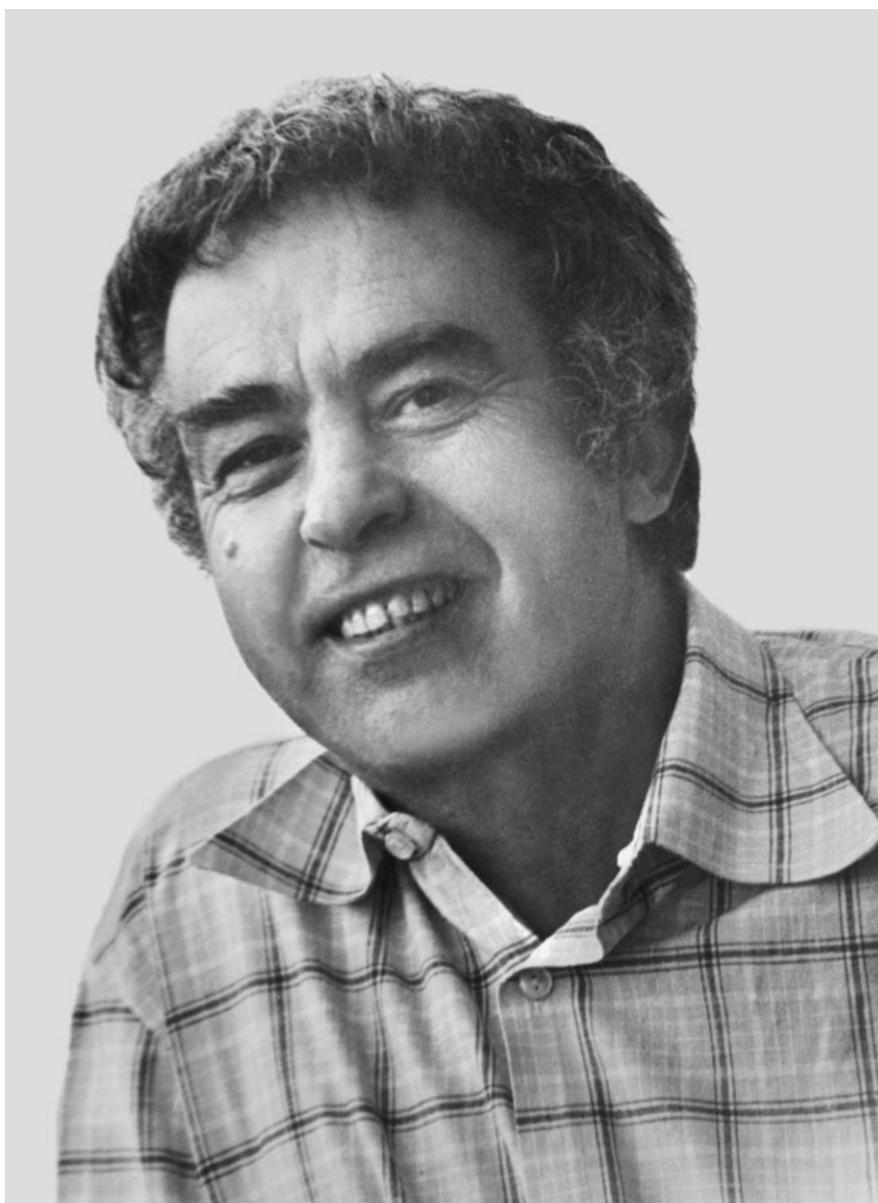


*Посвящается
90-летию со дня рождения
Михаила Львовича Лидова*



Михаил Львович Лидов
(1926 – 1993)

**М.Л. ЛИДОВ – ЯРКОЕ ИМЯ
В КОСМИЧЕСКОЙ
НАУКЕ**

**ИПМ им. М.В. Келдыша
2016**

УДК 629.78+521
ББК 22.213+22.62+39.62

М.Л ЛИДОВ – ЯРКОЕ ИМЯ В КОСМИЧЕСКОЙ НАУКЕ

Сборник докладов / Под ред. М.А. Вашковьяка. –

М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016 – 196 с.

Сборник, посвященный 90-летию со дня рождения выдающегося ученого-механика, Лауреата Ленинской премии, профессора Михаила Львовича Лидова (1926–1993), содержит приглашенные доклады, представленные на секцию «Прикладная небесная механика и управление движением» XL Академических Чтений по космонавтике. В этих докладах представлены как научные проблемы, так и воспоминания учеников и коллег, долгое время работавших с М.Л. Лидовым в ИПМ им. М.В. Келдыша.

Рецензент – проф. В.В. Ивашкин

M.L. LIDOV – BRIGHT NAME IN SPACE SCIENCE

The Collection of Papers / Ed. by M.A. Vashkov'yak. –

Moscow: Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2016 – 195 ps.

The Collection is devoted to 90th Anniversary of outstanding scientist-mechanician, Lenin Prize Laureate, Professor Mikhail L'vovich Lidov (1926-1993). It composes the invited papers presented to the Section «Applied Celestial Mechanics and Motion Control» of the XL Academician Reading on Cosmonautics. In these papers both scientific problems and recollections of disciples and colleagues worked together with M.L. Lidov in KIAM for a long time are presented.

Reviewer – Prof. V.V. Ivashkin

ISBN 978-5-98354-018-7

© ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016



Содержание

От составителей сборника	7
МИХАИЛ ЛЬВОВИЧ ЛИДОВ – ЯРКОЕ ИМЯ В КОСМИЧЕСКОЙ НАУКЕ <i>М.А. Вашковьяк, Н.М. Тесленко</i>	9
ЭФФЕКТ ЛИДОВА-КОДЗАИ И ЕГО РОЛЬ В АСТРОНОМИИ <i>К.В. Холшевников, Л.Л. Соколов</i>	39
РЕЗОНАНС ЛИДОВА-КОЗАИ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ОРБИТАЛЬНУЮ ЭВОЛЮЦИЮ ОКОЛОЗЕМНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ <i>А.Г. Александрова, Т.В. Бордовицына, И.В.Томилова</i>	49
ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ ВЕКОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ ИСЗ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНЕШНИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ <i>В.И. Прохоренко</i>	67
ВКЛАД М.Л. ЛИДОВА В ТЕОРИЮ ГАРАНТИРУЮЩЕГО ОЦЕНИВАНИЯ <i>А.И. Матасов</i>	99
ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ХИЛЛА <i>А.Б. Батхин, Н.В. Батхина</i>	110

ВОСПОМИНАНИЯ О ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ МЕХАНИКЕ М.Л. ЛИДОВЕ <i>В.А. Сарычев</i>	125
О М.Л. ЛИДОВЕ В РАННИЕ ГОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ БАЛЛИСТИКИ <i>А.К. Платонов</i>	129
ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ВНЕШНИХ ТЕЛ <i>М.Л. Лидов</i>	154

От составителей сборника

Настоящий сборник составлен из приглашенных докладов, представленных на секцию № 5 «Прикладная небесная механика и управление движением» XL Академических Чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых - пионеров освоения космического пространства».

Мемориальное заседание секции посвящено 90-летию со дня рождения выдающегося ученого-механика, Лауреата Ленинской премии, профессора Михаила Львовича Лидова (1926–1993). Научные доклады и воспоминания представили ученики и коллеги М.Л. Лидова, а также известные ученые из Москвы, Санкт-Петербурга и Томска.

Многолетняя и разносторонняя научная деятельность М.Л. Лидова в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН отражена в научно-мемуарном докладе М.А. Вашковьяка и Н.М. Тесленко. Заглавие этого доклада, незримо объединяющее остальные, послужило названием всего сборника.

Доклад К.В. Холшевникова и Л.Л. Соколова посвящен известному в мировой небесно-механической литературе эффекту Лидова-Козаи. Обсуждается проявление этого эффекта в эволюции орбит с учетом конечной величины массы спутника, а также с учетом эллиптичности орбиты возмущающего тела. В качестве приложения рассмотрена система Плутон-Харон-Солнце.

В докладе А.Г. Александровой, Т.В. Бордовицыной и И.В. Томиловой описано численно-аналитическое исследование эволюции орбит ИСЗ в широких диапазонах начальных значений их элементов. Авторами отмечено существенное влияние резонанса Лидова-Козаи на эволюцию орбит околоземных объектов, выявлена возможность смены режимов изменения критического резонансного аргумента и появления хаотичности.

Доклад В.И. Прохоренко посвящен исследованиям вековой эволюции орбит ИСЗ под влиянием возмущений от внешних притягивающих тел (Луны и Солнца). Описан геометрический метод анализа эволюции для выбора орбитальных параметров, обеспечивающих максимальное время жизни спутника. Эти исследования методически продолжают и развивают работы М.Л. Лидова, в частности – оригинальную и широко цитируемую работу 1961 года. Соответствующая статья, опубликованная в академическом сборнике «Искусственные спутники Земли», 1961, вып. 8, с. 5, в настоящее время стала

раритетной и труднодоступной. Поэтому было решено включить в издаваемый сборник скан-копию этой статьи.

В докладе А.И. Матасова отражена роль М.Л. Лидова в теории гарантирующего оценивания. Это отдельное направление научных исследований, начатых М.Л. Лидовым в 1964 году и связанных как с задачами обработки измерений, так и с задачами коррекции орбит космических аппаратов. В 2010 году при активном участии А.И. Матасова был издан в виде препринта ИПМ http://keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_71.pdf не публиковавшийся ранее обширный научный труд М.Л. Лидова «Минимаксные методы оценивания», послуживший основой многих исследований, выполненных его последователями.

Доклад А.Б. Батхина и Н.В. Батхиной посвящен выявлению и построению симметричных пространственных периодических орбит задачи Хилла. Началом этого исследования и его методической основой послужили работы М.Л. Лидова, выполненные в конце 70-х годов.

Воспоминания В.А. Сарычева относятся к различным периодам и основным событиям в жизни М.Л. Лидова как до, так и после его поступления на работу в ИПМ.

В своем докладе А.К. Платонов вспоминает о многих годах совместной работы с М.Л. Лидовым с самого начала космической эры. Эти воспоминания, насыщенные яркими эпизодами, открывают многие, порой неизвестные стороны характера Михаила Львовича.

Составители сборника благодарны всем авторам опубликованных докладов и участникам Чтений, откликнувшимся на приглашение принять участие в мемориальном заседании нашей секции.

Хотелось бы выразить нашу признательность Г.К. Боровину, В.Н. Лебедеву, Ю.Ф. Голубеву, А.К. Платонову, А.Г. Тучину и А.В. Ермакову за доброжелательное отношение к изданию и за его организационную поддержку, а также В.В. Ивашкину за целый ряд замечаний, которые он высказал в процессе рецензирования сборника.

Мы приносим особую благодарность М.М. Горбунову-Посадову, без творческого участия которого выпуск настоящего сборника был бы невозможен.

*М.А. Вашковьяк
М.Ю. Овчинников*

МИХАИЛ ЛЬВОВИЧ ЛИДОВ - ЯРКОЕ ИМЯ В КОСМИЧЕСКОЙ НАУКЕ
(к 90-летию со дня рождения)

М.А. Вашковьяк, Н.М. Тесленко

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

vashkov@keldysh.ru

В настоящем докладе представлены избранные фрагменты научного творчества выдающегося ученого-механика, Лауреата Ленинской премии, профессора Михаила Львовича Лидова (1926-1993). Отмечено использование и развитие идей и методов, послуживших основой мирового научного признания его имени.

Михаил Львович Лидов родился 4 октября 1926 г., и его юность пришлось на военные годы. В 1944 г. он ушел добровольцем на фронт, служил в действующей армии мастером по авиационному вооружению и воевал до дня Победы. Домой М.Л. Лидов вернулся только в 1951 году, заслужив боевые награды. К этому времени он уже заочно учился на механико-математическом факультете Московского государственного университета, а в 1954 г. с блеском окончил его дневное отделение, получив диплом с отличием по специальности «механика».

Основные этапы научного творчества М.Л. Лидова и воспоминания о нем отражены на страницах памяти <http://www.keldysh.ru/memory/lidov/index.htm> интернет-сайта ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, где Михаил Львович проработал почти всю свою жизнь. Его путь в науке описан и в Дополнении ко второму изданию (2010 г.) книги: М.Л. Лидов «Курс лекций по теоретической механике», подготовленной коллегами и учениками Михаила Львовича. Воспоминаниями о Михаиле Львовиче и о его научных работах на журнальных страницах делились хорошо знавшие его коллеги – канд. физ.-мат. наук. А.И. Авербух, чл.-корр. РАН В.В. Белецкий, проф. В.А. Егоров. Бесценен интереснейший очерк, написанный проф. В.М. Тихомировым и повествующий о детских и юношеских годах М.Л. Лидова. Дружеское и уважительное «Миша Лидов» среди других имен встречается и в воспоминаниях академика В.И. Арнольда. Эти выдающиеся ученые-друзья имели не только общие научные и культурные интересы, но нередко вместе участвовали в байдарочных походах.

К обширным мемуарным материалам нам – ученикам М.Л. Лидова, хотелось бы добавить и свои воспоминания о выдающемся ученом, отдавшем все свои силы и знания отечественной космической науке.

Большая часть работ М.Л. Лидова была связана с прикладными задачами баллистического проектирования и управления полетом космических аппаратов, начиная с Первого искусственного спутника Земли. В главе «Самый Первый» книги известного журналиста и писателя Я.К. Голованова «Капля нашего мира» содержится фрагмент: «Келдыш проводил совещания с «атмосферщиками» - С.Н. Верновым, Л.В. Курносовой, В.И. Красовским, привлекал своих «мальчиков», специалистов по траекторным измерениям: Д.Е. Охоцимского, Т.М. Энеева, В.А. Егорова, М.Л. Лидова, подключил к работе знатока солнечных батарей Н.С. Лидоренко, советовался и консультировался со светлейшими умами Академии: П.Л. Капицей, А.Ф. Иоффе, Б.Н. Константиновым, В.А. Котельниковым, Л.А. Арцимовичем, В.Л. Гинзбургом и другими учеными». В портретной галерее этих известнейших ученых, помещенной на сайте <http://osiratan.ru/1-isz0.html> «О создателях Первого искусственного спутника Земли» фотография М.Л. Лидова занимает свое достойное место.

Круг научных интересов Михаила Львовича был весьма широк и охватывал многие разделы математики и механики, астрономии и космогонии, теорию оценивания и дифференциальные игры. В частности, большой цикл работ М.Л. Лидова посвящен выявлению и практическому построению специальных классов траекторий знаменитой задачи трех тел и исследованию их устойчивости. Основанное им направление работ по эволюции орбит небесных тел и выявленный эффект, получивший впоследствии название «резонанс Лидова-Козаи», дали развитие многочисленным небесно-механическим исследованиям, как в нашей стране, так и за рубежом.

Помимо повседневной научно-производственной деятельности, М.Л. Лидов вел большую педагогическую работу в качестве профессора кафедры теоретической механики МГУ, а позднее – на факультете повышения квалификации Московского института радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА). В МГУ он вел семинар по механике космического полета, читал спецкурс по эволюции орбит и курс лекций по теоретической механике. М.Л. Лидов был членом Национального комитета по теоретической и прикладной механике. Его выступления на самых представительных конференциях всегда были в центре внимания специалистов. Много сил и времени М.Л. Лидов отдавал неформальной редакторской работе в академических научных журналах “Космические исследования” и “Письма в Астрономический журнал”. Он был научным редактором раздела “Динамика полета” энциклопедии “Космонавтика”.

Работы по небесной механике и прикладным космическим проектам

Научная деятельность М.Л. Лидова началась в 1954 году под руководством академика Леонида Ивановича Седова. После окончания университета М.Л. Лидов поступил на работу в Межведомственную комиссию по координации и контролю научно-технических работ в области организации и осуществления межпланетных сообщений при АН СССР. Практически сразу же он выполнил исследование специального класса решений уравнений газодинамики, что позволило получить достаточно полную картину температурного режима искусственного спутника Земли. Основы этого исследования были заложены, по-видимому, еще в студенческие годы, поскольку список научных трудов М.Л. Лидова начинается статьей, опубликованной в Докладах Академии наук в год окончания Университета.

