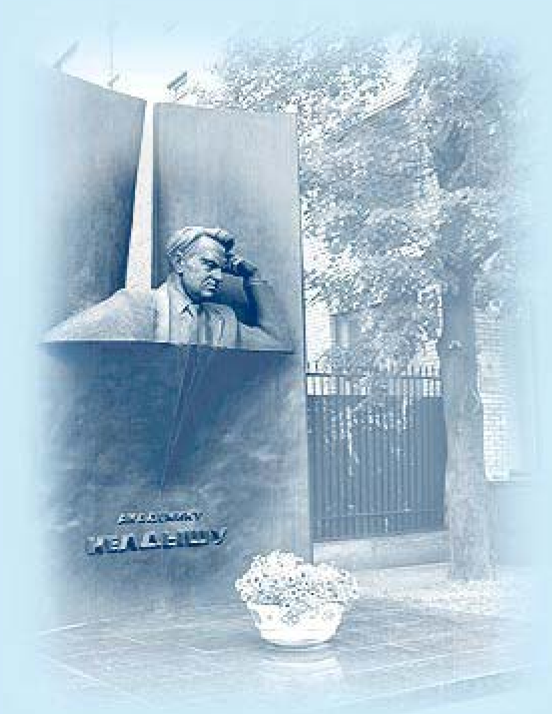
ИПМ им.М.В.Келдыша РАН

Онлайновая библиотека



В.В.Веденяпин, Н.Н.Фимин,
М.А.Негматов

Уравнения типа Власова и Лиувилля и их микроскопические и гидродинамические следствия

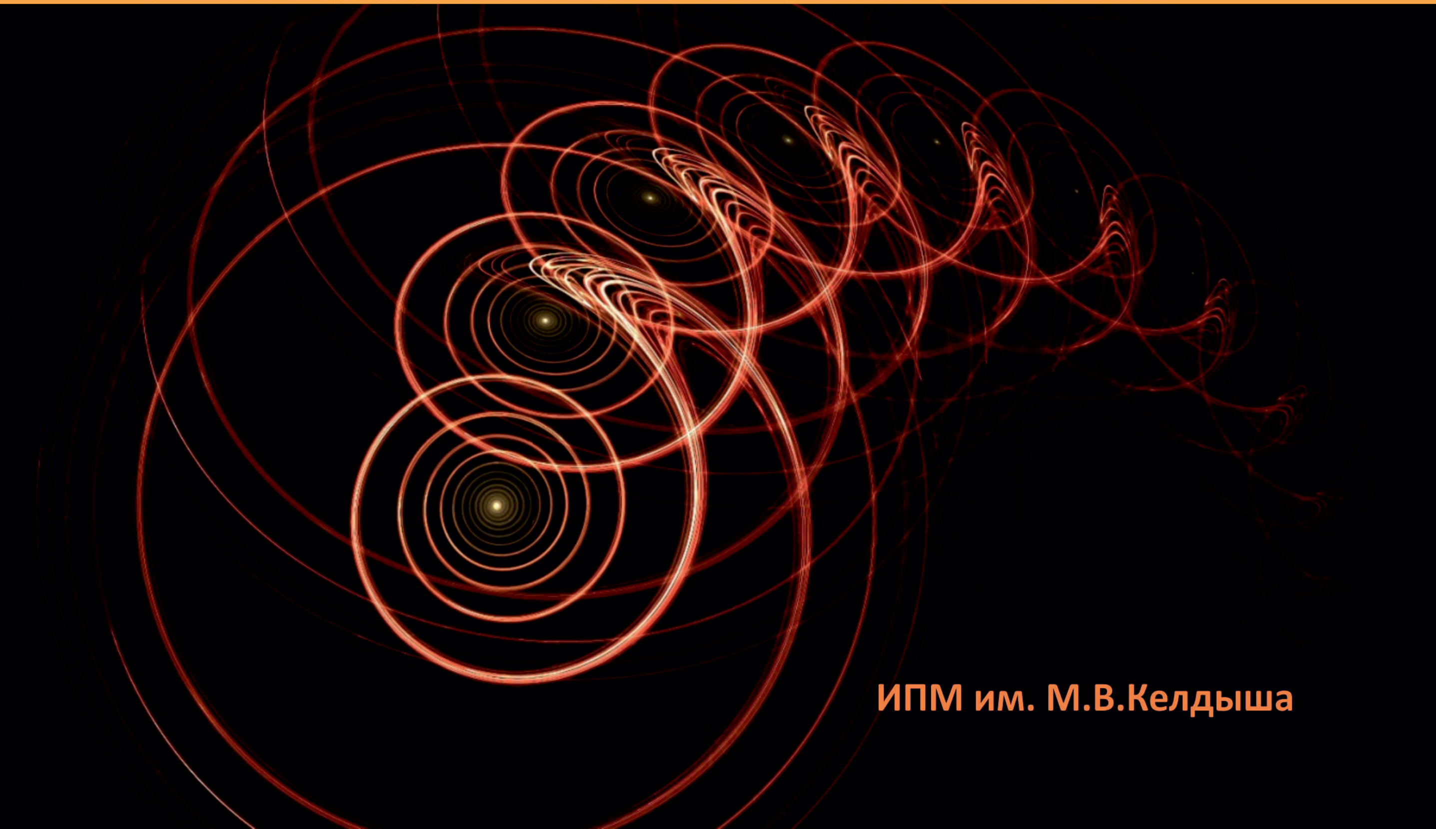
Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Негматов М.А. Уравнения типа Власова и Лиувилля и их микроскопические и гидродинамические следствия. М.: ИПМ им.М.В.Келдыша, 2016. 52 с.
doi:10.20948/mono-2016-vedenyapin
URL: http://keldysh.ru/e-biblio/vedenyapin

В.В.Веденяпин
Н.Н.Фимин
М.А.Негматов

Уравнения типа Власова и Лиувилля

Их микроскопические и гидродинамические следствия



ИПМ им. М.В.Келдыша

В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин, М.А. Негматов

УРАВНЕНИЯ ТИПА ВЛАСОВА И ЛИУВИЛЛЯ И ИХ МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

Москва
ИПМ им. М.В. Келдыша
2016

УДК 517.9
ББК 22.161.6
В26

Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Негматов М.А.
Уравнения типа Власова и Лиувилля и их микроскопические и гидродинамические следствия — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. – 52 с.

В работе описан вывод уравнений Власова–Максвелла и Власова–Пуассона–Пуассона из лагранжианов классической электродинамики. Из них выводятся уравнения электромагнитной гидродинамики и электростатики с гравитацией с помощью “гидродинамической” подстановки. Обсуждаются преимущества записи уравнений ЭМГД в дважды дивергентной форме С.К. Годунова. Анализируются стационарные решения уравнения Власова–Пуассона–Пуассона. Показана возможность вывода из уравнения Лиувилля классических уравнений метода Гамильтона–Якоби, а также аналог этой процедуры как для уравнения Власова, так и в негамильтоновом случае.

Ключевые слова: гидродинамическая подстановка, уравнение Лиувилля, лагранжиан, негамильтонова система.

Рецензент: д.ф.–м.н. Чернин Артур Давидович, главный научный сотрудник Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00670 и № 14-29-06086 (Н.Н. Фимин) и при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по программе повышения конкурентоспособности РУДН "5-100"среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016-2020 гг. и при поддержке программы ОМН РАН 1.3.1 задачи вычислительной математической физики (В.В. Веденяпин).

ISBN 978-5-98354-031-6

Введение

Уравнение Власова-Максвелла является основным при описании плазмы. Введенное в рассмотрение А.А. Власовым в 1938 г. [1], оно все больше используется вместо уравнений магнитной гидродинамики в расчетах сложных плазменных задач в связи с ростом мощностей компьютеров. Но это не главное – главное, видимо, в том, что оно обладает "повышенной фундаментальностью", сравнимой в некотором смысле с фундаментальностью уравнения Лиувилля. Уравнения типа Власова содержат в себе решения задачи N тел для любого N. Это свойство и делает его сверхфундаментальным и отмечалось многими авторами. Оно было известно и самому А.А. Власову, а Н.Н. Боголюбов в предисловии к книге [2] отмечает: "Уравнение Власова является фундаментом физики плазмы. Нам представляется весьма существенным, что уравнение Власова имеет микроскопические решения, соответствующие точным решениям классической механики". Это свойство используется и при выводе из цепочки Боголюбова [3], и при аппроксимации с помощью этих микроскопических решений [4], [5].

При выводе уравнения Власова–Максвелла такой подход невозможен. Оно, конечно, обладает такими микроскопическими решениями, но соответствующий потенциал — это потенциал с запаздыванием Льенара–Вихерта [6]–[7]. Желательно вывести это уравнение из точного лагранжиана, чтобы обойти микроскопические решения и понять характер приближений, а также влияние релятивистских выражений. Системы уравнений Власова–Максвелла пишут по-разному в разных руководствах, поэтому точный вывод весьма желателен. Для этого будем использовать в качестве отправной точки лагранжиан Лоренца классической электродинамики [6]–[8].

В уравнениях типа магнитной гидродинамики (МГД) количество версий еще больше, чем в уравнениях типа Власова. Мы выводим с помощью точной подстановки некоторые версии уравнений типа электромагнитной гидродинамики (или ЭМГД, как сейчас принято называть уравнения типа МГД в присутствии электрического поля) из уравнения Власова-Максвелла и автоматически получаем для них тождество Лагранжа. Знаменитое тождество Лагранжа удобно здесь как тест для сравнения различных форм уравнений. В работе В.В. Козлова [9] тождество доказывается для уравнений типа Власова с двухчастичным взаимодействием, а мы исследуем его форму для различных видов уравнения Власова и МГД. Обсуждаются стационарные решения уравнения Власова–Пуассона–Пуассона. Мы выводим его из лагранжиана Лоренца классической электродинамики плюс лагранжиан гравитационного взаимодействия. Редукция стационарного уравнения Власова с помощью энергетической подстановки приводит нас к системе нелинейных эллиптических уравнений, для которой меняется характер движения частиц при критической массе, $m^2 = e^2/G$, где G – гравитационная постоянная, а e – заряд электрона.

Для уравнений Власова используется гидродинамическая подстановка [11]–[12], которая редуцирует их к уравнениям типа МГД [13]–[16]. Для уравнений идеальной несжимаемой жидкости В.И. Арнольдом [17] была доказана теорема о структуре стационарных решений, основанная на наличии двух коммутирующих векторных полей. В.В. Козловым [19] эта конструкция была обобщена на сжимаемую жидкость. Ниже в настоящей работе мы исследуем возможность таких конструкций в случае МГД и других следствий уравнений Власова–Пуассона и Власова–Максвелла.

Оказывается, что гидродинамическая подстановка проходит также для уравнения Лиувилля. При этом появляется кратчайший путь получения уравнений Гамильтона–Якоби (ГЯ) из соответствующего уравнения Лиувилля. Более того, естественным образом производится обобщение данного метода на негамильтонов случай, причем возникающие уравнения даже значительно более просты, чем в обычном гамильтоновом случае. Такое обобщение дает примеры разрешимости в квадратурах систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом получаются в явном виде системы с конечным и счетным числом предельных циклов.

План работы. П. 1 показывает связь уравнения Власова с задачей N и континуума тел. П. 2 посвящен выводу уравнений Власова–Максвелла из лагранжиана классической электродинамики и аналогичный вывод уравнения Власова-Пуассона-Пуассона заряженных гравитирующих частиц. В п. 3 рассматриваются следствия уравнений Власова — тождество Лагранжа, дивергентная форма Годунова и существование критической массы. В п. 4 рассматриваются результаты гидродинамической подстановки для уравнений Лиувилля и Власова, получается классическое уравнение Гамильтона–Якоби и производится обобщение метода Гамильтона–Якоби на негамильтоновы системы. П. 5 посвящен рассмотрению топологических свойств стационарных решений уравнений обобщенной гидродинамики, получаемых из уравнений Власова и Лиувилля. П. 6 является заключением. В Приложении доказано обобщение леммы Арнольда–Козлова.

1. Уравнение Власова и задача N тел

Уравнение Власова описывает дальнодействие (в отличие от уравнения Больцмана, которое описывает короткодействие) в системе взаимодействующих частиц путем введения самосогласованного поля. В общем виде оно может быть записано как уравнение сдвига вдоль характеристик следующим образом:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right) + \left(\mathbf{f}(F), \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0, \tag{1}$$

где $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ — функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ в момент времени t, $\mathbf{f}(F)$ — некоторый вектор, зависящий от функции распределения (“сила”). Простейший вид зависимости силы $\mathbf{f}(F)$ соответствует парному потенциалу взаимодействия $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$:

$$\mathbf{f}(F) = -\nabla_{\mathbf{x}} \int K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) F(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t)\, d\mathbf{y} d\mathbf{v}. \tag{2}$$

Рассмотрим подстановку в систему (1)–(2) следующего вида (т. н. “микроскопические решения”):

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_i(t)), \tag{3}$$

где $\mathbf{X}_i(t)$ и $\mathbf{V}_i(t)$ — функции времени (поля координат и скоростей, соответствующих i–й частице), $\rho_i > 0$ — веса частиц. Такая подстановка проходит, если $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{V}_i$ удовлетворяют уравнениям движения N тел:

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{V}_i, \quad \dot{\mathbf{V}}_i = -\sum_{j=1}^{N} \nabla_1 K(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \rho_j,$$

где ∇_1 — оператор градиента по 1–му аргументу. Рассмотрим случай $N = 1$: при этом получаем систему $\dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{V}_1$, $\dot{\mathbf{V}}_1 = -\rho \nabla_1 K(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1)$. Условие $\nabla_1 K(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) = 0$ означает отсутствие самодействия.

