ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ. МЕТОД ОХОЦИМСКОГО

© ***Ю.Ф. Голубев***

golubev@keldysh.ru

Обсуждается метод вычисления полной вариации как вырожденных, так и невырожденных функционалов в задачах управления, предложенный Д.Е. Охоцимским. Анализируется связь этого метода с другими известными методами решения задач управления и методами аналитической механики. Применение метода продемонстрировано на решении конкретных задач поиска программных управлений и построении стабилизирующих и многошаговых алгоритмов терминального управления.

1. Введение

Вариационное исчисление берет свое начало с 1697г. с постановки и решения известной задачи о брахистохроне. С тех пор оно получило большое развитие как совокупность методов для поиска экстремумов функционалов, зависящих тем или иным, но явным образом от искомых функций. В середине 40-х годов 20-го века возникла необходимость решать практические задачи оптимального управления в связи с развитием ракетной техники и космонавтики. Задачи оптимального управления движением отличаются от задач классического вариационного исчисления тем, что множество допустимых фазовых кривых стеснено заданными дифференциальными уравнениями динамики, тогда как искомое управляющее воздействие входит в правую часть этих уравнений как выбираемая с достаточным произволом функция. Критериями качества управления могут быть функционалы, выражающие, например, энергетические затраты, отклонение от заданной цели, расход топлива, время движения. Зависимость функционала от управления оказывается опосредованной в силу уравнений движения объекта. Кроме того, траектории часто обязаны удовлетворять заданным краевым условиям, связанным с преследуемой целью управления. Для такого класса задач стандартной техники классического вариационного исчисления оказывается недостаточно. В связи с этим разными авторами были предложены несколько подходов, позволяющих исследовать указанные задачи с той или иной степенью эффективности. Среди них наибольшую популярность получили принцип максимума Понтрягина, метод Айзекса-Беллмана и метод первой вариации Охоцимского, известный также как метод множителей Лагранжа. Идея метода первой вариации наиболее близка к идее классического вариационного исчисления и математического анализа об изучении свойств объекта по его дифференциалу. Этот метод обладает значительной гибкостью в смысле возможности учета разнообразных дополнительных к базовой модельной постановке ограничений, свойственных проектным задачам. Д.Е. Охоцимский, разработавший метод первой вариации для задач управления, сформулировал стандартную процедуру, позволяющую найти дифференциал функционала в пространстве управлений при весьма необременительных ограничениях на свойства функционала. Реализация этой процедуры возможна различными способами в зависимости от выбора вспомогательных переменных. В данной работе мы будем использовать переменные, предложенные Л.С. Понтрягиным. Получающийся в итоге формализм обеспечивает однозначность процедуры дифференцирования функционалов и позволяет учесть при решении задач оптимального управления хорошо изученные свойства гамильтоновых систем. Кроме того, оказывается возможным проследить связь метода Охоцимского с методами классического вариационного исчисления и на основе этого метода разработать обобщающий подход к обоснованию интегральных вариационных принципов механики. Анализ этих принципов с точки зрения теории оптимального управления позволяет установить полезные аналогии некоторых общих положений этой теории с известными результатами аналитической механики.

2. Дифференцирование функционалов. Метод Охоцимского

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t), \quad \mathbf{x} \in R^m, \quad \mathbf{u} \in R^k, \quad \mathbf{x} = (x_1,\cdots,x_m), \quad \mathbf{u} = (u_1,\cdots,u_k), \tag{1}$$

где скаляр t – время, $\mathbf{x}$ – вектор переменных, для которых заданы начальные условия $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ – управление, выбираемое так, чтобы были выполнены условия существования и единственности решения системы (1).

Обозначим γ некоторую опорную вектор функцию в пространстве R^k, определенную на отрезке времени $t_0-\varepsilon\le t\le t_1+\varepsilon$,

$$\gamma=\{\mathbf{u}\in R^k:\mathbf{u}=\mathbf{u}(t),\quad t_0-\varepsilon\le t\le t_1+\varepsilon\}.$$

Пусть $\gamma^{(1)}$ – другая вектор-функция, определенная на том же отрезке

$$\gamma^{(1)}=\{\mathbf{u}^{(1)}\in R^k:\mathbf{u}^{(1)}=\mathbf{u}(t)+\delta\mathbf{u}(t),\quad t_0-\varepsilon\le t\le t_1+\varepsilon\}.$$

Представим ее в виде $\gamma^{(1)}=\gamma+\delta$. На множестве вектор-функций γ зададим некоторый функционал $\Phi(\gamma,t_0,t_1)$. Возьмем приращение $\Delta\Phi=\Phi(\gamma+\delta,t_0+dt_0,t_1+dt_1)-\Phi(\gamma,t_0,t_1)$.

Определение. Функционал Φ называется дифференцируемым на некотором множестве вектор-функций γ и параметров t_0, t_1, если $\Delta\Phi$ представляется суммой двух функционалов $\Delta\Phi=F+R$, где $F=F(\delta,dt_0,dt_1,\gamma,t_0,t_1)$ зависит от δ, dt_0, dt_1 линейно при фиксированных γ, t_0, t_1, а R есть малая более высокого порядка относительно $\|\delta\|$, $|dt_0|$, $|dt_1|$. Слагаемое $\delta\mathbf{u}(t)$ называется изохронной вариацией вектор-функции. Дифференциал F функционала Φ будем обозначать также $d\Phi$.

