



МЕТОДЫ ЛУПАНОВА И ИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ТЕОРИИ СИНТЕЗА СХЕМ

Олег Борисович Лупанов (1932–2006) – выдающийся математик, работы которого сыграли решающую роль в расцвете математической кибернетики. Начав научную деятельность под благотворным влиянием Алексея Андреевича Ляпунова и особенно Сергея Всеволодовича Яблонского, Олег Борисович быстро проявил свою яркую индивидуальность и выбрал самостоятельное направление – синтез и сложность схем, ставшее впоследствии одним из центральных в области математической кибернетики. Первостепенное значение этого направления было предопределено внутренней логикой развития науки, а формировалось оно стремительно и притом многопланово, прежде всего благодаря Лупанову и его ученикам, которым предлагался широкий спектр задач.

Олег Борисович обладал уникальными комбинаторными способностями, чрезвычайно важными для любого математика, но особенно для тех, кто имеет дело с дискретностью. Прекрасно ориентируясь во всех основных разделах математической кибернетики и дискретной математики, он сконцентрировал свои усилия на синтезе схем, реализующих дискретные функции, главным образом, булевы функции, и рассмотрел случаи применения разнообразных элементов. Решив подряд несколько трудных задач, оказавшихся не под силу его предшественникам и современникам, Лупанов создал направление асимптотически наилучших методов синтеза схем, вершиной которого стал принцип локального кодирования, позволивший перенести общий подход на синтез схем практически для любых классов булевых функций.

Научная деятельность О. Б. Лупанова началась еще во время его учебы в Московском государственном университете, где его научным руководителем был С. В. Яблонский. Видимо, уже тогда Сергей Всеволодович стал нацеливать своего талантливого ученика на решение казавшейся безнадежно трудной «проблемы Шеннона» – устранение четырехкратного разрыва между верхней и нижней оценками для функции, изучавшейся К. Э. Шенноном. Эта функция при каждом натуральном n была определена как минимальное число контактов, достаточное для реализации любой булевой функции от n переменных контактной схемой. Впоследствии она получила название *функции Шеннона*.

Как и предполагалось, проблема оказалась по-настоящему трудной. Другого математика она бы сломала. Однако Лупанову, проявившему

чудесную изобретательность и отличные волевые качества, оказалась под силу. К цели он продвигался по шагам.

Прежде всего надо было понять, какая из оценок Шеннона ближе к окончательной – нижняя или верхняя. Нижняя оценка была получена Шенноном тем же методом, что и в его совместной работе с Риорданом о параллельно-последовательных контактных схемах (П-схемах), но на этот раз – для произвольных двухполюсных контактных схем.

В основе данного метода (получившего название «мощностной метод») лежит простое соображение. Поскольку двухполюсная контактная схема реализует лишь одну булеву функцию, число таких схем, содержащих контакты n фиксированных переменных и реализующих все булевы функции от этих n переменных, должно быть не меньше числа этих функций. Применение этого соображения реально означает необходимость подсчета или хотя бы оценки сверху числа рассматриваемых схем, содержащих не более k контактов, с тем, чтобы, сравнивая полученную величину с числом функций, извлечь нижнюю оценку для k .

Удивительно, что такой, на первый взгляд, непритязательной идеи оказалось достаточно для получения хороших нижних оценок – не только тех, о которых уже говорилось, но и многих других появившихся позднее. Весь вопрос в трудности получения хорошей верхней оценки для числа рассматриваемых схем.

О. Б. Лупанов распространил понятие функции Шеннона на схемы из произвольных элементов и начал с исследования того, что может дать для них метод Риордана–Шеннона. Задачу постарался поставить так, чтобы как можно полнее охватить известные средства, использовавшиеся при построении схем. В результате он получил общую нижнюю оценку для функции Шеннона, применимую в огромном числе случаев. Впоследствии на эту оценку в своих работах опирались и сам Лупанов, и другие математики. Познавательным было то, что даже при существенном расширении запаса средств нижняя оценка принципиально не понижалась. Например, в случае контактно-вентильных схем (учитывалось общее число элементов – контактов и вентилей) нижняя оценка для функции Шеннона осталась асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) такой же, как и для контактных схем. Эти результаты были опубликованы в «Докладах АН СССР» в 1955 г.