Рассмотрим аналогичную подстановку следующего вида, которая дает уравнения движения континуума тел:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \int \rho(\mathbf{q}) \delta\big(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)\big) \delta\big(\mathbf{v} - \mathbf{V}(\mathbf{q}, t)\big)\, d\mathbf{q}.$$

Здесь необходимо определить выражение в правой части как обобщенную функцию, что делается естественно: это есть линейный функционал, определяемый формулой

$$\left(\int \rho(\mathbf{q}) \delta\big(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{q}, t)\big) \delta\big(\mathbf{v} - \mathbf{V}(\mathbf{q}, t)\big)\, d\mathbf{q},\ \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right) =$$

$$= \int \varphi\big(\mathbf{X}(\mathbf{q}), \mathbf{V}(\mathbf{q})\big) \rho(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}.$$

Это довольно широкое обобщение “простого слоя” [21] для поверхностей, заданных параметрически $\mathbf{q} \to \big(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), \mathbf{V}(\mathbf{q}, t)\big)$. Параметр $\mathbf{q}$ может пробегать любую область в пространстве $\mathbb{R}^k$ любой размерности ($k \in \mathbb{N}$) или какое–либо многообразие. Каким уравнениям должны удовлетворять функции $\mathbf{X}(\mathbf{q}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{q}, t)$, чтобы континуальная подстановка в уравнение (1) давала тождество?

Эти уравнения имеют вид [13], [22], [26]:

$$\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{q}, t), \qquad \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{q}, t) = -\int \nabla_1 K\big(\mathbf{X}(\mathbf{q}, t), \mathbf{X}(\mathbf{q}', t)\big) \rho(\mathbf{q}')\, d\mathbf{q}'. \tag{4}$$

Данные уравнения естественно называть уравнениями континуума тел. Если $\mathbf{q} = \big(\mathbf{X}(0),\ \mathbf{V}(0)\big)$ — начальные координаты точек, то $\mathbf{q}$ (при $t \geq 0$) называются лагранжевыми координатами, а уравнения (4) показывают переход к лагранжевым координатам. Эти подстановки, известные еще А.А. Власову, демонстрируют фундаментальность этого уравнения: оно содержит в себе не только движение N тел с любым N, но и движение континуума тел. В случае квадратичного $K(x - y)$ уравнение Власова допускает точное решение в лагранжевых координатах ([13], [9]). Интересно было бы провести обобщение на континуальный случай решения для потенциалов Мозера–Калоджеро ($K = |x - y|^{-2}$ или $K = \wp(x - y)$, где $\wp(...)$ —

функция Вейерштрасса), как это сделано в работах Калоджеро и последователей [20]. В этом случае, хотя интеграл в (2) расходится, но можно провести регуляризацию стандартным способом [21].

2. Вывод уравнений Власова–Максвелла и Власова–Пуассона–Пуассона

В настоящее время название "уравнение Власова" используется обычно с какими-то приставками: существуют уравнения Власова–Пуассона (для гравитации, электронов и плазмы), уравнение Власова–Максвелла, Власова–Эйнштейна, и появляются все новые приставки, и их явно не хватает (как показывает уже перечисленное выше) по понятным причинам. В оригинальной работе А.А. Власова [1] было введено то, что сейчас называется уравнением Власова–Максвелла. Введено очень своевременно, целенаправленно для описания плазмы, и показана его эффективность на примере малых колебаний плазмы. Сейчас даже для уравнения с таким названием количество его версий разрослось и продолжает разрастаться, так что простейший его вывод из классического лагранжиана весьма желателен. Да, и лагранжиан известен, (см., например, [6]–[8]), и вывод прост (по сути очевиден и даже банален), и даже вывод по сути приведен в [6], но не уравнения Власова–Максвелла, а его гидродинамических следствий. Вывод дает твердую основу для: 1)классификации уравнений с таким названием; 2)оценки их правильности; 3)выявления характера сделанных приближений теми или иными авторами. Отметим также, что вывод типа Боголюбова через цепочки [3] или с использованием подходов Брауна–Хеппа [22], Маслова [4], Нойнцерта [23] через микроскопические решения не так прям, а для уравнений Власова–Максвелла и вовсе непригоден.

В случае уравнения Власова–Максвелла нас поджидает сразу несколько препятствий на этом пути. Во-первых, уравнение для частиц получится с запаздыванием с потенциалами Льенара–Вихерта, во-вторых, если и получится, то хорошо если докажем сходимость, это полезно по указанным выше причинам, и можно даже пытаться это сделать. Но таким способом нельзя получить системы Власова–Максвелла – информация об электромагнитных полях оказывается спрятанной в эти потенциалы Льенара–Вихерта, и уж точно нельзя получить уравнений Максвелла, и мы поэтому выбираем другой путь. Мы записываем вариационный принцип с классическим лагранжианом, из которого следуют уравнения движения заряженных частиц и уравнения Максвелла. Затем не делается предположение, что электромагнитное поле, действующее на заряженные частицы, определяется усредненными плотностями заряда и электрического тока, и никаких вовсе предположений, а записывается просто уравнение Лиувилля для полученного движения частицы в полях. Вариационный принцип известен и, что особенно ценно, классический, и известна связь между этими объектами – лагранжианом (в [8] он назван лагранжианом Лоренца–Шварцшильда) и уравнением Власова–Максвелла. Можно указать на работу [24], где такой вывод намечен. Но мы приспособим этот вывод и подобные к классификации уравнений Власова. Этот вывод дает кратчайший путь к уравнению Власова–Максвелла, а потому классификацию и по сути правильные уравнения. Мы выводим уравнение Власова–Максвелла из лагранжиана Лоренца–Шварцшильда классической электродинамики, а уравнение Власова–Пуассона–Пуассона — из этого же лагранжиана, усеченного до электростатики, с добавкой лагранжиана гравитационного взаимодействия.

Система уравнений Власова–Максвелла описывает движение частиц в собственном электромагнитном поле. Его можно получить из лагранжиана классической электродинамики. Стартуем с обычного действия электромагнитного поля [6], действия S_{VM} Власова–Максвелла или S_L Лоренца:

$$\begin{aligned} S_L = S_{VM} = -\sum_{\alpha} m_\alpha c \sum_q \int_0^T \sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu_\alpha(q,t)\dot{X}^\nu_\alpha(q,t)}dt \ + \\ + \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{c} \sum_{q\mu} \int_0^T A_\mu(X_\alpha(q,t),t)\dot{X}^\mu_\alpha(q,t)dt + \\ + \sum_{\mu\nu} \frac{1}{16\pi c} \int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d^4x = S_p + S_{pf} + S_f, \end{aligned} \tag{5}$$

где S_p – означает действие частиц (*particles*), S_f – действие полей (*fields*), S_{pf} – действие полей–частиц (*particles–fields*).

Здесь α – сорт частиц, отличаемый по массе m_α и заряду e_α; q – нумерует частицы внутри одного сорта; $X^\mu_\alpha(q,t)$, $(\mu = 0,1,2,3; q = 1,2,...,N_\alpha; \alpha = 1,2,...,r)$ – 4-координаты q-й частицы сорта α; $A_\mu(x)$

– потенциал; $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ – электромагнитные поля; $g_{\mu\nu}$ – метрика Минковского: $g_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$, т.е. диагональная матрица. Варьирование проводим специальным способом [6]: вначале получаем движение частицы в поле $\delta(S_p + S_{pf}) = 0$, затем поля с заданными движениями частиц $\delta(S_{pf} + S_p) = 0$. Однако для частиц, мы перейдем к функциям распределения, что и даст искомую систему уравнений.

1) Варьирование S_p+S_{pf} по координатам $X^\mu_\alpha(q,t)$ даст уравнение движения зарядов в поле. Перепишем $\sqrt{\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\dot{X}^\mu(q,t)\dot{X}^\nu(q,t)}$ для метрики Минковского (здесь и далее греческие индексы $\mu,\nu = \overline{0,3}$, а латинские $i,j = \overline{1,3}$):

$$S_p = -\sum_\alpha m_\alpha c^2 \sum_q \int \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2_\alpha(q,t)}{c^2}}\, dt = \int L_p\, dt,$$

где L_p – лагранжиан частиц.

Здесь $\dot{\mathbf{x}}^2 = |\mathbf{v}|^2 = \dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2 = -(\dot{x}_1\dot{x}^1+\dot{x}_2\dot{x}^2+\dot{x}_3\dot{x}^3) = -\sum_i \dot{x}_i\dot{x}^i$ – трехмерный квадрат скорости, и мы учли, что $x^0 = ct$, и вынесли c^2 из-под корня. Проварьируем это выражение (опуская α):

$$\delta S_p = mc^2 \sum_{qi} \frac{1}{c^2} \int \frac{\dot{x}_i \delta \dot{x}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, dt =$$

$$= -m \sum_{qi} \int \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \delta x^i\, dt.$$

Варьируем S_{pf} (снова опуская α):

$$\delta S_{pf} = \frac{e}{c} \sum_q \delta \int \left[cA_0(\mathbf{x}(q,t),t) + \sum_i A_i(\mathbf{x}(q,t),t)\dot{x}^i(q,t) \right] dt =$$

$$= \frac{e}{c} \sum_{qi} \left[c\frac{\partial A_0}{\partial x^i}\delta x^i + \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\dot{x}^i \delta x^j - \left(\frac{d}{dt}A_i\right)\delta x^i \right] dt.$$

Отсюда из условия $\delta(S_p + S_{pf}) = 0$ получаем уравнение движения заряженной частицы в поле:

$$\frac{dp_{\alpha i}}{dt} = e_\alpha \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\sum_j F_{ij}\dot{x}^j_\alpha \right), \tag{6}$$

$$p_{\alpha i} = \frac{\partial L_p}{\partial x^i_\alpha} = \frac{m_\alpha \dot{x}_{\alpha i}}{\sqrt{1-\dot{x}^2_\alpha/c^2}},\;\; F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}.$$

2) Здесь мы перестаем следовать [6] и переходим к функции распределения. Уравнение для функции распределения получается как уравнения сдвига вдоль траекторий полученной динамической системы движения зарядов в поле. Видно, что удобно взять функцию распределения от импульсов, а не от скоростей. При этом надо выразить скорости через импульсы:

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}} \;\;\Rightarrow\;\; |\mathbf{p}|^2 = \frac{m^2|\mathbf{v}|^2}{1-|\mathbf{v}|^2/c^2}.$$

Обозначая $1-|\mathbf{v}|^2/c^2 = \gamma^{-2}$, получаем $\gamma = \sqrt{1+\dfrac{|\mathbf{p}|^2}{m^2c^2}}$ и $v_i = p_i/(\gamma m)$. Отсюда находим уравнение для функции распределения $f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(v_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x}\right) + \sum_i \frac{e_\alpha}{c}\left(-\frac{\partial A_i}{\partial t} - c\frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \sum_j F_{ij} v^j_\alpha\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i} = 0. \quad (7)$$

Здесь $v_{\alpha j} = \dfrac{p_j}{m_\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathbf{p}^2/(m^2_\alpha c^2)}}$ и использован тот факт, что $\mathrm{div}_{\mathbf{p}}(\sum_j F^i_j v^j) = 0$. Заметим, что при p_j нет индекса α, а при $v_{\alpha j}$ есть.

В [1], [25] это уравнение записано для ионов (i) и электронов (e) в следующем виде:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{x}}\right) - e\left(\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{B}]\right), \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}\right) + ze\left(\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{B}]\right), \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}}\right) = 0.$$

Здесь $f_i(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ – функция распределения ионов по пространству и импульсам в момент времени t; $f_e(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ – функция распределения электронов; ze – заряд иона, $(-e)$ – заряд электрона; $[\mathbf{v},\mathbf{B}]$ – векторное произведение. В [25] не выписано выражение $\mathbf{v}$ через $\mathbf{p}$, однако часто его берут классическим: $v_{\alpha j} = p_j/m_\alpha$. В такой записи этих уравнений $\mathbf{v}$ надо брать различными для электронов и ионов, то есть они требуют уточнения, где $\mathbf{v}_i$, а где $\mathbf{v}_e$ вместо $\mathbf{v}$, и каковы эти функции как функции импульса $\mathbf{v}_i(\mathbf{p})$ и $\mathbf{v}_e(\mathbf{p})$ (иначе уравнения не только не замкнуты, но, строго говоря, не совсем точны, что важно в численных расчетах).

3) Уравнение для полей. Следуем [6], но задействуем функцию распределения вместо использованных там плотностей $\rho_\alpha = \int f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\,d^3\mathbf{p}$ и токов $j^\mu = \int v_\alpha^\mu f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\,d^3\mathbf{p}$. Сначала надо переписать S_{pf} через функцию распределения, совершив переход

$$\sum_q \to \int\, dq \to \int f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} dt,$$

после чего S_{pf} запишется в виде

$$S_{pf} = \sum \frac{e_\alpha}{c^2} \int A_\mu(\mathbf{x},t) v_\alpha^\mu f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} dt.$$

Теперь варьируем по потенциалам $A_\mu(\mathbf{x},t)$:

$$\delta S_{pf} = \sum \frac{e_\alpha}{c^2} \int \delta A_\mu(\mathbf{x},t) v_\alpha^\mu f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} dt,$$

$$\delta S_f = \frac{1}{16\pi c^2} \int \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^3\mathbf{x} dt = \frac{1}{8\pi c^2} \int \delta A_\mu \partial_\mu F^{\mu\nu} d^3\mathbf{x} dt.$$

Полагаем $\delta(S_{pf} + S_f) = 0$ и получаем

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} \sum_\alpha e_\alpha \int v_\alpha^\mu f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t) d^3\mathbf{p}. \tag{8}$$

Система (7)–(8) и есть система уравнений Власова–Максвелла.