Найдем дифференциал функционала

$$\Phi(\gamma,t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}W(\mathbf{x},\mathbf{u},t)dt$$

по управлению $\mathbf{u}(t)$ и параметрам t_0, t_1. Составим вспомогательный функционал [1]

$$\Lambda=\int_{t_0}^{t_1}\left[\hat{\mathrm{H}}(\mathbf{x},\mathbf{u},t,\boldsymbol{\psi})-\sum_{i=1}^{m}\psi_i\frac{dx_i}{dt}\right]dt,$$

$$\hat{H}=W+\sum_{s=1}^{m}\psi_s f_s(\mathbf{x},\mathbf{u},t),\qquad\qquad \boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\cdots,\psi_m).$$

Функционал Λ совпадает с функционалом Φ для функций $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющих системе уравнений (1). При этом коэффициенты $\psi_i(t)$, $i=1,\ldots,m$, можно выбирать совершенно произвольно. Воспользуемся произволом с целью преобразования дифференциала функционала к виду, в котором будут присутствовать только вариации δu_j, j=1,…,k, dt_0, dt_1. Выполним дифференцирование в предположении, что $\mathbf{x}$ удовлетворяет системе (1)

$$d\Phi=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\hat{H}}{\partial x_i}\delta x_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\hat{H}}{\partial u_j}\delta u_j-\sum_{i=1}^{m}\psi_i\delta\left(\frac{dx_i}{dt}\right)\right)dt+\left(\hat{H}-\sum_{i=1}^{m}\psi_i\frac{dx_i}{dt}\right)dt\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \quad (2)$$

Внеинтегральный член выражает приращение функционала из-за изменения пределов интегрирования. Символ «δ» означает изохронное варьирование (при фиксированном времени) соответствующих функций. Полное варьирование (полный дифференциал), учитывающее возможность изменения параметра t вместе с изохронным варьированием, выражается формулой

$$dx_i=\delta x_i+\frac{\partial x_i}{\partial t}dt, \quad (3)$$

где производная берется в силу системы (1). Меняя местами символы изохронного варьирования и дифференцирования по времени в последнем слагаемом подынтегрального выражения в (2) и выполняя интегрирование по частям, найдем [1]

$$d\Phi=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial x_i}+\frac{d\psi_i}{dt}\right)\delta x_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\hat{H}}{\partial u_j}\delta u_j\right)dt+\left(\hat{H}-\sum_{i=1}^{m}\psi_i\frac{dx_i}{dt}\right)dt\Bigg|_{t_0}^{t_1}-\sum_{i=1}^{m}\psi_i\delta x_i\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Учитывая равенство (3), получим

$$d\Phi=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial x_i}+\frac{d\psi_i}{dt}\right)\delta x_i+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\hat{H}}{\partial u_j}\delta u_j\right)dt+\left(\hat{H}\;dt-\sum_{i=1}^{m}\psi_i dx_i\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}. \quad (4)$$

Если потребовать

$$\frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial\hat{H}}{\partial x_i},\quad i=1,\ldots,m,$$

то получится формула дифференциала функционала, предложенная Д.Е.Охоцимским [1]

$$d\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_j} \delta u_j dt + \left(\hat{H}\ dt - \sum_{i=1}^{m} \psi_i dx_i \right) \Bigg|_{t_0}^{t_1}. \tag{5}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи применения этой формулы.

2.1. Метод Охоцимского-Понтрягина [3]. Дифференциал функционала Ф для опорного управления $\mathbf{u}(t)$ дается формулой

$$d\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_j} \delta u_j dt, \qquad \hat{H} = W + \sum_{s=1}^{m} \psi_s f_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{6}$$

если найдется вектор-функция $\boldsymbol{\psi}(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_m(t))$, удовлетворяющая совместно с вектор-функцией $\mathbf{x}(t)$ системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \psi_i}, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{7}$$

и условиям трансверсальности

$$\begin{aligned} &\hat{H}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0), t) dt_0 - \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t_0) dx_i(t_0) = 0, \\ &\hat{H}(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1), t) dt_1 - \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t_1) dx_i(t_1) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

которые подходящим выбором $\boldsymbol{\psi}$ и $\mathbf{u}$ в точках t_0 и t_1 должны быть выполнены для любых допустимых в этих точках условиями задачи дифференциалов dt и $d\mathbf{x}$. Условия трансверсальности обусловливают краевые значения вектор-функции $\boldsymbol{\psi}$.

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулой (5), которая справедлива при условии (7). Решение $\mathbf{x}(t)$ зависит только от управления $\mathbf{u}(t)$ и заданных начальных или краевых условий для $\mathbf{x}$. При заданном управлении решение $\mathbf{x}(t)$ определяется независимо от неизвестной вектор-функции $\boldsymbol{\psi}(t)$. Когда решение $\mathbf{x}(t)$ найдено, можно воспользоваться системой дифференциальных уравнений для $\boldsymbol{\psi}$. Краевые условия на начальные и конечные значения $\boldsymbol{\psi}(t_0)$ и $\boldsymbol{\psi}(t_1)$ необходимо задать так, чтобы уничтожить внеинтегральные члены в формуле (5). После этого в формуле (5) останутся члены, содержащие только вариацию управления. Следствие доказано.

Пусть, например, требуется, чтобы конечная точка управляемого процесса удовлетворяла условию $F(t,\mathbf{x})\big|_{t=t_1} = 0$. Очевидно, что тогда должно быть

$$\left.\frac{\partial F}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial F}{\partial x_i}dx_i\right|_{t=t_1} = 0.$$

Можно принять $\boldsymbol{\psi}(t_1) = \alpha\left.\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_1}$, а постоянную α найти из второго уравнения (8)

$$\hat{H}(\mathbf{x}(t_1),\mathbf{u}(t_1),\boldsymbol{\psi}(t_1),t) + \alpha\left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{t=t_1} = W(\mathbf{x}(t_1),\mathbf{u}(t_1),t_1) + \alpha\left[\sum_{i=`}^{m}\frac{\partial F}{\partial x_i}f_i + \frac{\partial F}{\partial t}\right]_{t=t_1} = 0.$$

Если имеется несколько аналогичных условий, то вектор $\boldsymbol{\psi}(t_1)$ следует принять так, чтобы он был перпендикулярен касательному пространству, образованному всеми этими условиями в фиксированный момент времени. Если конечная точка не может изменяться, то вектор $\boldsymbol{\psi}(t_1)$ может быть произвольным. Те же самые соображения касаются начального вектора $\boldsymbol{\psi}(t_0)$, хотя чаще всего начальные условия считаются заданными.