Видимо, не случайно следующая работа Олега Борисовича была посвящена контактно-вентильным схемам (опубликована в «Докладах АН СССР» в 1956 г.). Проблема сближения оценок оказалась несколько легче, чем в случае контактных схем, и О. Б. Лупанов сумел для контактно-вентильных схем найти универсальный метод синтеза (позволяющий построить схему для любой булевой функции), который для соответствующей функции Шеннона дал верхнюю оценку асимптотически равную нижней (при $n \rightarrow \infty$). Это была, судя по всему, *первая асимптотика функции Шеннона*. Она имеет вид: $2^n/n$.

Сам метод синтеза с его универсальной (при каждом n) верхней оценкой, совпадающей асимптотически с нижней, был общепризнан *асимптотически наилучшим*.

Попутно был фактически обнаружен (но еще явно не сформулирован) важный эффект: почти все булевы функции от n переменных требуют для своей реализации контактно-вентильными схемами асимптотически (при

$n \rightarrow \infty$) такого же числа элементов (контактов и вентилях), как и та булева функция, для которой это число максимально, т. е. равно значению функции Шеннона в точке n . Для контактных схем аналогичное утверждение в качестве гипотезы было высказано К. Э. Шенноном, причем его нижняя оценка легла в итоге в основу доказательства гипотезы. С легкой руки Олега Борисовича обнаруженный эффект получил впоследствии название *эффект Шеннона*.

В дальнейших работах О. Б. Лупанова асимптотически наилучший метод синтеза и эффект Шеннона также появлялись вместе (за исключением одного специфического случая, о чем будет сказано отдельно).

Метод синтеза контактно-вентильных схем сыграл большую роль в развитии всего направления. Как и в методе Шеннона, переменные здесь разбиваются на две группы, но в другом соотношении. Схема строится из трех блоков, среди которых первый и третий содержат только контакты, а второй – только вентили. Первый и третий блоки представляют собой контактные деревья, реализующие все элементарные конъюнкции от переменных соответственно первой и второй групп. Число контактов в них относительно невелико. Для построения экономного блока из вентилях Олегу Борисовичу пришлось проявить присущую ему изобретательность. В итоге у него родилась идея разрезания матрицы проводимостей вентильной схемы на вертикальные полосы и построения для всевозможных строк каждой полосы отдельных подсхем с последующим их комбинированием в общую схему. Таким путем был создан новый метод синтеза вентильных схем, оказавшийся при определенных соотношениях между параметрами схемы асимптотически наилучшим. Это обеспечило решение задачи для контактно-вентильных схем, а сам метод занял достойное место в теории вентильных схем.

Однако еще важнее было то, что идея разрезания на полосы оказалась универсальной и вскоре была перенесена на двумерную таблицу значений булевой функции, соответствующую разбиению n переменных на две группы. Это послужило основой нового представления булевой функции, имеющего явное сходство со структурой соответствующей вентильной схемы (только таблица разрезалась не на вертикальные полосы, а на горизонтальные). Данное представление получило в мировой литературе название *представление Лупанова*. Вместе с последующими модификациями (также получившими имя Лупанова) оно открыло путь к созданию новых методов синтеза при использовании самых разных элементов.

Для контактных схем это представление позволило улучшить верхнюю оценку Шеннона в 2 раза и тем самым уменьшить разрыв между верхней и нижней оценками для функции Шеннона до 2 раз. Значительно сильнее была улучшена верхняя оценка для П-схем, полученная в ранней работе К. Э. Шеннона. Разрыв между верхней и нижней оценками для П-схем уменьшился также до 2 раз.

Еще одним важным видом схем были схемы из функциональных элементов, для которых задача в наиболее интересном случае конечного полного базиса (т. е. системы элементов, позволяющей реализовать любую булеву функцию) была рассмотрена Д. Э. Мюллером. Каждому элементу он сопоставил положительное число – вес (стоимость) элемента, а сложность схемы определил как сумму весов входящих в нее элементов. В соответствии с

этим была определена и функция Шеннона (роль числа элементов стала играть сложность).