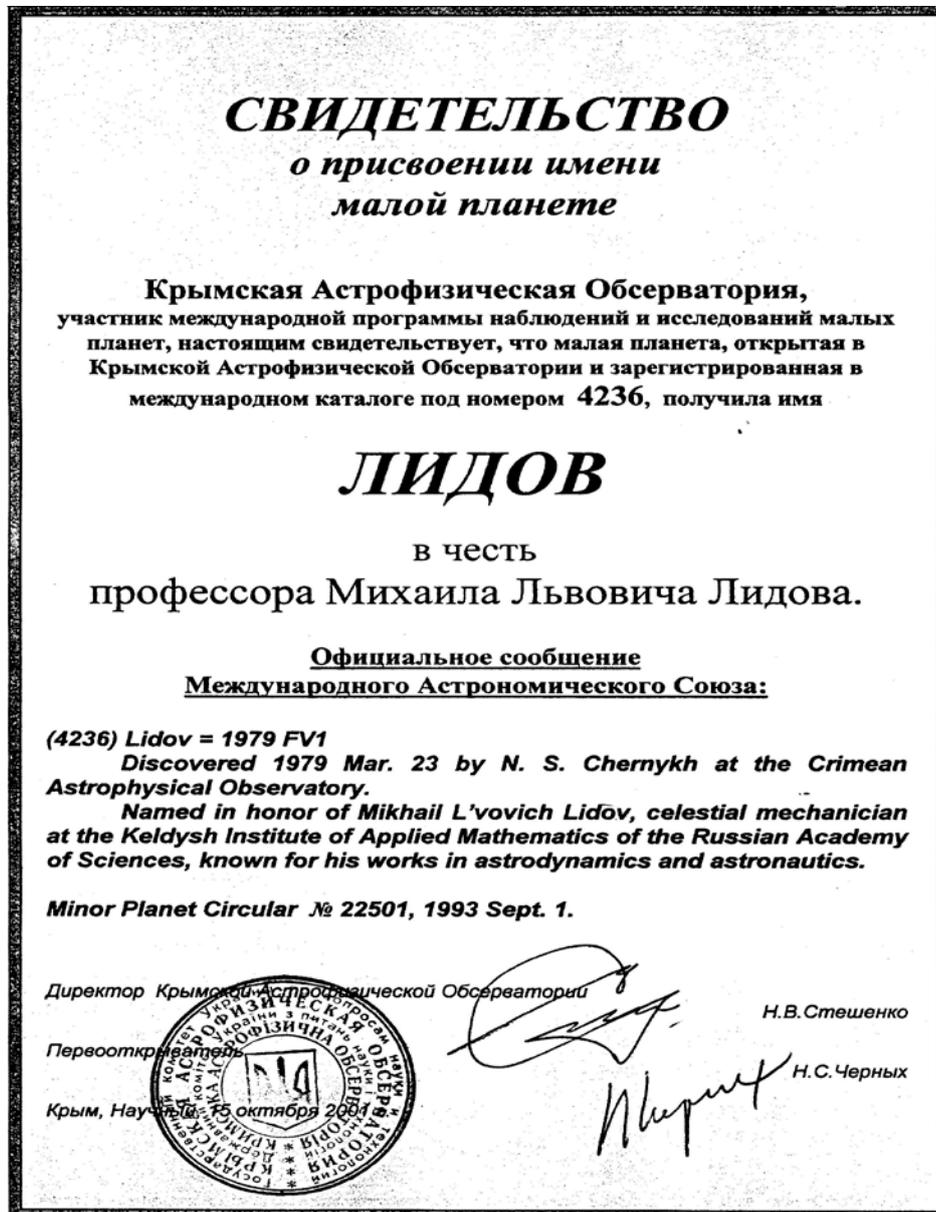
В нашем Институте, который изначально назывался ОПМ - «Отделение прикладной математики Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР» М.Л. Лидов начал работать в 1957 году, в отделе, возглавляемом Дмитрием Евгеньевичем Охоцимским (впоследствии академиком РАН). А основателем и первым директором ОПМ был академик Мстислав Всеволодович Келдыш, многие годы возглавлявший и Академию наук СССР.

Уже в 1958 году пионерские работы М.Л. Лидова по определению плотности верхней атмосферы Земли из наблюдений за движением ее первых искусственных спутников и обнаруженный эффект вариации параметров атмосферы принесли ему заслуженное признание, как ученых-теоретиков, так и специалистов-прикладников.

В последующие годы Михаил Львович стал одним из лидеров направления, связанного с теоретическими и прикладными задачами баллистического проектирования и управления полетом космических аппаратов. Работы М.Л. Лидова с коллегами, посвященные анализу класса траекторий полета к Луне, а также разработанные им схемы управления были непосредственно использованы при решении многих «лунных» задач. Это облет Луны с фотографированием ее обратной стороны, мягкая посадка на Луну, доставка на ее поверхность лунохода, запуск первых искусственных спутников Луны и доставка на Землю образцов лунного грунта. То были годы вдохновенного труда, и Михаил Львович с присущей ему самоотверженностью отдавал все свои силы и знания для успешного выполнения поставленных задач. Он сам и руководимые им сотрудники работали сутками без сна и неделями без отдыха, не считаясь с усталостью, а порой и с нездоровьем.

В 1960 году за большой цикл работ ему была присуждена Ленинская премия, а в 1965 году по совокупности выполненных исследований – ученая степень доктора физико-математических наук, причем без защиты кандидатской диссертации. В 1970 году за выполнение работ по лунной программе М.Л. Лидов был награжден орденом Трудового Красного Знамени. А в 1986 году в честь сорокалетия Победы он получил Орден Отечественной войны второй степени. Это было признание боевых заслуг М.Л. Лидова как участника Великой Отечественной войны.

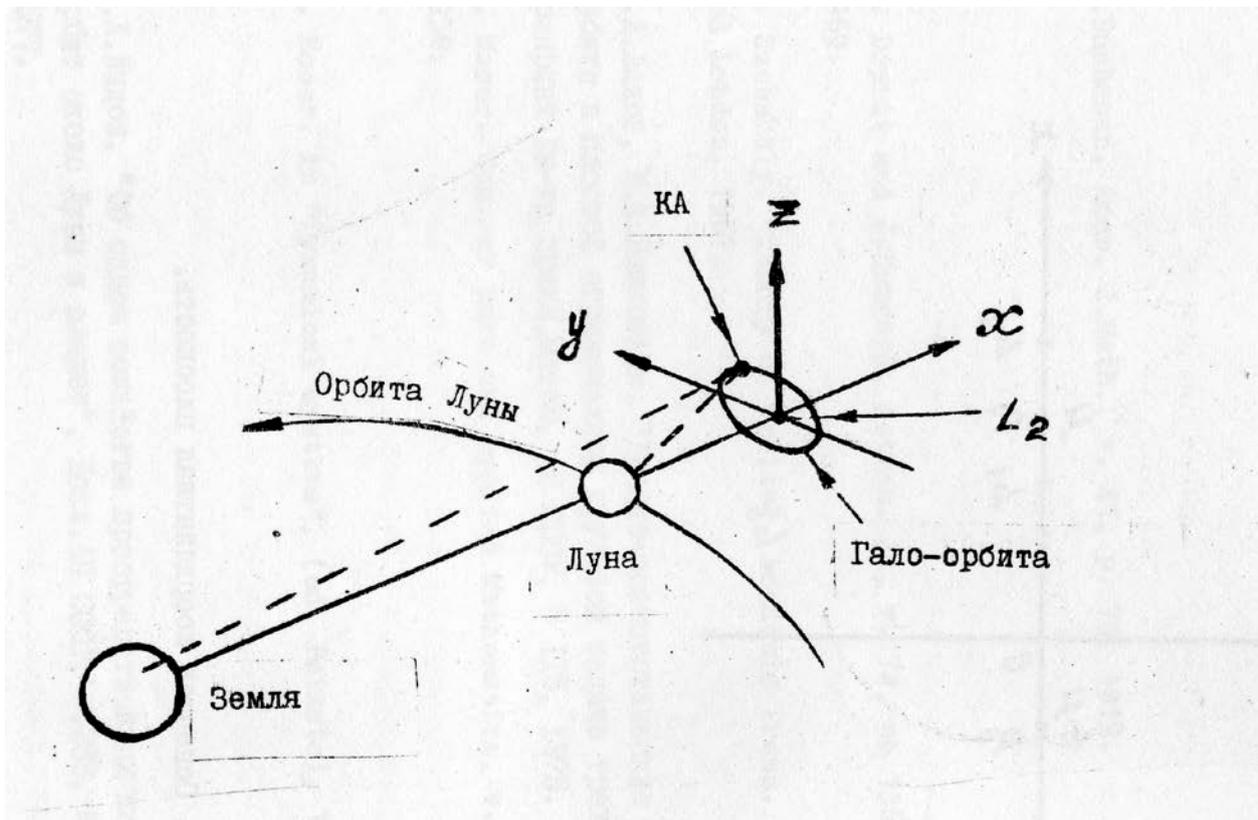
В сентябре 1993 года еще при жизни Михаила Львовича Международный Астрономический Союз присвоил имя **Lidov** малой планете, зарегистрированной в каталоге под номером **4236**.



М.Л. Лидову и его ученикам принадлежит большой цикл работ по созданию численно-аналитических методов расчета движения искусственных небесных тел. Эти методы широко использовались при проектировании орбит спутников “Электрон”, “Прогноз”, спутников связи на геостационарных и высокоапогейных орбитах (КА типа «Молния»). Математические модели, применяемые в этих высокоточных и быстродействующих методах, учитывали весьма полную совокупность лунно-солнечных возмущений, возмущений от нецентральности геопотенциала (для ИСЛ и масконов), влияние земной атмосферы, светового давления и эффекта экранирования спутника Землей.

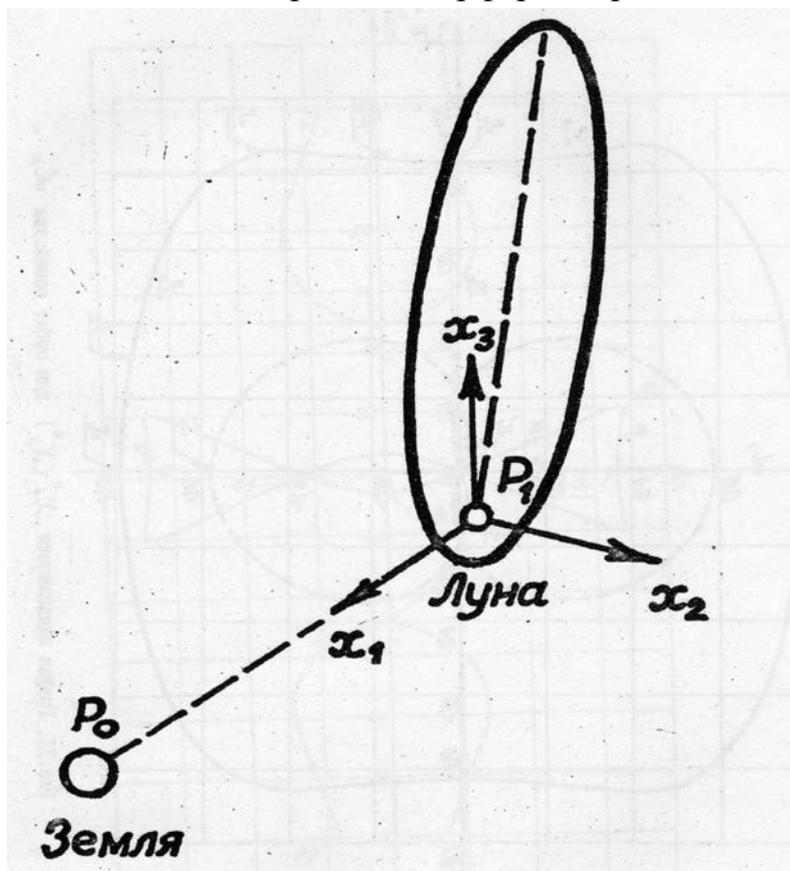
В 1964 году М.Л. Лидовым предложена постановка задачи о выборе состава измеряемых параметров траектории в случае неполного знания вероятностных характеристик ошибок измерений. Им была выявлена математическая аналогия между некоторыми задачами оптимальной коррекции траекторий и задачами выбора состава измерений. Это направление нашло свое развитие в работах Б.Ц. Бахшияна, Л.Ю. Белоусова, А.И. Матасова и других последователей. Оно составило отдельную часть рукописи, к сожалению, не опубликованного учебного пособия, подготовленного в 1985 году М.Л. Лидовым, А.И. Матасовым, В.М. Морозовым и Н.А. Парусниковым в МГУ им. М.В. Ломоносова.

Обширный цикл работ М.Л. Лидова и его сотрудников посвящен анализу траекторий полета и орбит в окрестности коллинеарных точек либрации систем Земля – Луна (см. рис.) и Солнце – Земля, а также разработке методов



стабилизации движения космических аппаратов по таким орбитам с приложениями к перспективному, но, к сожалению, неосуществленному проекту “Реликт-2”. В эти работы весомый вклад внес А.П. Маркеев – ныне известный ученый, профессор, автор великолепных книг и учебников по небесной и теоретической механике.

Другой большой цикл работ М.Л. Лидова посвящен выявлению и практическому построению специальных классов траекторий ограниченной задачи трех тел, исследованию их устойчивости. На основе одной из этих работ им предложен вариант устойчивой пространственной периодической орбиты для космического радиointерферометра.



Она принадлежит семейству периодических орбит, обнаруженному М.Л. Лидовым в ограниченной круговой задаче трех тел продолжением сильноэллиптической спутниковой орбиты в окрестности тела меньшей массы (см. рис.). Для нашего симпозиума символично, что одна из работ М.Л. Лидова, посвященная построению периодических и двояко-асимптотических орбит ограниченной задачи трех

тел, была опубликована еще в первом (даже не имеющем номера) сборнике трудов Чтений по космонавтике 1979 г.

В 1974–1977 гг. М.Л. Лидовым совместно с С.Л. Зиглиным было выполнено исследование двукратно осредненной ограниченной задачи трех тел для равномерно близких орбит возмущающего и возмущаемого тел (этот случай традиционно труден для теории возмущений), а также двукратно осредненной общей задачи трех тел конечных масс. В последнем случае выявлено существование критического эксцентриситета орбит двух близких тел, при котором теряется устойчивость изначально плоского движения трех тел.

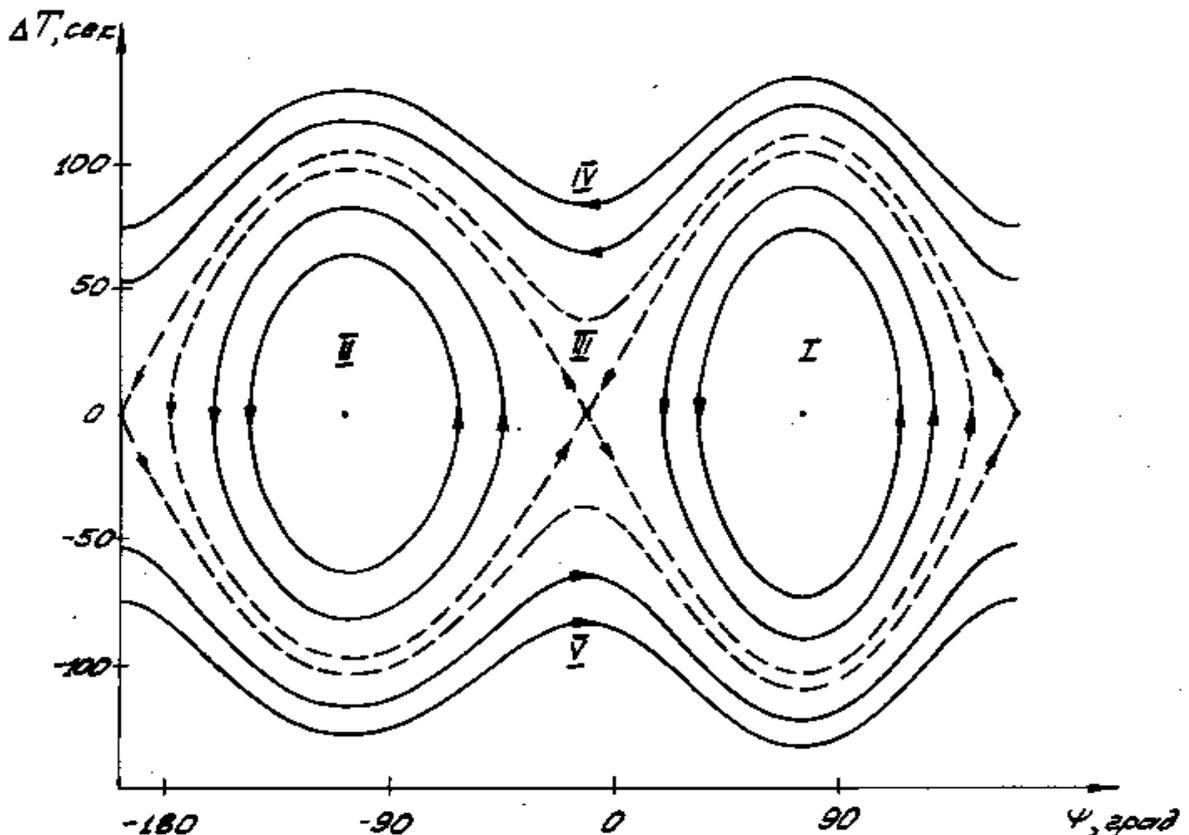
Несколько необычной для тематики М.Л. Лидова явилась его совместная с А.И. Нейштадтом работа, связанная с вращательным движением небесных тел. Метод канонических преобразований, примененный для анализа резонансных закономерностей вращения, позволил интерпретировать лунные законы Кассини как свойства асимптотически устойчивого стационарного решения эволюционных уравнений с учетом приливной диссипации энергии. Эта работа дополнила и уточнила выполненное В.В. Белецким двумя годами ранее (с помощью метода осреднения) исследование данной проблемы без учета диссипации.

Методические подходы М.Л. Лидова к решению небесно-механических задач, как правило, предусматривали не только разработку достаточно сложных высокоточных методов прогнозирования движения небесных тел, но и исследование приближенных динамических моделей, допускающих аналитическое решение и в то же время сохраняющих основные качественные особенности эволюции их орбит.