Переменные $\psi_i(t)$, $i=1,\ldots,m$ называются сопряженными переменными, а определяющая их система дифференциальных уравнений – сопряженной системой [2]. Функция $\hat{H}$ называется функцией Гамильтона или гамильтонианом задачи управления. Система (7) при заданном управлении представляет собой гамильтонову систему дифференциальных уравнений [2].

Замечание. В приведенных выше рассуждениях не требовалось каких-либо жестких ограничений на функции $W(\mathbf{x},\mathbf{u},t)$ и $\mathbf{u}(t)$. Достаточно лишь, чтобы выполнялись условия существования решений сопряженной системы, а функция

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_i}\,\delta u_j$$

была интегрируемой в смысле исходного функционала. Например, функция W может быть кусочно-дифференцируемой по управлению, а $\mathbf{u}(t)$ – кусочно-непрерывной вектор-функцией.

В технических приложениях управление, как правило, принадлежит замкнутой ограниченной области. По этой причине понятие экстремали функционала было соответствующим образом обобщено [1]. Экстремалью функционала Φ называется функция γ, для которой дифференциал $d\Phi$, полученный для любой допустимой вариации δ, не улучшает в выбранном смысле значения функционала. В частности, если на управление не наложено никаких ограничений, то экстремалью будет вектор-функция γ, для которой $d\Phi=0$ при любой вариации δ, что влечет $\partial\hat{H} / \partial\mathbf{u} = 0$. Если управление принадлежит замкнутой ограниченной области D, то экстремаль может быть как внутри области, так и на границе. Для участков экстремали внутри области для соответствующих компонент u_j должно быть $\partial\hat{H} / \partial u_j \equiv 0$, а для участков, принадлежащих границе, дифференциал не обязан равняться нулю, но никакая допустимая вариация управления не должна улучшать функционал.

Различные компоненты вектора управления могут преследовать противоположные цели в смысле улучшения величины функционала, и тогда получаются постановки теории дифференциальных игр.

Пример 1. (Простейшая игра преследования.) Пусть на плоскости Oxy движения двух игроков с координатами (x_1,y_1) и (x_2,y_2) подчиняются уравнениям

$$x_1' = a\cos\varphi, \quad y_1' = a\sin\varphi, \qquad x_2' = b\cos\gamma, \quad y_2' = b\sin\gamma,$$

где «'» означает дифференцирование по времени, a, b – постоянные, причем $a>b$. Управлениями служат углы φ и γ. Первый игрок стремится, как можно быстрее догнать второго, то есть сделать расстояние между ними равным заданному числу $R>0$, а второй игрок стремится убежать, то есть сделать время поимки как можно больше. Естественно потребовать, что в начальный момент времени выполняется условие

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 > R^2.$$

Рассмотрим движение второго игрока относительно первого

$$x' = x_2' - x_1' = b\cos\gamma - a\cos\varphi, \qquad y' = y_2' - y_1' = b\sin\gamma - a\sin\varphi$$

с терминальным множеством $x^2(T)+y^2(T)=R^2$. Функционалом служит время $\Phi = \int\limits_0^T 1dt$.

Гамильтониан задачи имеет вид

$$\hat{H} = 1 + b(\psi_1 \cos\gamma + \psi_2 \sin\gamma) - a(\psi_1 \cos\varphi + \psi_2 \sin\varphi).$$

Ему отвечает следующая сопряженная система:

$$\psi_1' = \psi_2' = 0 \Rightarrow \psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2.$$

Продифференцируем уравнение терминального множества $x(T)dx(T) + + y(T)dy(T) = 0$. Поэтому следует принять $c_1 = \alpha x(T),\ c_2 = \alpha y(T)$. Гамильтониан можно привести к виду

$$\hat{H} = 1 + \alpha R[b\cos(\gamma - \theta) - a\cos(\varphi - \theta)], \quad \cos\theta = \frac{x(T)}{R}, \quad \sin\theta = \frac{y(T)}{R}.$$

Пусть $\alpha>0$. Первый игрок хочет уменьшить время поимки и потому выбирает управление $\varphi=\theta$. Второй игрок хочет увеличить время поимки и потому выбирает управление $\gamma=\theta$. Поскольку $b-a<0$, существует $\alpha>0$, при котором $\hat{H}(T)=0$. Отсюда следуют оптимальные стратегии игроков: вектор скорости догоняющего должен быть направлен на второго (убегающего) игрока. Второй игрок должен убегать вдоль той же прямой. Любое маневрирование второго игрока приведет только к сокращению времени поимки. Кривая, которую описывает первый игрок, оптимально двигаясь в направлении второго, называется кривой погони.

2.2. Динамическое программирование [3]. Пусть правило вычисления управления в каждой точке траектории системы уже выбрано, а получающаяся в результате вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ не варьируется $\delta\mathbf{u}(t)\equiv 0$. Функционал Φ при этом условии можно назвать ценой управления. Формула (5) для цены управления принимает вид

$$d\Phi = \left. \left(\hat{H}\ dt - \sum_{i=1}^{m} \psi_i dx_i \right) \right|_{t_0}^{t_1}.$$

Отсюда становится ясен смысл сопряженных переменных. Если не варьировать управление и взять $\boldsymbol{\psi}(t_1)$ так, чтобы было выполнено

$$\hat{H}(t_1)\, dt_1 - \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t_1) dx_i(t_1) = 0,$$

то тогда

$$d\Phi = -\hat{H}(t_0)\, dt_0 + \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t_0) dx_i(t_0)$$

или

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{t=t_0} = -\hat{H}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}_0, \mathrm{t}_0), \qquad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right|_{t=t_0} = \psi_i(t_0).$$

В результате получаем аналог уравнения Гамильтона-Якоби для начальных условий

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \hat{H}\left(x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_k, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}, t\right)\right]_{t=t_0} = 0,$$

что с учетом вида функции $\hat{H}$ можно переписать также в виде соответствующего уравнения Айзекса-Беллмана [3]

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\right]_{t=t_0} = -W(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\Big|_{t=t_0}. \tag{9}$$

Левая часть (9) имеет смысл полной производной по времени в силу уравнений (1) от функционала Φ, рассматриваемого в виде функции от начальных значений времени и координат: $\Phi=\Phi(t_0,\mathbf{x}_0)$. Заметим, что если $\Phi=\Phi(\mathbf{x})$ не зависит явно от времени при произвольном выборе $\mathbf{x}_0$, то тогда должно быть $\hat{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\psi}(t), t) \equiv 0$ вдоль траектории, соответствующей управлению $\mathbf{u}(t)$. Аналогичная процедура может быть выполнена и для момента времени t_1. Из сказанного следует, что само по себе уравнение Айзекса-Беллмана оптимального решения не дает. Процедура его решения должна сопровождаться оптимизацией управления.