Замечание 1. При выводе уравнений Власова–Максвелла из микроскопических решений [4], [22] или по схеме Боголюбова [3] нужно было бы стартовать с гамильтоновых систем с потенциалами Льенара–Вихерта (запаздывающие потенциалы). Для слабого релятивизма соответствующий лагранжиан называется лагранжианом Дарвина, и он весьма громоздок [6], [7]. Кроме того, при описании плазмы обычно имеют дело с граничными задачами, что требует введения функций Грина вместо потенциала парного взаимодействия. Наконец, даже в тех случаях, когда не возникает этих дополнительных трудностей при выводе с помощью цепочек Боголюбова, как, например, для уравнения Власова–Пуассона для гравитации, такой классический по [6], [8] вывод, но с переходом к функции распределения по [13], представляется более простым и прямым, что мы сейчас и продемонстрируем.

Получим систему уравнений Власова–Пуассона с гравитацией в нерелятивистском случае. Лагранжиан электростатики получается из общего лагранжиана, определяемого действием (5), а гравитационная часть получается по аналогии с электростатикой. При этом мы заодно проверяем константы в исходном лагранжиане. В нерелятивистском случае

$$\sqrt{1-\frac{\dot{x}_\alpha^2}{c^2}} \approx 1-\frac{\dot{x}_\alpha^2}{2c^2},$$

поэтому для лагранжиана электростатики получаем правильное выражение:

$$S_{\mathrm{p}} = -\sum_{\alpha,q} m_\alpha c^2 + \sum_{\alpha,q} \frac{m_\alpha \dot{x}_\alpha^2(q,t)}{2}.$$

Действие полей-частиц S_{pf}^e в электростатике получается из общего случая обнулением A_i (магнитные поля)

$$S_{\mathrm{pf}}^e = -\sum_\alpha e_\alpha \sum_q \int \varphi(X^\alpha(q,t),t)dt =$$

$$= \left(\text{переход} \int dq \to \int f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} dt\right) =$$

$$= -\sum_\alpha e_\alpha \int \varphi(\mathbf{x},t) f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} dt.$$

Здесь φ — потенциал электростатики. Действие полей-частиц S_{pf}^g для гравитации

$$S_{\mathrm{pf}}^g = -\sum_\alpha m_\alpha \sum_q \int U(X^\alpha(q,t),t)dt \to$$

$$\to -\sum_\alpha m_\alpha \int U(x,t) f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\, d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} dt.$$

Действие полей электростатики

$$S_{\mathrm{f}}^{e} = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\nabla\varphi\right)^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]d\mathbf{x}dt,$$

пренебрегая вторым слагаемым, получим:

$$S_{\mathrm{f}}^{e} = \frac{1}{8\pi}\int\left(\nabla\varphi\right)^2\ d\mathbf{x}dt.$$

По аналогии для гравитации (разница в знаках — одноименные заряды отталкиваются, а массы притягиваются):

$$S_{\mathrm{f}}^{g} = -\frac{1}{8\pi G}\int\left(\nabla U\right)^2 dxdt.$$

Здесь U — потенциал гравитации. Общее выражение для действия гравитации и электростатики получаем в виде

$$\begin{gathered}
S = S_p + S_{pf}^e + S_{pf}^g + S_f^e + S_f^g = \\
= \sum_{\alpha,q}\int\frac{m_\alpha\dot{x}_\alpha^2(q,t)}{2}dt - \sum_\alpha e_\alpha\sum_q\int\varphi(X^\alpha(q,t),t)dt- \\
-\sum_\alpha m_\alpha\sum_q\int U(X^\alpha(q,t),t)dt+ \\
+\frac{1}{8\pi}\int\left(\nabla\varphi\right)^2 d\mathbf{x}dt - \frac{1}{8\pi G}\int\left(\nabla U\right)^2 d\mathbf{x}dt = \\
= \sum_{\alpha,q}\int\frac{m_\alpha\dot{x}_\alpha^2(q,t)}{2}dt - \sum_\alpha e_\alpha\int\varphi(\mathbf{x},t)f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\ d\mathbf{x}d\mathbf{p}dt- \\
-\sum_\alpha m_\alpha\int U(\mathbf{x},t)f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\ d\mathbf{x}d\mathbf{p}dt+ \\
+\frac{1}{8\pi}\int\left(\nabla\varphi\right)^2\ d\mathbf{x}dt - \frac{1}{8\pi G}\int\left(\nabla U\right)^2\ d\mathbf{x}dt.
\end{gathered}$$

Варьируя это выражение, как и раньше (из первого выражения, варьируя по частицам, получим уравнение движения, а потом Лиувилля; из второго выражения, варьируя по φ и по U, получим два уравнения Пуассона для электрического φ и гравитационного U потенциалов), получаем систему уравнений Власова–Пуассона–Пуассона для плазмы с гравитацией:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(\frac{\mathbf{p}}{m_\alpha}, \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}}\right) - \left(\left(m_\alpha \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + e_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}\right), \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}}\right) = 0, \tag{9}$$

$$\Delta U = 4\pi G \sum_\alpha m_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{p}, \tag{10}$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \tag{11}$$

Стационарные решения уравнения Власова ищут в виде функций от интегралов движения [26]–[31]. В случае (9)–(11) предположим, что функции распределения f_α суть функции распределения от энергии (энергетическая подстановка) и имеют следующий вид:

$$f_\alpha = g_\alpha\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha} + m_\alpha U + e_\alpha \varphi\right).$$

Здесь g_α – произвольная неотрицательная функция от полной энергии. В этом случае уравнения (9) удовлетворяются, в итоге получаем систему нелинейных эллиптических уравнений на потенциалы $U(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\Delta U = V(U, \varphi), V(U, \varphi) \equiv 4\pi G \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \int g_\alpha\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha} + m_\alpha U + e_\alpha \varphi\right) d\mathbf{p}, \tag{12}$$

$$\Delta \varphi = \Psi(U, \varphi), \Psi(U, \varphi) \equiv -4\pi \sum_{\alpha=1}^{N} e_\alpha \int g_\alpha\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha} + m_\alpha U + e_\alpha \varphi\right) d\mathbf{p}. \tag{13}$$

Исследуем эту систему уравнений. Как известно, корректность граничной задачи Дирихле или Неймана для нелинейного эллиптического уравнения $\Delta u = \psi(u)$, где $\psi(u)$ — действительная функция от u, зависит от знака производной $d\psi/du$: при неотрицательности производной $\psi'(u) \geq 0$ эта задача корректна, как отмечалось уже в книге Р. Куранта [32]. Знак ψ' для чистой электростатики, т. е. когда магнитное и гравитационное поля отсутствуют (имеется только уравнение (13), уравнение для гравитационного поля (12) отсутствует, $U \equiv 0$), был проверен в [33]–[35]. Эта выкладка без изменений переносится и на случай, когда $U \neq 0$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = -4\pi S_r \sum_\alpha e_\alpha^2 \int g'_\alpha\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha} + m_\alpha U + e_\alpha \varphi\right)|\mathbf{p}|^{r-1} d|\mathbf{p}| =$$

$$= -4\pi S_r \sum_\alpha e_\alpha^2 \int g'_\alpha\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha} + m_\alpha U + e_\alpha \varphi\right)|\mathbf{p}|^{r-2}(2m_\alpha) d\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha}\right) =$$

$$= -4\pi S_r \sum_\alpha e_\alpha^2 (2m_\alpha) \int_0^\infty |\mathbf{p}|^{r-2} d g_\alpha =$$

$$= -4\pi S_r \sum_\alpha e_\alpha^2 (2m_\alpha)\left(|\mathbf{p}|^{r-2} g_\alpha \Big|_0^\infty - \int_0^\infty g_\alpha d|\mathbf{p}|^{r-2}\right) =$$

$$= 8\pi S_r \sum_\alpha e_\alpha^2 m_\alpha \times \begin{cases} g_\alpha\left(\dfrac{\mathbf{p}^2}{2m_\alpha} + m_\alpha U + e_\alpha \varphi\right), & \text{если } r = 2, \\ (r-2)\int_0^\infty g_\alpha |\mathbf{p}|^{r-3} d|\mathbf{p}|, & \text{если } r > 2, \end{cases}$$

если g_α убывает достаточно быстро при аргументе, стремящемся к бесконечности, и $r \geq 2$. В вышеприведенной выкладке S_r есть площадь $(r-1)$–мерной сферы. При $r = 1$ дифференцирование по частям не проходит из–за расходимости.

Чисто математически видно, что при дифференцировании правой части (12) по U знак будет противоположным, и граничная задача для гравитации (когда электростатический потенциал $\varphi = 0$) некорректна: это соответствует физике, так как для гравитационного потенциала граничных задач не ставится. Поэтому и граничная задача для (12),(13) совместно некорректна и не ставится.

При этом для размерности скоростей или импульсов $r \geq 2$ граничная задача для (13) (с $U = 0$) оказывается корректной (и имеет ясный физический смысл). Отметим также, что выкладка показывает отсутствие нетривиальных, то есть отличных от постоянных ($\varphi \equiv const$), периодических решений. А при $r = 1$, напротив, периодические решения существуют. Они называются волнами Бернштейна–Грина–Крускала, но так как физически реализуются только 3–мерные распределения по импульсам, то данные волны являются отражением математической модели заряженных плоскостей, когда пространство импульсов одномерно. Итак, в природе волны BGK (Бернштейна–Грина–Крускала) отсутствуют.

В простейшем случае, когда $N = 1$, система (12)–(13) имеет вид

$$\Delta U = 4\pi G m \int g\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mU + e\varphi\right) d^3\mathbf{p}, \tag{14}$$
$$\Delta \varphi = -4\pi e \int g\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mU + e\varphi\right) d^3\mathbf{p}.$$

Ее удобно переписать в виде

$$\Delta\left(mU + e\varphi\right) = (Gm^2 - e^2) \int g\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + mU + e\varphi\right) d^3\mathbf{p}, \tag{15}$$
$$\Delta\left(eU + Gm\varphi\right) = 0.$$

Аналогичная выкладка с дифференцированием показывает что условия разрешимости первого из уравнений, существенно зависит от знака величины $\mathfrak{B} \equiv Gm^2 - e^2 \gtrless 0$. Если $\mathfrak{B} \geq 0$, то корректна граничная задача, в противном случае существуют глобальные решения [13], [33], [34], [35]. Таким образом, значение массы $m = \sqrt{e^2/G}$ становится критическим. Если $m > \sqrt{e^2/G}$, то силы тяготения сильнее электростатических сил отталкивания, и наоборот (если e — заряд электрона, тогда эта масса равна $m \approx 10^{-12}$ г)[1].

Если мы возьмем максвелловское распределение

$$f_\alpha = A \exp\left[-\beta\left(\frac{|\mathbf{p}|^2}{2m} + mU + e\varphi\right)\right],$$

то из (7) получим

$$\Delta\left(mU + e\varphi\right) = (Gm^2 - e^2) B \exp\left[-\beta\left(mU + e\varphi\right)\right], \beta > 0, \quad B > 0,$$

$$\Delta\left(eU + Gm\varphi\right) = 0.$$

Это уравнение в двумерном случае обладает большой группой симметрий (конформная группа), на основе чего оно было решено Ж. Лиувиллем [36]. Для нашего анализа траекторий достаточно рассмотреть одномерный (по $\mathbf{x}$, но не по $\mathbf{p}$) случай. Исследуя эту систему, получаем, что при $\mathfrak{B} > 0$ потенциал $mU + e\varphi$ выпуклый вниз и траектории частиц ограничены, в противном случае он выпукл

[1] Эта критическая масса имеет вид $m = m_e\sqrt{D_0}$, где D_0 — первое “большое число” Дирака $D_0 = 4.16 \cdot 10^{42}$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-28}$ г — масса электрона.

вверх и траектории частиц разбегаются. При $\mathfrak{B} = 0$ потенциалы $mU, e\varphi$ — линейные функции.

Замечание 2. Происхождение лагранжиана, соответствующего (5), красочно описано в книге В. Паули [8]: "После того как Пуанкаре убедился в инвариантности действия Шварцшильда относительно группы Лоренца, Борн применил четырехмерную векторную форму записи принципа действия, в результате чего последний приобрел очень наглядный вид..." — с соответствующими ссылками. Уравнения (8) являются второй парой уравнений Максвелла, а первая следует из равенств $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, что записывается в эквивалентном виде на языке дифференцирования кососимметрических тензоров $F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = 2d(A_\mu dx^\mu)$. Первая пара уравнений Максвелла записывается в виде $d(F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu) = 0$, т. е. внешний дифференциал от 2–формы равен нулю.

Замечание 3. Желательно и, видимо, можно таким же способом получить уравнения Власова–Янга–Миллса, заменив в четырех потенциалах A_μ числа на матрицы. Также можно выводить уравнения Власова–Эйнштейна [26], [13]. Таким образом, полезно классифицировать уравнения типа Власова именно по лагранжиану, дальнейшая классификация идет по зависимости скорости от импульса (релятивистская или нерелятивистская). Возможно, любое исследование уравнения Власова желательно начинать, стартуя именно с лагранжиана, чтобы понимать характер принимаемых приближений.

Замечание 4. Стационарные решения уравнения Власова появились даже раньше, чем само это уравнение, и это также показывает его фундаментальность. Эти решения появляются именно как стационарные решения самосогласованных полей и в гравитации (уравнение Эмдена–Фаулера [27]), и для заряженных частиц (фон Лауэ, диод Ленгмюра, электролиты Дебая [28], [13], [26]). В этом смысле уравнение Власова похоже по судьбе на уравнение Эйлера, где стационарные решения появились раньше в виде интеграла Бернулли, и при этом в той же самой энергетической подстановке, как братья–близнецы по судьбе. Но в некотором смысле уравнения и Лиувилля, и Власова фундаментальнее даже, чем уравнение Эйлера, так как уравнения типа Эйлера могут быть получены из них как точная подстановка, что мы и опишем в следующих параграфах.

