



Е.С. Куркина, Е.М. Кольцова

**Математическое моделирование и прогнозирование распространения эпидемии коронавируса COVID-19**

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Куркина Е.С., Кольцова Е.М. Математическое моделирование и прогнозирование распространения эпидемии коронавируса COVID-19 // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности: труды 4-й Международной конференции (4-5 февраля 2021 г., Москва). — М.: ИПМ им. М.В.Келдыша, 2021. — С. 178-192. — <https://keldysh.ru/future/2021/17.pdf>  
<https://doi.org/10.20948/future-2021-17>

***Размещено также [видео выступления](#)***

# Математическое моделирование и прогнозирование распространения эпидемии коронавируса COVID-19

Е.С. Куркина<sup>1,2</sup>, Е.М. Кольцова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ВМК*

<sup>2</sup> *Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева*

**Аннотация.** В работе с помощью дискретного логистического уравнения Фейгенбаума проводится математическое моделирование распространения волн эпидемии коронавируса в разных странах. Показано, что выбранная модель является оптимальной для описания сложной динамики распространения инфекций в открытых, неоднородных системах при неточно заданных статистических данных. Разработана методика выявления локальных волн эпидемии и определения параметров модели. Показано, что модель позволяет хорошо описывать статистические данные и делать реалистичные прогнозы. Модель применяется для моделирования общего числа случаев заболевания, общего количества смертей, выздоровлений и расчета активных случаев.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, эпидемия COVID-19, открытые системы, дискретное логистическое уравнение, суперпозиция эпидемиологических волн, прогнозирование

## Mathematical modeling and forecasting of the spread of the COVID-19 coronavirus epidemic

E.S. Kurkina<sup>1</sup>, E.M. Koltsova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Lomonosov Moscow State University, Department of Computational  
Mathematics & Cybernetics*

<sup>2</sup> *Mendeleev University of Chemical Technology of Russia*

**Abstract.** In this paper, using the Feigenbaum logistic map, mathematical modeling of the spread of waves of the coronavirus epidemic in different countries is carried out. It is shown that the chosen model is optimal for describing the complex dynamics of the spread of infections in open, heterogeneous systems with inaccurately specified statistical data. A method for detecting local epidemic waves and determining the model parameters has been developed. It is shown that the model makes it possible to describe statistical data well and

## 6. Математические модели цифрового мира

make realistic forecasts. The model is used to model the total number of cases, the total number of deaths, recoveries, and the calculation of active cases.

**Keywords:** mathematical modeling, COVID-19 epidemic, open systems, logistic map, superposition of epidemiological waves, forecasting

### Введение

Эпидемия, вызванная коронавирусом COVID-19, – самая серьёзная пандемия в мире за последнее столетие. На начало марта 2021 г. общее число инфицированных превысило 119 млн, от COVID-19 погибли более 2,65 млн чел. Косвенные потери – гораздо больше, их еще предстоит оценить. Так, в России по данным Росстата в 2020 г. смертность выросла на 18%, или на 323,8 тыс. чел., из них на умерших с COVID-19 приходится около половины.

Для того чтобы успешно противостоять распространению инфекции, необходимо анализировать динамику развития заболеваемости, рассчитывать нагрузку на здравоохранение и делать реалистичные прогнозы. Все это можно делать с помощью адекватной математической модели

Математическое моделирование распространения эпидемии COVID-19 в разных странах и регионах мира, началось с момента первой вспышки болезни в Китае и интенсивно проводится в настоящее время. Для этой цели используются различные модели: модели логистического роста [1-4], компланарные модели типа SIR, SEIR, SIRS, SAIR [5-12] и др. более сложные [13-16], которые учитывают различные уточняющие факторы. Чем сложнее модель, тем больше неизвестных параметров она содержит, которые зачастую трудно оценить. Теоретически компланарные модели применимы в однородных изолированных системах, когда имеет место хорошее перемешивание в популяции и выполняется закон действующих масс.

Реальные системы (страны, города, регионы) являются открытыми и неоднородными. В результате время от времени случайно в том или ином месте возникают новые источники заражения, запускающие новые цепочки передачи инфекции от зараженных людей к восприимчивым. Это означает, что статистические данные, собранные в виде кумулятивных и эпидемических кривых, представляют собой суперпозицию многих локальных волн эпидемии.

Кроме того, при моделировании надо иметь в виду, что статистические данные имеют большую погрешность; по разным оценкам ошибка составляет от 20 до 80%. Нахождение параметров модели по неточно заданным статистическим данным является обратной, некорректно поставленной задачей, которая имеет неединственное решение.

Было предпринято много усилий по адаптации моделей типа SIR к описанию сложной динамики распространения коронавируса [10,13], однако всех трудностей по решению обратной задачи определения парамет-

ров моделей преодолеть не удалось. Почти нет работ, которые описывают распространение инфекции как суперпозицию волн.

Для моделирования столь сложной динамики распространения мы использовали относительно простое дискретное логистическое уравнение Фейгенбаума, которое в определенном диапазоне изменения параметров описывает логистический рост популяции в среде с ограниченными ресурсами. Мы его применили для описания и прогнозирования не только общего числа заболевших, но и кумулятивного числа смертей и выздоровевших.

Мы разработали методику выявления локальных волн и подбора параметров для их описания в модели. Локальные волны добавляются в модель последовательно со временем, когда расчетные данные начинают отставать от фактических.

Используя дискретное логистическое уравнение, мы исследовали распространение эпидемии COVID-19 в ряде стран в разных регионах мира с начала распространения эпидемии, добавляя все новые и новые волны [23]. В настоящей работе представлены результаты моделирования развития эпидемии в Израиле, Японии и республике Беларусь.

## 1. Математическая модель распространения инфекций

**1.1. Модель распространения одной волны эпидемии.** Для описания и прогнозирования сложной динамики распространения эпидемий типа коронавируса COVID-19 мы использовали дискретное логистическое уравнение, предложенное Мэйем в 1976 г. [17] и ставшее популярным после работ Фейгенбаума, Шарковского и других ученых. Оно имеет вид:

$$y_{n+1} = \alpha y_n (1 - y_n/N), y_1 = y_0 - \text{задано}, \quad (1)$$

где  $y_n$  – общее число рассматриваемых случаев (или кумулятивная численность популяции) в  $n$ -й день;  $y_1$  – начальное число случаев в первый день  $t_1 = t_0$ , с которого начался отсчет;  $\alpha$  – параметр, характеризующий скорость роста популяции;  $N$  – емкость, или нормировочный множитель. Решением уравнения (1) является последовательность чисел  $\{y_n\}$ .