Пример 2. (Игровая одномерная задача о быстродействии). Движение точки задано уравнением

$$q'' = u_1 + u_2, \quad -(1+a) \le u_1 \le 1 + a, \quad -a \le u_2 \le a, \quad a > 0,$$

где $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ – вектор управлений, выбираемых произвольно в указанном диапазоне, но так, чтобы уравнение движения имело решение. В начальный момент времени $t_0=0$ точка имеет координату $q(0)=q_0$ и скорость $q'(0)=q'_0$. Управление u_1 требуется выбрать так, чтобы перевести точку из начального заданного положения в положение $q(T)=0$, $q'(T)=0$ за кратчайшее время. Наоборот, управление u_2 следует выбрать так, чтобы фазовая точка пришла в начало координат за возможно большее время. Решение этой задачи можно посмотреть в [3]. Обозначим $x_1=q$, $x_2=q'$. Оптимальные стратегии выражаются управлениями

$$u_1=\begin{cases} +1+a, & x_1<\tilde{x}_1, \\ -(1+a)\operatorname{sign} x_2, & x_1=\tilde{x}_1, \\ -(1+a), & x_1>\tilde{x}_1, \end{cases} \quad u_2=\begin{cases} -a, & x_1<\tilde{x}_1, \\ a\operatorname{sign} x_2, & x_1=\tilde{x}_1, \\ +a, & x_1>\tilde{x}_1, \end{cases} \quad \tilde{x}_1=-\frac{|x_2|x_2}{2},$$

а цена игры $\Phi(x_1,x_2)\big|_{t=0}$ на этих управлениях принимает вид

$$\Phi(x_1,x_2)\big|_{t=0}=\begin{cases} 2\sqrt{x_2^2/2-x_1}-x_2, & x_1<\tilde{x}_1, \\ |x_2|, & x_1=\tilde{x}_1, \\ 2\sqrt{x_2^2/2+x_1}+x_2, & x_1>\tilde{x}_1. \end{cases}$$

Уравнение (9), связанное с начальными условиями, можно записать следующим образом:

$$-1=\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}x_2+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}, & x_1<\tilde{x}_1, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}x_2-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}\operatorname{sign} x_2, & x_1=\tilde{x}_1, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}x_2-\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}, & x_1>\tilde{x}_1. \end{cases}$$

Функция $\Phi(x_1,x_2)\big|_{t=0}$, очевидно, этому уравнению удовлетворяет. Поскольку Φ от времени явно не зависит, замечаем, что для оптимальных управлений справедливо тождество $\hat{H}=1+\psi_1 x_2+\psi_2(u_1+u_2)\equiv 0$. Полный интеграл уравнения Айзекса-Беллмана в данном случае представляется формулой

$$S=\begin{cases}\alpha_t(x_2-t)+\alpha_1(x_1-x_2^2/2)-x_2, & x_1<\tilde{x}_1,\\ -\alpha_t(|x_2|+t)+\alpha_1(x_1+|x_2|x_2/2)+|x_2|, & x_1=\tilde{x}_1,\\ -\alpha_t(x_2+t)+\alpha_1(x_1+x_2^2/2)+x_2, & x_1<\tilde{x}_1.\end{cases}$$

2.3. Терминальное управление. Зададим конечный момент времени t_1 каким-нибудь условием. Пусть задача управления состоит в том, чтобы обеспечить при $t=t_1$ заданное значение χ_g некоторой характеристики $\chi(x(t),t)$. Предположим, что в начальный момент времени τ взяты номинальные значения вектора $\mathbf{x}(\tau)$ и выбрано управление $\mathbf{u}(t)$, которому соответствует значение $\chi(t_1)$. Оценим влияние на функционал $\Phi=\chi(t_1)$ отклонений $d\mathbf{x}(\tau)$ вектора текущего состояния системы и управления, выбираемого в интервале времени $[\tau,t_1]$, от номинальных значений. Задав конечные условия для сопряженных переменных так, чтобы было выполнено

$$\hat{H}(t_1)\,dt_1-\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t_1)dx_i(t_1)=0,$$

получим выражение для дифференциала функционала

$$d\Phi=\int_{\tau}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\hat{H}}{\partial u_j}\delta u_j dt+\sum_{i=1}^{m}\psi_i(\tau)dx_i(\tau).$$

Здесь компоненты вектора $\boldsymbol{\psi}(\tau)$ характеризуют влияние наблюдаемых отклонений вектора $\mathbf{x}$ на конечное значение функционала. Влияние управления выражается интегральным членом. Положив $d\Phi=\chi_g-\chi(t_1)$, найдем интегральное уравнение для приращения $\delta\mathbf{u}(t)$, устраняющее в первом приближении рассогласование $\chi_g-\chi(t_1)$,

$$\int_{\tau}^{t_1}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\hat{H}}{\partial u_j}\delta u_j dt=\chi_g-\chi(t_1)-\sum_{i=1}^{m}\psi_i(\tau)dx_i(\tau). \tag{10}$$

Решение этого уравнения неоднозначно. Чтобы устранить неопределенность, можно параметризовать управление с помощью модулирующих функций [4]. Назначим $\delta u_j=\beta_j\varphi_j(t)$, где β_j не зависят от времени, а $\varphi_j(t)$ – специально подобранные функции. Одним из возможных решений уравнения (10) может быть следующее:

$$\beta_j = \mu b_j, \qquad \mu = \frac{\chi_g - \chi(t_1) - \sum\limits_{i=1}^{m} \psi_i(\tau) dx_i(\tau)}{\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^2}, \qquad b_j = \int\limits_{\tau}^{t_1} \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_j} \varphi_j(t) dt .$$

Применяя подходящие модулирующие функции, можно организовать многошаговый процесс выбора управления, как это сделано, например, в [4].