Воспользовавшись идеями Шеннона, Мюллер получил аналогичные верхнюю и нижнюю оценки функции Шеннона для схем из функциональных элементов, которые отличались друг от друга в несколько раз. Эти оценки были получены для произвольного конечного полного базиса, однако расхождение между ними зависело от базиса и могло быть сколь угодно велико. Естественно, что этой проблемой решил заняться О. Б. Лупанов.

Его представление позволяло без труда получить для какого-нибудь традиционного базиса (скажем, $\{\&, \vee, \neg\}$) окончательную асимптотическую верхнюю оценку функции Шеннона. Однако О. Б. Лупанов ставил своей целью решить задачу в общем виде – для произвольного конечного полного базиса.

В связи с этим представление булевой функции требовалось приспособить к произвольному конечному полному базису. Упорный поиск привел Лупанова к открытию *обобщенного разложения* булевой функции по части ее переменных. Эту находку высоко оценил академик П. С. Новиков. Он считал, что это разложение имеет большое самостоятельное значение, и вспоминал о нем при выступлениях на разные темы. В своем официальном отзыве на докторскую диссертацию Олега Борисовича П. С. Новиков подчеркнул, что «обнаружен весьма важный факт, относящийся собственно не к теории схем, а к теории булевских функций». Обобщенное разложение является прямым аналогом обычного разложения и может быть построено в любом конечном полном базисе, причем в качестве «основной» можно взять любую его функцию, зависящую не менее, чем от двух переменных.

Обобщенное разложение вошло составной частью в представление Лупанова. Наиболее выгодный (с точки зрения минимизации сложности) элемент был взят как «основной», и в схеме эти элементы составили подавляющее большинство. Последнее было достигнуто путем перехода к трехмерной таблице значений булевой функции с введением третьей группы переменных. В итоге О. Б. Лупанов получил асимптотическую верхнюю оценку функции Шеннона для произвольного конечного полного базиса, оказавшуюся окончательной.

К тому моменту свою весьма общую нижнюю оценку он уже перенес на случай элементов с разными весами. Это было важно, но еще недостаточно для получения требовавшейся нижней оценки в случае схем из функциональных элементов. Дело в том, что нижняя оценка была получена пока только для модели схем, в которой полюса элементов равноправны с точки зрения соединения (т. е. отождествления) их друг с другом. Полюса функциональных элементов делятся на входы и выходы, и при обычном истолковании процесса работы схемы не допускается соединение выходов разных элементов между собой. При фиксированных переменных это ограничение существенно уменьшает возможное число схем по сравнению с тем числом, которое допускала прежняя модель, а потому имелся шанс повысить нижнюю оценку функции Шеннона. Специально для схем из функциональных элементов О. Б. Лупанов разработал новый метод и сравнительно быстро получил нижнюю оценку, асимптотически совпадающую с верхней. Тем самым была получена асимптотика функции Шеннона для схем из функциональных элементов, которая имеет вид:

$$\rho 2^n/n,$$

где ρ – минимум отношения веса элемента к числу его входов, уменьшенному на 1, взятый по всем элементам базиса, имеющим не менее двух входов. Метод синтеза, как и в случае контактно-вентильных схем, оказался асимптотически наилучшим.

Это замечательное исследование, дающее ответы на многие вопросы о сложности контактных схем и схем из функциональных элементов было бы целесообразно опубликовать в каком-либо центральном математическом издании, чтобы оно было на виду у математиков. Однако в 1958 г. создавался журнал «Радиофизика. Известия высших учебных заведений», и от его редколлегии поступила просьба поддержать журнал хорошей статьей. Олег Борисович пошел навстречу, и его статья, содержащая подробное изложение перечисленных выше результатов, появилась в первом номере нового журнала.