В зависимости от значения коэффициента  $\alpha$  поведение системы может сильно изменяться. В диапазоне изменения параметра  $1 < \alpha < 2$  оно демонстрирует логистический рост – это рост численности популяции в среде с ограниченными ресурсами. Именно этот диапазон изменения параметра мы используем для описания распространения эпидемий. Здесь дискретное логистическое уравнение описывает все фазы развития эпидемии: стадию экспоненциального роста на ранней стадии распространения при  $y_n \ll N$ , затем стадию замедления скорости роста заболеваемости, пик заболеваемости, характеризуемый наибольшим приростом, и заключительную стадию спада эпидемии. При этом к концу эпидемии общая чис-

## 6. Математические модели цифрового мира

ленность популяции асимптотически стремится к стационарному значению, равному:

$$\bar{y} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \cdot N; y_n \rightarrow \bar{y}, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Соотношение (2) верно, если  $\alpha$  остается постоянным на всем протяжении эпидемии. Если коэффициент  $\alpha$  изменяется, то в формулу (2), надо подставить последнее значение параметра.

Из выражения (2) видно, что окончательная численность популяции зависит не только от емкости системы  $N$ , но и от коэффициента  $\alpha$ . Чем больше значение  $\alpha$ , тем больше окончательное число заразившихся. При  $\alpha = 2$  оно максимальное и равно половине емкости  $\bar{y} = N/2$ .

Дискретное логистическое уравнение (1) непосредственно описывает изменение со временем суммарного числа заболевших  $y_n = y(n)$ , то есть задает *кумулятивную кривую*. Уравнение для ежедневных новых случаев заболевания, или ежедневных приростов имеет вид:

$$\Delta_{n+1} = y_{n+1} - y_n = \alpha y_n \left(1 - \frac{y_n}{N}\right) - y_n = b y_n \left(1 - \frac{y_n}{\bar{y}}\right) \quad (3)$$

где  $b = (\alpha - 1) < 1$ ,  $\bar{y} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) N$  – стационарное значение (2). Это уравнение описывает *эпидемическую кривую*. Поскольку  $y_n \rightarrow \bar{y}$ , при  $n \rightarrow \infty$  из уравнения (3) получаем, что  $\Delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Из выражения (3) следует, что при относительно небольшой численности популяции приросты изо дня в день увеличиваются, пока не достигнут максимума, затем они начинают уменьшаться. Максимальное значение  $\Delta_{max}$  найдем, продифференцировав (2). Оно достигается при:

$$y^* = \frac{\bar{y}}{2} = \left(\frac{\alpha-1}{2\alpha}\right) N, \Delta_{max}(y^*) = \frac{(\alpha-1)^2}{4\alpha} N. \quad (4)$$

Если приросты уменьшились до нуля, то эпидемия закончилась. Однако, бывает, что ежедневные приросты не падают до нуля, а держатся довольно долго на каком-то уровне. Это означает, что эпидемия перешла в эндемическую стадию. Тогда возможна новая вспышка эпидемии спустя некоторое время.

**1.2. Определение параметров дискретного логистического уравнения по статистическим данным.** Рассмотрим сначала калибровку модели для описания одной волны. Приведем модель (1) к безразмерному виду:

$$x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n), 0 < x_n \leq 1, y_n = x_n N, x_0 = y_0/N, \quad (5)$$

Как правило, начальное значение  $y_0$  задавалось равным 1 ( $y_0 = 1$ ). Дискретный интервал времени  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  мы взяли в 12 часов.

Параметр  $\alpha$  определяется в начале волны на стадии экспоненциального роста по статистическим данным.

$$\frac{X_{s,n+1}}{X_{s,n}} \cong \alpha_s, \quad (6)$$

где  $X_{s,n}$  – статистические данные, число случаев в  $n$ -ый день;  $\alpha_s$  – среднее значение отношения (6) за несколько дней. Поскольку в модели число случаев мы пересчитываем через 12 часов, то коэффициент  $\alpha$  равен:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \alpha = \sqrt{\alpha_s}, \quad x_{n+1} = \alpha x_n, \quad (7)$$

Со временем показатель  $\alpha$  может уменьшаться, и мы это отслеживаем из анализа статистических данных и связываем с информацией о введении ограничительных мер. Последнее значение  $\alpha$  используется для прогнозирования.

Параметр  $N$  определяется в пике эпидемии из формул (4):

$$N \cong X_s^* \left( \frac{2\alpha}{\alpha-1} \right), \text{ или } N \cong \Delta_s^* \frac{4\alpha}{(\alpha-1)^2}, \quad (8)$$

где  $X_s^*$  и  $\Delta_s^*$  – средние значения числа случаев и ежедневных приростов в окрестности пика, соответственно.

Иногда пик эпидемии представляет собой достаточно длинное плато, тогда значение  $N$  приходится изменять, уточнять. До пика, начиная со стадии экспоненциального роста, мы задаем разные предполагаемые значения емкости  $N$ , и для разных значений  $N$  мы прогнозируем разные сценарии развития эпидемии. Для каждого сценария мы рассчитываем, когда будет пик, каков будет прирост в пике, сколько будет случаев каждый день, когда волна закончится и сколько заболевших она даст.

**1.3. Модель распространения нескольких волн эпидемии.** Для расчета распространения эпидемии в виде нескольких волн используется несколько дискретных уравнений вида (5), описывающих каждая свою волну, со своей емкостью  $N^{(i)}$ , набором показателей  $\alpha^{(i)}$ , началом отсчета времени  $t_0^{(i)}$  и начальным значением заболевших  $x_0^{(i)} = y_0^{(i)} / N^{(i)}$ :

$$x_{n+1}^{(i)} = \alpha^{(i)} x_n^{(i)} (1 - x_n^{(i)}), \quad x_0^{(i)} = y_0^{(i)} / N^{(i)}. \quad (9)$$

$$y_n^{(i)} = x_n^{(i)} N^{(i)}, \quad i = 1, \dots, M, \quad (10)$$

где  $M$  – число волн.