В качестве одного из примеров можно привести исследование эволюции орбит геостационарных спутников. Проектирование первых отечественных геостационарных спутников началось в конце 60-х годов. В ИПМ под руководством М.Л. Лидова по заказу одного из ведущих промышленных предприятий (ныне – это ОАО «Информационные спутниковые системы» имени академика М.Ф. Решетнева») начались работы по созданию высокоточных быстродействующих методов расчета движения геостационарных спутников. Это были первые для нашей страны разработки, предназначенные как для краткосрочного (несколько суток), так и долгосрочного (несколько месяцев) прогнозирования движения. Достаточно сложные алгоритмы и программы, созданные при участии одного из авторов доклада, О.С. Рыжиной и В.А.Ляховой, были внедрены во многих научных и промышленных организациях. Это в немалой степени способствовало проектированию, запуску, наблюдению и использованию как первого отечественного геостационарного спутника («Космос-637», 1974 г.), так и последующего многочисленного семейства геостационарных ИСЗ.

Одновременно М.Л. Лидовым был выполнен приближенный качественный анализ эволюции данного класса орбит. Исследование упрощалось тем, что на интервалах времени порядка несколько лет полная эволюционная система шести уравнений в элементах в главном приближении допускала разделение на три независимых пары дифференциальных уравнений первого порядка. Анализ решений полученных упрощенных уравнений позволил определить характерные периоды изменения эксцентриситета и долготы перигея,

обосновать выбор начального значения долготы восходящего узла для минимизации максимального на заданном интервале значения наклона орбиты к плоскости земного экватора. При таком выборе происходит временное уменьшение наклона до нуля и только после этого его увеличение со сменой восходящего узла на нисходящий. Это исследование позволило также выявить не известный ранее тип эволюции параметров, определяющих положение спутника на возмущенной орбите. При учете в долготной части геопотенциала только основной гармоники 2,2 фазовая картина аналогична известному семейству траекторий математического маятника. В плоскости (географическая долгота ψ - отклонение периода от возмущенного стационарного ΔT) существуют разделяемые сепаратрисой области, отвечающие либрационному (I, II) и циркуляционному (IV, V) изменению ψ . При включении в модель высших тессеральных гармоник как результат «расщепления» сепаратрисы появляется узкая область III (см. рис.)



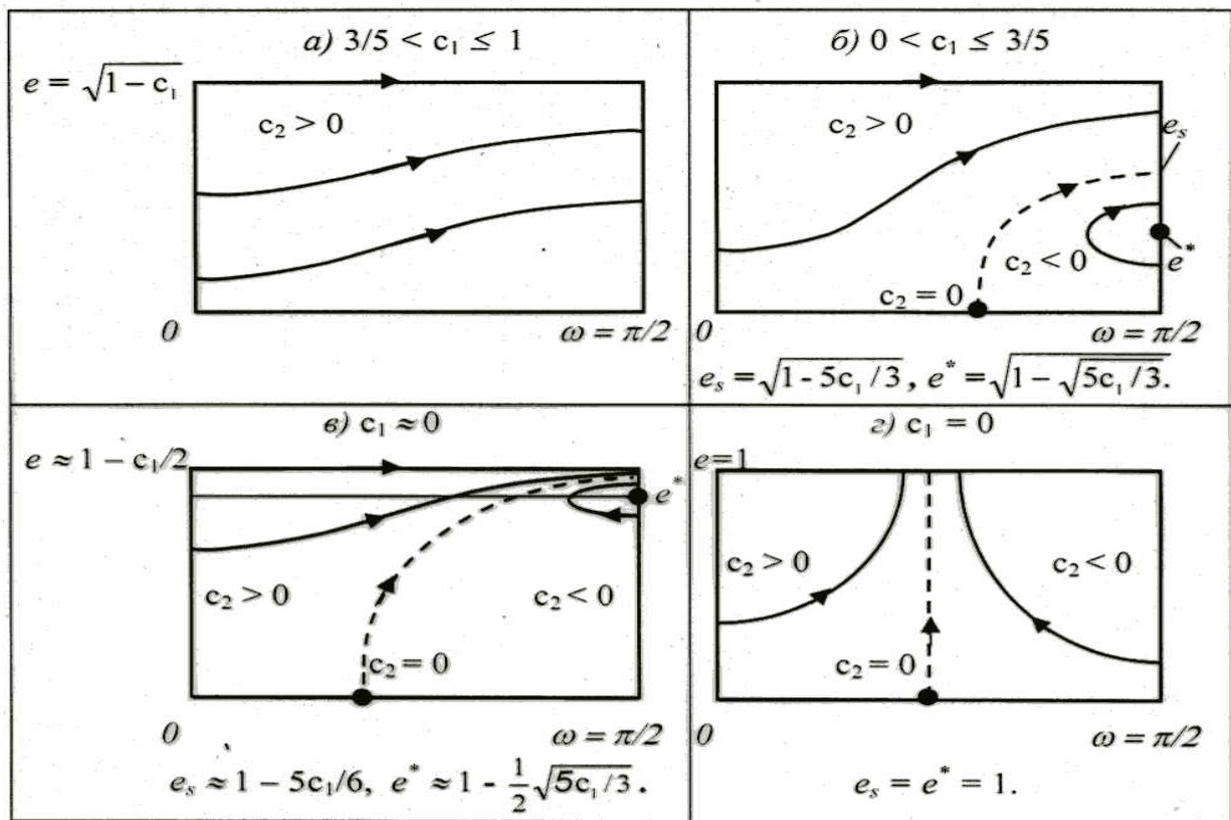
между двумя штриховыми линиями, в которой существуют периодические траектории, охватывающие одну из седловых и обе устойчивые особые точки. Для задачи удержания спутника в малой окрестности заданной географической долготы наличие этой области не слишком существенно, а ее траектории

практически неотличимы от траекторий широких областей либрационного изменения географической долготы. Однако на заключенных в области III долгопериодических траекториях могут оказаться неуправляемые спутники, выработавшие свой ресурс и перешедшие в разряд космического мусора. Очевидно, что при использовании грубой модели с одной лишь тессеральной гармоникой $2,2$ две сепаратрисы сливаются в одну, а область III исчезает. Вся картина становится симметричной относительно равновесных точек, а долготы двух соседних из них будут отличаться между собой на 90° .

Резонанс Лидова-Козаи

Данный термин, сегодня прочно установившийся в современной небесно-механической литературе, получил двойное название не сразу. Долгое время употреблялось словосочетание «резонанс Козаи» по имени известного японского ученого, изучавшего двукратно осредненную круговую ограниченную задачу трех тел и опубликовавшего результаты своих исследований в 1962 году. Однако годом раньше М.Л. Лидов получил те же качественные результаты в ее спутниковом варианте - двукратно осредненной задаче Хилла, которая явилась результатом упрощения достаточно сложного метода расчета эволюции орбит ИСЗ, вызванной гравитационными возмущениями Луны и Солнца. К сожалению, качественное исследование, выполненное М.Л. Лидовым и опубликованное на русском языке в 1961 году, получило известность за рубежом только после воспроизведения его статьи в англоязычных журналах в 1962, 1963 годах, а в особенности, после представления его доклада на Международном симпозиуме 1962 г. в Париже и соответствующей публикации в его трудах в 1963 году. Это ставшее классическим исследование М.Л. Лидова имеет более половины из нескольких сотен цитирований всех его работ. Но только в середине 90-х годов прошлого столетия по справедливому и своевременному предложению А.И. Нейштадта термин «**резонанс Лидова-Козаи**» вошел в научный обиход. Этому в немалой степени способствовали постоянные усилия наших ученых К.В. Холшевникова и В.В. Сидоренко, использовавших в своих научных трудах двойное название и настоятельно рекомендовавших это же самое зарубежным авторам. Интересно отметить как характерное обстоятельство весьма незначительную разницу в годах рождения М.Л. Лидова и Й. Козаи. Известный японский ученый родился в 1928 г., а с его краткой биографией мы имеем возможность познакомиться на сайте <https://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/24816>.

Вышеупомянутая двукратно осредненная задача Хилла описывает в первом приближении эволюцию спутниковой орбиты под действием вековых возмущений от достаточно удаленной притягивающей точки. Осреднение в этой задаче проводится независимым образом по всем наиболее быстрым переменным – средним аномалиям спутника и внешней точки. В стандартных обозначениях кеплеровских элементов орбиты два первых интеграла этой задачи суть $a = c_0$, $(1 - e^2)\cos^2 i = c_1$. Они были известны ранее из работ профессора Н.Д. Моисеева (1902 - 1955), но только полученный М.Л. Лидовым в явном виде дополнительный интеграл $e^2(2/5 - \sin^2 i \sin^2 \omega) = c_2$ позволил свести

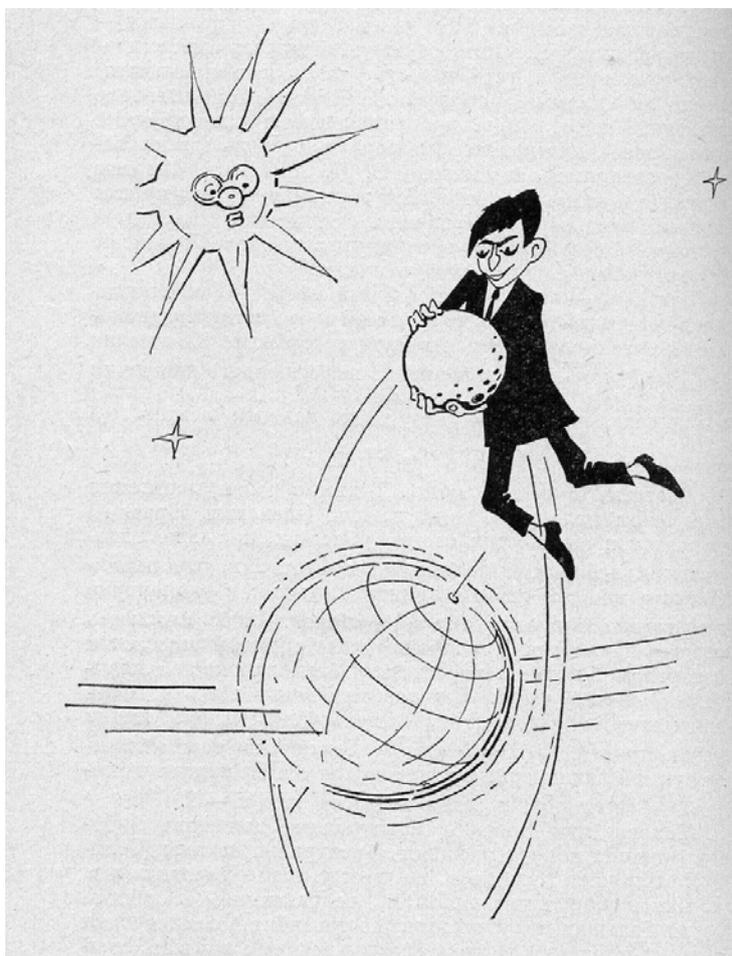


проблему к исследованию поведения фазовых траекторий в плоскости (аргумент перигея ω - эксцентриситет e) в зависимости от c_2 при фиксированном значении c_1 (см. рис.) и к вычислению квадратур для изменения остальных переменных.

Математическим проявлением резонанса Лидова-Козаи является существование в фазовой плоскости устойчивой особой точки ($\omega = \pi/2$, $e = e^*$) и либрационной области для спутниковой орбиты, достаточно сильно наклоненной к плоскости движения возмущающего тела ($c_1 < 3/5$). В этой особой точке угловые скорости изменения долготы перигея $\pi = \Omega \pm \omega$ и долготы узла Ω спутниковой орбиты равны между собой, так что с физической

точки зрения имеет место резонанс 1:1, при котором $d\omega/dt = 0$. При этом даже изначально почти круговая спутниковая орбита эволюционирует так, что ее эксцентриситет со временем может стать заметной величиной, а при $c_1 \approx 0$ - достичь так называемого критического значения (горизонтальная прямая, проходящая через особую точку на фрагменте "в" рисунка), когда при сохранении неизменной большой полуоси перицентр становится равным радиусу центральной планеты, т.е. спутник падает на ее поверхность. Важно то, что это происходит за конечное время и при любых начальных значениях ω , как и остальных параметров орбиты. Это теорема М.Л. Лидова.

Яркой иллюстрацией служит проведенный им расчет эволюции лунной орбиты, гипотетически повернутой перпендикулярно плоскости эклиптики, т.е. ($c_1 = 0$). Оказалось, что такая "ортогональная Луна" под действием солнечных возмущений упала бы на Землю всего через четыре с половиной года!!! Многие ученые были поражены этим результатом, а профессор МГУ И.В. Новожилов запечатлел его автора в дружеском шарже «Лидов роняет Луну на Землю» (см. рис.).



Вместе с тем существуют примеры регулярных апсидально-либрационных орбит, перицентры которых не могут опуститься настолько, чтобы спутник (астероид) упал на поверхность планеты (Солнца). К ним относятся, в частности, орбиты нескольких астероидов и открытых относительно недавно внешних спутников планет-гигантов. Они служат яркими примерами природной реализации резонанса Лидова-Козаи.

Выявленный эффект падения объясняет отсутствие в планетных и спутниковых системах орбит, почти ортогональных плоскости движения основных массивных тел. Установив данное свойство, М.Л. Лидов тотчас же обратился к астрономическим справочникам. И сразу обнаружил противоречащий пример в виде существующих главных спутников Урана. Их почти круговые и почти экваториальные орбиты наклонены к плоскости гелиоцентрического движения Урана (или к плоскости ураноцентрической орбиты Солнца) примерно на 98° . Анализ реальной физической модели, учитывающей сжатие Урана (наряду с существенно менее значительными солнечными возмущениями) разрешил противоречие, допустив существование почти круговых ортогональных орбит.

Использование и развитие идей и методов М.Л. Лидова

В наши дни общепризнанные работы М.Л. Лидова, широко цитируемые в мировой небесно-механической литературе, нашли свое применение и развитие в трудах многих последователей. Это, прежде всего, касается естественнонаучных аспектов, связанных с относительно недавними открытиями экзопланет и далеких (нерегулярных) спутников планет-гигантов. В эволюции орбит этих новых астрономических объектов достаточно часто проявляется резонанс Лидова-Козаи, хотя применяемые динамические модели претерпевают существенные изменения и обобщения по сравнению с моделью двукратно-осредненной задачи Хилла. Это, прежде всего, рассмотрение ограниченной **эллиптической** задачи трех тел, усложнение формы центрального притягивающего центра, а также «выход из приближения Хилла». В частности, в работах авторов доклада была предложена уточненная модель эволюции. На ее основе среди достаточно многочисленного ансамбля далеких спутников Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна выявлены спутники J XLVI (Carpo), S XXII (Ijiraq), S XXIV (Kiviuq), U XXIII (Margaret), N XI (Sao), N XIII

(Neso) с апсидально-либрационными орбитами, находящимися в условиях резонанса Лидова-Козаи.

Использование и развитие работ М.Л. Лидова происходит также в направлении конкретных космических приложений. Так, в большом цикле работ, выполненных в ИКИ РАН В.И. Прохоренко и опирающихся на исследования М.Л. Лидова, предложен наглядный и эффективный геометрический метод исследования эволюции орбит как в двукратно-осредненной задаче Хилла, так и в модели, учитывающей сжатие центральной планеты. Полученные результаты позволяют оценивать времена жизни высокоапогейных ИСЗ и, как следствие, вырабатывать рекомендации для выбора начальных параметров орбит с возможно более длительным временем существования спутника на орбите.

Нашли свое развитие и последние из опубликованных работ М.Л. Лидова, посвященные анализу квазиспутниковых орбит, и для предложенного ранее А.Ю. Коганом их возможного применения в проекте «Фобос». Идеи работ М.Л. Лидова были использованы при проектировании полета КА «Фобос-грунт», выполненном в Баллистическом центре ИПМ Э.Л. Акимом и А.Г. Тучиным вместе с коллективом сотрудников нашего отдела.

В исследованиях, проведенных под руководством А.Г. Тучина и В.В. Сазонова, работы М.Л. Лидова по анализу траекторий полета к коллинеарным точкам либрации и разработке методов стабилизации движения в их окрестности были недавно использованы в баллистических проектах «Спектр - РГ» и «Спектр - М». В рамках этих проектов планируется запуск КА в окрестность солнечно-земной коллинеарной точки либрации L_2 .

Надо сказать, что работы М.Л. Лидова порой оказывались достаточно непростыми для восприятия даже весьма квалифицированными специалистами. Можно упомянуть об одной статье, подготовленной для зарубежного издания и появившейся в середине 90-х годов. Эта статья (к счастью, только в корректуре!) содержала «исправления» к уже упоминавшейся работе Михаила Львовича по эволюции спутниковых орбит 1961 г. После указания авторам на ошибочность их интерпретации формул М.Л. Лидова его правота была ими, безусловно, признана, а предлагаемые «исправления» были немедленно убраны из текста вышедшей вскоре корректной публикации.