Для полноты картины не хватало асимптотики функции Шеннона для контактных схем, и работа в этом направлении была продолжена. Снова встал вопрос: какую оценку улучшать – верхнюю или нижнюю. Сам Шеннон почти не верил в то, что можно настолько понизить верхнюю оценку, что она совпадет с нижней («Возможность такого метода синтеза схем представляется, однако, маловероятной») и, хотя видел препятствия, склонялся к тому, что можно повысить нижнюю оценку. Однако асимптотика функции Шеннона, полученная Лупановым для контактно-вентильных схем, говорила не в пользу этой точки зрения. Поражает то, насколько быстро О. Б. Лупанов сумел понизить свою верхнюю оценку, причем, как и требовалось, в 2 раза. Это означало получение для контактных схем асимптотики функции Шеннона вида:

$$2^n/n$$

и окончательное решение проблемы Шеннона. В марте 1958 г. этот результат был опубликован в «Докладах АН СССР».

Новым в работе стало применение конструкции кода Хемминга – неожиданная связь с теорией кодирования, прекрасно иллюстрирующая единство математики. Код Хемминга при $n = 2^k - 1$, где k – натуральное, естественным образом разбивает единичный n -мерный куб на непересекающиеся шары. О. Б. Лупанов отсюда вывел, что соответствующий единичный $(n+1)$ -мерный куб разбивается на непересекающиеся сферы. При этом он сумел понять (а это было значительно труднее), каким образом свойства характеристической функции сферы можно использовать для преодоления ограниченности ветвления контактного дерева, реализующего все элементарные конъюнкции от заданных переменных. Найденное разбиение было перенесено на двумерную таблицу значений булевой функции как ее дополнительное разрезание (на этот раз – на вертикальные полосы) с введением третьей группы переменных. Возникло еще одно представление Лупанова, дающее асимптотически наилучший метод синтеза.

Эта работа стала кандидатской диссертацией, которую О. Б. Лупанов защитил в том же 1958 г. Она же оказалась главной в цикле из трех работ по синтезу управляющих систем, за который О. Б. Лупанову была присуждена премия Московского математического общества для молодых математиков за 1959 год. Характерно, что работа по синтезу схем из функциональных

элементов в этот цикл не была включена. Видимо, в то время результаты, относящиеся к контактным схемам, оценивались значительно выше других. Однако довольно скоро стало понятно, что схемы из функциональных элементов даже важнее контактных схем.

Результаты О. Б. Лупанова послужили фундаментом для дальнейших исследований в теории синтеза схем. Его ученики и последователи значительно расширили область применения созданных им методов, а в некоторых случаях даже смогли уточнить отдельные его результаты. Примечательно, что среди этих математиков оказался и учитель Олега Борисовича – С. В. Яблонский, который не скрывал того, что свою идею доказательства верхней оценки функции Шеннона для инвариантных классов булевых функций он не мог реализовать, пока не появился метод Лупанова для контактных схем. Опираясь на этот метод и пользуясь весьма общей нижней оценкой, также принадлежащей Лупанову, С. В. Яблонский получил ключевой результат в теории инвариантных классов, которая стала основой его докторской диссертации.

Развивая свой подход к получению верхних, а порой, и нижних оценок, сам Лупанов установил асимптотику функции Шеннона для релейно-контактных схем, для П-схем, для формул (т. е. схем из функциональных элементов, в которых выходы элементов не ветвятся) и для схем с ограниченным ветвлением выходов элементов. Одновременно в каждом из этих случаев был разработан асимптотически наилучший метод синтеза.

Основные результаты для релейно-контактных схем О. Б. Лупанов получил в 1959 г. и тогда же доложил их на заседании Московского математического общества (в сжатом виде они были опубликованы в «Успехах математических наук» в 1960 г.). Подробное изложение с рассмотрением еще нескольких типов релейно-контактных схем появилось в 1964 г. в сборнике «Проблемы кибернетики». Работа явилась логическим продолжением работы о контактных схемах. В основе верхних оценок для всех типов схем лежало то же самое представление, и всё сводилось, как отмечал сам Лупанов, к «некоторой переделке метода синтеза контактных схем». Для получения одной из нижних оценок пришлось разработать новый вариант обычного метода, приспособленный к конкретному типу релейно-контактных схем. Асимптотика функции Шеннона получилась подобная той, что для контактных схем, но с разными коэффициентами для разных типов схем.