Общее число случаев в момент времени  $t_n$  определяется суммой:

$$Y_n^{(i)} = \sum_{i=1}^M x_n^{(i)} N^{(i)} \quad (11)$$

## 6. Математические модели цифрового мира

Кратко опишем алгоритм определения параметров очередной локальной волны. Пусть в модели мы уже использовали  $j$  волн для описания распространения инфекции. Суперпозиция этих волн до какого-то момента времени  $t_n$  хорошо описывала статистические данные  $X_{s,n}$ :

$$Y_n = \sum_{i=1}^j x_n^{(i)} N^{(i)} \approx X_{s,n}.$$

А затем суммарная  $j$ -я волна пошла на спад, и статистические данные стали опережать расчетные данные. Тогда разница между статистическими данными и расчетными дает последовательность значений  $Z_n$  для определения следующей волны:

$$Z_n = X_{s,n} - Y_n, n = n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots \quad (12)$$

Параметры уравнения (5) для описания  $j+1$ -й волны (12) подбираем так же, как для первой волны: сначала коэффициент  $\alpha$  и несколько предполагаемых значений  $N$ , описывающих разные сценарии развития  $j+1$ -й волны. Затем в окрестности пика уточняем значение емкости  $N$  и делаем окончательный прогноз по дальнейшему развитию этой волны.

### Результаты моделирования

Вот уже целый год мы проводим исследования и делаем прогнозы по динамике распространения эпидемии в разных странах и регионах, начиная с марта 2020 г. [19-22]. Мы моделировали развитие эпидемии в Бразилии, Индии, США, Испании, Италии, Швеции, России, Москве и др. [23]. В настоящей работе впервые представлены результаты моделирования не только общего числа случаев заболевания, но и общего количества смертей, выздоровлений и активных случаев в Японии, Израиле и республике Беларусь. Статистические данные по развитию эпидемии заражения коронавирусом COVID-19 мы брали с сайта Worldometer [18].

**Япония.** За год распространения заболевания коронавирусом в Японии наблюдается три большие вспышки. В модели они описаны в виде суперпозиции пяти локальных волн. Расчетные и фактические данные для случаев заражения коронавирусом, для смертельных случаев и случаев выздоровления представлены на рис. 1а-г. Мы видим, что модель хорошо описывает статистические данные на отрезке наблюдения с 15.02.20 по 22.01.21. Для первой весенней вспышки заболевания, которая почти полностью затухла в конце мая, прекрасно совпали фактические данные по общим случаям заражения (16536 чел.) с теоретическими по модели (16478) и расчетными данными (16500).

Вторая и третья волны вспыхнули, по-видимому, из-за ослабления ограничительных мер. Как следует из расчетов по модели, вторая волна начала формироваться в конце мая, а давать существенные приросты (бо-

лее 100 чел.) с первых чисел июля. Она оказалась мощнее первой волны почти в четыре раза и дала около 60.5 тыс. инфицированных. Ее пик пришелся на 10 августа.

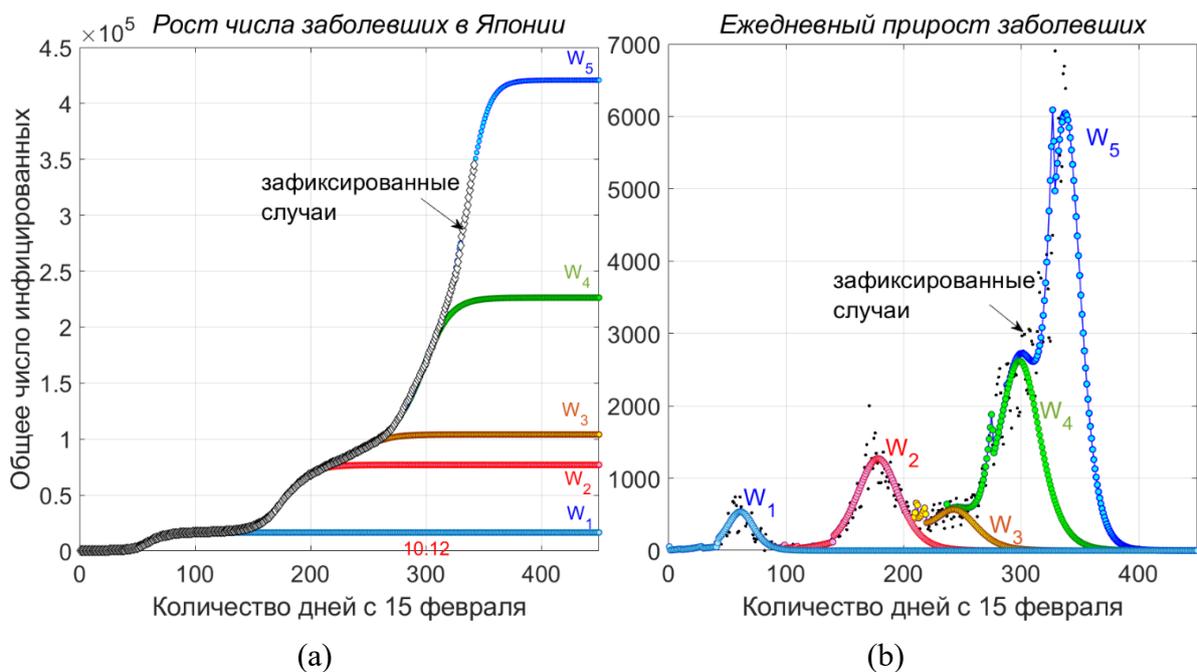
Осенне-зимняя вспышка началась с возникновения третьей волны в начале сентября, когда еще не спала вторая волна. Третья локальная волна была относительно небольшой. Она прошла пик в середине октября и начала спадать. Но слабые ограничения и открытые границы привели к новому мощному росту числа инфицированных, как во многих других странах. В модели этот рост описывается с помощью двух локальных волн, четвертой и самой большой пятой (см. рис. 6б). Пик пятой волны наблюдался в середине января, и потом она резко пошла на спад вместе с фактическими данными.