Вспоминая М.Л. Лидова

В заключение хотелось бы дополнить научную часть доклада воспоминаниями одного из его авторов, работавшего под руководством М.Л. Лидова, начиная с 60-х годов. Дальнейшее изложение в данном разделе ведется от лица Н.М. Тесленко и заключено в двойные кавычки.

«« Мои воспоминания о Михаиле Львовиче Лидове охватывают по времени всего несколько лет, начиная с 1966 г., но его роль в событиях именно той поры позволяет рассказать об одной важной стороне его деятельности, которая, по моему, ещё мало, кем затронута. Речь идёт о его участии в баллистическом обеспечении систем управления многих космических аппаратов во время полёта. Не имея поначалу отношения к этим задачам, я много раз слышал его телефонные разговоры с разработчиками техники и удивлялся, как свободно обсуждал он разные детали, оперируя терминами, тогда мне совершенно непонятными. По лёгкости, с которой Михаил Львович вникал в работу того или иного прибора в контуре управления, можно было говорить о его настоящем инженерном чутье.

Очень показателен в этом отношении более поздний эпизод по времени, когда я уже участвовал в оперативных расчетах. Как-то, во время встречи с нашими смежниками в ЦНИИМаш'е, нам предложили послушать прямую трансляцию очередного сеанса астроориентации. И вот мы сидим в специально оборудованном помещении, а из динамика звучит спокойный голос оператора. Отслеживая телеметрию, он сообщает, что происходит на борту:

--- Идёт поиск Солнца.... Есть захват Солнца.... Есть грубое Солнце... Есть точное Солнце.... Идёт поиск Земли....

Пауза. Проходит томительная минута. Все молчат. Динамик повторяет:

--- Идёт поиск Земли....

Слышны вздохи облегчения. И тут же - расстроенный голос Михаила Львовича:

--- Всё... Ориентации нет...

Мы недоверчиво переглядываемся, а из динамика «подтверждают»:

--- Сбой программы, сбой программы....

Каким-то образом, досконально зная функционирование сложнейшего прибора, Михаил Львович понял (и почувствовал?) этот сбой гораздо раньше других.

Есть и другая причина, чтобы начать рассказ с 1966 г.

3 февраля этого года спускаемая часть космического аппарата (КА) «Луна-9» впервые в мире совершила мягкую посадку на поверхность Луны. На волне этого успеха у конструкторов аппарата возникла идея провести небольшую

модификацию системы управления ориентацией двигателя, чтобы при близком пролёте около Луны КА после торможения вышел бы на орбиту спутника Луны. Возникла баллистическая задача определения метода выбора параметров прицеливания для номинальной траектории. Михаил Львович, давно занимавшийся баллистикой аппаратов этой серии, набросал алгоритм решения и засадил меня за написание программы. Так как тут же возникли и другие вспомогательные задачи, в помощь были присланы сотрудники ОКБ им. С.А. Лавочкина, куда недавно был переведён весь комплекс работ по королёвским «лунникам». За какие-то считанные недели всё было готово. Третьего апреля (всего через 2 месяца после посадки «Луны-9»!) КА, названный «Луной-10», стал -- опять же впервые в мире -- искусственным спутником Луны. Во время полёта мы сидели в вычислительном центре ЦНИИМаш'а и по данным прогноза траектории подправляли параметры точки прицеливания. Так наша «лидовская группа» получила, можно сказать, «боевое крещение», а я впервые почувствовал на своём опыте, что это такое – «баллистическое сопровождение». И впервые видел М.Л. Лидова в непростых ситуациях. В дальнейшем были запущены на окололунные орбиты ещё три спутника: два – в 1966 г. и один – в 1968 г. Мы также участвовали в этих работах со своей скромной программой, не подозревая, в какие масштабные разработки будем вовлечены в недалёком будущем.

Они были развёрнуты в 1968-69 гг. в связи с проектом, известным (как это было принято в то время) под кодовым названием Е8 (предыдущие проекты – мягкой посадки и ИСЛ именовались Е6 и Е7). В эскизном виде проект был разработан к осени 1966 г. в ОКБ им. С.А. Лавочкина под руководством Главного конструктора Г.Н. Бабакина и предусматривал создание многоцелевого автоматического лунного аппарата нового поколения в нескольких модификациях. В основном посадочном варианте (собственно Е8) обеспечивалась доставка на поверхность Луны «Лунохода» - колёсного транспортного средства, управляемого дистанционно с Земли. В другом посадочном варианте (Е8-5), возникшем и разработанном уже в ходе реализации проекта, на Луну посылалось специальное устройство для забора грунта и отправки его на Землю. В спутниковом варианте (Е8-ЛС) лунный аппарат выводился на орбиту искусственного спутника Луны для глобального обзора её поверхности и исследования гравитационного поля. Выбранная схема полёта предусматривала проведение двух тормозных манёвров (одного – для перехода с подлётной траектории на орбиту спутника Луны, другого – для схода с орбиты и прилунения), а также нескольких коррекций – как на подлётной траектории, так и на орбите спутника Луны. В варианте Е8-5

впервые предусматривался старт автоматического аппарата с другого небесного тела. Капсула с лунным грунтом помещалась в головную часть специальной взлётной ступени и после старта с посадочной ступени, стоящей на лунной поверхности, выводилась на траекторию возвращения к Земле – уже без коррекций (такой метод возвращения «лунника» был обоснован в работах А.И. Авербуха, Ю.Д. Волохова и В.А. Егорова). Даже из этого краткого описания видно, что бортовая система управления полётом была достаточно сложной. Может быть, даже самой сложной для своего времени.

Первые полёты намечались на конец 1968 г., и к этому сроку должна была завершиться реорганизация наземного вычислительного комплекса в составе трёх баллистических центров: в Подлипках (ЦНИИМаш), в Болшево (НИИ-4) и в Москве (ИПМ АН СССР). В каждом центре формировались две основные группы вычислителей: одна группа определяла траекторию полёта по наземным измерениям, другая – по результатам этих вычислений вела расчёты параметров очередного маневра. Все три центра обменивались полученными данными между собой по телеграфным линиям, а согласованные параметры маневра в виде закодированных «уставок» пересылались в Центр управления полётом для передачи их по командному радиоканалу на борт космического аппарата. Надо сказать, что элементы такого комплекса работали уже и до этого по другим космическим программам, но с такой чёткой организацией математического обеспечения полёта «в три руки» это было сделано впервые.

С формированием в нашем центре группы определения траектории проблем не было: эту часть работ в ИПМ давно и бесменно выполняла сплочённая команда Э.Л. Акима. А вот создать и возглавить группу расчёта маневров (группу управления) руководство отдела предложило Михаилу Львовичу. Есть свидетельство, что для него это было полной неожиданностью. Если раньше участие его в такого рода работах было индивидуальным или ограничивалось небольшой группой со скромным программным хозяйством, то теперь речь шла о разработке большого числа быстродействующих алгоритмов и соответствующих программных комплексов, необходимых для управления полётом КА в реальном времени. Ни опыта организации таких сложных программных комплексов, ни тем более опыта их эксплуатации у него не было. А главное, не было и достаточного числа опытных программистов, способных создать их в короткое время. Это главное затруднение М.Л. Лидов высказал Д.Е. Охоцимскому во время рабочей встречи, но оно было им тут же устранено обещанием немедленной передачи в его полное распоряжение стольких сотрудников из других групп, сколько потребуется для быстрого разворачивания нужного программного обеспечения. В результате

сформировалась «лунная» группа, в которую, кроме авторов доклада, входили Г.П. Таратынова, Т.И. Фролова, Е.А. Сидорова, З.П. Довженко, В.А. Ляхова, В.П. Дикушина, И.Г. Хацкевич, В.А. Златоустов, С.С. Лукьянов.

И надо было видеть, как после очень короткого периода психологической раскочки Михаил Львович начал буквально вгрызаться в проблему во всём её содержании и масштабе. А объём предстоящей работы он уже представлял и понимал, что она растянется на долгие годы...

Прежде всего, и ему, как руководителю, и нам, как исполнителям – прежним его сотрудникам и многочисленным новым помощникам – надо было ознакомиться с технической документацией, описывающей работу бортовых систем, входящих в контур управления. Довольно быстро стало понятно, что для успешной разработки алгоритмов, их последующего воплощения в оперативные вычислительные программы и, наконец, просто для сведения воедино разрозненных данных необходимо перевести технические описания систем на математический язык чётко сформулированных задач, решаемых этими системами, и зафиксировать это на бумаге. Так у Михаила Львовича родилась идея «баллистических протоколов», тексты которых вчерне готовились (в основном, трудами М.А. Казанского и Г.С. Заславского) в ЦНИИМаш'е, обсуждались на очередном рабочем совещании представителей всех трёх центров и смежников и (после необходимой доработки) «торжественно» подписывались ими. По согласованному таким образом очередному математическому заданию во всех трёх центрах независимо друг от друга разрабатывались алгоритмы решения сформулированной частной задачи, моделирующей работу данной бортовой системы, и писались соответствующие программы для ЭВМ. Если ещё учесть, что парк ЭВМ в каждом центре был свой, отличный от других, то совпадение (в рамках принятой точности) численных результатов хотя бы двух центров говорило о высокой степени их достоверности. «Баллистические протоколы» определяли также предельно чётко форму и содержание так называемых «телеграмм» при обмене вычислительной информацией между центрами.

Забегая вперёд, хочется особо отметить, что с самого начала нашей лунной эпопеи между ответственными исполнителями всех центров установилась и в дальнейшем много лет поддерживалась необычайно дружеская атмосфера, можно даже сказать, высокая рабочая этика, исключавшая возникновение конфликтов, причин для которых в острых ситуациях и при дефиците времени было предостаточно. Довольно быстро возникло негласное правило, что в том случае, когда рассчитанные значения параметров управления, подготовленные для передачи на борт, совпадали у двух центров, а третий заметно «отваливал»,

то причину этого искал не только «оставшийся в меньшинстве», но и все остальные, активно участвуя в общем обсуждении процесса поиска. Примеров можно привести много, но очень показателен такой. В расчёте номинальной траектории (так называемом РС) последнего - и успешного! - полёта («Луна-24», август 1976 г.) была допущена ошибка. Она была обнаружена во время предпусковых совместных тренировок всех трёх центров и привела к тому, что перед одним из манёвров нужные условия для астроориентации не выполнялись. Общие попытки найти решение упирались в формальные ограничения по времени. Положение спас представитель разработчиков этой системы В.Д. Татаринов, отдав свои приборные «запасы», что и позволило «втиснуть» сеанс ориентации в узкое место.

Нормальные человеческие отношения не исключали в то же время и дружеского соперничества между центрами в вопросе, чьи данные будут переданы на борт. И тут тоже само собой утвердился общий порядок, что такое право (даже при совпадении всех трёх вариантов) давалось тому центру, который получил свои результаты первым. Пользуясь понятиями, хорошо знакомыми нашему поколению, можно сказать, что это заслуженное право было для нас своеобразным «переходящим красным знаменем», за обладание которым мы боролись увлечённо и бескорыстно... И думается, что атмосфера полного доверия между всеми нами возникла и поддерживалась в первую очередь под влиянием высоких научных и личных качеств М.Л. Лидова и Э.Л. Акима, которые были не только признанными творческими лидерами в своих областях, но и демонстрировали образцы спокойного делового поведения в самых острых ситуациях.

Надо сказать, что вся подготовительная работа проходила практически в авральном режиме. Тогда о причинах такой спешки мы и думать не думали, занятые по горло текущей работой. Но со временем становилось всё более ясным, что нам суждено было стать участниками научно-технического соревнования двух космических лунных программ - нашей и американской. И призом в этой гонке должен был стать образец лунного грунта, впервые доставленный на Землю. Разница была только в том, что в американском корабле «Аполлон» за лунным грунтом посылался экипаж, а наш аппарат «Луна» для той же цели оснащался только автоматическими устройствами. По версии, данной негласно тогдашним средствам массовой информации, это выдавалось за наше преимущество, поскольку исключало все риски пилотируемого полёта. И такое объяснение в ответ на вопрос, а почему мы также не посылаем космонавтов, выглядело тогда очень правдоподобно, хотя

теперь всем известно, что наши серьёзные попытки в этом направлении делались, но безуспешно.

К началу нашей работы ситуация складывалась очень напряжённой. В конце 1968 г. программа «Аполлон» вступила в завершающую стадию планомерной отработки всех шагов на пути к Луне: в декабре корабль «Аполлон-8» впервые в истории совершил пилотируемый облёт Луны. У нас же к этому времени первые экземпляры лунных аппаратов только-только выходили с заводских ступеней и испытательных стендов. И в первую очередь – в варианте грунтозаборного устройства. Всё было нацелено на то, чтобы в первую половину 1969 г. успеть осуществить 2-3 пуска и доставить лунный грунт на Землю раньше, чем это могли бы сделать американцы во время решающего полёта, намеченного на июль 1969 г. Тогда-то и разыгрались самые драматические события этой захватывающей гонки, в которых М. Л. Лидов сыграл уникальную роль. Но об этом ниже.

А пока вернёмся в 1968 год – к началу наших работ. Михаил Львович быстро вникал во всё: и в общую схему полёта, и в особенности каждого маневра, и в детали работы бортовых систем, и во взаимодействия их между собой. Он выделил отдельные звенья контура управления (системы астроориентации, разворотов, кодировки управляющих команд и т.д.) так, чтобы алгоритм работы каждого из них можно было программировать независимо, и «раскидал» эти куски между всеми «мобилизованными» членами нашей команды. Мне, например, досталась вся астрономическая часть: условия видимости навигационных светил и их взаимные угловые расстояния в КА-центрической системе координат на окололунной орбите и много других величин, нужных для определения времени начала сеанса ориентации. Не знаю, принимал ли в расчёт Лидов мою квалификацию астронома, определённую дипломом, но так или иначе это задание было точно по моей специальности. Справившись с ним, я пошёл к Михаилу Львовичу за новым, но он, развернув передо мной несколько листов с наскоро нарисованными блочными схемами, изображавшими взаимосвязь разных программ при расчётах каждого маневра, предложил мне заняться общей компоновкой программных комплексов. Вместе с разработчиками отдельных программ надо было согласовать взаимодействие всех программ друг с другом при их последовательном выполнении, точно определив данные, которыми программы обменивались между собой, и порядок этого обмена. Эта работа стала для меня увлекательным занятием: после первых поспешных сборок программ в единые комплексы мне всё время хотелось максимально упростить технологию обращения с ними. Собственно,

поначалу на это и настраивал меня Михаил Львович, но, убедившись, что я и без понуканий рвусь, куда надо, предоставил мне полную свободу действий.

Тут надо вспомнить, какими вычислительными ресурсами мы тогда располагали. Прежде всего – это две аппаратно соединённые ЭВМ БЭСМ-4 со всеми стандартными устройствами ввода-вывода данных и внешней памятью на магнитных лентах и барабанах. Программы писались в машинных кодах и пробивались на перфокартах. К первым намеченным пускам все программы были худо-бедно сформированы и отлажены, но каждая из них вводилась в машинную память отдельно в виде толстой колоды перфокарт самими авторами, готовыми тут же выяснять причину любого сбоя. Только позже, по мере устранения разных ошибок и недочётов, стало возможным заниматься всякими усовершенствованиями. В результате уже через какие-то месяцы, чтобы запустить расчёт очередного маневра от начала и до конца, достаточно было ввести в ЧУ (читающее устройство) тонкую пачку карт (10-15 штук), которые и управляли всем комплексом программ, записанных на внешних носителях. А все наши помощники из других групп, передав нам функционально все свои программы, были отпущены «домой». Здесь ещё надо особо сказать, что один участок работ (траектория возвращения к Земле в случае взятия грунта) с самого начала был поручен другой группе управления – под руководством А.К. Платонова. И ей трижды удалось поработать всюю!

Очень важно, что, кроме алгоритмов и программ, обязательных к исполнению, в силу требований «баллистических протоколов», в нашем центре по инициативе Михаила Львовича были разработаны и дополнительные программные средства. Они моделировали могущие возникнуть различные «нештатные ситуации» (в ходу была шутка, что это такие ситуации, которые не могут случиться в Соединённых Штатах, а у нас - запросто) и таким заготовкам – случись что – просто не было бы цены. Одним из самых пригодившихся в этом отношении оказался алгоритм так называемых «связанных коррекций». Конкретно он разрабатывался для двух коррекций на орбите ИСЛ, которые должны были обеспечить заданные параметры посадочного витка. Напомним, что в принятой схеме полёта после маневра торможения у Луны космический аппарат переводился на круговую орбиту спутника Луны высотой 100 км. Далее в программу полёта была заложена простая логика двух независимых коррекций. Параметры первой коррекции рассчитывались так, чтобы после её исполнения космический аппарат вышел бы на эллиптическую орбиту с заданными значениями ключевых параметров: высоты перицентра и апоцентра (15 км и 100 км), и аргумента широты перицентра (определяемого широтой точки посадки). Вторая коррекция рассчитывалась уже после определения этой

новой орбиты и должна была не только устранить ошибки первой коррекции, но и так подправить ориентацию плоскости орбиты в пространстве, чтобы на посадочном витке обеспечить нужные условия для торможения и спуска на поверхность Луны в заданном месте. Таким образом, расчёты обеих коррекций были в определённой степени независимы. И так можно было действовать, если начальная спутниковая орбита вокруг Луны достаточно мало отличалась от номинальной круговой высотой 100 км. И так, кстати, и было в реальных полётах, кроме двух случаев, когда это условие из-за погрешности маневра торможения оказалось невыполненным. Но именно это М.Л. Лидов и предусмотрел ещё на стадии подготовки и разработал алгоритм оптимальной двухимпульсной коррекции (другими словами – двух «связанных коррекций»), воплощённый затем в отлаженную программу, готовую к использованию в любой момент. И именно эта программа пошла в дело в нештатных обстоятельствах полета станции «Луна-15».