Когда в конце 1957 года О. Б. Лупанов изобрел асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем, ему оставалось сделать лишь один шаг для решения такой же задачи для П-схем (параллельно-последовательных контактных схем). Достаточно было несколько изменить представление булевой функции так, чтобы оно соответствовало П-схеме (а не контактной схеме общего вида), и по-другому выбрать его параметры. Нет никаких сомнений, что Олег Борисович увидел это сразу. В сочетании с нижней оценкой Риордана–Шеннона новый метод синтеза давал для П-схем асимптотику функции Шеннона вида:

$$2^n / \log_2 n.$$

Однако соответствующую конструкцию, привлекательную своей простотой, Лупанов опубликовал только в 1963 г. в сборнике «Проблемы кибернетики», причем в статье методического характера. Видимо, это связано

с тем, что уже в начале 1958 г. он закончил работу о сложности формул, в которой асимптотика для П-схем (точно описывающихся формулами в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$) была получена как следствие значительно более общего результата.

В этой работе для формул в произвольном конечном полном базисе О. Б. Лупанов установил асимптотику функции Шеннона вида:

$$\rho 2^n / \log_2 n,$$

где ρ – тот же коэффициент, что и для схем из функциональных элементов. Нижняя оценка была ранее получена Р. Е. Кричевским. Верхнюю оценку Лупанов получил, создав асимптотически наилучший метод синтеза схем этого вида.

Метод очень сложный. Если раньше переменные булевой функции достаточно было разбить на три группы (а то и на две), то здесь они разбиваются фактически на пять групп. В методе одновременно используются обобщенное разложение и разбиение на сферы, что достигается путем определенного комбинирования наборов сфер с наборами (из нулей и единиц), участвующими в обобщенном разложении. Это приводит к разбиению множества всех наборов значений переменных первой группы на подмножества, уже не являющиеся сферами. Полученные подмножества наборов преобразуются в подмножества наборов большей длины за счет добавления двух групп переменных (второй и третьей), одна из которых в подавляющем большинстве случаев делает новое подмножество *хорошим*, а другая позволяет выбирать из него нужную полосу. Декартово произведение хорошего подмножества и множества всех наборов значений переменных четвертой группы представляет собой ячейку, на базе которой удастся строить достаточно экономные формулы. При этом подтаблица значений булевой функции, соответствующая такой ячейке, разрезается не только на горизонтальные, но и на вертикальные полосы, а реализация производится с точностью до характеристической функции ячейки. Затем построенные формулы собираются в одну: сначала с помощью обычного разложения по переменным пятой группы, а после умножения на характеристические функции ячеек – с помощью дизъюнкций, причем для *плохих* подмножеств формулы строятся тривиальным способом. Полное изложение результата появилось в 1960 г. в сборнике «Проблемы кибернетики».

Вместе с тем П-схемы требовали дополнительного рассмотрения. Дело в том, что неопубликованная к тому моменту конструкция для П-схем не только позволяла получить асимптотику функции Шеннона, но и имела небольшую глубину¹. И естественно возник вопрос о наименьшей возможной глубине. Для решения этой задачи О. Б. Лупанов предложил новую конструкцию (полученную, по всей видимости, путем модификации предыдущей) и установил (в 1960 г.), что уже для П-схем глубины 3 асимптотика функции Шеннона такая же, как и в случае неограниченной глубины. Поскольку для П-схем глубины 2 функция Шеннона растет быстрее, этот результат оказался окончательным.

В 1973 г. О. Б. Лупанов усилил этот результат, показав, что при каждом n существует универсальная П-сеть (т. е. П-схема без символов, приписанных

¹ Для П-схем глубина определяется как число чередований параллельных и последовательных соединений, увеличенное на единицу.

контактам, из которой расстановкой символов переменных и их отрицаний можно получить П-схему для любой булевой функции от n переменных) со свойствами: ее глубина равна 3, а контактов в ней столько, что сохраняется асимптотика функции Шеннона.

Рассмотрев аналогичную ситуацию для конкретных булевых функций и используя на этот раз язык формул, О. Б. Лупанов обнаружил (1970 г.), что для них дело обстоит иначе. А именно, для одной бесконечной последовательности монотонных булевых функций он показал, что минимальное число контактов в П-схемах, реализующих эти функции, может быть асимптотически достигнуто только при неограниченном увеличении глубины П-схем (правда, этот результат получен лишь для П-схем из замыкающих контактов).