Динамика прироста числа смертных случаев и случаев выздоровления также хорошо описываются выбранной моделью (см. рис. 1 с-f). Мы видим, что даты пиков прироста смертельных случаев сдвинуты по отношению к датам пиков приростов выздоровевших (они отмечены на графиках), что не согласуется с SIR-моделью.

Зная, как изменяется общее число заболевших, умерших и выздоровевших в модели, можно рассчитать динамику изменения активных случаев по дням:

$$Y_{A,n} = Y_{T,n} - Y_{D,n} - Y_{R,n}, \quad (13)$$

где  $Y_{A,n}$  — число активных случаев в  $n$ -й день,  $Y_{T,n}$ ,  $Y_{D,n}$ ,  $Y_{R,n}$  — число общих случаев, число смертей и выздоровлений соответственно.



## 6. Математические модели цифрового мира

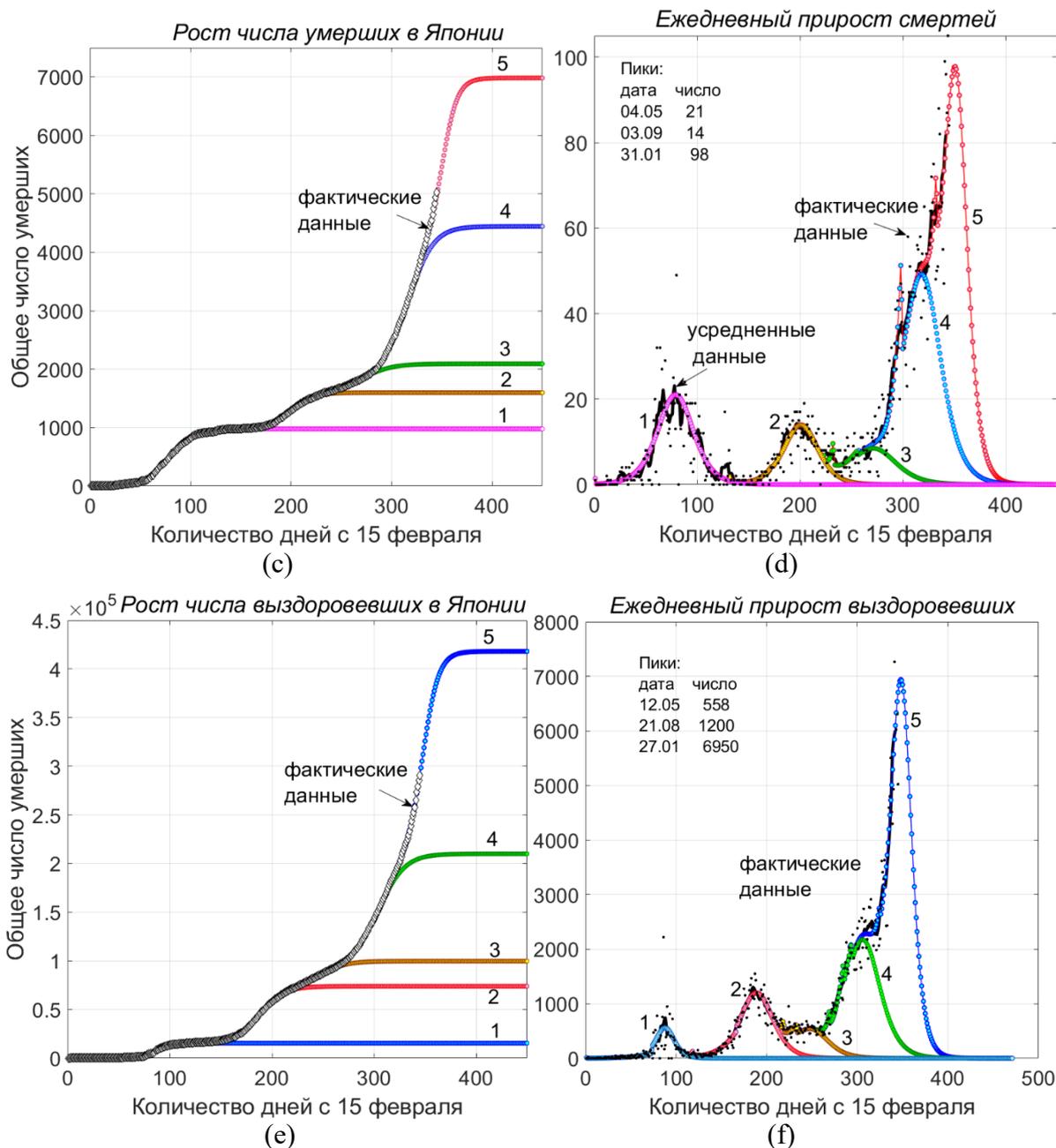


Рис. 1 Динамика распространения эпидемии коронавируса в Японии между 15/02/2020 и 22/01/2021. Фактические данные и результаты моделирования, прогноз. Цифрами обозначены расчетные волны в модели

Соответствие расчетного числа активных случаев со статистическими данными на отрезке наблюдения и стремление прогнозного значения активных случаев к нулю по окончании последней волны является критерием правильности проведенного моделирования. На рис. 2а мы видим прекрасное совпадение расчетных значений активных случаев с фактическими данными.