3. Тождество Лагранжа, уравнения ЭМГД и форма Годунова

Как было показано, полная система уравнений Власова–Максвелла получается варьированием действия электромагнетизма (действия Лоренца) с переходом к функции распределения:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(v_\alpha, \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}}\right) + \sum_i e_\alpha \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \sum_j \frac{1}{c} F_{ij} v_\alpha^j\right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -\frac{4\pi}{c}\sum_\alpha e_\alpha \int v_\alpha^\mu f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p},\ F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}, (\mu, \nu = \overline{1, 4}),$$

$$E_i = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i}, \quad [\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{H}]_i = -\sum_j F_{ij} v_\alpha^j,$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\mathbf{p}}{m_\alpha \gamma_\alpha}, \quad \gamma_\alpha = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_\alpha^2 c^2}}.$$

Первое уравнение имеет вид сдвига по траекториям в поле электрических сил и магнитной силы Лоренца, а второе есть система уравнений Максвелла.

Систему уравнений Максвелла можно преобразовать к виду (фиксированием Лоренцевой калибровки $\partial A_\nu / \partial x_\nu$ согласно [6]), из которого и получаются потенциалы Льенара–Вихерта обращением левой части:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi = \sum_\alpha 4\pi e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p},$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \Delta A_i = \sum_\alpha 4\pi e_\alpha \int v_i f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}.$$

Тождество Лагранжа есть выражение второй производной по времени от момента инерции через кинетическую и потенциальную энергии. Следуя [9], покажем, что тождество Лагранжа можно распространить и на случай системы уравнений Власова–Максвелла. Введем момент инерции частиц относительно начала координат

$$I(t) = \sum_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \mathbf{x}^2 d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x},$$

функционалы

$$T(t) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha}\int f_{\alpha}(\mathbf{x},\mathbf{p},t)v_{\alpha}^{2}d^{3}\mathbf{p}d^{3}\mathbf{x},$$

$$\Pi = \sum_{\alpha}\int \frac{e_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}m_{\alpha}}\left(\mathbf{x},\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_{\alpha},\mathbf{H}]\right)f_{\alpha}d^{3}\mathbf{p}d^{3}\mathbf{x}-$$

$$-\sum_{\alpha}\int \frac{e_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}^{3}m_{\alpha}^{3}c^{2}}(\mathbf{p},\mathbf{x})(\mathbf{p},\mathbf{E})f_{\alpha}d^{3}\mathbf{p}d^{3}\mathbf{x}.$$

Тождество Лагранжа справедливо в виде

$$\ddot{I} = 4T - 2\Pi. \tag{17}$$

Первое слагаемое в правой части T есть кинетическая энергия, Π связано с силами, которые интересно рассмотреть, что мы и сделаем в дальнейшем.

Доказательство. Производная по времени от момента инерции I, согласно (16)

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_{\alpha},\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}}\right) + e_{\alpha}\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_{\alpha},\mathbf{H}],\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{p}}\right) = 0,$$

$$\dot{I} = \sum_{\alpha}\int \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t}\mathbf{x}^{2}d\mathbf{x}d\mathbf{p} = -\sum_{\alpha}\int \left(\mathbf{v}_{\alpha},\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{x}^{2}d\mathbf{p}d\mathbf{x}-$$

$$-\sum_{\alpha}\int \mathbf{x}^{2}e_{\alpha}\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{p}},\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_{\alpha},\mathbf{H}]\right)\,d\mathbf{p}d\mathbf{x}.$$

Теперь мы должны избавиться от производных функции распределения. По формуле Гаусса–Остроградского первый интеграл равен

$$2\sum_{\alpha}\int(\mathbf{x},\mathbf{v}_{\alpha})f_{\alpha}d^{3}\mathbf{p}d^{3}\mathbf{x},$$

а второй равен нулю, так как $\mathbf{E}$ не зависит от $\mathbf{p}$ и $\mathrm{div}_{\mathbf{p}}[\mathbf{v}_{\alpha},\,\mathbf{H}] = 0$. Аналогично, вторая производная от I по времени равна

$$\ddot{I} = -2\sum_{\alpha}\int(\mathbf{v}_{\alpha},\mathbf{x})\left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}},\,\mathbf{v}_{\alpha}\right)\,d^{3}\mathbf{p}d^{3}\mathbf{x}-$$

$$-2\sum_{\alpha}\int(\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{x})e_\alpha\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{H}]\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial\mathbf{p}}\,d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{x}.$$

Первый интеграл в этом выражении, интегрированием по частям можно преобразовать к виду

$$2\sum_{\alpha}\int\left(\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{v}_\alpha\right)f_\alpha d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{x}=4T.$$

Второй интеграл преобразуется, если посчитать

$$\frac{\partial v_i}{\partial p_j},\ \text{где}\ v_i=\frac{p_i}{m_\alpha\gamma_\alpha},\ \gamma_\alpha=\sqrt{1+\frac{\mathbf{p}^2}{m_\alpha^2c^2}},$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial p_j}=\frac{\delta_{ij}}{\gamma_\alpha m_\alpha}-p_j\frac{p_i}{\gamma_\alpha^3m_\alpha^3c^2}\ \Rightarrow\ \sum_{i,j}F_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial p_i}=0,$$

как свертка симметричного и кососимметричного тензоров. Тогда получаем:

$$-2\sum_{\alpha ij}\int\frac{\partial v_{\alpha j}}{\partial p_i}x_je_\alpha\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}-\frac{\partial A_0}{\partial x^i}-\frac{1}{c}F_{ij}v_\alpha^j\right)f_\alpha d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{x}=$$

$$=-2\sum_{\alpha ij}\int\left(\frac{\delta_{ij}}{\gamma_\alpha m_\alpha}-\frac{p_ip_j}{\gamma_\alpha^3m_\alpha^3c^2}\right)x_je_\alpha\Bigg(-\frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}-\frac{\partial A_0}{\partial x^i}-$$

$$-\frac{1}{c}F_{ij}v_\alpha^j\Bigg)f_\alpha d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{x}=$$

$$=-2\sum_{\alpha}\int\frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha m_\alpha}\left(\mathbf{x},\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{H}]\right)f_\alpha d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{x}+$$

$$+2\sum_{\alpha ij}\int\frac{p_ip_j}{\gamma_\alpha^3m_\alpha^3c^2}x_je_\alpha E_if_\alpha d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{x}=-2\Pi,$$

так как $\sum_{i,j}p_iF_{ij}v_\alpha^i=0$. Соответственно, второе слагаемое преобразуется к виду

$$+2\sum_{\alpha}\int\frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha^3m_\alpha^3c^2}\left(\mathbf{p},\mathbf{x}\right)\left(\mathbf{p},\mathbf{E}\right)f_\alpha d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{x}.$$

Актуальным вопросом является исследование устойчивости решений уравнений Власова–Максвелла (например, для установок типа проекта ITER или "Галатея" [37], [38] [14]). Тождество Лагранжа (17) может оказаться полезным, если его правая часть окажется знакоопределенной. Вывод показывает, что второй член в функционале П из (17) связан с релятивизмом. Но мы используем тождества Лагранжа, сравнивая различные их формы для уравнений магнитной гидродинамики (МГД): интересно посмотреть не только на сами уравнения МГД, но и на их следствия — тождества Лагранжа.

Существует множество форм уравнений типа МГД: разные авторы понимают под этим совершенно разные системы уравнений (см., например, [37], [16], [39]). При выводе уравнений типа МГД обычно [40] к уравнению Власова–Максвелла добавляют интеграл столкновений и получают уравнения гидродинамического типа (с ненулевой температурой) с использованием процедуры Максвелла–Чэпмена–Энскога. Это и называется выводом МГД, но при этом получаются приближенные уравнения. Вывод уравнений с нулевой температурой с помощью подстановки в виде дельта-функции, умноженной на плотность, заведомо известен (см., например, [2], [45], а также [4], где это связывается с лагранжевыми подмногообразиями). Мы приспособили его для классификации, уточнений и выяснения характера сделанных приближений: приведенные далее уравнения (19)–(20) получаются как точные следствия уравнений Власова–Максвелла, и из них можно получить тождество Лагранжа (21). Случай уравнения Власова–Максвелла с нерелятивистской зависимостью скорости от импульса дает очень похожую систему МГД. Поэтому ее не будем выписывать, но тождества Лагранжа выпишем для кинетического случая (22) и для случая МГД (23).

Еще одна наша цель — сравнить выводы уравнений МГД с нулевой и ненулевой температурой (см. далее уравнения (24), которые выводятся не точной подстановкой, а с применением моментного метода).

1. Случай нулевой температуры. Рассмотрим сначала случай нулевой температуры и получим соответствующие уравнения как точные следствия системы уравнений Власова–Максвелла с помощью т. н. гидродинамической подстановки (подробнее см. § 5):

$$f_\alpha(x,p,t) = n_\alpha(x,t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x},t)). \tag{18}$$

Это есть предельная при температуре $T_\alpha \to 0$ форма максвелловского распределения:

$$f_\alpha^0(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \frac{n_\alpha(\mathbf{x},t)}{(2k_B\pi T_\alpha m_\alpha)^{3/2}}\ \exp\left(-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{P}_\alpha)^2}{2k_B T_\alpha m_\alpha}\right) \xrightarrow[T_\alpha\to 0]{}$$

$$\xrightarrow[T_\alpha\to 0]{} n_\alpha(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x},t)).$$

Здесь k_B – постоянная Больцмана и T_α – температура α–компоненты смеси. При этом получится многожидкостная форма (слово "многожидкостная" означает, что каждая компонента имеет свою скорость) уравнений электромагнитной гидродинамики (или ЭМГД, как сейчас стали называть уравнения МГД в присутствии электрического поля). Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \mathrm{div}(\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha)n_\alpha) = 0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_\alpha^i(\mathbf{P}_\alpha)\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial x_i} - e_\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[v_\alpha(P_\alpha),\mathbf{H}]\right) = 0,$$

где $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha/(\gamma_\alpha m_\alpha)$, $\gamma_\alpha = \sqrt{1+\mathbf{P}_\alpha^2/(m_\alpha^2 c^2)}$. Эти уравнения дополняются уравнениями Максвелла

$$\nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0, \tag{20}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha, \quad \nabla\times\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha).$$

Подчеркнем, что эти уравнения являются точными следствиями системы уравнений Власова–Максвелла, поэтому тождество Лагранжа получается для системы (19)–(20) подстановкой (18) в (17):

$$\ddot{I}_2 = 4T_2 - 2\Pi_2, \text{где} \tag{21}$$

$$I_2(t) = \sum_\alpha \int n_\alpha(\mathbf{x},t)\mathbf{x}^2 d^3\mathbf{x},$$

$$T_2(t) = \frac{1}{2}\sum_\alpha \int n_\alpha(\mathbf{x},t) v_\alpha^2(\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x},t)) d^3\mathbf{x},$$

$$\Pi_2 = \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha m_\alpha} n_\alpha(\mathbf{x},t)\left(\mathbf{x}, \mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha), \mathbf{H}\right]\right) d^3\mathbf{x} -$$

$$-\sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha^3 m_\alpha^3 c^2} n_a(\mathbf{x},t)(\mathbf{P}_\alpha, \mathbf{x})(\mathbf{P}_\alpha, \mathbf{E}) d^3\mathbf{x}.$$

Нерелятивистская по частицам система уравнений Власова–Максвелла получается из действия вида (5), где первое слагаемое заменяется на

$$S_p = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \sum_q \int \dot{x}_\alpha^2(q,t)\, dt.$$

Получаем систему уравнений Власова–Максвелла в виде (16), причем ее следует замкнуть соотношением для скоростей $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{p}) = \mathbf{p}/m_\alpha$.

Соответствующие уравнения ЭМГД получаются той же подстановкой (18) и отличаются от (19) лишь выражением скоростей через импульсы $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x},t)/m_\alpha$.