После того, как асимптотика функции Шеннона была получена для схем из функциональных элементов и для формул, остался неисследованным промежуточный случай – схемы из функциональных элементов с ограниченным ветвлением выходов элементов.

О. Б. Лупанов решил задачу и для этого особенно сложного случая. Прежде всего он установил, что при переходе от формул к схемам с ограниченным ветвлением происходит скачок в поведении функции Шеннона: если в базисе есть элемент, допускающий ветвление своего выхода хотя бы на 2 входа других элементов, причем этот элемент реализует функцию, отличную от 0 и 1, то функция Шеннона имеет тот же порядок роста $2^n/n$, что и в случае схем общего вида. Чтобы равенство с точностью до порядка превратить в асимптотику, требовалось найти постоянный множитель. Сложность задачи налицо: этот коэффициент зависит уже не только от веса и числа входов каждого элемента, но и от допустимого числа входов других элементов, присоединяемых к его выходу. Впечатляет своей сложностью выражение для этого коэффициента, найденное Лупановым. Оно представляет собой минимум, взятый по множеству чисел, каждое из которых соответствует определенной паре различных элементов и выражается через их веса (с учетом весов некоторых других элементов), числа их входов и допустимые числа присоединяемых входов других элементов. Неудивительно, что верхняя оценка была доказана в результате построения весьма сложной конструкции. Получение нижней оценки составило отдельную задачу. Итогом явилась асимптотика функции Шеннона для данного вида схем. Это одна из труднейших работ Олега Борисовича. Полностью результат был опубликован в 1962 г. в сборнике «Проблемы кибернетики».

Результаты о схемах из функциональных элементов, о формулах, о П-схемах глубины 3 и о схемах с ограниченным ветвлением выходов элементов составили докторскую диссертацию Олега Борисовича, которую он защитил в 1963 г. Схемы из функциональных элементов как важный объект исследования получили признание.

Во всех перечисленных выше работах на первый план выступает теоретическое значение. Для всех рассмотренных видов схем установлено, что подавляющее большинство булевых функций реализуется только очень сложно, причем почти все из них примерно с одинаковой сложностью. Еще К. Э. Шеннон обратил внимание на то, что доказательство нижней оценки «является чистым доказательством существования». В итоге неизвестно,

каким образом можно представить себе в явном виде хотя бы одну сложную булеву функцию. Подобная ситуация встречается в самых разных разделах математики и вызывает на размышление многих ученых.

В своих работах О. Б. Лупанов показал, что помимо традиционных способов выражения булевых функций существует много других их представлений, заслуживающих внимания. При этом любое представление может служить основой для нескольких методов синтеза, каждый из которых включает в себя дополнительные детали. Совершенно самостоятельное значение имеет обобщенное разложение булевой функции по части переменных, причем не только в теории синтеза схем, но и в смежных областях, – например, в теории булевых функций.

Большое исследование, проведенное Лупановым, существенно расширило имевшийся запас знаний о сложности булевых функций и определило новые проблемы. Прежде всего появилась задача об уточнении асимптотических оценок и приобрела новый импульс задача о получении возможно более точных оценок для небольших значений n . Осталось почти нетронутым большое поле деятельности по поиску новых эффектов. Но главное, стало понятно, что значительно больше внимания следует уделять простым функциям, которые и встречаются на практике.

О. Б. Лупанов был убежден, что в его методах синтеза уже содержатся разные приемы, которые могут успешно применяться на практике – только каждый раз надо извлекать из метода то, что требуется в конкретном случае. Эта точка зрения по-прежнему актуальна. Сам Олег Борисович много сделал для реализации своей идеи, выдвинув в начале 1960-х гг. *принцип локального кодирования* и показав его большие возможности. Этот принцип предусматривает выделение классов булевых функций, которые могут быть реализованы проще, чем большинство функций, и ставит целью построение для них экономных схем.

О. Б. Лупанов подчеркивал: «Принцип локального кодирования – это содержательный принцип». И сразу добавлял: «Этот принцип позволяет сводить синтез схем к кодированию функций, обладающему определенными свойствами». Олег Борисович часто говорил: «Схема – код функции». В новом принципе он развил это положение.