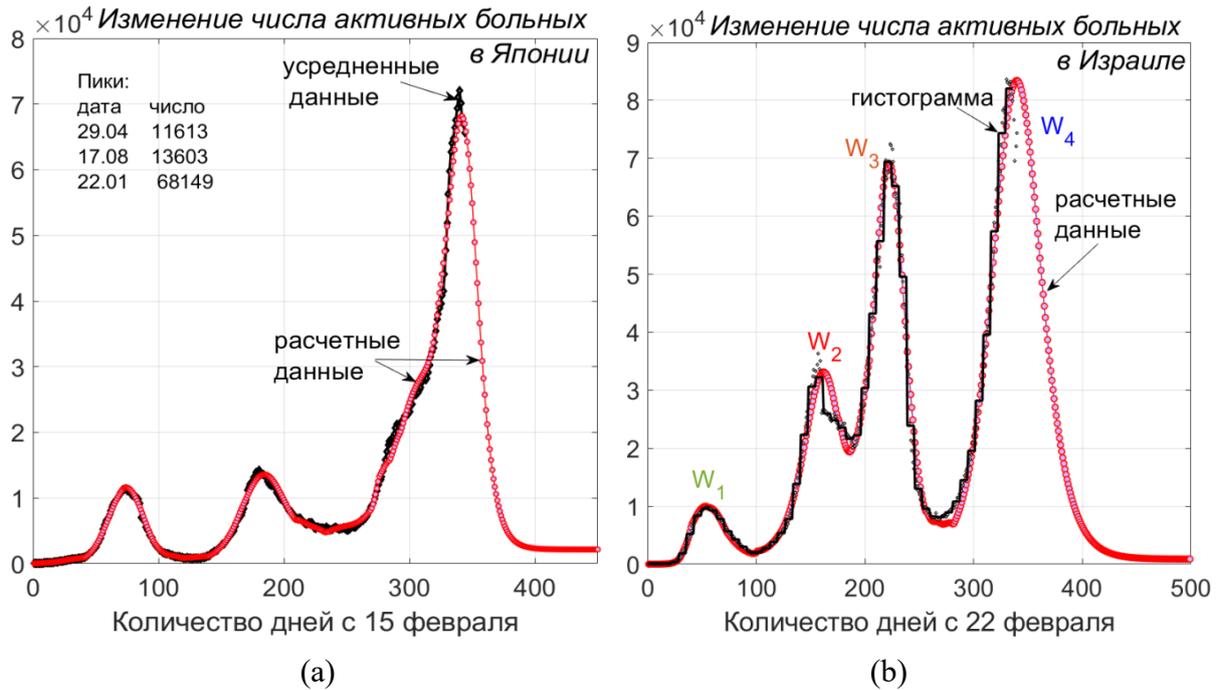


Рис. 2 Динамика изменения активных случаев в Японии а) и в Израиле б)

**Израиль.** В Израиле за год с начала эпидемии наблюдалось четыре вспышки заболевания коронавирусом, которые в модели описываются в виде четырех волн с емкостями  $N_1 = 340$  тыс.,  $N_2 = 2$  млн,  $N_3 = 4.4$  млн и  $N_4 = 17$  млн соответственно. Расчетные и фактические данные о развитии заболевания представлены на рис. 3а–ф. Мы видим, что модель также хорошо описывает статистические данные, как и для Японии.

Первая волна в Израиле прошла свой пик 1 апреля. Именно тогда в самом начале апреля была уточнена емкость первой волны в 340 тыс. чел. Последний показатель роста был  $\alpha = 1,052$ . Первая волна по расчетам должна была закончиться в конце мая и выйти на теоретическое стационарное значение общей численности инфицированных, вычисленное по формуле (2):

$$\bar{y} = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right) \cdot N = \left(\frac{1.052-1}{1.052}\right) \cdot 340\,000 = 16806.$$

Это полностью совпало с расчетными данными по модели (16804 инфицированных в конце мая) и прекрасно подтвердилось статистическими данными, которые 27 мая дали общее число инфицированных 16872 человек. Таким образом, прогноз, сделанный по модели, здесь работал целых два месяца, пока не началась новая летняя вспышка заболевания коронавирусом.

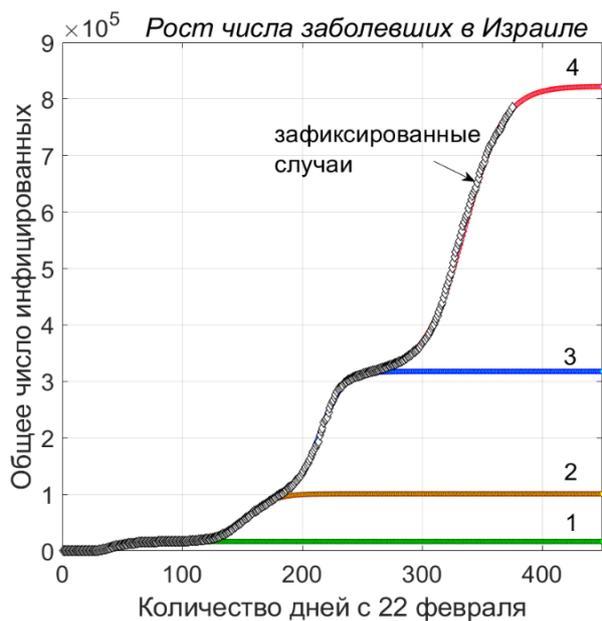
Волны коронавируса в Израиле развивались по возрастающей. Вторая волна закончилась в начале октября и дала – 84,2 тыс. заболевших. Третья волна возникла, когда вторая только начала затухать.

Пик третьей волны наблюдался в конце сентября. Правительство Израиля в сентябре ввело сильные ограничительные меры, что позволило за-

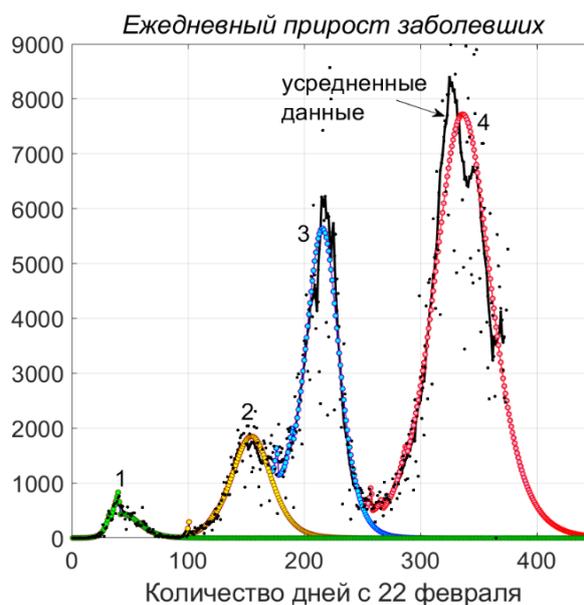
## 6. Математические модели цифрового мира

тормозить распространение инфекции. В модели это отразилось в уменьшении показателя скорости роста 18 и 29 сентября. Третья волна закончилась в начале декабря и добавила 216.6 тыс. заболевших.