2.4. Изопериметрические ограничения. Предположим, что требуется найти дифференциал функционала $\Phi(\gamma)$ среди всех вектор-функций, для которых выполнено ограничение

$$\Psi(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt \equiv c .$$

Функционалу $\Psi(\gamma)$ отвечает функция Гамильтона

$$\widehat{H} = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \sum_{i=1}^{n} \widehat{\psi}_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

где функции $\widehat{\psi}_i$, i=1,…,n удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \widehat{\psi}_i}, \qquad \frac{d\widehat{\psi}_i}{dt} = -\frac{\partial \widehat{H}}{\partial x_i}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

и условиям трансверсальности

$$\widehat{H}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \widehat{\boldsymbol{\psi}}(t_0)) dt_0 - \sum_{i=1}^{m} \widehat{\psi}_i(t_0) dx_i(t_0) = 0,$$

$$\widehat{H}(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{u}(t_1), \widehat{\boldsymbol{\psi}}(t_1)) dt_1 - \sum_{i=1}^{m} \widehat{\psi}_i(t_1) dx_i(t_1) = 0.$$

Определение. Градиентом функционала $\Phi(\gamma)$ назовем вектор-функцию

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} = \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_m} \right).$$

Пусть на отрезке $t_0 \le t \le t_1$ заданы две вектор-функции

$$\gamma_1 = \left\{ \mathbf{y} \in R^m : \mathbf{y}(t) = (y_1(t), \ldots, y_m(t)) \right\}, \quad \gamma_2 = \left\{ \mathbf{z} \in R^m : \mathbf{z}(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t)) \right\}.$$

Определим для них скалярное произведение

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} y_j z_j dt,$$

$$\|\gamma_1\|^2 = (\gamma_1, \gamma_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} y_j^2 dt, \qquad \|\gamma_2\|^2 = (\gamma_2, \gamma_2) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{m} z_j^2 dt.$$

Для вычисления градиентов функционалов $\Phi(\gamma)$ и $\Psi(\gamma)$ применяются различные сопряженные переменные $\boldsymbol{\psi}$ и $\widehat{\boldsymbol{\psi}}$.

Теорема. Найдется постоянная λ, для которой дифференциал функционала Φ при условии, что функционал Ψ сохраняет постоянное значение, совпадает с безусловным дифференциалом функционала $\Phi+\lambda\Psi$.

Доказательство. Дифференциалы функционалов можем представить в виде

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}, \delta \right), \qquad d\Psi = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}, \delta \right).$$

Пусть задана произвольная вариация δ. Тогда вариация $\delta^{(1)}$, обращающая в нуль значение $d\Psi$, может быть получена по формуле

$$\delta^{(1)} = \delta - \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right\|^{-2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}, \delta \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}.$$

По смыслу $\delta^{(1)}$ представляет собой вариацию в плоскости, перпендикулярной градиенту функционала Ψ в пространстве функций. Вариацию функционала Φ для $\delta^{(1)}$ представим в виде

$$d\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}, \delta^{(1)} \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}, \left[\delta - \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right\|^{-2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}, \delta \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right] \right) = \left(\frac{\partial [\Phi + \lambda \Psi]}{\partial \gamma}, \delta \right)$$

для любого δ. Для того, чтобы получить градиент в правой части, достаточно взять вектор-функцию $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} + \lambda \widehat{\boldsymbol{\psi}}$. Скаляр λ выражается формулой

$$\lambda = -\left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \right\|^{-2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \gamma}, \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right).$$

Теорема доказана.

Пример 3. (Быстродействие с изопериметрическим ограничением.) Уравнения движения и изопериметрическое ограничение имеют вид

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = u, \quad -1 \le u \le 1, \quad \int_{t_0}^{t_1} |u|\, dt = c\sqrt{2},$$

где t_0 – момент времени начала движения, t_1 – момент времени окончания движения, причем должно быть выполнено $x_1(t_1) = x_2(t_1) = 0$, c – заданная постоянная, характеризующая запас рабочего тела. Требуется из исходного положения $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ привести фазовую точку в начало координат за минимальное время.

В соответствии с методом множителей Лагранжа гамильтониан задачи принимает вид $H = 1 + \lambda |u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u$, где λ – постоянный множитель Лагранжа, а сопряженная система записывается следующим образом: $\psi_1'=0$, $\psi_2'=-\psi_1$. Оптимальное управление u^* дается выражением $u^*=\arg\min_u(\lambda|u|+$ $+\psi_2 u)$. Отсюда следует, что

$$\lambda > 0 \Rightarrow u^* = \begin{cases} 1, & \psi_2 \le -\lambda, \\ 0, & -\lambda < \psi_2 < \lambda, \\ -1, & \lambda \le \psi_2. \end{cases} \qquad \lambda \le 0 \Rightarrow u^* = -\operatorname{sign} \psi_2.$$

Выпишем условия трансверсальности:

$$H|_{t_1} = 1 + \lambda |u(t_1)| + \psi_2(t_1) u(t_1) = 0,$$

$$\psi_1(t_0) dx_1(t_0) + \psi_2(t_0) dx_2(t_0) = 0,$$

$$\psi_1(t_1) dx_1(t_1) + \psi_2(t_1) dx_2(t_1) = 0.$$

Видим, что управление $u(t_1)=0$ условиям трансверсальности не удовлетворяет. Так как $\psi_2(t)$ – линейная функция времени, заключаем, что оптимальное управление заканчивается значением +1, или −1, имеет переключение на значение $u=0$, которое или сохраняется до начального момента времени, или имеет последующее переключение на границу противоположного конечному управлению знака, либо сразу имеет переключение на границу противоположного знака без промежуточного участка нулевого управления.