Напомним, что происходило в это время (начало 1969 г.) у нас - и у американцев. Два первых запуска по программе «восьмёрки» закончились аварийно: в феврале - взрывом носителя «Протон», в июне - отказом двигателей разгонного блока Д. За эти месяцы американцы провели два успешных тестовых полёта: «Аполлон-9» в марте отработал различные маневры на околоземной орбите, а «Аполлон-10» в мае провёл «генеральную репетицию», когда в ходе полёта удалось провести все операции, необходимые для посадки людей на Луну, за исключением завершающего этапа (посадка, пребывание на Луне и старт с Луны). Лунный модуль с двумя астронавтами совершил в автономном режиме несколько витков вокруг Луны, снизившись до минимальной высоты 15 км. Можно представить себе чувства пилотов, видевших Луну совсем рядом и не имевших права и возможности спуститься на неё прямо сейчас!

После этого успеха решающий полёт «Аполлона-11» с чётко объявленной целью – высадить людей на поверхность Луны - был назначен на 16 июля 1969 г. И всё шло к тому, что этот полёт станет историческим. Меж тем у нас после второй неудачи в июне следующая возможная дата запуска была тоже определена – 13 июля. Это был последний шанс если и не опередить американцев в гонке за лунный грунт, то заполучить его хотя бы одновременно с ними. Вдобавок, это наглядно показало бы всем ещё и возможность вести космические исследования автоматическими средствами, как ранее неоднократно утверждалось в советской печати.

Дальнейшие события развивались так. Намеченный у нас на 13 июля запуск впервые прошёл успешно. Автоматическая станция с «луночерпалкой» и

возвращаемым отсеком в головной части вышла на траекторию полёта к Луне и получила наименование «Луна-15». Американцы, следившие за каждым нашим шагом, поняли, что этот запуск определённо связан с предстоящим полётом «Аполлона-11» и означает, скорее всего, «игру на опережение». Когда 16 июля «Аполлон-11» устремился к Луне, станция «Луна-15» к Луне уже подлетала и 17 июля вышла на орбиту её спутника. К этому времени американская сторона стала направлять нам официальные запросы с целью узнать назначение спутника и его орбитальные параметры, выражая обоснованное беспокойство за безопасность полёта у Луны своего корабля. Все ответы были уклончивы и сводились к тому, что у нас свои задачи, а параметры орбиты обоих аппаратов настолько разные, что никаких помех друг другу возникнуть не может.

Пока шли эти переговоры, нам тогда неизвестные, мы столкнулись с первой по-настоящему серьёзной ситуацией. Дело в том, что после тормозного маневра у Луны наш аппарат вышел на нерасчётную спутниковую орбиту: вместо почти круговой, высотой 100 км она получилась эллиптической с высотой перигея 70 км, а апогея – 290 км. Стало ясно, что стандартная схема коррекций на такой перекошенной орбите не применима, и надо срочно искать другое решение. Вот тут-то на рабочем совещании баллистической группы М.Л. Лидов и предложил провести расчёты по алгоритму «связанных коррекций», который не накладывал жёстких ограничений на значения начальных элементов и - что самое нужное – был готов к использованию. Помнится даже, что не только предложил, но и представил первые результаты таких расчётов. И выглядели они с первого взгляда странно. Если начальные высоты перигея и апогея в км. коротко определить соотношением (70 на 290), то в проведённых расчётах после первой коррекции это соотношение приняло вид (92 на 210) и только после второй коррекции становилось заданным (15 на 100). То есть, оптимальная двухимпульсная коррекция первым импульсом **повышала** перигей, что противоречило привычной логике первой коррекции по стандартной схеме.

За давностью лет трудно восстановить все подробности, но полученное решение, надо думать, проверили и в Болшево, и в Подлипках (сделали, как мы выражались, «прострелы») и после этого уже решили сообща выйти «наверх», чтобы предложить для данного случая не только новую методику расчётов, но и другой их порядок. Ведь вычисления «в три руки» фактически сводились к вычислениям «одной рукой», хотя и с проверкой «в две руки».

Техническое руководство полётом во главе с Г.Н. Бабакиным полностью поддержало такое предложение и в соответствии с этим в положенное время были рассчитаны параметры первой коррекции. Она прошла без замечаний и

привела к соотношению (95 на 221). У меня нет достоверных свидетельств того, когда и как эти данные были сообщены Государственной комиссии по запуску и управлению станцией «Луна-15». Но по дальнейшим событиям можно представить, что её председатель сразу увидел вместо ожидаемых 15 км в перицентре совсем другое число, да ещё побольше того, которое было на орбите до коррекции. А на раздражённый прямой вопрос, что всё это означает, никто из тех, кто оказался рядом, не нашёлся ответить внятно и быстро. Как и следовало ожидать, цепочка перекалывания ответственности с одного на другого закончилась на том, кто не побоялся всё это затеять - на нашем Михаиле Львовиче. Сам он никогда не рассказывал, каково ему пришлось объясняться с разгневанным начальством, но судя по гораздо более поздним воспоминаниям свидетелей, - тяжело. Далеко не сразу разговор приобрёл вид какого-то нормального диалога, а не разноса с одной стороны. И все разъяснения были, наконец, хотя бы выслушаны. В своих воспоминаниях А.И. Авербух - один из ведущих баллистиков НПО им. С.А.Лавочкина, завершил свой рассказ о том же более красочно:

«...Когда же Председатель Госкомиссии узнал о «самодеятельности» Лидова, молнии генеральского гнева со всей силой обрушились на голову Михаила Львовича. Его, конечно, не «посылали по шпалам», как это любил делать Королёв, но сулили всякие неприятности...» («Мои встречи с М.Л. Лидовым», 2000г.).

Так или иначе, всё зависело тогда от того, как пройдёт вторая коррекция. По счастью, с ней всё обошлось как нельзя лучше, и «Луна-15» вышла на расчётную орбиту с соотношением (16 на 110). Нам оставалось только дожидаться последних уточнений послекоррекционной орбиты, чтобы рассчитать параметры торможения на участке спуска.

Между тем, именно в эти часы американский лунный модуль «Орёл» готовился к посадке и успешно совершил её. Это знаменательное событие произошло 20 июля 1969 г. в 23 час. 17 мин. 42 сек. (здесь и далее - по московскому времени; такие события не грех вспоминать с точностью до секунды). Почти через 7 часов - 21 июля в 5 час. 56 мин. 20 сек. Армстронг уже сделал первый шаг по Луне, а наша станция «Луна-15» всё ещё совершала положенные витки по окололунной орбите. Наконец, в 18 час. 46 мин. 43 сек. двигатель «Луны-15» был включен для торможения. Сначала всё шло по программе, но за 30 сек. до конца основного тормозного участка связь с аппаратом внезапно оборвалась. Попытки возобновить её ни к чему не привели... Мы были подавлены и ничего не понимали. Всё это случилось за два

часа до того, как «Орёл» стартовал с Луны, унося с собой первые 20 с лишним кг. её реголита и камешков...

Так драматически была упущена наша первая реальная возможность достать кусочек Луны. Характер и причина аварии остались невыясненными до сих пор. Есть только обоснованное предположение, что достигнутая к тому времени точность знания гравитационного поля Луны оказалась недостаточной при маневрировании на малых высотах. Нельзя исключить и незнания какой-нибудь особенности рельефа в районе посадки.

Лунный грунт по программе Е8-5 будет добыт только через год с небольшим - в сентябре 1970 г. в ходе полёта «Луны-16». Этот образец весом 105 г. станет третьим после тех, которые были привезены экипажами кораблей «Аполлон-11» и «Аполлон-12». Но до этого нам придётся пережить ещё три неудачи – в сентябре и октябре 1969 г. и в феврале 1970 г. Особенно запомнилась первая - и то благодаря моему «мрачному» предсказанию. Вечером накануне пуска мы, подготовив всё наше хозяйство к завтрашней работе, собирались уже расходиться по домам. И надо же было мне вслух вспомнить, что накануне в газете мелькнуло стандартное сообщение ТАСС о запуске ИСЗ «Космос-299». И мало того, вдруг - безотчётно даже для себя самого - добавить: «А случись завтра что-нибудь с блоком Д – и всё останется на промежутке! И назовут это несчастье юбилейным «Космосом-300»!». Посмеялись ещё, постучали по дереву, а назавтра – к нашей горести - всё именно так и произошло! Потом был даже напечатан огромный «подвал» в «Правде» под названием «Космос-300», где юбилейный номер стал предлогом для горделивого обзора программы спутников разного назначения под общим названием «Космос»!

А с успехом «Луны-16» связана одна из редких «ошибок» М.Л. Лидова. Помнится, что, когда победная новость прозвучала по ТВ и появилась на первых полосах всех газет, Михаил Львович, придя на работу и увидев всех нас в большом возбуждении, тоже вроде заулыбался, а потом, посерьёзнев, вдруг выложил:

--- Ну, а я вам вот что скажу: вы наград-то особенно не ждите. Тут такое дело...

Последняя фраза была одной из его любимых и означала в самом общем виде, что «дело ясное, что дело тёмное».

--- Да ладно, - загалдели мы, - чего там ждать-не ждать, просто всё очень здорово...

--- Ну, конечно, здорово, но всё равно не ждите так уж...

Не знаю, почему он вдруг так настойчиво предостерегал нас от переживаний из-за каких-то возможных несправедливостей. Скорее всего, за этим было что-то личное в прошлом. Но в этот раз он ошибся. Наградами были отмечены многие. Михаил Львович был награждён орденом «Трудового Красного Знамени» - одним из самых почётных.

Между прочим, сразу после триумфального окончания полёта «Луны-16» возникла святая народная идея всем собраться и «обмыть» такое событие. Обзвонили смежников, заручились их единодушной поддержкой и даже получили разрешение нашей администрации организовать такой банкет у нас - в зале уютной институтской столовой. Прибывавшие гости сразу обращали внимание на странный стол в углу помещения, огороженный столбиками с красной лентой, как это делают в музеях. На столе одиноко стояла большая стеклянная ампула, наполненная сероватым порошком. На белой картонке – чёткое пояснение: «ОБРАЗЕЦ ЛУННОГО ГРУНТА, ДОСТАВЛЕННЫЙ... и т.д.». Рядом – ещё две-три карточки с угрожающими красными предупреждениями:

«НЕ ТРОГАТЬ!», «ВИРУЛЕНТНО!», «ПОВЫШЕННАЯ РАДИАЦИЯ!» и прочее. Было видно, что в первый миг эта декорация почти всех сбивала с толку. А потом уж раздавался хохот. Но некоторые всё-таки растерянно спрашивали: «Неужели это тот самый?..». Таких я подводил к окну и, показывая на кучу песка и цемента во дворе, наваленную для какого-то ремонта, делился собственным рецептом получения лунного реголита. А само застолье было настоящим праздником после всех трудов и волнений...

Коротко - об итогах программы Е8, в историю которой имя Михаила Львовича Лидова вписано яркими буквами.

За семь с половиной лет – с февраля 1969 г. по август 1976 г. - было произведено 16 запусков, 6 из них закончились полным успехом: трижды были получены образцы лунного грунта, общая масса которых составила 330 г, два «Лунохода», управляемых с Земли, вместе накрутили по Луне больше 50 км, а вокруг Луны вращался спутник, работавший нормально больше года...

В истории космонавтики автоматический забор лунного грунта с доставкой на Землю был совершён впервые. А «Луноход-1» стал первым в мире самоходным аппаратом на Луне, управляемым с Земли. И тем же «Луноходом-1» установлен никем ещё не превзойдённый рекорд длительности исправной работы на Луне: 10 с половиной месяцев – 11 лунных дней и ночей!».

Послесловие

Со дня безвременной кончины Михаила Львовича прошло уже более двадцати лет, но кажется, что мы и многие из коллег работали и общались с ним совсем недавно, а сам он как бы незримо присутствует и влияет своей неординарной личностью на новые научные исследования знавших его ученых и специалистов. Своеобразный характер М.Л. Лидова, сформировавшийся в трудные 30-е и военные 40-е годы, придал всем его делам и поступкам исключительную прямоту и независимость. Нам представляется, что жизненное кредо Михаила Львовича можно было бы сформулировать коротко - «Не лги, не бойся, не проси». Естественно при этом, что такая его позиция порою вызывала неоднозначное восприятие, непонимание, а порой, и порицание общающихся с ним людей, особенно выше рангом. Так, к несчастью (для Университета!), М.Л. Лидов был отстранен от преподавания на кафедре теоретической механики МГУ. Тем не менее, его научные достижения, несомненный авторитет ученого всегда котировались очень высоко и принесли ему заслуженное признание, как в нашей стране, так и за рубежом. В качестве подтверждения хотелось бы напомнить название одного из докладов, с которым в присутствии М.Л. Лидова выступил американский ученый Ч. Апхофф. Он входил в состав делегации, посетившей в октябре 1992 года ИКИ и ИПМ. В его докладе, в частности, были перечислены пять космических проектов США, в разработке которых «анализ, выполненный Лидовым, сыграл большую роль», а сам доклад в русском переводе назывался «Мой долг Лидову».



My Debt to M. L. Lidov

**A Personal Recollection
of Value Received**

by **Chauncey Uphoff**
Ball Space Systems Division
Boulder, Colorado

Сегодня и мы, ученики, коллеги и последователи Михаила Львовича Лидова отдаем свой долг памяти этому выдающемуся ученому и человеку, оставившему глубокий и яркий след в космической науке.

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ М.Л. ЛИДОВА

1. Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютоновского тяготения. // ДАН СССР. 1954. Т. 47. №3. С. 409.
2. Конечный интеграл уравнений одномерных автомодельных адиабатических движений газа. // ДАН СССР 1955. Т.103. № 1. С. 35.
3. К теории линеаризованных решений около одномерных автомодельных движений газа. // ДАН СССР 1955. Т. 102. № 6. С. 106.
4. К теории неустановившихся движений газа с учетом сил тяготения. // ПММ АН СССР 1955 Т. 19. № 5. С. 541.
5. Автомодельное движение газа со сферической симметрией в поле гравитирующего центра. // Астрономич. журн. 1957. Т. 34. № 4. С. 603.
6. Сопротивление неориентированного тела при движении в разреженном газе. // Изв. АН СССР сер. геофизическая. 1957. № 12. С. 1524.
7. О температурном режиме искусственного спутника Земли. // Изв. АН СССР сер. геофизическая. 1957. № 4. С. 527 (совместно с Карпенко А.Г.).
8. Определение плотности атмосферы по наблюдаемому торможению первых искусственных спутников Земли // Искусств. спутн. Земли. 1958. № 1. С. 9.
9. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусств. спутн. Земли. 1961. № 8. С. 5.

Английские переводы:

1. The Evolution of Orbits of Artificial Satellites of Planets under the Action of Gravitational Perturbations of External Bodies. // Planet. Space Sci. 1962. Vol. 9. P. 719-759.
2. Evolution of the Orbits of Artificial Satellites of Planets as Affected by Gravitational Perturbations from External Bodies. // AIAA Journal. 1963. Vol. 1. № 8. P. 1985-2002.
10. On the approximated analysis of the orbit evolution of artificial satellites. // Dynamics of satellites. Berlin. Springer Verlag. 1963. P. 168.
11. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. // Проблемы движения искусственных небесных тел. М.: Изд. АН СССР, 1963.
12. Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел. // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 6. С. 843 (совместно с Охоцимским Д. Е. и Тесленко Н.М.).
13. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов/ // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 5. С. 713.