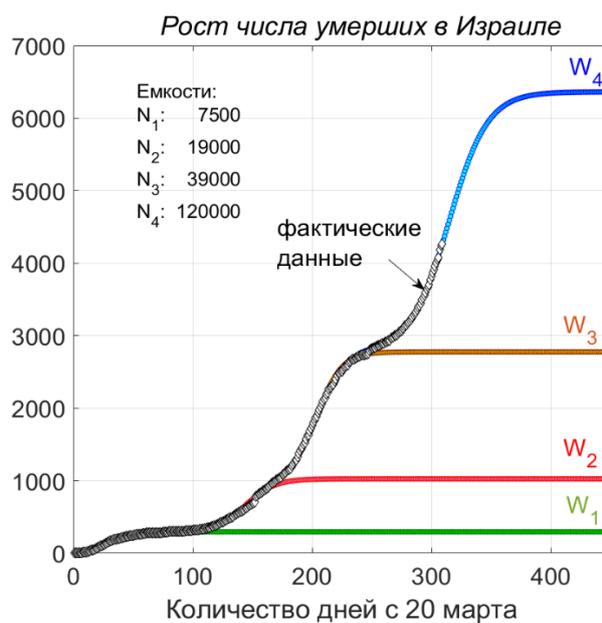
Четвертая волна – самая мощная, имеет самую большую емкость, превосходящую численность страны. Это указывает на открытость системы, в которую входят представители других стран. По расчетам она закончится в конце июня и добавит 504.7 тыс. заболевших, а суммарное количество заболевших в результате всех волн, проявившихся на сегодняшний день, будет 822.5 тыс.



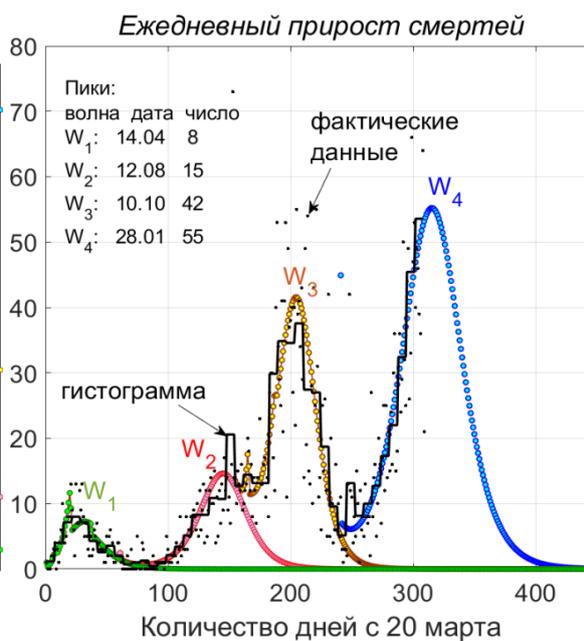
(a)



(b)



(c)



(d)

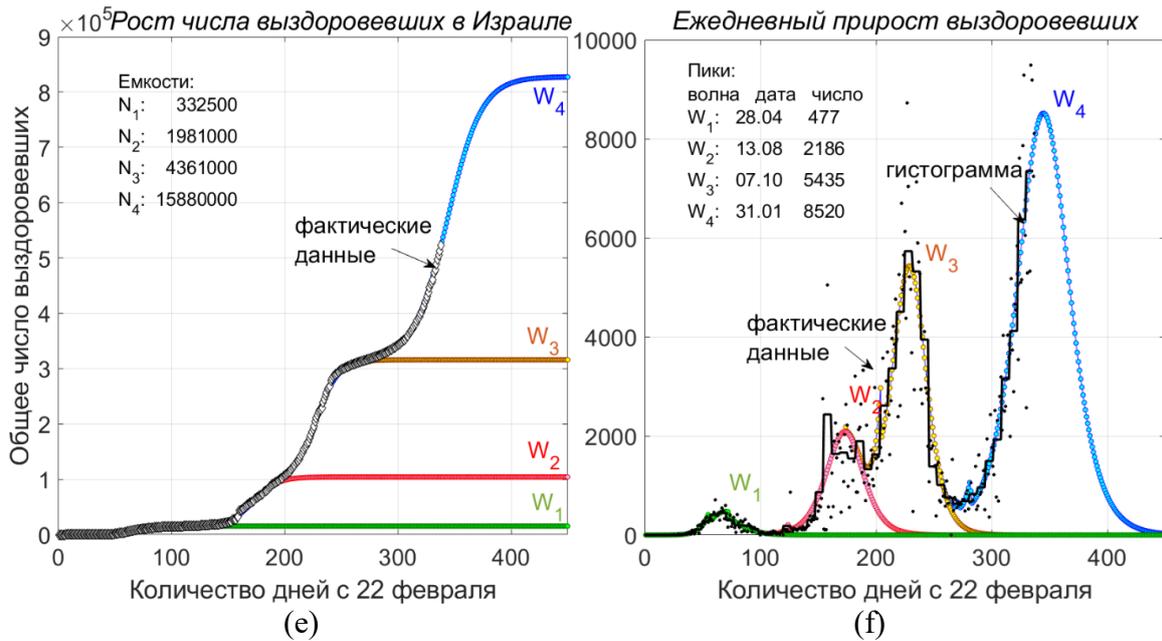


Рис. 3 Динамика распространения эпидемии коронавируса в Израиле между 22/02/2020 и 22/01/2021. Фактические данные и результаты моделирования. Цифрами обозначены расчетные волны в модели

Динамика прироста числа смертных случаев, случаев выздоровления и активных случаев также хорошо описывается, как и для Японии (см. рис. 3e–f и рис. 2b).

**Беларусь.** Рассмотрим, как протекает эпидемия коронавируса в республике Беларусь, единственной европейской стране, не считая Швеции, в которой не вводились жесткие ограничительные меры. На рис. 4a, b представлены фактические данные и результаты расчетов по математической модели для общего числа инфицированных. Мы видим, что распространение коронавируса в Беларуси происходит в виде двух волн: весенней вспышки и более мощной осенне-зимней, которая сейчас в феврале - марте 2021 г. медленно идет на спад. По расчетам эта волна закончится в августе, общее число инфицированных тогда будет 340 тыс. Если для описания эпидемии в модели для США и Москвы мы использовали 11 локальных волн, в Испании – 6 волн, в Швеции – 9 волн [23], то в Беларуси только две. Это говорит о том, что Беларусь – более однородная страна с хорошим перемешиванием. Емкости волн указаны на рис. 4a. Вторая емкость более чем в 2 раза превосходит население страны, что можно объяснить тем, что Беларусь интегрирована с Россией и связана с европейскими странами.