Тождество Лагранжа для системы (16) при $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{p}) = \mathbf{p}/m_\alpha$ справедливо в виде

$$\ddot{I}_3 = 4T_3 - 2\Pi_3, \text{ где} \tag{22}$$

$$I_3(t) = \sum_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\mathbf{x}^2 d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x},$$

$$T_3(t) = \frac{1}{2}\sum_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\mathbf{v}_\alpha^2 d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x},$$

$$\Pi_3 = \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\mathbf{x}, \mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{H}\right]\right) f_\alpha d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x}.$$

Тождество Лагранжа для системы (19) при $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{p}) = \mathbf{p}/m_\alpha$ справедливо в виде

$$\ddot{I}_4 = 4T_4 - 2\Pi_4, \tag{23}$$

$$I_4(t) = \sum_\alpha \int n_\alpha(\mathbf{x},t)\mathbf{x}^2 d^3\mathbf{x},$$

$$T_4(t) = \frac{1}{2}\sum_\alpha \int n_\alpha(\mathbf{x},t)\mathbf{v}_\alpha^2(\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x},t))d^3\mathbf{x},$$

$$\Pi_4 = \sum_\alpha \int \frac{n_\alpha(\mathbf{x},t)}{m_\alpha} e_\alpha \left(\mathbf{x}, \mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha), \mathbf{H}\right]\right) d^3\mathbf{x}.$$

Отметим обобщение тождества Лагранжа, когда вместо $\mathbf{x}^2$ берется произвольная функция $\varphi(\mathbf{x})$

$$I(t) = \sum_\alpha \int f_\alpha \varphi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x},$$

Для этого функционала в силу системы (16) Власова–Максвелла имеем следующее выражение для второй производной по времени

$$\ddot{I} = \sum_\alpha \int \frac{\partial\varphi}{\partial x_i \partial x_j} v_{\alpha i} v_{\alpha j} f_\alpha d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x} +$$

$$+ \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha m_\alpha} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}, \mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{H}\right]\right) f_\alpha d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x} -$$

$$- \sum_\alpha \int \frac{e_\alpha}{\gamma_\alpha^3 m_\alpha^3 c^2} (\mathbf{p}, \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}})(\mathbf{p}, E) f_\alpha d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{x}.$$

2. Случай ненулевой температуры. Если в случае нулевой температуры производится подстановка в уравнение Власова–Максвелла дельта–функции Дирака (18), то в случае ненулевой температуры производится подстановка максвелловского распределения f_α^0. Двухжидкостная и одножидкостная МГД (или ЭМГД) с ненулевой температурой имеют много модификаций [37], [39], [16], [40]; для примера мы приведем систему из [14], [37]:

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}\big(\rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha\big) = 0,\ \rho_\alpha = m_\alpha n_\alpha, \text{ где } \alpha = \{i, e\},$$

$$\rho_\alpha \frac{d\mathbf{V}_\alpha}{dt} = -\nabla P_\alpha + e_\alpha n_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{V}_\alpha, \mathbf{H}]\right),\ \ \frac{ds_\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + \mathbf{V}_\alpha \nabla s_\alpha = 0,$$

$$P_\alpha = P_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha),\ \epsilon_\alpha = \epsilon_\alpha(\rho_\alpha, T_\alpha),\ T_\alpha ds_\alpha = d\epsilon_\alpha + P_\alpha d\left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right),$$

где P_α – давление, ϵ_α – внутренняя энергия,

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha = 0, \quad \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha.$$

Обычно получают уравнения гидродинамического типа из системы кинетических уравнений, последовательно интегрируя и вводя моменты:

$$n_\alpha = \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p}, \quad P_{\alpha k} = \frac{1}{n_\alpha} \int p_k f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p},$$

$$D_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \left(\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha\right)^2 f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p},$$

Здесь $n_\alpha(\mathbf{x}, t)$ – плотность числа частиц сорта α, $P_{\alpha k}(\mathbf{x}, t)$ — математическое ожидание импульса или средний импульс (k–я компонента, $k = x, y, z$), D_α — дисперсия по импульсам всех частиц каждого сорта, которая пропорциональна энергии хаотического движения.

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha P_{\alpha\ell}) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(n_\alpha P_{\alpha k} P_{\alpha\ell} + \sigma_{\alpha k\ell}) - n_\alpha e_\alpha (\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{H}])_\ell = 0,$$

$$\sigma_{\alpha k\ell} = \int (p_k - P_{\alpha k})(p_\ell - P_{\alpha\ell}) f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \quad \text{(тензор напряжений)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha D_\alpha) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} q_{\alpha k} = 0,$$

$$q_{\alpha k} = \int \frac{p_k}{m} (\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha)^2 f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p} \quad \text{(вектор теплового потока)}.$$

В этой системе первое уравнение представляет собой уравнение неразрывности, второе есть уравнение движения, а третье уравнение описывает изменение энергии хаотического движения. Эта точная система уравнений, но она не замкнута. Чтобы ее замкнуть, предполагают максвеллизацию либо из парных столкновений (добавляя интеграл столкновений), либо из взаимодействия со средой (добавляя линейный интеграл столкновений). Это означает, что моменты высшего порядка определяются через низшие с помощью максвелловского распределения

$$f^0_\alpha(\mathbf{x},\mathbf{p},t)=\frac{n_\alpha(\mathbf{x},t)}{(2k_B\pi T_\alpha m_\alpha)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{P}_\alpha)^2}{2k_BT_\alpha m_\alpha}\right). \qquad (25)$$

При этом оказывается, что:

$$\sigma_{\alpha k\ell}=\delta_{k\ell}k_Bn_\alpha T_\alpha,\quad D_\alpha=3k_BT_\alpha.$$

Более кратко эти уравнения записываются в форме Годунова, для этого введем в рассмотрение функцию Годунова:

$$G^\alpha(\beta^\alpha_\mu)=\int f^0_\alpha(\beta^\alpha_\mu)d^3\mathbf{p},\quad \mu=\overline{0,4}, \qquad (26)$$

$$f^0_\alpha(\beta^\alpha_\mu)=\exp[\beta^\alpha_0+\beta^\alpha_1p_1+\beta^\alpha_2p_2+\beta^\alpha_3p_3+\beta^\alpha_4\mathbf{p}^2].$$

Здесь β^α_μ — новые переменные (переменные Годунова) вместо плотности n_α, температуры T_α и среднего импульса $\mathbf{P}_\alpha$ в максвелловском распределении f^0_α. Сравнивая

$$f^0_\alpha(\beta^\alpha_\mu)=\exp\left[\beta_0-\frac{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}{4\beta_4}\right]\exp\left[\beta_4\left(\mathbf{p}+\frac{\vec{\beta}}{2\beta_4}\right)^2\right],$$

$$\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$$

с выражением (25), получим связь между β_μ и обычными термодинамическими переменными:

$$\beta^\alpha_4=-\frac{1}{2k_BT_\alpha m_\alpha},\quad \beta^\alpha_1=\frac{P_{\alpha1}}{k_BT_\alpha m_\alpha},\quad \beta^\alpha_2=\frac{P_{\alpha2}}{k_BT_\alpha m_\alpha},\quad \beta^\alpha_3=\frac{P_{\alpha3}}{kT_\alpha m_\alpha},$$

$$\beta^\alpha_0=\ln n_\alpha-\frac{3}{2}\ln\left(2\pi k_BT_\alpha m_\alpha\right)-\frac{P_\alpha^2}{2k_BT_\alpha m_\alpha}.$$

Определим вектор

$$K^\alpha_\mu=\left(0,F^\alpha_1n_\alpha,F^\alpha_2n_\alpha,F^\alpha_3n_\alpha,-2F^\alpha_iG^\alpha_{\beta_i}\right),$$

$$\mathbf{F}^\alpha=e_\alpha\left(\mathbf{E}+[\mathbf{v}_\alpha,\mathbf{H}]\right),\quad i=\overline{1,3},$$

тогда уравнения с ненулевой температурой в нулевом приближении метода Чэпмена–Энскога [25], [26] можно записать в следующей форме Годунова [41], [42]:

$$\frac{\partial G^\alpha_{\beta_\mu}}{\partial t} + \frac{\partial G^\alpha_{\beta_\mu \beta_i}}{\partial x_i} + K^\alpha_\mu = 0, \text{ где } G^\alpha_{\beta_\mu} \equiv \frac{\partial G^\alpha}{\partial \beta_\mu}. \qquad (27)$$

Такие уравнения являются источниками экономичных разностных схем “солверов” ($solvers$): система уравнений (27) содержит только одну неизвестную функцию G^α (для каждого сорта частиц α).

Обобщение тождества Лагранжа в этом случае имеет следующий вид:

$$I(t) = \sum_\alpha \int f^0_\alpha(\beta^\alpha_\mu)\phi(x) d^3p d^3x,$$

$$\ddot{I} = \sum_\alpha \int \frac{\partial \phi}{\partial x_i \partial x_j} G^\alpha_{\beta_i} G^\alpha_{\beta_j} d^3x - \int \frac{\partial \phi}{\partial x_i} G^\alpha F^\alpha_i d^3x.$$

В некоторых курсах (см., например, [44]) используют уравнения на общую температуру и общий импульс. Это связано с тем, что импульс и кинетическая энергия каждой компоненты не являются инвариантами столкновений для перекрестных интегралов столкновений, тогда вместо $3n$ уравнений системы (24) или (27) получится $n + 3 + 1$ уравнение.

Форма Годунова полезна по нескольким причинам. Функция G обобщает потенциал Гиббса, через который выражаются все термодинамические соотношения, на неравновесный случай. Здесь через эту функцию записываются уже макроскопические уравнения движения, и интересно было бы сравнить термодинамику Гиббса с дважды дивергентной гидродинамикой Годунова. Вторая причина — в этой форме уравнения (27) оказываются автоматически гиперболическими. И, наконец, известный численный метод Годунова приложим именно к такой форме уравнений. В беседе с одним из авторов данного обзора (В. В.) С.К. Годунов отметил аналогию между формой (27) и неравновесным методом Гиббса. Так как реакции не последовало, в следующий свой приезд С.К. Годунов сделал выписку соответствующего места из обзора [42]. После этого соответствующий вывод был сделан и для максвелловского распределения, и для распределений Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна [13], [26]. Там замечено, что для максвелловского распределения форма Годунова имеет не дважды, а даже трижды дивергентную форму, а уравнения выражаются только через один потенциал G — это ещё больше сближает ее с методом Гиббса. Ещё одно преимущество уравнений в форме Годунова, получаемых из кинетического подхода [42], [13], [26], — естественность получающихся переменных. Действительно, переменные β в (26) – это результат переписывания максвелловского распределения в двух различных формах (25) и (27) и их сравнение. В других уравнениях, где С.К. Годунов получает такую форму вне кинетического подхода (например, [43] для теории упругости), выбор переменных вызывает недоумение своей произвольностью. Такие вопросы возникали и на докладах С.К. Годунова. Поэтому вывод таких уравнений с использованием кинетического подхода был бы весьма полезен.

Итак, наша попытка классификации уравнений Власова и МГД дала следующее: уравнения Власова–Максвелла с релятивистской и нерелятивистской формой зависимости скорости; то же для уравнений МГД; система уравнений МГД для нулевой и ненулевой температуры (первая получается точной подстановкой дельта–функции Дирака в уравнение Власова, вторая — соответственно моментным методом и замыканием с помощью максвелловского распределения); МГД одножидкостная и двухжидкостная; уравнения МГД в переменных Годунова.

4. Гидродинамическая подстановка для уравнений Лиувилля и Власова и обобщение метода Гамильтона–Якоби

В данном параграфе рассмотрим подробнее приложения гидродинамической подстановки.

Гидродинамическая подстановка была впервые применена, по–видимому, Д. Бомом в [45], и до недавних пор использовалась в теории уравнения Власова (см., например, [1], [11], [13], [12]). Однако недавно была продемонстрирована ее применимость к уравнению Лиувилля и гамильтоновой механике [46]–[47]. В работах И.С. Аржаных [48], К.И. Долматова [49], В.В. Козлова [50]–[52], был намечен простейший вывод уравнения Гамильтона–Якоби (ГЯ), а гидродинамическая подстановка связала просто этот вывод с уравнением Лиувилля [46]–[47]. Мы сначала покажем этот прямой вывод уравнения Гамильтона–Якоби, а потом рассмотрим возможности гидродинамической подстановки в негамильтоновой ситуации.

Гамильтоновы канонические уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} \tag{28}$$

приводят к уравнению Лиувилля на функцию распределения $f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)$ по импульсам $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ и пространственным переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0. \tag{29}$$

Используем подстановку $f(\mathbf{x},\mathbf{p},t) = \rho(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{x},t))$, где $\delta(.)$ — функция Дирака, $\rho(\mathbf{x},t)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)$ имеют смысл плотности частиц и импульса частиц в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t соответственно. Вывод уравнений на ρ и $\mathbf{P}$ проводится прямым способом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta\bigl(\mathbf{p} - \mathbf{P}) - \rho(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\delta - \rho\bigl(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_i}\bigr) + \rho\frac{\partial \delta}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} = \rho\frac{\partial \delta}{\partial p_i}.$$

Собирая множители при δ–функции, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\bigg|_{p_i=P_i} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho\,\mathrm{div}\frac{\partial H}{\partial p_i}\bigg|_{p_i=P_i} \right) = 0.$$

Здесь мы должны положить во 2–ом слагаемом после операции дифференцирования $\mathbf{p} = \mathbf{P}$; обозначим для краткости $\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{P},t) \equiv (\partial H/\partial \mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{P}}$. Тогда получаем уравнение, совпадающее по виду с классическим уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i) = 0,$$

так что по физическому смыслу можно называть введенную выше величину $\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{P},t)$ “обобщенной скоростью”.

Приравнивая выражения при производных дельта–функции, получаем второе уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_i} = \mathbf{F},$$

где: $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = -\big(\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})/\partial\mathbf{x}\big)|_{\mathbf{p}=\mathbf{P}(\mathbf{x},t)}$ — компоненты обобщенной силы.

Итак, получаем систему уравнений обобщенной гидродинамики (которую можно назвать редуцированной системой Эйлера или РСЭ), которая является точным следствием уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial x_i} = \mathbf{F}, \tag{30}$$

где обобщенные скорость $\mathbf{V}$ и сила $\mathbf{F}$ определены выше.

Имеется альтернативный метод вывода уравнений (30) с помощью уравнений для моментов [46], [47]. При этом второе из уравнений получается в измененном виде:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{P})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\mathbf{P}V_i)\right) = \rho\mathbf{F}. \tag{31}$$

Последнее уравнение несколько отличается от второго уравнения РСЭ (30), но приводится к нему с помощью уравнения неразрывности.