Найдем точки, приведение в ноль из которых происходит с соблюдением изопериметрического условия без промежуточного участка нулевого управления

$$u(t_1)=1 \Rightarrow x_1=\frac{c^2}{2}-\frac{(x_2+c)^2}{4}, \qquad u(t_1)=-1 \Rightarrow x_1=\frac{-c^2}{2}+\frac{(x_2-c)^2}{4}. \qquad (11)$$

Полученные кривые пересекают линию переключения $x_1=-|x_2|x_2/2$ в точках ($x_1=c^2/2$, $x_2=-c$) и ($x_1=-c^2/2$, $x_2=c$).

Область A, ограниченная кривыми (11) (см. рис.1), – особая. В нее не попадают найденные экстремали.

Дело в том, что в соответствии с изопериметрическим условием время движения не может быть меньше c, и любая фазовая траектория, обеспечивающая это значение, будет экстремалью. Имеем своеобразное плато, когда минимальное значение функционала одинаково для всех начальных точек из области A.

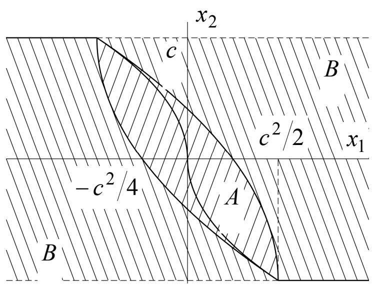

Рис.1. Области управления с учетом изопериметрического ограничения.

Пусть точка P с координатами $(x_1,x_2)\in A$, причем $x_1 \geq -|x_2|\, x_2/2$. Укажем для нее управление, обеспечивающее приведение в ноль с соблюдением изопериметрического условия. Сначала выберем $u(t_0)=1$. Управление, обеспечивающее приведение из точки P в ноль за минимальное время c, состоит из двух этапов. С помощью управления $u=1$ осуществляется перевод фазовой точки из начального положения $P=(x_1,x_2)$ в положение $\tilde{P}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$, где

$$\tilde{x}_1=x_1-\frac{x_2}{2}+\frac{(c-\sqrt{2c^2-4x_1})^2}{2}, \qquad \tilde{x}_2=-c+\sqrt{2c^2-4x_1},$$

а затем после переключения на значение u=–1 посредством стандартного быстродействия осуществляется приведение в ноль.

Аналогично, пусть точка P с координатами $(x_1,x_2)\in A$, причем $x_1<-|x_2|x_2/2$. Для нее сначала выберем $u(t_0)=-1$. Как и в предыдущем случае, управление, обеспечивающее приведение из точки P в ноль за минимальное время c, состоит из двух этапов. С помощью управления u=–1 осуществляется перевод фазовой точки из начального положения $P=(x_1,x_2)$ в положение $\hat{P}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2)$, где

$$\hat{x}_1 = x_1 + \frac{x_2}{2} - \frac{(c-\sqrt{2c^2+4x_1})^2}{2}, \qquad \hat{x}_2 = c-\sqrt{2c^2+4x_1}\,,$$

а затем после переключения на значение u=+1 посредством стандартного быстродействия осуществляется приведение в ноль. К примеру, пусть начальная точка P находится в начале координат. По причине изопериметрического ограничения она там остаться не может, а должна выйти оттуда с каким-нибудь граничным управлением $u=\pm1$, двигаться с этим управлением в течение времени $t=c(\sqrt{2}-1)$, затем в точке

$$\overline{x}_1 = \pm\frac{c^2(\sqrt{2}-1)^2}{2}, \qquad \overline{x}_2 = \pm c(\sqrt{2}-1)$$

изменить знак управления на противоположный и по быстродействию снова придти в начало координат.

Выделим теперь область B, получающуюся сдвигом левой кривой (11) вправо вдоль оси Ox_1 и правой кривой (11) влево вдоль той же оси (см. рис.1). Очевидно, что луч ($x_1>-c^2/2$, $x_2=c$) образован точками, из которых приведение в ноль при заданном изопериметрическом ограничении невозможно. Вместе с тем из точек луча ($x_1\le -c^2/2$, $x_2=c$) приведение в начало координат возможно, а оптимальное управление дается формулой

$$\overline{u} = \begin{cases} 0, & x_1 < -c^2/2, \\ -1, & x_1 \ge -c^2/2. \end{cases}$$

Очевидно также, что из точек луча ($x_1<-c^2/2$, $x_2=-c$) приведение в ноль при заданном изопериметрическом условии невозможно, а из точек луча ($x_1\ge -c^2/2$, $x_2=-c$) – возможно с оптимальным управлением

$$\overline{u} = \begin{cases} 0, & x_1 > c^2 / 2, \\ 1, & x_1 \le c^2 / 2. \end{cases}$$

Рассмотрим внутренние точки области B. Пусть сначала

$$x_1 > \frac{c^2}{2} - \frac{(x_2 + c)^2}{4}, \qquad -c < x_2 < c.$$

Возьмем вспомогательную фазовую точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ с начальными координатами

$$\hat{x}_1 = \frac{c^2}{2} - \frac{(x_2 + c)^2}{4}, \qquad \hat{x}_2 = x_2$$

и применим к ней управление u=–1 до тех пор, пока не будет выполнено равенство

$$\hat{x}_1 = \tilde{x}_1 = -\frac{|\hat{x}_2|\hat{x}_2}{2}, \qquad \tilde{x}_2 = \arg(\tilde{x}_1). \tag{12}$$

Оптимальное управление с учетом изопериметрического ограничения принимает вид

$$\overline{u} = \begin{cases} -1, & x_2 > \tilde{x}_2, \\ 0, & x_1 > \tilde{x}_1, \quad x_2 = \tilde{x}_2, \\ 1, & x_1 \le \tilde{x}_1. \end{cases}$$

Пусть теперь

$$x_1 < -\frac{c^2}{2} + \frac{(x_2 - c)^2}{4}, \qquad -c < x_2 < c.$$

Возьмем вспомогательную фазовую точку $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ с начальными координатами

$$\hat{x}_1 = -\frac{c^2}{2} + \frac{(x_2 - c)^2}{4}, \qquad \hat{x}_2 = x_2$$

и применим к ней управление u=1 до тех пор, пока не будет выполнено равенство (12).