Беларусь лучше многих стран проходит испытание эпидемией. Так ее население чуть больше, чем население Израиля, а число инфицированных на сегодняшний день почти в три раза меньше, чем в Израиле. Кроме того, в Беларуси очень низкая смертность от коронавируса, гораздо ниже, чем в России и других странах, меньше 1%.

## 6. Математические модели цифрового мира

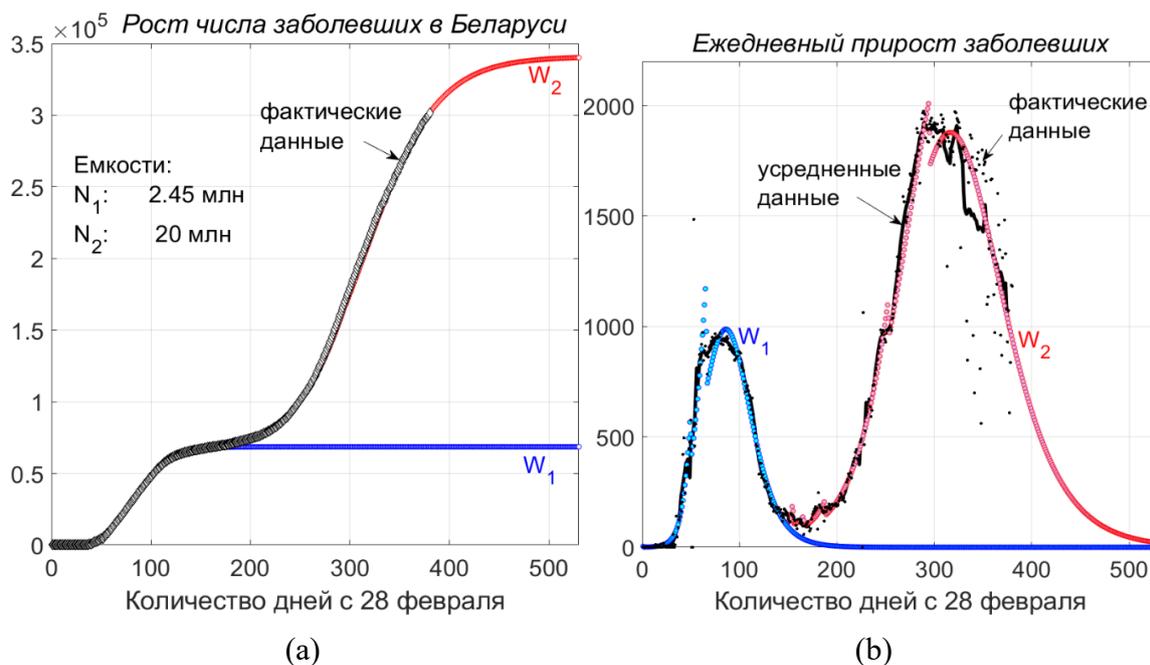


Рис. 4. Динамика распространения эпидемии коронавируса в Беларуси между 28/02/2020 и 13/03/2021. Фактические данные и результаты моделирования

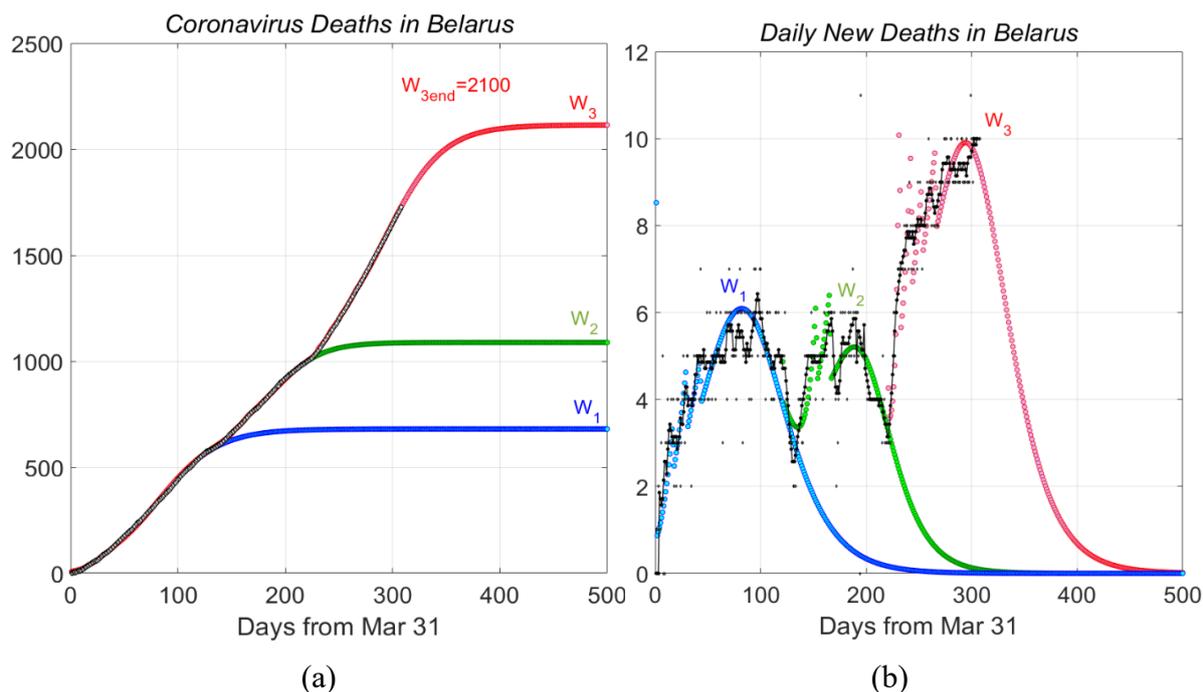


Рис. 5. Динамика изменения числа смертей от коронавируса в Беларуси между 28/02/2020 и 2/02/2021. Фактические данные и результаты моделирования

На рис. 5а, б представлены фактические данные и результаты расчетов по математической модели для изменения числа смертей. Заметим, что в Беларуси рост смертей идет в виде трех волн, в то время как общее число заразившихся – в виде двух волн. Вторая, относительно небольшая волна, по-видимому, является отголоском первой волны, когда люди, тяжело и

долго болевшие, с хроническими заболеваниями, все-таки не справились с болезнью. По расчетам суммарное количество умерших от коронавируса людей в конце третьей волны будет порядка 2300 чел.