В работах [50]–[52] показывается, как из (30) получаются уравнения ГЯ. Во–первых, приведем второе уравнение (30) к форме Громеки–Лэмба [50], [53]–[54]:

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial P_i}{\partial\mathbf{x}} = -\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{x},\mathbf{P})\frac{\partial P_i}{\partial\mathbf{x}}. \tag{32}$$

Выражение $(\partial P_i/\partial x_j - \partial P_j/\partial x_i)dx_i \wedge dx_j$ есть дифференциал от $P_i dx_i$, и форма Громека показывает, что уравнение для ротора $R_{ij} = \partial P_i/\partial x_j - \partial P_j/\partial x_i$ имеет решение $\mathbf{R} \equiv 0$:

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,[\mathbf{R},\mathbf{V}] = 0. \tag{33}$$

Мы воспользовались тем, что второе и третье слагаемое в левой части (32) — это компоненты векторного произведения $[\mathbf{R},\mathbf{V}]$, а справа стоит градиент функции:

$$\frac{dH(\mathbf{x},\mathbf{P})}{dx_j} = \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{P})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{P})}{\partial p_i}\frac{\partial P_i}{\partial x_j}$$

(композиция $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} \equiv 0$). Обратно, если ротор $\mathbf{P}$ равен нулю, то $\mathbf{P}$ есть градиент некоторой функции (в односвязной области): $P_i = \partial S/\partial x_i$, и это свойство, как показывает уравнение (33), сохраняется со временем. Из (32) следует:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{x}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}})\right) = 0.$$

Отсюда $\partial S/\partial t + H(\mathbf{x}, \partial S/\partial \mathbf{x}) = f(t)$. Снова следуя [50]–[52] и делая замену $S = \widetilde{S} + \int f(t)dt$, получаем чистое уравнение ГЯ:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\mathbf{x}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right) = 0. \tag{34}$$

Итак, мы получаем прямой вывод уравнения Гамильтона–Якоби из уравнения Лиувилля с помощью гидродинамической подстановки. До работ [46], [47] гидродинамическая подстановка для уравнения Лиувилля, видимо, не использовалась, и мы мы перенесли ее с уравнения Власова. А теперь мы снова воспользуемся аналогией уравнений Лиувилля и Власова, для того, чтобы получить аналог уравнения Гамильтона–Якоби для уравнения Власова, а также обобщить рассуждения Арнольда–Козлова на уравнение Власова–Пуассона.

Известно [15], [40], [45], что проходит следующая гидродинамическая подстановка

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = n_\alpha(\mathbf{x}, t)\delta\big(\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x}, t)\big),$$

которая дает точные решения уравнений Власова–Пуассона–Пуассона (9)–(11), если n_α и $\mathbf{P}_\alpha$ удовлетворяют следующей системе гидродинамических уравнений

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{m_\alpha}\mathrm{div}(n_\alpha \mathbf{P}_\alpha) = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial t} + \sum_i \frac{1}{m_\alpha} P_{\alpha i} \frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial x_i} = -m_\alpha \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + e_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}},$$

$$\Delta U = 4\pi G \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad \Delta \varphi = -4\pi \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha(\mathbf{x}, t).$$

Если мы перепишем второе уравнение в форме Громеки, кососимметризуя выражение $\partial P_{\alpha i}/\partial x_j$:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial t} + \sum_i \frac{1}{m_\alpha} P_{\alpha i} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{\alpha i}}{\partial \mathbf{x}} \right) = -m_\alpha \nabla U + e_\alpha \nabla \varphi - \frac{1}{2m_\alpha} \nabla(\mathbf{P}_\alpha^2) \tag{36}$$

то справа, как и положено, окажется полный градиент от "интеграла Бернулли". Обозначим через $\mathbf{R}^\alpha$ матрицу R_{ij}^α (ротор импульса $\mathbf{P}_\alpha$)

$$R_{ij}^\alpha = \frac{\partial P_{\alpha i}}{\partial x_j} - \frac{\partial P_{\alpha j}}{\partial x_i}.$$

Взяв ротор от уравнения (36), получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{R}_\alpha}{\partial t} + \mathrm{rot}(\mathbf{R}^\alpha \times \mathbf{P}_\alpha) = 0.$$

В стационарном случае имеем

$$\mathrm{rot}(\mathbf{R}^\alpha \times \mathbf{P}^\alpha) = 0.$$

Как следствие этого уравнения в работах В.И. Арнольда [17], [18] и В.В. Козлова [19] показано, что при выполнении уравнения неразрывности $\mathrm{div}(n_\alpha \mathbf{P}_\alpha) = 0$ векторные поля $\mathbf{R}^\alpha / n_\alpha$ и $\mathbf{P}^\alpha$ коммутируют:

$$\left[\frac{\mathbf{R}^\alpha}{n_\alpha}, \mathbf{P}^\alpha \right] = 0.$$

Но у нас уравнение неразрывности — первое в системе уравнений (35). Из полученных соотношений, для плазменных электростатических и гравитационных конфигураций — следуя [17]–[19], делаем вывод, что поверхности, натянутые на $\mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{R}_\alpha / n_\alpha(\mathbf{x}, t)$, являются топологически либо торами, либо цилиндрами, либо это плоскости. В связи с важностью леммы Арнольда–Козлова мы проверяем ее другим способом в Приложении.

Положим для уравнений (35) $\mathbf{P}_\alpha = \partial S / \partial \mathbf{x}$. Получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \sum_i \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(n_\alpha \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i} \right) = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m_\alpha}\left(\nabla S_\alpha, \nabla S_\alpha\right) + m_\alpha U(\mathbf{x}) - e_\alpha \varphi(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\Delta U = 4\pi G \sum_\alpha m_\alpha n_\alpha, \quad \Delta\varphi = -4\pi \sum_\alpha e_\alpha n_\alpha.$$

Отметим, что сходные уравнения в работе [55] приведены (без вывода) по аналогии с обычными уравнениями Гамильтона–Якоби: у нас же они получаются с помощью гидродинамической подстановки.

Тем самым, действительно, для системы уравнений Власова–Пуассона–Пуассона можно получить РСЭ, содержащую уравнения типа ГЯ. Однако для системы Власова–Максвелла такое не проходит из-за того, что сила Лоренца неградиентна.

Мы получили кратчайший и прямой вывод уравнений Гамильтона–Якоби с помощью гидродинамической подстановки, и теперь обобщим его на негамильтонов случай. Можно рассматривать второе из уравнений (30) как уравнение движения n–мерной поверхности в $2n$–мерном пространстве, и мы обобщим такое уравнение на произвольные размерности.

Рассмотрим общую (негамильтонову) автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1–го порядка в n–мерном пространстве:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{38}$$

Введем вновь функцию распределения $f(\mathbf{x}, t)$ точек в n–мерном фазовом пространстве в момент времени t. Ее эволюция описывается обобщенным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_n(\mathbf{v} f) = 0. \tag{39}$$

Чтобы описать движение m–мерной $(1 \le m \le n-1)$ поверхности, представим вектор $\mathbf{x}$ как упорядоченную пару $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n-m}$ (иначе говоря, разложим фазовое пространство системы в декартову сумму фазовых множеств, определяемых новыми переменными: $R^n_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}^m_{\mathbf{q}} \oplus \mathbb{R}^{n-m}_{\mathbf{p}}$). Перепишем систему (38) в этих переменных:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{q},\mathbf{p}), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{q},\mathbf{p}), \tag{40}$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ — это, соответственно, m первых и $n-m$ последних компонент векторной функции $\mathbf{v}(\mathbf{q},\mathbf{p})$ из (38) (т. е. $\big(\mathbf{w},\mathbf{g}\big)^T = \mathbf{v}$).

Будем искать решение уравнения Лиувилля (39), вновь используя гидродинамическую подстановку: $f(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \rho(\mathbf{q},t)\delta\big(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{q},t)\big)$. Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q},t)$ — уравнение m–мерной поверхности в момент времени t, $\rho(\mathbf{q},t)$ — плотность точек на ней. Подстановка данного представления $f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ в уравнение (39) дает [46]–[47] уравнение неразрывности и уравнение движения поверхности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q_k}\big(\rho W_k\big) = 0, \tag{41}$$

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} W_k \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial q_k} = \mathbf{G}. \tag{42}$$

Здесь $\mathbf{W}(\mathbf{q},t) = \mathbf{w}\big(\mathbf{q},\mathbf{P}(\mathbf{q},t)\big)$, $\mathbf{G}(\mathbf{q},t) = \mathbf{g}\big(\mathbf{q},\mathbf{P}(\mathbf{q},t)\big)$.

Система уравнений вида (42) обычно называется "системой с одинаковой главной частью" (см., например, [32]). Отметим, что у нас при выводе из уравнения Лиувилля с помощью гидродинамической подстановки уравнениям (42) сопутствует естественным образом уравнение неразрывности (41) для плотности.

Мы получили уравнение (42) движения m–мерных поверхностей в n–мерном пространстве в силу произвольной системы n нелинейных уравнений (38) в эйлеровых координатах. В простейшем случае $m = 1$ стационарная система (42) описывает траектории движения. Она совпадает с результатами деления $(n-1)$–х последних уравнений (38) на первое из них. Эта процедура поиска стационарных траекторий хорошо известна и показывает согласованность наших вычислений.

Анализ метода ГЯ с целью распространения его на негамильтонову ситуацию приводит к заключению, что данному методу присущи три составляющие: (*замена переменных*) — (*запас точно решаемых уравнений*) — (*уравнение ГЯ*). Для классического гамильтонова случая в качестве замен переменных рассматриваются, например, сферическая, эллиптическая и параболическая системы координат и канонические преобразования (см., например, [56]), а в качестве точно решаемых выступают системы, интегрируемые по Лиувиллю. Для общего негамильтонова случая в качестве запаса точно решаемых уравнений можем взять линейные или с разделяющимися переменными, а вместо канонических замен можно брать любые. Но что же в общем случае сыграет роль аналога уравнения ГЯ с функцией S?

Рассмотрим **Пример**: введем гамильтониан одномерного движения $H = p^2/(2M) + U(x)$. Будем полагать $v_1 = \partial H/\partial p = p/M$, $v_2 = -\partial H/\partial x = -U'(x)$. Классический метод ГЯ (в стационарном случае) приводит к уравнению

$$\frac{1}{2M}\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + U'(x) = E.$$

В то же время стационарное одномерное ($m = 1$) уравнение (42) принимает форму

$$\frac{1}{2M}\frac{dP}{dx} = -\frac{dU/dx}{P}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{2M}\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + U'(x) = E_1,$$

так что роль классической эйкональной функции $S(x)$ переходит к импульсной переменной $P(x)$, а в общем негамильтоновом случае – к полям $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ из (42), которые и играют теперь роль уравнений Гамильтона-Якоби. Можно видеть, что “обобщенный метод ГЯ” применим как к негамильтоновым, так и к гамильтоновым системам, причем соответствующие уравнения обобщенного метода ГЯ, получаемые из (42), могут выглядеть даже проще, чем классические.

Таким образом, можно заключить, что роль аналога уравнения ГЯ для негамильтонова случая играют сами уравнения (42) или их стационарные следствия. Мы здесь будем пользоваться простейшим следствием: при $m = 1$ уравнение (42) в стационарном случае — это результат деления $(n-1)$–го уравнения системы (38) на последнее. Эти $n-1$ уравнений хорошо известны, так как описывают траектории, причем время исключено.

Рассмотрим систему (38) в виде пары уравнений

$$\dot{x} = v_1(x, y), \quad \dot{y} = v_2(x, y). \tag{43}$$

Уравнение (42) для данной системы приводится к виду (в стационарном случае)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_1(x,y)}{v_2(x,y)}$$

хорошо известного следствия для определения траекторий, и это единственный кандидат на роль уравнения ГЯ в негамильтоновой ситуации в 2–мерном случае.

Пусть $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ — новые переменные (то есть “новые” координаты являются однозначными функциями “старых”). Тогда имеем

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'_x v_1 + \alpha'_y v_2 \equiv \Omega_1(\alpha,\beta), \quad \frac{d\beta}{dt} = \beta'_x v_1 + \beta'_y v_2 \equiv \Omega_2(\alpha,\beta), \tag{44}$$

и после деления

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\alpha'_x + \alpha'_y \cdot \dfrac{v_2}{v_1}}{\beta'_x + \beta'_y \cdot \dfrac{v_2}{v_1}} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}. \tag{45}$$

Если мы хотим, чтобы переменные α и β разделялись, приравняем правую часть вышеприведенного уравнения (Ω_1/Ω_2) выражению $\omega_1(\alpha)\omega_2(\beta)$ (здесь $\omega_1(...)$, $\omega_2(...)$ — произвольные функции своих аргументов), и получим линейное уравнение для определения v_2/v_1. Решая его, имеем:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\alpha'_x - \dfrac{\Omega_1}{\Omega_2}\beta'_x}{-\alpha'_y + \dfrac{\Omega_1}{\Omega_2}\beta'_y}.$$

Таким образом, получаем общий вид систем, разделяющихся в новых переменных α, β:

$$v_1 = \chi(x,y)\Big(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\beta'_y - \alpha'_y\Big), \qquad v_2 = \chi(x,y)\Big(\alpha'_x - \frac{\Omega_1}{\Omega_2}\beta'_x\Big), \tag{46}$$

где $\chi(x,y) \not\equiv 0$ — произвольная функция.

По своей структуре уравнения (46) весьма близки к каноническим уравнениям Гамильтона: последние могут быть получены (если взять простейший случай $\chi = 1$) в условиях предельных переходов $\omega_1\omega_2 \to 0$ или $\omega_1\omega_2 \to \infty$:

$$\dot{x} = -\alpha'_y, \quad \dot{y} = \alpha'_x \quad \text{или} \quad \dot{x} = \beta'_y, \quad \dot{y} = -\beta'_x \tag{47}$$

(при этом роль функции Гамильтона выполняют "новые" переменные — соответственно α и β).