В самых общих чертах О. Б. Лупанов формулирует принцип локального кодирования следующим образом:

«Этот принцип основан на использовании специального кодирования функций, учитывающего специфику класса реализуемых функций и обладающего некоторыми дополнительными свойствами.

1. Кодирование является “локальным” в том смысле, что для вычисления значения функции f на каждом конкретном наборе $\vec{\alpha}$ значений аргументов не нужно знать весь код функции f , а достаточно знать его “небольшой кусок”.
2. Сравнительно просто вычисляются “координаты” этого куска (например, номер куска, если код разбит на куски одинаковой длины; номер первого разряда и длина куска, если куски имеют различную длину), т. е. существует “простая” схема, осуществляющая эту операцию.

3. По куску кода и набору $\tilde{\sigma}$ (а также, если удобно, то по “координатам” указанного куска кода) значение функции f на наборе $\tilde{\sigma}$ вычисляется сравнительно просто».

Принцип локального кодирования особенно удобно применять к схемам из функциональных элементов. Тем более, что нужное представление булевых функций уже найдено, а обобщенное разложение позволяет получать результаты сразу в произвольном конечном полном базисе. Применение этого принципа к разным классам булевых функций имеет много общего, и это общее удалось сформулировать в виде ряда теорем. Большие возможности, которые открываются при его применении, О. Б. Лупанов продемонстрировал на многих примерах.

Наряду с булевыми функциями рассматривались упорядоченные системы булевых функций, названные операторами; была введена по аналогии функция Шеннона для класса булевых функций и класса операторов. В большинстве примеров О. Б. Лупанов получил асимптотику функции Шеннона: для булевых функций с фиксированным числом единиц, для симметрических операторов (состоящих из симметрических функций), для монотонных операторов (каждый из них задает монотонно возрастающую функцию одной переменной, если двоичные наборы воспринимать как записи соответствующих чисел). Для симметрических булевых функций удалось установить только порядок роста функции Шеннона, но для такого «узкого» класса это тоже было достижением. Подробное изложение принципа локального кодирования опубликовано в 1965 г. в сборнике «Проблемы кибернетики».

Принцип локального кодирования сразу нашел своих приверженцев и успешно применялся многими математиками как в нашей стране, так и за рубежом. Тем не менее его огромный потенциал освоен до сих пор лишь в очень небольшой части.

В 1966 г. О. Б. Лупанову вместе с Ю. И. Журавлевым и С. В. Яблонским «за цикл работ по математической теории синтеза управляющих систем» была присуждена Ленинская премия. В 1972 г. О. Б. Лупанов был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР. Примерно в это же время он написал еще две работы, связанные с изучением функции Шеннона.

В первой из этих работ рассмотрены схемы из функциональных элементов с задержками и показано, что при естественной постановке задачи любая булева функция от n переменных может быть реализована одновременно со сложностью и задержкой, асимптотически не превосходящими соответствующих функций Шеннона. Важнее, однако, другой результат: при некоторых условиях (правда, возможно, несколько искусственных) эффект Шеннона не имеет места. Работа опубликована в 1970 г. в сборнике «Проблемы кибернетики».

Во второй работе были рассмотрены схемы из пороговых элементов. Большой интерес к ним возник в 1960-е гг., и уже в 1963 г. ленинградский математик Э. И. Нечипорук получил нижнюю и верхнюю оценки функции Шеннона, асимптотически равные соответственно $2 \cdot (2^n/n)^{1/2}$ и $2 \cdot (2^{n+1}/n)^{1/2}$. Поскольку базис в данном случае бесконечный, Э. И. Нечипорuku потребовалось найти новые методы получения обеих оценок.

Поскольку разрыв между оценками оставался, проблема не была закрыта. После смерти Э. И. Нечипорука в 1970 году Олег Борисович решил довести задачу до конца. Довольно быстро он пришел к выводу, что улучшать следует верхнюю оценку. Интересно сравнить, как два математика подходили к одной и той же проблеме – получению верхней оценки. Нечипорука не пугали трудности стоявшей перед ним задачи, и к цели он шел напролом, преодолевая все препятствия с помощью могучей техники синтеза схем, которой он владел, как мало кто другой.