### Заключение

Для моделирования сложной динамики распространения волн эпидемии коронавируса в разных странах мы использовали относительно простое дискретное логистическое уравнение. Показано, что выбранная модель адекватно описывает динамику развития эпидемии в открытых неоднородных системах при большой погрешности статистических данных. Мы разработали методику выявления локальных волн и подбора параметров для их описания в модели. Модель хорошо описывает не только общее число случаев заражения, но и рост общего числа смертей и выздоровлений.

С помощью нее можно делать реалистичные прогнозы. В среднем прогнозы по модели работали 10-14 дней, в худшем случае – неделю. Проблема состоит не в точности модели, а в открытости и непредсказуемости системы.

Эпидемия заражения коронавирусом не заканчивается. Если в одних странах она пошла на спад, в других – наблюдается новый всплеск заболеваемости. Чтобы держать ситуацию под контролем, необходимо делать прогнозы на основе модели, сравнивать расчетные данные со статистическими, корректировать параметры модели или вводить новые локальные волны и делать прогнозы снова. На основании прогнозов принимать решение об усилении или ослаблении ограничительных мер.

### Литература

1. *Martelloni G., Martelloni G.* Analysis of the evolution of the Sars-Cov-2 in Italy, the role of the asymptomatics and the success of Logistic model // *Chaos, Solitons and Fractals* 140 (2020) 110150
2. *Wang P., Zheng X., Li J., Zhu B.* Prediction of epidemic trends in COVID-19 with logistic model and machine learning technics // [Chaos, Solitons and Fractals. 2020. 139, 110058.](#)
3. *Wu K., Darcet D., Wang Q., Sornette D.* Generalized logistic growth modeling of the COVID-19 outbreak in 29 provinces in China and in the rest of the world. [DOI:10.1101/2020.03.11.20034363](#)
4. *Guo J.* Theoretical Epidemic Laws Based on Data of COVID-19 Pandemic // medRxiv. – 2020.
5. *Kermack W.O., McKendrick A.G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics // *Proceedings of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 1927; 115(772):700–21.

## 6. Математические модели цифрового мира

6. *Marinov T.T., Marinova R.S.* Dynamics of COVID-19 using inverse problem for coefficient identification in SIR epidemic models // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2020, X5, 100041
7. *Li M.Y., Muldowney J.S.* Global stability for the SEIR model in epidemiology // *Mathematical biosciences*. 1995. V.125, N2, p.155-164.
8. *Odagaki T.* Analysis of the outbreak of COVID-19 in Japan by SIQR model // *Infectious Disease Modelling*. 2020. 5, 691e698.
9. *Neves A.G.M., Guerrero G.* Predicting the evolution of the COVID-19 epidemic with the A-SIR model: Lombardy, Italy and São Paulo state, Brazil // *Physica D*. 2020. 413, 132693
10. *Comunian A., Gaburro R., Giudici M.* Inversion of a SIR-based model: A critical analysis about the application to COVID-19 epidemic // *Physica D*. 2020. 413, 132674.
11. *Contreras S., Villavicencio H.A. et al.* A multi-group SEIRA model for the spread of COVID-19 among heterogeneous populations // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. 136, 109925.
12. *Agrawal M., Kanitkar M., Vidyasagar M.* SUTRA: An Approach to Modelling Pandemics with Asymptomatic Patients, and Applications to COVID-19. [arXiv:/2101.09158](https://arxiv.org/abs/2101.09158)
13. *Ramos A.M., Ferrández M.R., Vela-Pérez M., Kubik A.B., Ivorra B.* A simple but complex enough  $\theta$ -SIR type model to be used with COVID-19 real data. Application to the case of Italy // *Physica D*. 2020.412, 132839.
14. *Avila-Ponce U. de León, Pérez Á.G.C., Avila-Vales E.* An SEIARD epidemic model for COVID-19 in Mexico: Mathematical analysis and state-level forecast // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. 140, 110165
15. *M. Higazy* Novel fractional order SIDARTHE mathematical model of COVID-19 pandemic // *Chaos, Solitons and Fractals* 138 (2020) 110007
16. *Wang P., Zheng X., Ai G., Liu D., Zhu B.* Time series prediction for the epidemic trends of COVID-19 using the improved LSTM deep learning method: Case studies in Russia, Peru and Iran // *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. 140, 110214.
17. *May R.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature*. 1976. V.261, pp.459-467.
18. <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
19. *Koltsova E.M., Kurkina E.S., Vasetsky A.M.* Mathematical Modeling of COVID-19 coronavirus spread in Moscow // *Computational nanotechnology*, 2020. V.7. N1, p.99-105.
20. *Koltsova E.M., Kurkina E.S., Vasetsky A.M.* Mathematical Modeling of COVID-19 coronavirus spread in several European, Asian countries, Israel and Russia, *Problems of economics and law practice*. 2020. Moscow. N2. p.154-165.

21. *Koltsova E.M., Kurkina E.S., Vasetsky A.M.* Mathematical modeling of the spread of COVID-19 in Moscow and Russian regions. [arXiv:2004.10118](https://arxiv.org/abs/2004.10118)
22. *Koltsova E.M., Kurkina E.S., Vasetsky A.M.* Mathematical modeling of the spread of waves of the COVID-19 coronavirus epidemic in different regions of the world. [arXiv:2007.02283](https://arxiv.org/abs/2007.02283)
23. КУРКИНА Е.С., КОЛЬЦОВА Е.М. Математическое моделирование распространения волн эпидемии коронавируса COVID-19 в разных странах мира // Прикладная математика и информатика № 66. – М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2021. С.41-66.