Пример. В полярной системе координат (СК) $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$, и уравнения (44)

$$\frac{dr}{dt} = v_1(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)\cdot\cos\,\varphi + v_2(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)\cdot\sin\,\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\big(-v_1(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)\cdot\sin\,\varphi + v_2(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)\cdot\cos\,\varphi,$$

откуда:

$$\frac{v_1(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)}{v_2(r\cos\,\varphi, r\sin\,\varphi)} = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi - \omega_1(r)\omega_2(\varphi)}{-1-\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\omega_1(r)\omega_2(\varphi)}.$$

Данное условие разделения координат в полярной системе можно переписать в терминах исходных декартовых координат:

$$v_1(x,y) = \chi(x,y)\cdot\left(\frac{y}{x} - \omega_1\big(x^2+y^2\big)\omega_2\big(\frac{y}{x}\big)\right),$$

$$v_2(x,y) = \chi(x,y)\cdot\left(-1 - \frac{y}{x}\cdot\omega_1\big(x^2+y^2\big)\omega_2\big(\frac{y}{x}\big)\right).$$

Далее рассмотрим некоторые следствия полученной выше формулы преобразования.

а) Продемонстрируем условие разделения на примере 2–мерной системы Пуанкаре [57]. Если положить $\chi(x,y) = -x$, $\omega_1(x,y) = 1-r^2$, $\omega_2(x,y)\equiv 1$, то имеем:

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1-x^2-y^2),\quad \frac{dy}{dt} = x + y(1-x^2-y^2).$$

Перейдем к полярной СК:

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r^2),\qquad \frac{d\varphi}{dt} = -1$$

(разделение переменных очевидно), при этом $v_1/v_2 = \big(\mathrm{tg}\,\varphi + 1 - r^2\big)/\big(-1+\mathrm{tg}\varphi\cdot(1-r^2)\big)$. Фазовая траектория системы — устойчивый предельный цикл.

б) Можно получить картину динамической системы, имеющей несколько фазовых циклов: возьмем, например, $\omega_1(r) = (r^2-1)(r^2-4)$, $\omega_2 \equiv -1$. Таким образом, исходная система перепишется как

$$\frac{dr}{dt} = -r(r^2-1)(r^2-4), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -1,$$

и система приобретает два предельных цикла.

в) Если положить $\chi = -x$, $\omega_1 = \omega_1(r^2)$, $\omega_2 = -1$, то имеем систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y + x\omega_1(r^2), \qquad \frac{dy}{dt} = x + y\omega_1(r^2),$$

а после перехода к полярным координатам:

$$\frac{dr}{dt} = -r \cdot \omega_1(r^2), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -1,$$

В данном случае легко привести пример динамической системы с бесконечным (счетным) числом циклов: для этого достаточно выбрать, например, $\omega_1(r^2) = \sin(r^2)$. Фазовый портрет последней системы состоит из совокупности концентрических орбит (на плоскости (x, y)), попеременно являющихся устойчивыми и неустойчивыми предельными циклами. Можно также рассмотреть случай $\omega_2 = -1$, $\omega_1(r^2) = \exp(-r^2)\sin(r^{-2})$ — для этого варианта можно наблюдать неограниченное сгущение предельных циклов при $r \to 0$, когда система (43) класса C^∞.

Для системы трех произвольных (в общем случае нелинейных) ОДУ

$$\dot{x} = v_1(x, y, z), \quad \dot{y} = v_2(x, y, z), \quad \dot{z} = v_3(x, y, z).$$

действуем аналогично вышеизложенному. Переход к новым координатам $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ дает систему линейных алгебраических уравнений относительно v_1, v_2, v_3:

$$\dot{\alpha} = \alpha'_x v_1 + \alpha'_y v_2 + \alpha'_z v_3 = (\nabla\alpha, \mathbf{v}) = \Omega_1, \ \ (\nabla\beta, \mathbf{v}) = \Omega_2, \ \ (\nabla\gamma, \mathbf{v}) = \Omega_3.$$

Ответ запишется в виде отношения определителей:

$$\mathbf{v} = -\chi^{-1} \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \Omega_1 & \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z \\ \Omega_2 & \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z \\ \Omega_3 & \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z \end{vmatrix}, \qquad \chi = \det|\nabla\alpha, \nabla\beta, \nabla\gamma|^T,$$

или, после разложения 2–го множителя по первому столбцу:

$$\mathbf{v} = \frac{\Omega_1(\alpha,\beta,\gamma)}{\chi}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z\\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z\end{vmatrix} - \frac{\Omega_2(\alpha,\beta,\gamma)}{\chi}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z\\ \gamma'_x & \gamma'_y & \gamma'_z\end{vmatrix} +$$

$$+\frac{\Omega_3(\alpha,\beta,\gamma)}{\chi}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\\ \alpha'_x & \alpha'_y & \alpha'_z\\ \beta'_x & \beta'_y & \beta'_z\end{vmatrix},$$

где функции $\Omega_{i=1,2,3}(\alpha,\beta,\gamma)$ суть правые части исследуемых автономных дифференциальных уравнений в новых переменных (α,β,γ).

Отметим, что такая форма записи легко обобщается на n–мерный случай:

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\chi}\begin{vmatrix}0 & \mathbf{e}_1 & ... & \mathbf{e}_n\\ \Omega_1 & \partial_1\alpha_1 & ... & \partial_n\alpha_1\\ ... & ... & ... & ...\\ \Omega_n & \partial_1\alpha_n & ... & \partial_n\alpha_n\end{vmatrix} = \frac{1}{\chi}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\Omega_k\begin{vmatrix}\mathbf{e}\\ \nabla\alpha_1\\ ...\\ [\nabla\alpha_k]\\ ...\\ \nabla\alpha_n\end{vmatrix},$$

где строка $[\nabla\alpha_k]$ в квадратных скобках отсутствует.

Мы полностью решили "задачу Гамильтона–Якоби" в негамильтоновой ситуации: для данной замены переменных $\alpha_1(\mathbf{x}), ..., \alpha_n(\mathbf{x})$ найти все системы, которые решаются (например, разделяются) в квадратурах. Для это надо в качестве "точно решаемой" взять систему

$$\frac{d\alpha_i}{d\alpha_1} = \frac{\Omega_i(\alpha_1, ..., \alpha_k)}{\Omega_1(\alpha, ..., \alpha_k)}. \tag{48}$$

Эта общая возможность получения точно решаемых уравнений с помощью замены координат зависит от свойств замены (например, ортогональна ли новая система координат [58], [59], [60]), и, судя по всему, возможности такого классического подхода еще не исчерпаны. Еще одна возможность обобщения — обобщение неравновесного метода Гиббса (в том числе в форме Годунова) на случай общих систем нелинейных уравнений. Для этого вместо уравнений (41)–(42) нужно написать уравнения, где вместо δ–функции берется максвелловское или иное распределение, которое обусловлено некоторыми физическими причинами.

5. Топологические свойства стационарных решений гидродинамических следствий уравнения Власова

Как уже было отмечено выше, для уравнений Власова–Максвелла из–за неградиентной природы силового члена (а также возможной существенно нелинейной — например, релятивистской — связи скорости и импульса частиц) топологическая структура стационарных решений (см. § 5), в отличие от уравнений Власова–Пуассона–Пуассона, не прямо следует из схемы Арнольда–Козлова. Проследим за полученной модификацией, которая требуется для преодоления этих осложнений.

Для этого перепишем уравнения Власова–Максвелла (16), заменив 4–потенциалы F_μ на вектора напряженностей магнитного поля $\mathbf{H}$ и электрического поля $\mathbf{E}$ для упрощения вычислений:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{p}), \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}}\right) - e_\alpha \left(E + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{p}) \times \mathbf{H}], \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}}\right) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{p}) f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Здесь $\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{p}) = \dfrac{\mathbf{p}}{m_\alpha}\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\mathbf{p}^2}{m_\alpha^2 c^2}}}$. Произведя подстановку вида

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = n_\alpha(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha(\mathbf{x}, t))$$

в вышеприведенную систему, выпишем далее для удобства читателя повторно уравнения ЭМГД [15],[40],[41],[45], идентичные (19):

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(n_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha)) = 0, \tag{49}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_\alpha^i(\mathbf{P}_\alpha)\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial x_i} - e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha) \times \mathbf{H}]\right) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\sum_{\alpha} e_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha), \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\sum_{\alpha} e_\alpha n_\alpha.$$

Преобразуем второе из уравнений системы (49) к форме Громеки, вычитая из обеих частей 2-го из равенств (49)

$$\sum_{i=1}^{3} v_\alpha^i(\mathbf{P}_\alpha)\frac{\partial P_{\alpha i}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Последнее выражение есть градиент следующей функции (если учесть выражение релятивистской скорости $\mathbf{v}_\alpha$ через импульс $\mathbf{P}_\alpha$):

$$\frac{(m_\alpha c)^2}{m_\alpha}\sqrt{1 + \frac{\mathbf{P}_\alpha^2}{(m_\alpha c)^2}}.$$

Значит, этот член при приведении к форме Громеки градиентен и в релятивистском случае.

Но сила Лоренца никак не градиентна, поэтому ее мы преобразуем, объединяя со сходным членом $\mathbf{v}^\alpha \times \operatorname{rot}\mathbf{P}_\alpha$, перенеся в левую часть $\mathbf{v}^\alpha \times (\operatorname{rot}\mathbf{P}_\alpha - \frac{e_\alpha}{c}\mathbf{H})$. После того как мы возьмем ротор от обеих частей, получим следующее уравнение для завихренности в стационарном случае:

$$\operatorname{rot}\big(\mathbf{v}_\alpha \times (\operatorname{rot}\mathbf{P}_\alpha - \frac{e_\alpha}{c}\mathbf{H})\big) = 0.$$

Но у нас есть и уравнение неразрывности – первое из системы уравнений (49):

$$\operatorname{div}(n_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha)) = 0.$$

Отсюда по лемме Арнольда–Козлова [17]–[19] (см. также Приложение ниже) следует, что векторные поля

$$\mathbf{v}_\alpha, \quad \frac{\operatorname{rot}\mathbf{P}_\alpha - \frac{e_\alpha}{c}\mathbf{H}}{n_\alpha}$$

коммутируют:

$$\left[\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha), \frac{\operatorname{rot}\mathbf{P}_\alpha - \frac{e_\alpha}{c}\mathbf{H}}{n_\alpha}\right] = 0.$$

Отметим, что $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — векторный потенциал, и второе векторное поле имеет вид

$$\mathrm{rot}(\mathbf{P}_\alpha - \frac{e_\alpha}{c}\mathbf{A}),$$

где $\mathbf{P}_\alpha - (e_\alpha/c)\mathbf{A}$ — обобщенный импульс электромагнитного поля. Мы снова получили те же следствия, но для других полей: два векторных поля — скорость $\mathbf{v}_\alpha$ и завихренность обобщенного импульса $\mathrm{rot}\big(\mathbf{P}_\alpha - (e_\alpha/c)\mathbf{A}\big)$ коммутируют. Поэтому, согласно рассуждению Арнольда [17], [18], топологически поверхность движения — это либо поверхность тора, либо цилиндр, либо плоскость.

Хорошо известно, что уравнение Власова допускает гидродинамическую подстановку в N–слойном и даже континуум–слойном варианте [13]–[14]. В N–слойном случае все это должно обобщаться на уравнения Власова–Максвелла, Власова–Пуассона, а также на другие уравнения такого же типа, которые рассматривались в данной статье, и другие подобные [61]–[63]. Покажем, что получается в случае уравнения Власова–Максвелла (N–слойный вариант):

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \sum_{\mu=1}^{N} n_{\alpha\mu}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha^\mu(\mathbf{x}, t)).$$

В континуум–слойном варианте имеем:

$$f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \int n_\alpha(\mu; \mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_\alpha(\mu; \mathbf{x}, t))\, d\mu.$$

Уравнения, которые при этом получаются

$$\frac{\partial n_\alpha(\mu; \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathrm{div}(n_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mu; \mathbf{x}, t)) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha(\mu)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} v_\alpha^i \frac{\partial \mathbf{P}_\alpha(\mu)}{\partial x_i} = e_\alpha(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha) \times \mathbf{H}]),$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int n_\alpha(\mu; \mathbf{x}, t) d\mu, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\sum_\alpha e_\alpha \int n_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{P}_\alpha) d\mu, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0.$$

Для каждого μ мы имеем свое уравнение вида (49) и свое уравнение неразрывности с теми же выводами для каждого слоя μ.

Итак, во всех случаях уравнения Власова–Пуассона–Пуассона и Власова–Максвелла мы получили, что стационарные решения их гидродинамических следствий (то есть уравнений МГД и ЭМГД) имеют следующую топологическую природу: трехмерное пространство расслаивается либо на 2–мерные торы, либо на произведения окружности на прямую, либо на плоскости. Мы показали значительную общность подхода Арнольда–Козлова, причем, видимо, в конкретных задачах он может быть углублен доведением до аналитического вида.

Заключение

В настоящей работе, исходя из аналогии между уравнением Лиувилля и уравнением Власова, мы рассмотрели, чем являются микроскопические (§ 2), энергетические (§ 3) и гидродинамические следствия этих уравнений. Уравнение Лиувилля успешно применялось классиками науки Дж. Максвеллом, Л. Больцманом, У. Гиббсом, А. Пуанкаре для описания коллективов частиц. В частности, А. Пуанкаре была получена новая форма H–теоремы, которая потом развивалась в работах [64],[65]. Было бы интересно понять, насколько эта форма может быть перенесена на уравнение Власова. Уравнение Власова, которое за последние десятилетия подтвердило свою фундаментальность и универсальность, содержит еще много вопросов как для физиков, так и для математиков. Оно применимо везде, где есть коллективы частиц с дальнодействием. В частности, снова пользуясь аналогией с уравнением Лиувилля, интересны вопросы о справедливости для него эргодической теоремы фон Неймана и совпадении временных средних с экстремалями Больцмана [65]–[67], а также возможность построения теории уравнения Власова для потенциалов Мозера–Калоджеро.