14. Вековые эффекты эволюции орбит под влиянием светового давления. // Космич. исслед. 1969. Т. 7. № 4. С. 467.
15. Математическая аналогия между некоторыми задачами коррекции траекторий и выбора состава измерений. // Космич. исслед. 1971. Т. 9. № 5. С. 687.
16. Об эволюции орбиты стационарного ИСЗ. // Космич. исслед. 1973. Т 11. № 3. С. 347 (совместно с Вашковьяком М.А.).
17. Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбит спутников при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты. // Космич. исслед. 1974. Т 12. № 2. С. 155 (совместно с Ярской М.В.).
18. Влияние масконов на прогнозирование движения ИСЛ. // Космич. исслед. 1974. Т. 12. № 4. С. 491 (совместно с Гордеевой Ю.Ф.).
19. The analysis of restricted circular twice – averaged three body problem in the case of close orbit. // Celestial mechanics. 1974. № 9. P. 151 (together with Ziglin S.L.).
20. Полуаналитический метод расчета движения искусственного спутника Луны. // Космич. исслед. 1975. Т. 13. № 3. С. 283 (совместно с Ляховой В.А. и Соловьевым А.А.).
21. Метод канонических преобразований в задачах о вращении небесных тел и законы Кассини. // Определение движения космических аппаратов. М.: Наука, 1975. С. 74 (совместно с Нейштадтом А. И.).
22. Полуаналитический метод расчета движения КА в окрестности коллинеарной точки либрации. // Космич. исслед. 1976. Т. 14. № 6. С. 909 (совместно с Вашковьяком М.А. и Маркеевым А.П.).
23. Non-restricted double-averaged three body problem in Hill's case. // Celestial mechanics. 1976. № 13. P. 471 (together with Ziglin S.L.).
24. Случай Хилла осредненной задачи трех тел и устойчивость плоских орбит. // ПММ. 1977. Т. 41. № 2. С 234 (совместно с Зиглиным С.Л.).
25. Об одном семействе пространственных периодических орбит около Луны и планет. // ДАН СССР. 1977. Т. 223. № 6. С. 1068.
26. Метод учета влияния сил светового давления при полуаналитическом расчете движения спутников. // Математическое обеспечение космических экспериментов. М.: Наука, 1978. С. 149 (совместно с Ивановой Е.Я.).
27. Полуаналитические методы расчета движения спутников//Труды Ин-та теор. астрон. АН СССР. 1978. № 17. С. 54.
28. Численные исследования некоторых классов траекторий ограниченной задачи трех тел. // Труды объединенных научных чтений по космонавтике. М. 1979. С. 142 (совместно с Вашковьяком М. А.).

29. Исследование семейств пространственных периодических орбит задачи трех тел. // Космич. исслед. 1979. Т. 17. № 3. С. 323 (совместно с Рабиновичем В.Ю.).
30. Увеличение размерности гамильтоновых систем, KS -преобразование, использование частных интегралов. // Космич. исслед. 1982. Т. 20. № 2. С. 163.
31. Метод построения пространственных периодических орбит в задаче Хилла. // Космич. исслед. 1982. Т. 20. № 6. С. 787.
32. Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость. // Космич. исслед. 1983. Т. 21. № 1. С. 3 (совместно с Ляховой В.А.).
33. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке. // Космич. исслед. 1984. Т. 22. № 4. С. 483.
34. Построение семейств пространственных периодических орбит задачи трех тел с помощью KS - преобразований. // Труды 10-ой Международной конференции по нелинейным колебаниям. Варна, 1984. С. 344.
35. Одноимпульсный перелет на условно-периодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Земля-Солнце и смежные задачи. // Космич. исслед. 1987. Т. 25. № 2. С. 163 (совместно с Ляховой В.А. и Тесленко Н.М.).
36. Об одном варианте орбиты для околоземного радиоинтерферометра. // Письма в АЖ. 1988. Т. 14. № 9. С. 851 (совместно с Ляховой В.А.).
37. Траектории полета Земля – Луна - гало-орбита в окрестности точки L_2 системы Земля-Солнце. // Космич. исслед. 1992. Т. 30. № 4. С. 435 (совместно с Ляховой В.А. и Тесленко Н.М.).
38. Теория возмущений и анализ эволюции квази-спутниковых орбит в ограниченной задаче трех тел. // Космич. исслед. 1993. Т. 31. № 2. С. 75 (совместно с Вашковьяком М.А.).
39. О квазиспутниковых орбитах для эксперимента по уточнению гравитационной постоянной. // Письма в АЖ. 1994. Т. 20. № 3. С. 1 (совместно с Вашковьяком М.А.).
40. Аналитический метод расчета движения по гало-орбите и проблема экранирования КА от солнечной радиации в проекте «Реликт-2». // Космич. исслед. 1994. Т. 32. № 1. С. 3 (совместно с Вашковьяком М.А. и Ляховой В.А.).
41. О квазиспутниковых орбитах в ограниченной эллиптической задаче трех тел. // Письма в АЖ. 1994. Т. 20. № 10. С. 1 (совместно с Вашковьяком М.А.).

42. Курс лекций по теоретической механике. М.: ФИЗМАТЛИТ,
1-е издание 2001. - 478 с.;
2-е издание испр. и доп. 2010. - 494 с.
43. Минимаксные методы оценивания. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.
2010. № 71. 87 с.
URL: http://keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_71.pdf

Эффект Лидова–Кодзаи и его роль в астрономии

К.В. Холшевников^{1,2}, Л.Л. Соколов¹

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²ГАО РАН

e-mail: kvk@astro.spbu.ru, lsok@astro.spbu.ru

Введение

Один из выдающихся научных результатов, полученных Михаилом Львовичем Лидовым — открытие возможности согласованных колебаний эксцентриситета и наклона с большой амплитудой в пространственной задаче трех тел, что называют обычно эффектом Лидова–Кодзаи, поскольку он был открыт практически одновременно и независимо японским ученым Й.Кодзаи [1, 2, 3]. В настоящем докладе мы коснемся некоторых современных исследований, связанных с указанным эффектом, не претендуя на полноту. Сам эффект был обнаружен М.Л.Лидовым при решении новых для того времени задач о движении искусственных небесных тел. Сравнительно недавно появился новый класс объектов — экзопланеты, в движении которых важную роль играет эффект Лидова–Кодзаи. Экзопланеты, в отличие от планет Солнечной системы, нередко имеют большие эксцентриситеты орбит. Это обстоятельство привело к рассмотрению модификаций эффекта, обусловленных значительным эксцентриситетом орбиты возмущающего тела, и другими факторами, не учтенными в работах первооткрывателей. Так, оказалось, что можно „Луну уронить на Землю“, не только повернув плоскость ее орбиты примерно на 90 градусов, но и при повороте на 30-40 градусов при значительном эксцентриситете орбиты „Земли“. Возможно даже изменение направления обращения планеты в ходе динамической эволюции. Этот эффект был обнаружен совсем недавно и сейчас активно исследуется, поскольку среди горячих юпитеров многие обращаются „не в ту сторону“. Важно также рассмотрение эффекта Лидова–Кодзаи в сочетании с другими возмущающими факторами. Начало этому положил М.Л.Лидов, учтя эффект сжатия планеты. Существенным может оказаться также приливное трение и другие эффекты.

Михаил Львович Лидов не работал в Ленинграде, однако он оказал большое влияние на небесных механиков этого города, фактически был их учителем и воспитателем. Мы часто с благодарностью и восхищением его вспоминаем.

В настоящей статье мы покажем, как классические результаты, о которых говорилось выше, можно обобщить на случай спутника ненулевой массы и ненулевого эксцентриситета орбиты планеты, при минимальном изменении подхода М.Л.Лидова.

Аналогичные обобщения можно найти в поздних публикациях М.Л. Лидова и его учеников [4, 5]. Мы приводим результаты, получающиеся для системы Плутон-Харон. В статье также кратко описаны некоторые современные исследования экзопланет, использующие механизм Лидова-Кодзаи.

1 Гамильтониан задачи трех тел в приближении Хилла

Рассмотрим задачу трех тел-точек Q_0 (планета) Q_1 (спутник), Q_2 (Солнце) с массами m_0 , m_1 , m_2 , соответственно. Пусть Q' — центр масс Q_0 и Q_1 . Относительное движение в системе координат Якоби описывается двумя векторами $\mathbf{r} = Q_0Q_1$, $\boldsymbol{\varrho} = Q_2Q'$ и определяется заданием кинетической энергии относительного движения \mathcal{E}_1 и гравитационной потенциальной энергии \mathcal{E}_2 [6, 7]:

$$2\mathcal{E}_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} m_1 \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{m_0 + m_1}{m_0 + m_1 + m_2} m_2 \dot{\boldsymbol{\varrho}}^2, \quad (1)$$

$$-\frac{\mathcal{E}_2}{G} = \frac{m_0 m_1}{r} + m_0 m_2 \left| \boldsymbol{\varrho} - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathbf{r} \right|^{-1} + m_1 m_2 \left| \boldsymbol{\varrho} + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathbf{r} \right|^{-1}, \quad (2)$$

где G — постоянная тяготения, $r = |\mathbf{r}|$, $\varrho = |\boldsymbol{\varrho}|$.

Считаем $m_1 < m_0 \ll m_2$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \frac{r}{\varrho} \ll 1, \\ \mu_2 &:= \frac{3m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^2} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^2 \ll 1, & \mu_3 &:= \frac{2m_2}{m_0 + m_1} \left(\frac{r}{\varrho} \right)^3 \ll 1, \\ \mu_2 &\ll \mu_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что μ_3 равно приблизительно удвоенному отношению квадратов средних движений Солнца и спутника. Величины μ_s переменны на некруговых орбитах. Для ориентировки дадим их средние значения по средним аномалиям

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_s &:= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_s dM dM', & \tilde{\mu}_1 &= \frac{a}{a'} X_0^{1,0}(e) X_0^{-1,0}(e'), \\ \tilde{\mu}_2 &= \frac{3m_0 m_1 a^2}{(m_0 + m_1)^2 a'^2} X_0^{2,0}(e) X_0^{-2,0}(e'), & \tilde{\mu}_3 &= \frac{2m_2 a^3}{(m_0 + m_1) a'^3} X_0^{3,0}(e) X_0^{-3,0}(e'). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь и ниже $a, e, i, g, \Omega, \theta, M$ — оскулирующие элементы орбиты спутника относительно планеты: большая полуось, эксцентриситет, наклон, аргумент перицентра, долгота восходящего узла, истинная и средняя аномалия, $c = \cos i, s = \sin i$; элементы орбиты барицентра Q' относительно Солнца снабжены штрихами; $X_0^{n,m}$ — коэффициенты Ганзена. Нам понадобятся восемь таких коэффициентов [6, 11]:

$$\begin{aligned}
X_0^{1,0}(e) &= 1 + \frac{1}{2}e^2, & X_0^{2,0}(e) &= 1 + \frac{3}{2}e^2, \\
X_0^{-1,0}(e) &= 1, & X_0^{-2,0}(e) &= (1 - e^2)^{-1/2}, \\
X_0^{3,0}(e) &= 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4, & X_0^{2,2}(e) &= \frac{5}{2}e^2, \\
X_0^{-3,0}(e) &= (1 - e^2)^{-3/2}, & X_0^{-3,2}(e) &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

В частности, из (4, 5) следует

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu}_1 &= \frac{a}{a'} \left(1 + \frac{1}{2}e^2 \right), \\
\tilde{\mu}_2 &= \frac{3m_0m_1a^2}{(m_0 + m_1)^2a'^2\sqrt{1 - e'^2}}, \\
\tilde{\mu}_3 &= \frac{2m_2a^3}{(m_0 + m_1)(a'\sqrt{1 - e'^2})^3} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4 \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Для системы Земля–Луна–Солнце

$$\tilde{\mu}_1 = 2.572 \cdot 10^{-3}, \quad \tilde{\mu}_2 = 2.6 \cdot 10^{-7}, \quad \tilde{\mu}_3 = 1.121 \cdot 10^{-2}.$$

Для системы Плутон–Харон–Солнце согласно сайту [8]

$$\tilde{\mu}_1 = 3.337 \cdot 10^{-6}, \quad \tilde{\mu}_2 = 5.3 \cdot 10^{-12}, \quad \tilde{\mu}_3 = 1.011 \cdot 10^{-8}.$$

Второе и третье слагаемое (2) раскладывается в ряд по степеням r/ϱ с коэффициентами, пропорциональными многочленам Лежандра $P_n(\cos H)$, где H — угол между векторами \mathbf{r} и $\boldsymbol{\varrho}$. Сохраняя члены до $n = 2$ включительно (приближение Хилла), получим

$$-\frac{\mathcal{E}_2}{G} = \frac{m_0m_1}{r} + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\varrho} + \frac{m_0m_1m_2}{m_0 + m_1} \frac{r^2}{\varrho^3} P_2(\cos H). \tag{7}$$

Согласно [9, 10], наибольшее по всем углам H значение отношения модулей градиентов (по компонентам вектора $\boldsymbol{\varrho}$) третьего и второго слагаемого \mathcal{E}_2 равно μ_2 .

Эта величина описывает влияние спутника на движение центра масс Q' относительно Солнца. Она настолько мала, что влиянием этим будем пренебрегать, считая, что вектор $\boldsymbol{\rho}$ описывает кеплеров эллипс. Тогда вторые слагаемые в (1) и (7) можно опустить как не зависящие от координат векторов $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$. Далее, уравнения Лагранжа второго рода не изменятся, если мы умножим $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на любую отличную от нуля постоянную. Заменяем функции $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ на $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$:

$$\mathcal{E}_3 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2, \quad -\mathcal{E}_4 = \frac{\varkappa^2}{r} + \frac{\varkappa^2 m_2}{m_0 + m_1} \frac{r^2}{\varrho^3} P_2(\cos H), \quad (8)$$

где $\varkappa^2 = G(m_0 + m_1)$. Задаваемая функциями (8) система имеет три с половиной степени свободы (неавтономная система с тремя степенями свободы).

Согласно [9, 10], наибольшее по всем углам H значение отношения модулей градиентов (по компонентам вектора \mathbf{r}) второго и первого слагаемого \mathcal{E}_4 равно μ_3 , так что последнее слагаемое \mathcal{E}_4 представляет собой малую возмущающую добавку. Переходя от энергий к гамильтониану $h = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$, получим

$$h = h_0 + \nu h_1 \quad (9)$$

при

$$h_0 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\varkappa^2}{r} = -\frac{\varkappa^2}{2a}, \quad -h_1 = \frac{r^2}{\varrho^3} P_2(\cos H), \quad \nu = \frac{\varkappa^2 m_2}{m_0 + m_1}. \quad (10)$$

Найдем явное выражение возмущающего гамильтониана h_1 через элементы. Прежде всего представим его в форме

$$h_1 = \frac{r^2}{2\varrho^3} - \frac{3(\boldsymbol{\rho}\mathbf{r})^2}{2\varrho^5}. \quad (11)$$

Введем систему отсчета с осью x , направленной в перицентр орбиты, описываемой вектором Солнце–барицентр пары „планета+спутник“ $Q_2Q' = \boldsymbol{\rho}$; осью y в плоскости орбиты в сторону движения и осью z по вектору площадей. В этой системе

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \theta' \\ \varrho \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{B} = (b_{nk})$ — матрица перехода от орбитальной плоскости, описываемой вектором Q_0Q , к плоскости xy :

$$\begin{pmatrix} \cos \Omega \cos g - c \sin \Omega \sin g & -\cos \Omega \sin g - c \sin \Omega \cos g & s \sin \Omega \\ \sin \Omega \cos g + c \cos \Omega \sin g & -\sin \Omega \sin g + c \cos \Omega \cos g & -s \cos \Omega \\ s \sin g & s \cos g & c \end{pmatrix}.$$

Найдем $\varrho \mathbf{r}$ как матричное произведение:

$$\begin{aligned} \varrho \mathbf{r} &= \varrho^* \mathbf{B} \mathbf{r} = \varrho r (\cos \theta', \sin \theta', 0) \begin{pmatrix} b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta \\ b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta \\ b_{31} \cos \theta + b_{32} \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= \varrho r [(b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta) \cos \theta' + (b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta) \sin \theta'], \end{aligned}$$

где (*) — символ транспонирования матрицы. Подставляя в (11), получим

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{r^2}{2\varrho^3} [1 - 3(b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta)^2 \cos^2 \theta' - 3(b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta)^2 \sin^2 \theta' - \\ &\quad - 6(b_{11} \cos \theta + b_{12} \sin \theta)(b_{21} \cos \theta + b_{22} \sin \theta) \cos \theta' \sin \theta']. \end{aligned} \quad (12)$$

Как принято в небесной механике, представим выражение в квадратных скобках в виде многочлена Фурье:

$$h_1 = \frac{r^2}{8\varrho^3} (B_1 + B_2 \cos 2\theta + B_3 \sin 2\theta), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= 4 - 3(b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{21}^2 + b_{22}^2) - 3(b_{11}^2 + b_{12}^2 - b_{21}^2 - b_{22}^2) \cos 2\theta' - \\ &\quad - 6(b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22}) \sin 2\theta', \\ B_2 &= -3(b_{11}^2 - b_{12}^2 + b_{21}^2 - b_{22}^2) - 3(b_{11}^2 - b_{12}^2 - b_{21}^2 + b_{22}^2) \cos 2\theta' - \\ &\quad - 6(b_{11}b_{21} - b_{12}b_{22}) \sin 2\theta', \\ B_3 &= -6(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}) - 6(b_{11}b_{12} - b_{21}b_{22}) \cos 2\theta' - 6(b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21}) \sin 2\theta'. \end{aligned}$$

2 Осредненный гамильтониан

Период изменения \mathbf{r} существенно меньше периода для ϱ , см. значения μ_3 на с. 3. Поэтому осреднение по средней аномалии M вполне оправдано на временах порядка десятка „месяцев“ (двух лунных месяцев для Харона). Осреднение по M' оправдано на интервале в десяток „лет“ ($2 \div 3$ тысячи земных лет для Харона), что, впрочем, невелико по космогоническим масштабам. По этим соображениям проведем сначала осреднение по M . Среднее значение нечетной функции равно нулю, а осреднение четной части h_1 сводится к нахождению коэффициентов Ганзена (8). Таким образом,

$$\bar{h}_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1 dM = \frac{a^2}{16\varrho^3} [B_1(2 + 3e^2) + 5B_2e^2]. \quad (14)$$

Дополнительное осреднение по M' дает:

$$\tilde{h}_1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{h}_1 dM' = \frac{a^2}{16(a'\sqrt{1-e'^2})^3} \{(2+3e^2)[4-3(b_{11}^2+b_{12}^2+b_{21}^2+b_{22}^2)] - 15e^2(b_{11}^2-b_{12}^2+b_{21}^2-b_{22}^2)\}. \quad (15)$$

Вычисляя входящие в (15) комбинации b_{nk} , получим

$$\tilde{h}_1 = \frac{a^2}{16(a'\sqrt{1-e'^2})^3} [-4 - 6e^2 + 6s^2 + 6e^2s^2(4 - 5\cos^2 g)]. \quad (16)$$

3 Интегралы движения

Консервативная система с гамильтонианом (16) обычно рассматривается в канонических элементах. Но это вовсе не обязательно. В кеплеровских элементах решение нагляднее. Просто в них определяющая симплектическое многообразие 2-форма ω имеет 6 слагаемых, а не 3:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\varkappa} = & \frac{1}{2\sqrt{a}} da \wedge dM + \frac{\sqrt{1-e^2}}{2\sqrt{a}} da \wedge dg + \frac{\sqrt{1-e^2} \cos i}{2\sqrt{a}} da \wedge d\Omega - \\ & - \frac{e\sqrt{a}}{\sqrt{1-e^2}} de \wedge dg - \frac{e\sqrt{a} \cos i}{\sqrt{1-e^2}} de \wedge d\Omega - \sqrt{a(1-e^2)} \sin i di \wedge d\Omega. \end{aligned} \quad (17)$$

Осреднение (даже однократное по M) устраняет зависимость гамильтониана от M , поэтому большая полуось a — интеграл движения. Далее, из двукратно осредненного гамильтониана исчезла зависимость от Ω , поэтому третья компонента вектора площадей $\varkappa\sqrt{a(1-e^2)} \cos i$ — интеграл движения. Наконец, двукратно осредненный гамильтониан не зависит от времени и тем самым является интегралом.