Лупанов подошел к задаче обстоятельно. Он проанализировал доказательство нижней оценки, данное Нечипоруком, и увидел, что верхнюю оценку можно сделать асимптотически равной нижней только в том случае, если в процессе построения схемы удастся выполнить асимптотические неравенства, полученные в ходе доказательства нижней оценки (с превращением их в асимптотические равенства). Это означало, во-первых, что требовалось конкретизировать общий вид порогового элемента так, чтобы путем выбора значений его параметров можно было получить много различных булевых функций. Во-вторых, почти все элементы схемы должны были нести «почти полную информационную нагрузку», т. е. на их входы должны были подаваться выходы почти всех предыдущих элементов, и поступающая от них информация должна была быть достаточно большой. Эти соображения определили путь, который, как и следовало ожидать, оказался нелегким. В итоге О. Б. Лупанов получил нужную верхнюю оценку, а с ней и асимптотику функции Шеннона для схем из пороговых элементов, равную $2 \cdot (2^n/n)^{1/2}$. Подробное изложение этого результата опубликовано в 1973 г. в сборнике «Проблемы кибернетики».

Олег Борисович придавал большое значение исследованию сложности конкретных булевых функций, но работ на эту тему у него немного. Одна из них – о зависимости между глубиной и числом контактов в П-схеме – уже упоминалась. В другой работе (1962 г.) для конкретной последовательности монотонных булевых функций было показано, что с ростом числа переменных их сложность при реализации контактными схемами, содержащими лишь замыкающие контакты, в растущее число раз больше сложности реализации контактными схемами общего вида. Наконец, очень важной была работа о реализации симметрических булевых функций (1965 г.), стимулировавшая дальнейшие исследования в этом направлении. При этом многие результаты данной работы до сих пор не усилены.

В центре внимания Олега Борисовича до конца его жизни оставался принцип локального кодирования: возможности его развития, расширение области его применения. Прогрессом в этом направлении стало решение Лупановым ряда задач, связанных со сложностью реализации многократного применения отображения множества булевых наборов в множество булевых наборов такой же длины. В своей первой работе на эту тему (опубликованной в 1993 г. в журнале «Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика») он решил задачу для случая взаимно однозначных отображений (примерно при той же постановке, о которой будет сказано ниже) и попутно минимизировал задержку.

После этого он перешел к рассмотрению случая произвольных отображений. Впрочем, первоначально задача ставилась так: для каждой

булевой (n,n) -функции (т. е. отображения множества n -мерных булевых наборов в себя) построить по возможности более простую схему из функциональных элементов, которая по двум наборам: n -мерному набору $\tilde{\sigma}$ значений переменных этой функции и по n -мерному набору, являющемуся кодом некоторого числа i , вычисляет значение i -й степени этой булевой (n,n) -функции на наборе $\tilde{\sigma}$. О. Б. Лупанов показал, что в этом случае сложность остается асимптотически такой же, как и при реализации (n,n) -функций, а именно:

$$p 2^n.$$

Этот результат, дающий хорошее представление о ситуации, является, на самом деле, лишь следствием решения значительно более общей задачи, в которой рассматривались (n,n) -функции, определенные на подмножестве наборов значений булевых переменных, при очень широком диапазоне изменения мощности этого подмножества. Наибольшие трудности пришлось преодолеть при получении верхней оценки в случае, когда мощность подмножества достаточно велика. И хотя решающую роль по-прежнему играл принцип локального кодирования, весьма полезными оказались и некоторые результаты учеников Олега Борисовича, прежде всего Д. Улига. Фундаментальная работа с подробным изложением данного исследования была опубликована в 2003 г. в сборнике «Математические вопросы кибернетики».

В 2003 году О. Б. Лупанов был избран действительным членом Академии наук. Его ведущая роль в создании и становлении математической кибернетики была общепризнана значительно раньше.

Помимо работ, о которых подробно рассказано, у Лупанова немало статей и докладов обзорного и методического характера, которые содержат полезные сведения и ценные замечания, ставшие своеобразными ориентирами как для его учеников, так и для многих других математиков.

В. Храпченко