Отдельной значительной задачей, вытекающей из рассмотренного здесь материала, видится возможность проследить аналогию между потенциалами Гиббса и дважды дивергентной формой записи эволюционных уравнений С.К. Годунова. Весьма перспективным также представляется развитие предложенного выше подхода к обобщению метода Гамильтона–Якоби на негамильтонов случай.

ПРИЛОЖЕНИЕ. Лемма Арнольда-Козлова (о коммутирующих полях).

Лемма. Даны два векторных поля в трехмерном пространстве $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}$, такие, что $\operatorname{div}\mathbf{R}=0$ и $\operatorname{div}(n\mathbf{P})=0$, для которых выполнено соотношение $\operatorname{rot}(\mathbf{R}\times\mathbf{P})=0$, т.е. ротор их векторного произведения $\mathbf{R}\times\mathbf{P}$ равен нулю. Тогда векторные поля $\mathbf{R}/n$ и $\mathbf{P}$ коммутируют.

Найдем в условиях данной Леммы все функции $\varphi(n)$ и $\psi(n)$, такие, что коммутатор полей $\varphi(n)\mathbf{R}$ и $\psi(n)\mathbf{P}$ равен нулю:

$$[\varphi(n)\mathbf{R},\psi(n)\mathbf{P}]=0.$$

Воспользуемся тождеством

$$\operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{w}]=[\mathbf{v},\mathbf{w}]+\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{w}-\mathbf{w}\operatorname{div}\mathbf{v}.$$

Имеем

$$\operatorname{rot}(\mathbf{R}\times\mathbf{P})=[\mathbf{R},\mathbf{P}]+\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{P}-\mathbf{P}\operatorname{div}\mathbf{R}.$$

Посчитаем $[\varphi\mathbf{R},\psi\mathbf{P}]$, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница и определением $[\mathbf{v},\mathbf{w}]$:

$$[v,w]_j=\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_i-\frac{\partial w_j}{\partial x_i}v_i.$$

Поэтому

$$[\varphi\mathbf{v},\mathbf{w}]=\varphi[\mathbf{v},\mathbf{w}]+\mathbf{v}(\nabla\varphi,\mathbf{w}),$$
$$[\mathbf{v},\varphi\mathbf{w}]=\varphi[\mathbf{v},\mathbf{w}]-\mathbf{w}(\nabla\varphi,\mathbf{v}).$$

Получим для

$$[\varphi\mathbf{R},\psi\mathbf{P}]=\varphi[\mathbf{R},\psi\mathbf{P}]+\varphi\mathbf{R}(\nabla\varphi,\psi\mathbf{P})=$$

$$=\varphi\psi[\mathbf{R},\mathbf{P}]-\varphi\psi\mathbf{P}(\nabla\psi,\mathbf{R})+\varphi\psi\mathbf{R}(\nabla\varphi,\mathbf{P})=$$
$$=\varphi\psi\left(\operatorname{rot}(\mathbf{R}\times\mathbf{P})-\mathbf{R}\operatorname{div}\mathbf{P}+\mathbf{P}\operatorname{div}\mathbf{R}\right)-\varphi\psi\mathbf{P}(\nabla\psi,\mathbf{R})+$$
$$+\varphi\psi\mathbf{R}(\nabla\varphi,\mathbf{P})=$$
$$=\varphi\psi\mathbf{R}\left((\nabla\varphi,\mathbf{P})-\operatorname{div}\mathbf{P}\right)+\varphi\psi\mathbf{P}\left(\operatorname{div}\mathbf{R}-(\nabla\psi,\mathbf{R})\right).$$

Мы использовали тождество $\operatorname{rot}(\mathbf{R}\times\mathbf{P})=0$.

Так как мы хотим выполнения тождества, то в скобках должны быть нули. По условиям леммы $\operatorname{div}\mathbf{R}=0$, следовательно, $(\nabla\psi,\mathbf{R})=$

0. Так как $\mathbf{R}$ — произвольное поле, $\nabla\psi = 0 \Rightarrow \psi = \mathrm{const}$. Для другой скобки получаем

$$(\nabla\varphi, \mathbf{P}) - \operatorname{div}\mathbf{P} = 0, \quad \operatorname{div}(n\mathbf{P}) = 0,$$

$$(\nabla\varphi, \mathbf{P}) - \varphi\operatorname{div}\mathbf{P} = \varphi^2\operatorname{div}\left(\frac{1}{\varphi}\mathbf{P}\right).$$

Получаем $\varphi = \dfrac{\lambda}{n}$ $(\lambda = \mathrm{const}_1)$, так как, вычитая нуль $(\varphi^2\operatorname{div}(n\mathbf{P}) = 0)$, получим

$$\varphi^2\operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{\varphi} - \lambda n\right)\mathbf{P}\right] = 0,$$

и из произвольности $\mathbf{P}$ заключаем $\varphi = \dfrac{\lambda}{n}$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Мы получили больше: показали, что в некотором классе решения Арнольда–Козлова единственны, то есть $\psi = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}_1/n$.

Список литературы

[1] А.А. Власов, О вибрационных свойствах электронного газа, *ЖЭТФ*, **8**:3 (1938), 291–318.

[2] А.А.Власов, *Нелокальная статистическая механика*, Наука, М., 1978.

[3] Н.Н. Боголюбов, *Проблемы динамической теории в статистической физике*, Гостехиздат, М., 1946.

[4] В.П. Маслов, П.П. Мосолов , Асимптотическое поведение при $N \to \infty$ траекторий N точечных масс, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона, *Известия АН СССР. Сер. матем.*, **42**:5 (1978), 1063–1100.

[5] Ю.А. Волков, О решениях уравнения Власова в лагранжевых координатах, *ТМФ*, **151**:1 (2007), 138–148.

[6] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика Т. 2. Теория поля*, Наука, М., 1967.

[7] И.П. Павлоцкий, *Введение в слаборелятивистскую статистическую механику*, ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, М., 1987.

[8] В. Паули, *Теория относительности*, Наука, М., 1983.

[9] В.В. Козлов, Обобщенное кинетическое уравнение Власова, *Усп. Мат. Наук*, **63**:4(382) (2008), 93–130.

[10] В.В. Козлов, Кинетическое уравнение Власова, динамика сплошных сред и турбулентность, *Нелинейн. динам.*, **6**:3 (2010), 480–512.

[11] А.А. Власов, *Статистические функции распределения*, Наука, М., 1966.

[12] М.А. Леонтович (ред.), *Вопросы теории плазмы*, Госатомиздат, М., 1963.

[13] В.В. Веденяпин, *Кинетические уравнения Больцмана и Власова*, Физматлит, М., 2001.

[14] М.Б. Гавриков, В.В. Савельев, Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов, *Изв. РАН. МЖГ*, 2 (2010), 176–192.

[15] В.В. Веденяпин, М.А. Негматов, О выводе и классификации уравнений типа Власова и МГД. Тождество Лагранжа и форма Годунова, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 468–480.

[16] А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов, *Магнитная гидродинамика*, Логос, М., 2005.

[17] В.И. Арнольд, О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости, *ПММ*, **30**:1 (1966), 183–185.

[18] В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1989.

[19] В.В. Козлов, Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды, *ПММ*, **47**:2 (1983), 341–342.

[20] F. Calogero, Exactly solvable one–dimensional many–body problems, *Lett. Nuov. Cim.*, **13**:11 (1975), 411–416.

[21] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физматлит, М., 2004.

[22] W. Brawn, K. Hepp, The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interactive classical particles, *Commun. Math. Phys.*, **56**:2 (1977), 101–113.

[23] H. Neunzert, The Vlasov equation as a limit of Hamiltonian classical mechanical systems of interacting particles, *Trans. Fluid Dynamics*, **18** (1977), 663–678.

[24] Ye Huanchan, Ph.J. Morrison, Action principles for the Vlasov equation, *Phys. Rev. B*, **4**:4 (1986), 771–777.

[25] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика Т. 10. Физическая кинетика*, Наука, М., 1979.

[26] V.V. Vedenyapin, A.V. Sinitsyn, E.V. Dulov, *Boltzmann and Vlasov kinetics and related equations*, Elsevier, London – N.Y. – Toronto, 2011.

[27] В.Л. Поляченко, А.М. Фридман, *Равновесие и устойчивость гравитирующих систем*, Наука, М., 1976.

[28] В.П. Силин, *Введение в кинетическую теорию газов*, Наука, М., 1971.

[29] J. Butt, H. Berestetsky, P. Degond, B. Perthame, Some families of solutions of the Vlasov–Poisson system, *Arch. Rat. Appl. Mech. Anal.*, **104**:1 (1988), 79–103.

[30] G. Rein, Existence of stationary, collisionless plasma in bounded domains, *Math. Met. Appl. Sci.*, **13**:2 (1992), 365–374.

[31] А.Л. Скубачевский, “Уравнение Власова–Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле”, *УМН*, **69**:2 (2014), 107–148.

[32] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики. Т. 1,2*, ГТТИ, М.–Л., 1945.

[33] В.В. Веденяпин, О стационарных решениях уравнения Власова–Пуассона, *Докл. АН СССР*, **290**:4 (1986), 1001–1006.

[34] В.В. Веденяпин, О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача, *Докл. АН СССР*, **323**:6 (1992), 1001–1006.

[35] Ю.Ю. Архипов, В.В. Веденяпин, О классификации и устойчивости стационарных решений уравнения Власова на торе и в граничной задаче, *Труды МИАН*, **203** (1994), 13–20.

[36] J. Liouville, “Sur l’equation aux differences partielles”, *J. Math. Pures Appl.*, **18** (1853), 71–72.

[37] К.В. Брушлинский, *Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики*, Бином, М., 2009.

[38] А.Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1, 2*, Атомиздат, М., 1970.

[39] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.

[40] С.И. Брагинский, Явления переноса в плазме, в сб. *Вопросы теории плазмы*, ред. М.А. Леонтович, Вып. 1, 183–272. М.: Госатомиздат, 1963.

[41] В.В. Веденяпин, М.А. Негматов, О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса, *СМФН*, **47** (2013), 5–17.

[42] С.К. Годунов, У.М. Султангазин, О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана, *УМН*, **26**:3 (1971), 1–51.

[43] С.К. Годунов, Е.И. Роменский, *Элементы механики сплошной среды и законы сохранения*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[44] Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, М., 1976.

[45] Д. Бом, *Общая теория коллективных переменных*, Мир, М., 1964.

[46] В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин, Уравнение Лиувилля, гидродинамическая подстановка и уравнение Гамильтона–Якоби, *Доклады РАН*, **446**:2 (2012), 142–144.

[47] В.В. Веденяпин, М.А. Негматов, О топологии гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби, *Доклады РАН*, **449**:5 (2013), 521–526.

[48] И.С. Аржаных, *Поле импульсов*, Изд–во Наука УзССР, Ташкент, 1965.

[49] К.И. Долматов, *Поле импульсов аналитической динамики*, Диссерт. на соиск. уч. степ. канд. физ.–мат. наук, Ташкент, 1950.

[50] В.В. Козлов, Гидродинамика гамильтоновых систем, *Вестник Моск. ун–та. Сер. Матем. Механ.* **6** (1983), 10–22.

[51] В.В. Козлов, *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике*, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995.

[52] В.В. Козлов, *Общая теория вихрей*, Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1998.

[53] Л.Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.

[54] Дж. Серрин, *Математические основы классической механики жидкости*, ИИЛ, М., 1963.

[55] В.П. Маслов, *Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана*, Наука, М., 1976.

[56] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 1. Механика*, Наука, М., 1986.

[57] В.В. Немыцкий, В.В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ГИТТЛ, М.–Л., 1947.

[58] В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин, Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем, *Нелин. динамика*, **11**:2 (2015), 279–286.

[59] В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин, Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка, *Докл. РАН*, **461**:2 (2015), 136–139.

[60] В.В. Веденяпин, Н.Н. Фимин, Метод Гамильтона–Якоби для негамильтоновых систем // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2015. № 13. 18 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-13

[61] А.В. Одесский, М.В. Павлов, В.В. Соколов, Классификация интегрируемых уравнений типа Власова, *ТМФ*, **154** (2008), 249–260.

[62] A.V. Bobylev, P. Dukes, R. Illner, H.D. Victory, On Vlasov–Manev equations I. Foundations, properties and non–global existence, *J. Stat. Phys.*, **88**:3–4 (1997), 885–911.

[63] В.Е. Захаров, Уравнение Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи, *Функ. анализ и его приложения*, **14**:2 (1980), 15–24.

[64] В.В. Козлов, Д.В. Трещев, Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем, *ТМФ*, **134**:3 (2003), 388–400.

[65] В.В. Веденяпин, С.З. Аджиев, Энтропия по Больцману и Пуанкаре, *УМН*, **69**:6 (2014), 45–80.

[66] С.З. Аджиев, В.В. Веденяпин, Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Каца, *ЖВМиМФ*, **51**:11 (2011), 2063–2074.

[67] В.В. Веденяпин, Временные средние и экстремали по Больцману, *Докл. РАН*, **422**:2 (2008), 161–163.

Оглавление

Введение 3

1. Уравнение Власова и задача N тел 5

2. Вывод уравнений Власова–Максвелла и
Власова–Пуассона–Пуассона. 7

3. Тождество Лагранжа, уравнения ЭМГД и форма Годунова 18

4. Гидродинамическая подстановка для уравнений Лиувилля
и Власова и обобщение метода Гамильтона–Якоби 28

5. Топологические свойства стационарных решений
гидродинамических следствий уравнения Власова 40

Заключение 43

Приложение. Лемма Арнольда–Козлова
(о коммутирующих полях) 44

Литература 46

Подписано в печать 22.12.2016. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ М-15
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4