Оптимальное управление с учетом изопериметрического ограничения принимает вид

$$\bar{u} = \begin{cases} 1, & x_2 < \tilde{x}_2, \\ 0, & x_1 < \tilde{x}_1, \quad x_2 = \tilde{x}_2, \\ -1, & x_1 \geq \tilde{x}_1. \end{cases}$$

Точки фазовой плоскости, не принадлежащие множеству $A \cup B$, не допускают приведение в ноль при заданном изопериметрическом ограничении.

3. Стандартная задача вариационного исчисления

Найти необходимое и достаточное условие, определяющее экстремали функционала

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}, t \right) dt, \tag{13}$$

где $\mathbf{q}(t)=(q_1(t),\ldots,q_n(t))$ – дифференцируемая вектор-функция параметра t, L – дважды дифференцируемая функция своих аргументов, на заданном множестве вектор-функций $\mathbf{q}(t)$.

Для решения этой задачи воспользуемся методом Охоцимского-Понтрягина [5]. Определим вектор-функцию $\mathbf{q}(t)$ с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{q}' = \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{u}, \tag{14}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ – вектор-функция управлений, выбираемых произвольно. Функционал (13) перепишем в виде

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \ldots, q_n, u_1, \ldots, u_n, t)\, dt. \tag{15}$$

Согласно п.2.1, функционалу (15) и системе уравнений (14) отвечает гамильтониан

$$\hat{H} = L + \sum_{i=1}^{n} \psi_i u_i, \qquad \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \psi_i},$$

а дифференциал функционала (15) выражается формулой

$$dW = \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial u_i} \delta u_i dt$$

при выполнении условий трансверсальности

$$\hat{H}(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \boldsymbol{\psi}(t_0)) dt_0 - \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t_0) dq_i(t_0) = 0,$$

$$\hat{H}(\mathbf{q}(t_1), \mathbf{u}(t_1), \boldsymbol{\psi}(t_1)) dt_1 - \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t_1) dq_i(t_1) = 0. \tag{16}$$

3.1. Задача с фиксированными краевыми условиями. В этой задаче к сравнению допускаются вектор-функции $\mathbf{q}(t)$, имеющие в фиксированные начальный и конечный моменты времени фиксированные значения начальных и конечных координат. Тогда условия трансверсальности автоматически удовлетворяются. Поскольку управление принадлежит открытой области, то необходимыми и достаточными условиями экстремума функционала будут равенства

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial u_i} = \frac{\partial L}{\partial u_i} + \psi_i \equiv 0, \quad \to \quad \psi_i \equiv - \frac{\partial L}{\partial u_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i'}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{17}$$

Подставив найденные выражения в дифференциальные уравнения для сопряженных переменных и выразив переменные u_i через q_i', найдем, что для экстремальности функционала (13) в задаче с фиксированными концами необходимо и достаточно выполнение уравнений Лагранжа-Эйлера

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

3.2. Автономная система $\partial L / \partial t = 0$**.** Экстремаль функционала определена уравнениями (18), для которых будет справедлив первый интеграл

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i'} q_i' - L = F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = h, \tag{19}$$

где h – постоянная интегрирования. Вычислим дифференциал функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i'} \, q' dt = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') \; dt + W \tag{20}$$

на экстремали функционала *W*, не предполагая сохранения функции $F(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$. С учетом равенств (17) найдем

$$dJ = \int_{t_0}^{t_1} \delta F \; dt$$

при выполнении условий трансверсальности

$$(F + \hat{H})\Big|_{t_0} dt_0 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_i'} dq_i \Bigg|_{t_0} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_i'} dq_i \Bigg|_{t_0} = 0,$$

$$(F + \hat{H})\Big|_{t_1} dt_0 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_i'} dq_i \Bigg|_{t_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_i'} dq_i \Bigg|_{t_1} = 0,$$

поскольку на экстремали имеем $F + \hat{H} = 0$. Если теперь к сравнению допустить только кривые, для которых сохраняется $F(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = h$, но которые проходят через фиксированные начальную и конечную точки (время не фиксировано), то получим аналог принципа Мопертюи-Лагранжа-Якоби [6]. А именно, при $\partial L / \partial t = 0$ вектор-функции γ, удовлетворяющие уравнениям Эйлера, будут экстремалями функционала *J* среди всех кривых с одинаковым значением константы *h*, проходящих через фиксированную начальную и конечную точки в координатном пространстве. Полученный принцип позволяет игнорировать циклические координаты.

Пример 4. (Задача о пространственной брахистохроне). Материальная точка соскальзывает в поле параллельных сил тяжести по абсолютно гладкой кривой γ, соединяющей заданные начальную точку *A* и конечную точку *B*. Среди всех дифференцируемых кривых γ, проходящих через фиксированные точки *A* и *B*, найти такую, для которой время движения точки из *A* в *B* минимально.