Замечание. Однократно осредненный гамильтониан \bar{h}_1 зависит явно и от Ω , как показывают несложные вычисления, и от времени (через θ'). Поэтому задача с гамильтонианом \bar{h}_1 имеет на два интеграла меньше и потому существенно сложнее.

Итак, мы имеем три интеграла движения: большая полуось, для которой не будем вводить новых обозначений, интеграл момента импульса

$$(1-e^2)(1-s^2) = \beta = \text{const} \quad (18)$$

и интеграл энергии $h_0 + \nu \tilde{h}_1 = \text{const}$, откуда и из постоянства a следует $\tilde{h}_1 = \text{const}$, или

$$s^2 - e^2 + e^2 s^2 (4 - 5 \cos^2 g) = \text{const} . \quad (19)$$

Подставляя сюда из (18) $s^2 = -e^2 + s^2 e^2 + \text{const}$, получим

$$e^2 (2 - 5s^2 \sin^2 g) = \gamma = \text{const} . \quad (20)$$

Отметим, что постоянные β, γ зависят только от начальных данных элементов e, s, g и не зависят ни от масс, ни от большой полуоси a спутника, ни от элементов орбиты планеты, что трудно было ожидать заранее.

Констатируем полное совпадение с результатами М.Л.Лидова [1, 2] и Кодзаи [3], полученными для ограниченной задачи. Фазовые кривые совпадают; отличие заключается только в скорости движения по ним.

4 Фазовые кривые

Полученные интегралы полностью описывают картину движения в фазовом пространстве \mathcal{D} . Его можно считать трехмерным с координатами e, s, g . На первый взгляд присутствие в левых частях (18, 20) лишь квадратов s и $\sin g$, фактическое возведение в квадрат интеграла площадей $\sqrt{1 - e^2} \cos i = \beta'$ приводят к потере части информации. Это не совсем так. Во-первых, динамическая система (16) определена при $0 \leq e < 1$. При $a = \text{const}$, $e \rightarrow 1$ эллипс вырождается в отрезок. В действительности из-за конечных размеров тел происходит падение спутника на планету (если он не разрушится раньше под действием приливных сил). Во-вторых, $\cos i$ сохраняет знак β' . Поскольку $0 \leq i \leq \pi$, наклон i при $\beta' \neq 0$ всегда остается либо острым, либо тупым. Переход от прямого движения к попятному невозможен. Если же $\beta' = 0$, то $i \equiv \pi/2$, $s^2 \equiv 1$. Таким образом, знак $\cos i$ достаточно знать в начальную эпоху, он не меняется, и движение однозначно описывается величиной s . Выбор последней оправдан симметрией интеграла (18) и близостью к симметрии интеграла (19). Что касается присутствия в интегралах лишь $\sin^2 g$, то полная информация о g дается по принципу аналитического продолжения.

Для определения скорости движения по фазовым кривым следует воспользоваться уравнениями Лагранжа [6]. Средняя аномалия нас не интересует, поэтому у функции h можно отбросить зависящие только от a слагаемые и пред-

ставить ее в виде

$$\tilde{h} = \varkappa \sqrt{a} \nu_1 h_2, \quad \nu_1 = \frac{3 \varkappa m_2 a^{3/2}}{4(m_0 + m_1)(a' \sqrt{1 - e^2})^3}, \quad 2h_2 = s^2 - e^2 + e^2 s^2 (4 - 5 \cos^2 g). \quad (21)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{e} &= 5\nu_1 e s^2 \sqrt{1 - e^2} \cos g \sin g, \\ \dot{s} &= -\frac{5\nu_1}{\sqrt{1 - e^2}} (1 - s^2) e^2 s \cos g \sin g, \\ \dot{g} &= \frac{\nu_1}{\sqrt{1 - e^2}} [2 - 2e^2 + 5(e^2 - s^2) \sin^2 g]. \end{aligned} \quad (22)$$

Для простоты перейдем от e, s к переменным $x = e^2, y = s^2$, изменяющимся в квадрате $\mathbb{K} = \{x, y : 0 \leq x < 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Уравнения движения (22) в новых переменных переходят в

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 10\nu_1 x y \sqrt{1 - x} \cos g \sin g, \\ \dot{y} &= -10\nu_1 x y \frac{1 - y}{\sqrt{1 - x}} \cos g \sin g, \\ \dot{g} &= \frac{\nu_1}{\sqrt{1 - x}} [2 - 2x + 5(x - y) \sin^2 g], \end{aligned} \quad (23)$$

а интегралы движения — в

$$(1 - x)(1 - y) = \beta, \quad (24)$$

$$x(2 - 5y \sin^2 g) = \gamma. \quad (25)$$

Заметим, что \tilde{h} и ν_1 имеют размерности $\text{м}^2/\text{с}^2$ и с^{-1} в системе СИ.

Уравнения (23) однозначно определяют e, i , поскольку $e \geq 0$, а $\cos i$ сохраняет знак.

Мы применили вышеизложенный подход к движению Харона. Оказалось, что большой наклон его планетоцентрической орбиты к плоскости гелиоцентрической орбиты Плутона индуцирует эффект Лидова–Кодзай, и эксцентриситет орбиты Харона может достигать больших значений, вплоть до 0.7, чего не наблюдается. Между тем сжатие Плутона, препятствующее нарастанию эксцентриситета, считается очень малым. Так что либо сжатие на самом деле значительно больше, либо действует еще некоторый неучтенный фактор (приливное воздействие, притяжение Юпитера, ...).

В настоящее время механизм Лидова-Кодзай широко используется при исследовании возможных движений экзопланет. Численное интегрирование [12] свидетельствует о более сложном поведении траекторий модельных экзопланетных систем, чем в вышеописанном интегрируемом случае. В работе [13] исследуется задача трех тел с учетом следующего после хилловского слагаемого в разложении потенциала („октупольное приближение“). Используя теорию возмущений (осреднение по циклам Лидова-Кодзай), авторы получили приближенное аналитическое описание движений в октупольном приближении, включая возможность изменения направления обращения планеты в ходе динамической эволюции, или так называемый флип. Эта последняя интересная возможность численно подтверждена на кафедре небесной механики СПбГУ; трудность здесь состоит в очень больших значениях эксцентриситета, которые достигаются при перевороте орбиты. Многие „горячие юпитеры“ обращаются не в том направлении, которое ожидается, в связи с этим изменение направления обращения планеты в ходе динамической эволюции представляет большой интерес [14]. Эффект Лидова-Кодзай видимо играет большую роль в эволюции системы HD 196885 AB [15].

Исследование модификаций эффекта Лидова-Кодзай, обусловленных различными возмущающими факторами, является сегодня одной из актуальных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-02-00804, 15-02-04340) и СПбГУ (грант 6.37.341.2015).

Список литературы

- [1] Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. Сб. „Искусственные спутники Земли“. Вып. 8. 1961. С. 5–45.
- [2] Лидов М.Л. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. Сб. „Проблемы движения искусственных небесных тел“. Вып. 8. М.: изд АН СССР, 1963. С. 119–134.
- [3] Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astronomical Journal*. 1962. Vol. 67. No 9. P. 591–598.

- [4] Lidov M.L., Siglin S.L. Non-restricted double-averaged three body problem in Hill's case // *Cel. Mech.* 1976, 13, P. 471–489.
- [5] Зиглин С.Л., Лидов М.Л. Случай Хилла осредненной задачи трех тел и устойчивость плоских орбит // *Прикл. матем. и мех.* 1977, т. 41, N 2, С. 234–244.
- [6] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
- [7] Холшевников К.В., Греб А.В., Кузнецов Э.Д. Разложение гамильтониана в ряд Пуассона по всем элементам (теория) // *Астрономический вестник.* 2001. Т. 35, № 3. С. 267–272.
- [8] <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/plutofact.html>
- [9] Antonov V.A., Kholchevnikov K.V. Die multidimensionale Ungleichung von Bernstein und die Abschätzung der Ableitungen des Gravitationspotentials // *Astronomische Nachrichten.* 1978. Bd. 299. Heft 3. S. 131–135.
- [10] Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.
- [11] Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел. СПб.: изд. СПбГУ, 2007. 180 с.
- [12] Sokolov L.L., Eskin B.B. On the Possible Resonant Orbits of Exoplanets // *Solar System Research.* 2009, V.43, N 1, pp. 82–87.
- [13] Katz B., Dong S., Malhotra R. Long-Term Cycling of Kozai-Lidov Cycles: Extreme Eccentricities and Inclinations Excited by a Distant Eccentric Perturber. arXiv: 1106.3340 v1 [astro-ph.EP] 16 Jun 2011.
- [14] Naoz S., Farr W.H., Lithwick Y., Rasio F.A., Teyssandier J. Hot Jupiters from secular planet-planet interactions // *Nature*, 12 May 2011, vol.437, pp. 187–189.
- [15] Satyal S., Hinse T.S., Quarles B., Noyola J.P. Chaotic dynamics of the planet in HD 196885 AB. arXiv: 1401.1268 v2 [astro-ph.EP] 18 Jun 2014.

**РЕЗОНАНС ЛИДОВА-КОЗАИ И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА ОРБИТАЛЬНУЮ ЭВОЛЮЦИЮ
ОКОЛОЗЕМНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

А.Г. Александрова, Т.В. Бордовицына, И.В. Томилова

Национальный исследовательский Томский государственный университет

aleksann@sibmail.com; tvbord@sibmail.com; irisha_tom@mail.ru

Введение

Вековой резонанс в движении искусственного спутника Земли, возникающий в результате обращения в нуль суммы вековых движений перицентра его орбиты под действием возмущений от сжатия Земли, а также гравитационного влияния третьего тела был впервые открыт М.Л. Лидовым в 1961 г. Аналогичные результаты для астероидов были получены И. Козаи в 1962 г. В настоящее время в отечественной и некоторой зарубежной литературе этот резонанс называется геометрическим резонансом Лидова–Козаи. М.Л. Лидовым было впервые показано, что влияние этого резонанса может быть очень значительным. Это влияние проявляется, прежде всего, в возрастании эксцентриситета орбиты спутника, что может приводить к столкновению спутника с Землей.

В общем виде классификация основной части вековых резонансов в движении ИСЗ была дана Дж. Куком (Cook, 1962).

М. Л. Лидовым (Lidov, 1962) были построены вековые эволюционные уравнения путем двукратного осреднения возмущающей функции по средним аномалиям спутника и возмущающего тела. М.Л. Лидовым и М.В. Ярской (Lidov, Yarskaya, 1974) для этой системы уравнений исследованы некоторые интегрируемые случаи. Подробно исследован случай компланарности плоскостей орбиты возмущающего тела и экватора сжатого центрального тела.

В работах М.А. Вашковьяка (Vashkov'yak, 1997; 1998a; 1998b; 1999a; 1999b), а также в совместных работах М.А. Вашковьяка и Н.М. Тесленко (Vashkov'yak, Teslenko, 2000; 2001) найдены и исследованы периодически эволюционирующие орбиты спутников в областях равного влияния сжатия центрального тела и притяжения третьего тела, как для компланарного, так и для некомпланарного случая. Рассмотренный М.А. Вашковьяком некомпланарный случай соответствует модельной задаче об эволюции орбиты спутника Земли с большой полуосью 42200 км под влиянием сжатия Земли и возмущений от Луны и Солнца.

В работах В.И. Прохоренко (Prokhorenko, 2001; 2006) исследована динамическая эволюция под действием вековых резонансов спутниковых орбит с

большими эксцентриситетами и наклонениями. Предложены некоторые принципиально новые методы исследования структуры возмущений, в частности, метод геометрического анализа решения ограниченной проблемы трех тел, полученного М.Л. Лидовым, а также методика анализа топологической структуры частных решений, ориентированная на использование при проектировании высоко-апогейных орбит.

В последние десять лет интерес к проблеме влияния вековых резонансов на орбитальную эволюцию околоземных объектов возрос в связи с изучением особенностей долговременной орбитальной эволюции отработавших объектов спутниковых радионавигационных систем (СРНС). В первых двух работах (Chao, Gick, 2004; Rossi, 2008), выполненных в указанном направлении, были впервые применены совместно аналитический и численный подходы к исследованию проблемы, однако модель движения третьего тела была выбрана той же, что и у предшествовавших авторов. Основное внимание в этих работах было уделено объектам системы GPS и будущей системы ГАЛИЛЕО.

Авторами настоящей работы был проведен численно-аналитический эксперимент по исследованию особенностей влияния на динамику околоземных космических объектов 29 вековых резонансов низких порядков, алгебраические выражения для которых приведены в (Бордовицына, Томилова, Чувашов, 2012). Основные орбитальные параметры варьировались в следующем диапазоне: наклонение от 0° до 90° , большая полуось от 8000 до 65000 км. Для удобства все резонансные соотношения пронумерованы, резонансу Лидова–Козаи присвоен номер 29.

Для всех модельных объектов и для каждого из 29 резонансов были получены результаты моделирования орбитальной эволюции объектов на интервале времени 100 лет, а также динамические портреты всех резонансов, содержащие сведения об изменениях на том же интервале времени резонансного соотношения и критического аргумента, а также фазовый портрет резонанса в плоскости, связывающей изменения эксцентриситета и критического аргумента. Обзор полученных результатов приведен в (Бордовицына, Томилова, 2013; Александрова, Бордовицына, Томилова, 2014). Эти результаты показали, что влияние резонанса Лидова–Козаи является наиболее значительным. Поэтому с целью уточнения границ действия резонанса Лидова–Козаи в околоземном орбитальном пространстве численный эксперимент был расширен по большой полуоси до 120000 км. В данной работе мы объединяем результаты, касающиеся резонанса Лидова Козаи, и рассматриваем их достаточно подробно.

Методика исследования

Возмущающая функция, описывающая влияние на спутник Земли третьего тела, может быть выражена через элементы орбиты следующим образом (Мюррей, Дермот, 2010):

$$R = \frac{\mu'}{a'} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \sum_{\bar{m}=0}^l (-1)^{l-\bar{m}} \chi_{\bar{m}} \frac{(l-\bar{m})!}{(l+\bar{m})!} \times \sum_{p,p'=0}^l F_{l\bar{m}p}(i) F_{l\bar{m}p'}(i') \times \times \sum_{q,q'=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) X_{l-2p'+q'}^{-l-1,l-2p'}(e') \times \cos \psi, \quad (1)$$

где $\alpha = a/a'$, $\mu' = Gm'_{L,S}$ – произведение гравитационной постоянной на массу возмущающего тела (Луны (L) или Солнца (S)), $F\dots(i)$ – функция наклона, $X\dots(e)$ – функция эксцентриситета, аргумент ψ имеет следующий вид:

$$\psi = (l-2p'+q')\lambda' - (l-2p+q)\lambda - q'\varpi' + q\varpi + + (\bar{m}-l+2p')\Omega' - (\bar{m}-l+2p)\Omega. \quad (2)$$

Здесь $\lambda = \varpi + M$, $\lambda' = \varpi' + M'$ – средние долготы спутника и третьего тела, $\varpi = \Omega + \omega$, $\varpi' = \Omega' + \omega'$ – долготы перицентров орбит спутника и возмущающего тела, $a, i, e, \Omega, \omega, M$ – большая полуось, наклонение, эксцентриситет, долгота восходящего узла, аргумент перигея, средняя аномалия орбиты спутника, $a', i', e', \Omega', \omega', M'$ – такие же элементы орбиты возмущающего тела. Элементы i, Ω, i', Ω' отнесены к экватору Земли.

