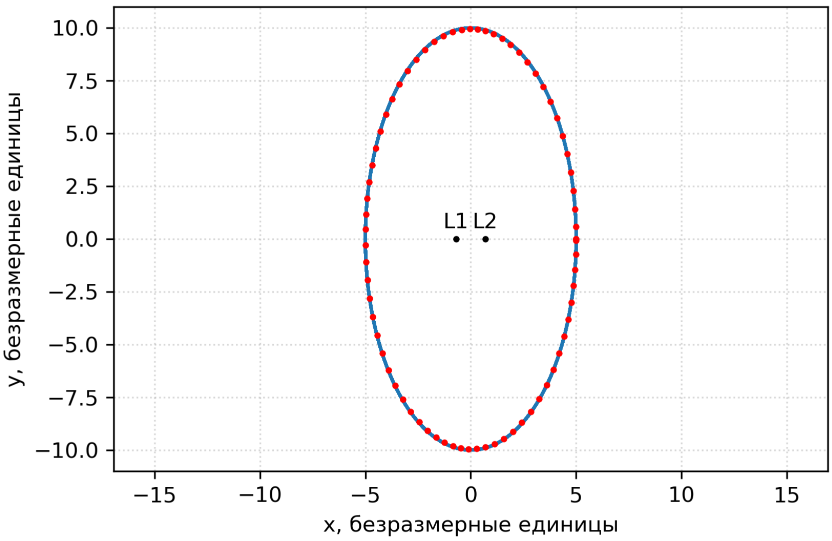

Рис. 4 – Приближенное решение – сплошная синяя линия. Скорректированное методом дифференциальной коррекции решение – красные точки.

заключение параграфа приведем сравнение квазиспутниковых орбит в еще одной, более реальной системе. Рассматривается система Земля–Луна, в соответствии с (23) для нее 1 безразмерная единица расстояния соответствует приближенно 88449.05 км, так как для нее $\mu = 4.9028695103$ км^3 с$^{-2}$, а период $T = 27.32$ дней. Соответственно точки Лагранжа расположены на расстоянии 61327.14 км от Луны.

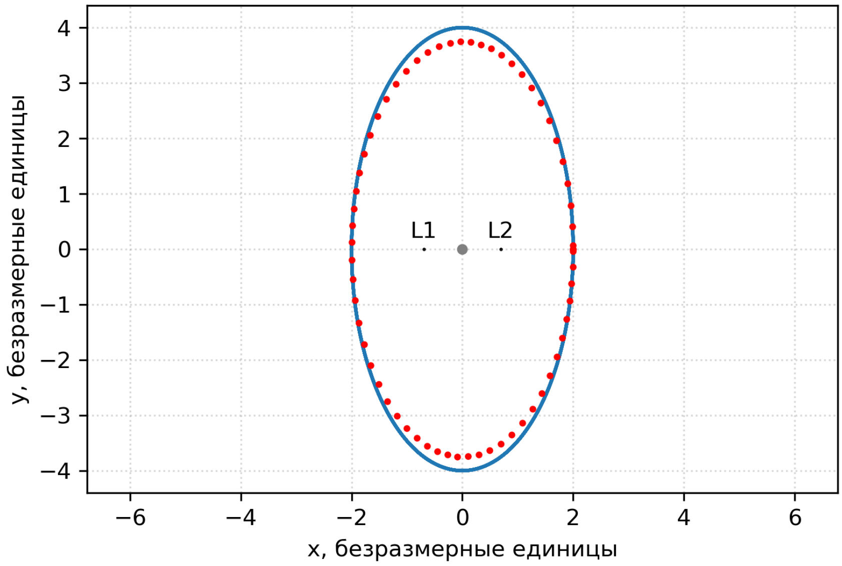

Рис. 5 – Квазиспутниковые орбиты вокруг Луны, обозначения такие же как и на предыдущем рисунке.

Заключение

В ходе работы была освоен метод Хори–Депри. Данный метод был применен к построению квазиспутниковых орбит в плоской задаче Хилла. С помощью средств компьютерной алгебры были получены приближенные, выражения для координат с помощью которых возможно построение квазиспутниковых орбит. Квазиспутниковые орбиты, построенные численно, сравнивались с приближенными, при этом для орбит построенных численно начальные условия были уточнены методом дифференциальной коррекции. В ходе сравнения была замечена чувствительность поведения орбиты, ее периодичности и дрейфа к начальным условиям.

Список использованных источников

[1] Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. *О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трех тел*, Письма в астрономический журнал, 1994, Т. 20, №10, с. 781—795

[2] Jackson, J. *Retrograde satellite orbits*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 74:62–82, December 1913

[3] Henon, M. *Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: periodic orbits and their stability*, Astron. Astrophys. 1, 223–238 (1969)

[4] Stramacchia, M.,Colombo, C., and Bernelli-Zazzera, F. *Distant Retrograde Orbits for space-based Near Earth Objects detection*, Advances in Space Research, 58:967–988, September 2016.

[5] Sidorenko, V. V., Neishtadt, A. I., Artemyev, A. V., and Zelenyi, L. M. *Quasi-satellite orbits in the general context of dynamics in the 1:1 mean motion resonance: perturbative treatment.*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 120:131–162, October 2014.

[6] Коган А.Ю. *Далекие спутниковые орбиты в ограниченной круговой задаче трех тел*, Космические исследования, . 1988, . Т. 26, № 6, с. 81–818.

[7] Artemis Plan: NASA's Lunar Exploration Program Overview. NASA, 2020. 74 p. URL: `https://www.nasa.gov/sites/default/files/atoms/files/artemis_plan-20200921.pdf` (дата обращения: 27.06.2022).

[8] Benest, D. *Libration effects for retrograde satellites in the restricted three-body problem. I - Circular plane Hill's case* Celestial Mechanics, 13:203–215, March 1976.

[9] Namouni, F. Secular interactions of coorbiting objects, Icarus 137, 293–314 (1999).

[10] Лидов М.Л., Вашковьяк М.А. *Теория возмущений и анализ эволюции квазиспутниковых орбит в ограниченной задаче трех тел*, Космические исследования, 1993, Т. 31, вып. 2, с. 75—99

[11] Lara, M. *Hamiltonian Perturbation Solutions for Spacecraft Orbit Prediction: The Method of Lie Transforms*— Berlin, Boston: De Gruyter, 2021. 378 p.

[12] Deprit, A. *Canonical transformations depending on a small parameter*, Celestial Mechanics, 1(1):12–30, 1969.

[13] Kasdin, N. J., Gurfil, P., and Kolemen, E. *Canonical Modelling of Relative Spacecraft Motion Via Epicyclic Orbital Elements*,Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 92:337–370, August 2005.

[14] Lara, M. *Nonlinear librations of distant retrograde orbits: a perturbative approach—the Hill problem case*, Nonlinear Dynamics, 2018, 93(4), pp. 2019-2038.

[15] Sympy. URL: `https://www.sympy.org/en/index.html` (дата обращения: 30.06.2022).

[16] Wolfram Mathematica: Modern Technical Computing. URL: `https://www.wolfram.com/mathematica/` (дата обращения: 30.06.2022).