Пусть искомая кривая образует идеальную связь. Поместим начало координат в точку *A*. Ось *Ay* направим вертикально вниз. Горизонтальную ось *Ax* выберем так, чтобы плоскость *Axy* содержала точку *B*. Ось *Az* выберем так, чтобы она с указанными двумя осями образовала правую тройку. Время T движения по кривой γ можно выразить с помощью интегралов

$$T = \int_\gamma \frac{ds}{v},$$

где ds – элемент длины дуги, а v – скорость материальной точки, которую в данном случае можно найти из интеграла энергии $v = \sqrt{v_0^2 + 2gy}$, где v_0 – начальное значение скорости. Функционал T можно представить в виде

$$T = \int_0^{x_1} L dx, \qquad L = \frac{\sqrt{z'^2 + y'^2 + 1}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}}, \tag{21}$$

где $z'=dz/dx$, $y'=dy/dx$. Значение x_1 – заданная координата точки B. Имеем задачу оптимизации с фиксированными краевыми условиями. Кроме того, имеем $\partial L / \partial x = 0$. Поэтому можно искать экстремум среди всех кривых, обладающих одинаковой константой h,

$$\frac{\partial L}{\partial z'} z' + \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L = -\frac{1}{\sqrt{(z'^2 + y'^2 + 1)(v_0^2 + 2gy)}} = h \tag{22}$$

для функционала

$$J = \int_0^{x_1} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} z' + \frac{\partial L}{\partial y'} y' \right) dx =$$

$$= \int_0^{x_1} \frac{z'^2 + y'^2}{\sqrt{(z'^2 + y'^2 + 1)(v_0^2 + 2gy)}} dx = \int_\gamma \frac{\sqrt{z'^2 + y'^2}}{\sqrt{(z'^2 + y'^2 + 1)(v_0^2 + 2gy)}} dS,$$

где $dS = \sqrt{dz^2 + dy^2}$ – длина дуги на плоскости Ayz. С учетом интеграла (22) получим

$$J = \int_\gamma \sqrt{\frac{1 - h^2 (v_0^2 + 2gy)}{(v_0^2 + 2gy)}} dS .$$

Откуда видно, что проекция оптимальной кривой на плоскость Ayz должна иметь минимальную длину по метрике [6]

$$d\rho = \sqrt{\frac{1-h^2(v_0^2+2gy)}{(v_0^2+2gy)}}dS.$$

В частности, если конечная точка лежит в плоскости Ayx, то брахистохрона будет лежать в этой плоскости.

3.3. Интегральные вариационные принципы механики. Пусть $L(q_1,\ldots,q_n,q_1',\ldots,q_n',t)$ есть лагранжиан механической системы, t – время, а q_i', i=1,…,n суть производные от координат по времени. Другими словами, $L = L_2 + L_1 + L_0$, где L_2 – положительно определенная квадратичная форма скоростей, L_1 – линейная форма скоростей, L_0 от скоростей не зависит.

3.3.1. Принцип Гамильтона. Уравнения (18) совпадают с уравнениями Лагранжа второго рода. Отсюда и следует принцип Гамильтона, состоящий в том, что решения уравнений Лагранжа составляют экстремаль функционала (13) в задаче с фиксированными концами.

Из полученного решения также следует, что если из уравнений $\psi_i = -\dfrac{\partial L}{\partial q_i'}$, i=1,…,n выразить $q_i' = q_i'(q_1,\ldots q_n,\psi_1,\ldots,\psi_n,t)$ и подставить их в выражение для $\hat{H}$, так что

$$\hat{H}^{\psi} = \hat{H}(q_1,\ldots q_n, q_1'(\mathbf{q},\boldsymbol{\psi},t),\ldots,q_n'(\mathbf{q},\boldsymbol{\psi},t),t),$$

то с учетом (17) получим

$$\frac{\partial \hat{H}^{\psi}}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j'}\frac{\partial q_j'}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n}\psi_j\frac{\partial q_j'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial q_i},$$

$$\frac{\partial \hat{H}^{\psi}}{\partial \psi_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j'}\frac{\partial q_j'}{\partial \psi_i} + \sum_{j=1}^{n}\psi_j\frac{\partial q_j'}{\partial \psi_i} + q_i' = q_i'.$$

Поэтому сопряженные переменные и лагранжевы координаты удовлетворяют следующей системе уравнений Гамильтона:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \hat{H}^{\psi}}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \hat{H}^{\psi}}{\partial \psi_i}, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Связь между полученными уравнениями и каноническими уравнениями Гамильтона определяется каноническим преобразованием вида

$$(\mathbf{q};\psi)=(\mathbf{q};-\mathbf{p}), \qquad \hat{H}^{\psi}=-H,$$

имеющим валентность -1. Здесь H – стандартный гамильтониан системы, и $p_i=\partial L/\partial q_i'$, $i=1,\ldots,n$.

3.3.2 Принцип Мопертюи-Лагранжа-Якоби. При $\partial L/\partial t=0$ интеграл (19) превращается в обобщенный интеграл энергии $L_2-L_0=h$. Следовательно, при $\partial L/\partial t=0$ вектор-функции γ, удовлетворяющие уравнениям Лагранжа, будут экстремалями функционала (20)

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i'}\,q_i'dt=\int_{t_0}^{t_1}(2L_2+L_1)\,dt$$

среди всех кривых с одинаковым значением константы h обобщенной энергии, проходящих через фиксированную начальную и конечную точки в координатном пространстве [6]. Результат п. 3.2 служит обобщением рассматриваемого принципа на функции L произвольного вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Успехи физ. наук, 1957, т.63, вып.1, с.5-32.
2. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. - М.: Наука, 1961, 391 с.
3. *Голубев Ю.Ф.* Метод Охоцимского-Понтрягина в теории управления и аналитической механике. Часть 1: метод Охоцимского-Понтрягина в теории управления // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, 2008, №6, с.49-55.
4. *Охоцимский Д.Е., Голубев Ю.Ф., Сихарулидзе Ю.Г.* Алгоритмы управления космическим аппаратом при входе в атмосферу. - М.: Наука, 1975, 399 с.
5. *Голубев Ю.Ф.* Метод Охоцимского-Понтрягина в теории управления и аналитической механике. Часть 2: метод Охоцимского-Понтрягина в аналитической механике // Вестник Моск. ун-та. Сер.1, Математика. Механика, 2009, №1, с.38-44.
6. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд., перераб. и дополн. - М.: Изд-во МГУ, 2000, 719 с.