Будем считать, что спутник подвержен влиянию сжатия Земли, описываемого второй зональной гармоникой геопотенциала, а также притяжению Луны и Солнца, которые рассматриваются как материальные точки, движущиеся по эллипсам с вращающимися линиями аписид и узлов. При сделанных предположениях аргумент разложения возмущающей функции в ряд (1) в однократно осредненной задаче будет иметь следующий вид

$$\underline{\psi} = (l-2p'+q')M' - (l-2p)\omega + (l-2p')\omega' - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \quad (3)$$

а в двукратно осредненной задаче запишется как

$$\underline{\underline{\psi}} = (l-2p')\omega' - (l-2p)\omega - \bar{m}(\Omega - \Omega'), \quad (4)$$

причем

$$M' = M'_0 + \dot{n}'(t-t_0), \quad \omega' = \omega'_0 + \dot{\omega}'(t-t_0), \quad \Omega' = \Omega'_0 + \dot{\Omega}'(t-t_0), \quad (5)$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}(t-t_0), \quad \Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t-t_0).$$

Условие возникновения резонанса можно представить в виде

$$\underline{\dot{\psi}} \approx 0, \quad \underline{\dot{\psi}} \approx 0. \quad (6)$$

Будем называть выражения (6) резонансными соотношениями. Вековые частоты в движении спутника

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{J_2} + \dot{\Omega}_L + \dot{\Omega}_S, \quad \dot{\omega} = \dot{\omega}_J + \dot{\omega}_L + \dot{\omega}_S$$

определяются как влиянием второй зональной гармоники

$$\dot{\Omega}_{J_2} = -\frac{3}{2} J_2 \bar{n} \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \cos i (1 - e^2)^{-2}, \quad \dot{\omega}_{J_2} = \frac{3}{4} J_2 \bar{n} \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^2}, \quad (7)$$

так и влиянием третьего тела: Луны (L) и Солнца (S)

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_{L,S} &= -\frac{3}{16} \bar{n} \frac{m'_{L,S}}{m_{\oplus}} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \frac{2 + 3e^2}{\sqrt{1 - e^2}} (2 - 3 \sin^2 i') \cos i, \\ \dot{\omega}_{L,S} &= \frac{3}{16} \bar{n} \frac{m'_{L,S}}{m_{\oplus}} \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \frac{4 - 5 \sin^2 i + e^2}{\sqrt{1 - e^2}} (2 - 3 \sin^2 i'). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь e, i, \bar{n} – эксцентриситет, наклонение и среднее движение спутника, e', i' – эксцентриситет и наклонение орбиты третьего тела, $m'_{L,S}/m_{\oplus}$ – отношение масс третьего тела $m'_{L,S}$ и Земли m_{\oplus} . В данных формулах отчетливо прослеживается зависимость величины частот от наклонения орбиты спутника, поэтому такого рода резонансы называют зависимыми от наклонения.

Методика выявления того или иного резонанса в орбитальной динамике объекта сводится к исследованию малости соотношений (6) для различных наборов индексов l, p, p', q, q' и \bar{m} . Далее для тех же значений индексов рассматривается эволюция во времени соотношений (3) и (4), так называемых критических аргументов. Это необходимо (Мюррей, Дермот, 2010; Morbidelly, 2002) для того, чтобы установить, какой характер имеют резонансные конфигурации: устойчивый при либрационном изменении соотношений (2), или неустойчивый при циркуляционном изменении. Для той же цели используются динамические портреты вековых резонансов, которые строятся в фазовой плоскости (Morbidelly, 2002)

$$x = e \cos \psi, \quad y = e \sin \psi,$$

где e – эксцентриситет орбиты спутника, ψ – критический аргумент, представленный в виде (2).

При исследовании долговременной эволюции во времени соотношений (2) - (4) значения элементов орбиты спутника определяются с помощью численно-

го интегрирования уравнений движения объекта. Вычисленные таким образом элементы являются оскулирующими и содержат короткопериодические колебания, но эти колебания усредняются при графическом представлении результатов, полученных на больших временных интервалах.

Полагая индексы, равными $l=2$; $p, p', \bar{m} = 0, 1, 2$; $q, q' = -1, 0, 1$, мы получили 29 резонансов низких порядков. Резонанс Лидова–Козаи имеет место во всех случаях, когда $l - 2p \neq 0$.

Для расчета эволюции во времени орбитальных элементов используется программный комплекс «Численная модель движения систем ИСЗ» описанный нами в (Бордовицына и др., 2009). Комплекс дополнен программой вычисления параметров MEGNO (Бордовицына, Александрова, Чувашов, 2010). Комплекс имеет следующую структуру. Уравнения движения совместно с уравнениями параметров MEGNO (Volk et al., 2009), записанные в инерциальной системе координат, интегрируются численно с помощью интегратора Гаусса–Эверхарта высокого порядка (Авдюшев, 2010). Потенциал гравитационного поля Земли представлен в виде разложения по шаровым функциям в системе координат, жестко связанной с Землей. Шаровые функции, их первые и вторые частные производные по координатам вычисляются с использованием рекуррентного алгоритма Каннингема (Cunningham, 1970). Все параметры разложения потенциала Земли берутся из модели геопотенциала EGM96, имеющей 360 порядок и степень. При вычислении возмущений от Луны и Солнца используется фонд координат больших планет DE406/LE406, предназначенный для исследования долговременной орбитальной эволюции космических объектов.

Параметры MEGNO (Mean Exponential Growth of Nearby Orbit (Cincotta, Girdano, Simo, 2003) используются для выявления хаотичности в движении объектов. Параметр MEGNO $Y_\phi(t)$ представляет собой взвешенную по времени интегральную форму ляпуновского характеристического числа. А усредненный параметр $\bar{Y}_\phi(t)$ вычисляется как интегральное среднее от $Y_\phi(t)$. Эволюция параметров MEGNO $Y_\phi(t)$, $\bar{Y}_\phi(t)$ во времени обладает рядом особенностей для различных типов орбит. Так, например, известно, что для квазипериодических (регулярных) орбит $Y_\phi(t)$ осциллирует около 2. Более того, для квазипериодических орбит $\bar{Y}_\phi(t)$ всегда равно 2, а для устойчивых орбит типа гармонического осциллятора $\bar{Y}_\phi(t) = 0$.

Расширенный программный комплекс реализован на кластере «Скиф Cyberia», который по своей структуре является распределенной вычислитель-

ной системой, что позволяет задействовать в процессе обработки данных ресурсы, как оперативной памяти узла, так и процессорной памяти. Данные по оценке точности прогнозирования движения с помощью описанного программного комплекса приведены в нашей работе (Бордовицына, Томилова, Чувашов, 2012). Оценки получены по результатам прямого и обратного интегрирования. Они показывают, что при работе на 64 битной разрядной сетке на 100 летнем интервале времени гарантирована точность 10 метров, а на 128 битной сетке – миллиметровая точность. Таким образом, при использовании 128 битной сетки можно заниматься исследованием эволюции объектов на интервалах времени до 1000 лет.

Описание результатов численно–аналитического эксперимента.

Для выявления распространенности резонанса Лидова-Козаи в околоземном орбитальном пространстве были взяты результаты численного эксперимента, охватывающие область орбитального пространства в диапазоне больших полуосей от 8000 км до 120000 км и наклонениями от 0° до 90° . Для диапазона больших полуосей от 8000 до 45000 км был выбран шаг равный 1000 км, от 45000 до 60000 км – 200 км, и от 60000 до 120000 км – 100 км. Шаг по наклонению составил 5° . Эксцентриситет был выбран равным 0.001.

Для каждого модельного объекта была определена орбитальная эволюция основных элементов его орбиты: большой полуоси a , эксцентриситета e и наклонения i , на интервале времени 100 лет. Для расчета динамической эволюции использовался программный комплекс «Численная модель движения систем ИСЗ» (Бордовицына и др., 2009). При этом учитывались следующие возмущающие факторы: несферичность Земли, притяжение Луны и Солнца. Уравнения движения интегрировались методом Эверхарта 19 порядка. Были построены динамические портреты резонансов, содержащие сведения об изменениях на столетнем интервале времени резонансного соотношения и критического аргумента, а также фазовые портреты резонанса в плоскости, связывающей изменения эксцентриситета и критического аргумента. Это позволило выделить области орбитального пространства с различным поведением критического аргумента: чистой либрацией; участки либрации, смешанные с циркуляцией; и области с чистой циркуляцией.

В обобщенном виде результаты этого анализа приведены на Рис.1

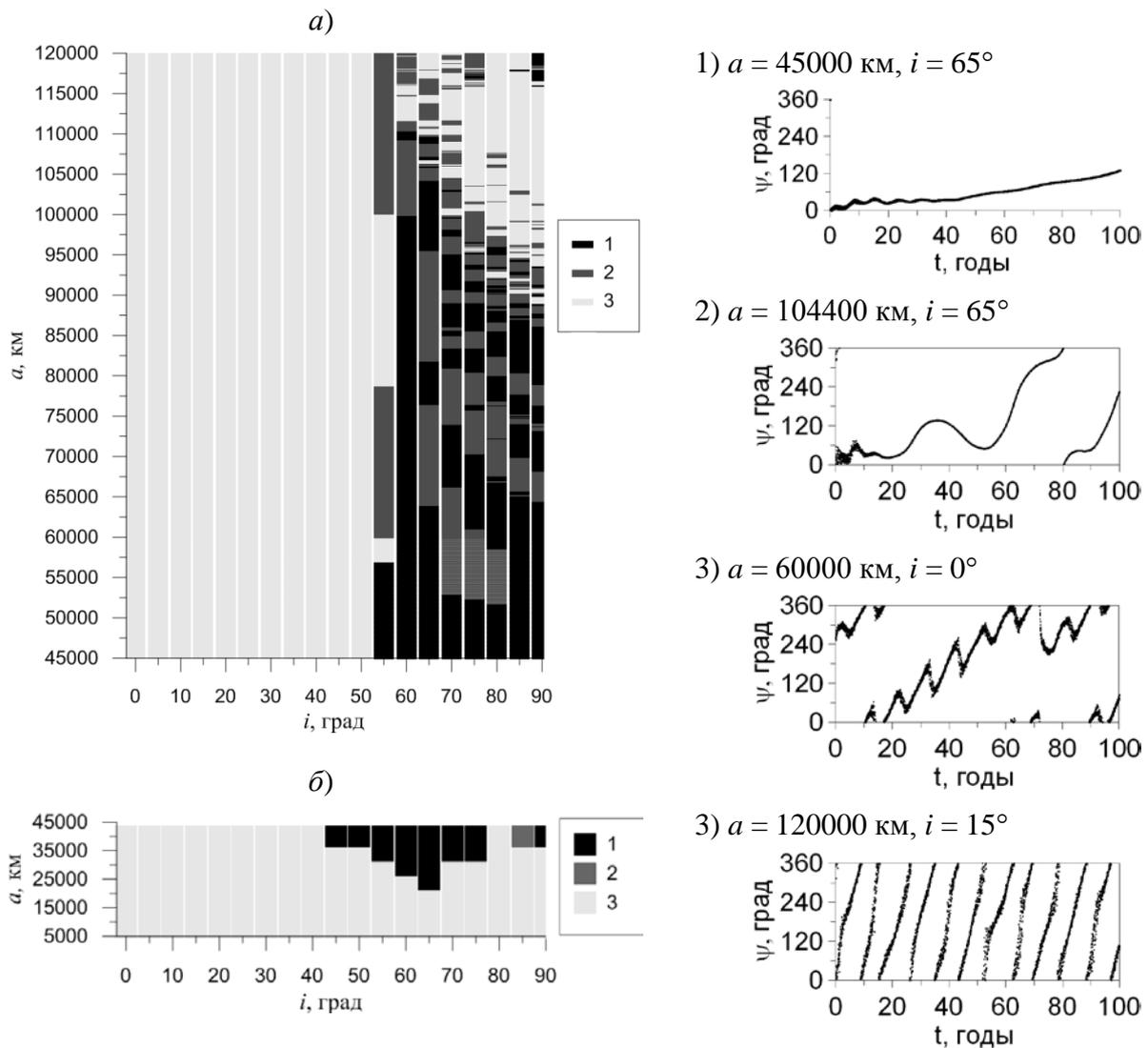


Рис 1. Распределение различных типов резонанса Лидова–Козаи в околоземном орбитальном пространстве по параметрам a , i .

На рисунке слева, графики *a)* и *б)*, даны схемы распределения различных типов конфигурации возмущающих факторов, приводящих к появлению резонанса Лидова–Козаи, в зависимости от величины большой полуоси и наклона на начальный момент времени. На данном графике выделены три конфигурации в соответствии с типами поведения критического аргумента для резонанса Лидова–Козаи: 1) чистая либрация, которая соответствует устойчивой конфигурации, 2) либрация, смешанная с циркуляцией – переход от устойчивой

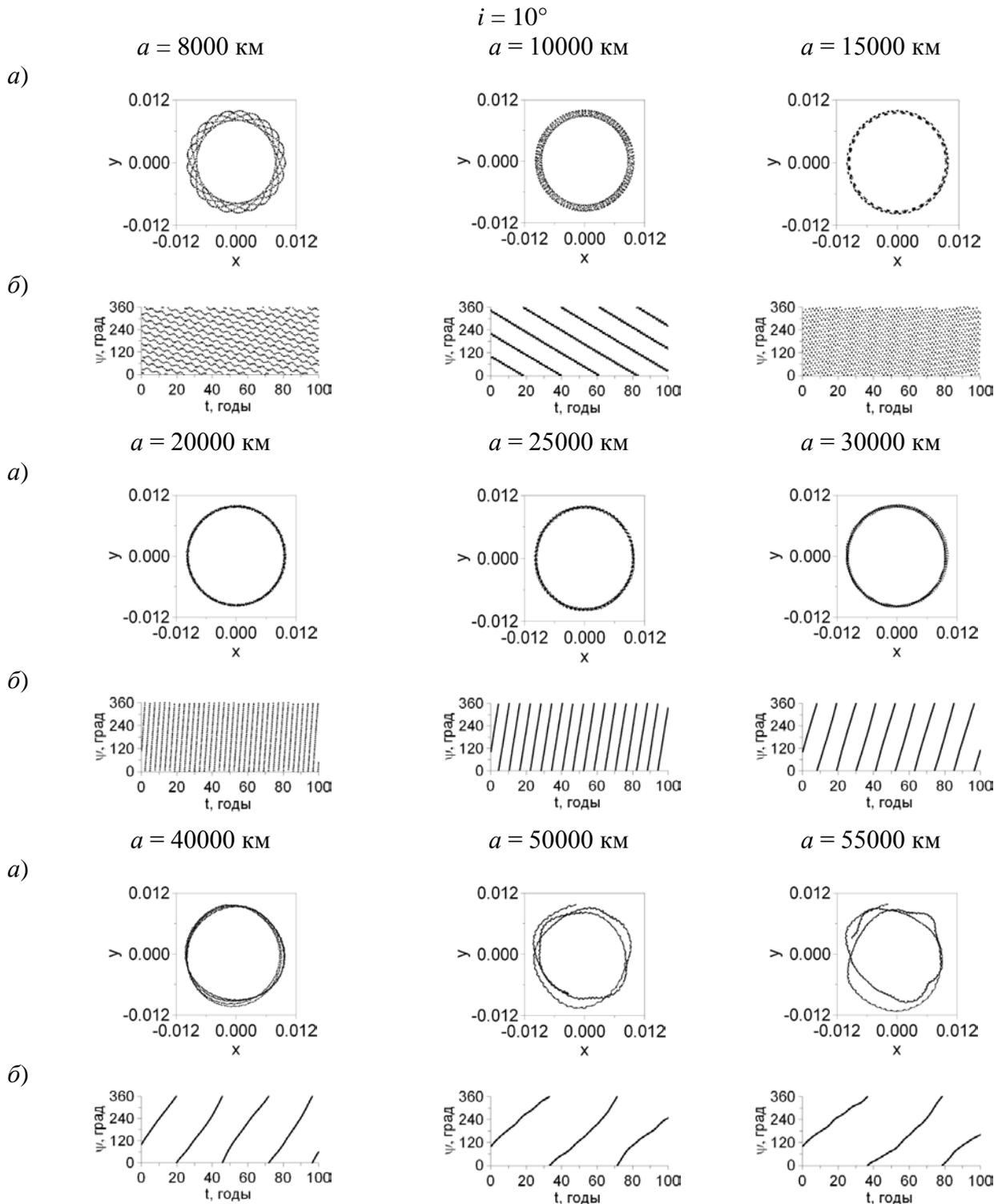


Рис. 2. Динамический портрет векового резонанса Лидова-Козаи $\dot{\psi}_{29} = \dot{\omega} \approx 0$ и эволюция критического аргумента ψ_{29} для ряда модельных объектов с малым наклоном; а) фазовый портрет в плоскости $x = e \cos \psi_{29}$, $y = e \sin \psi_{29}$; б) эволюция критического аргумента ψ_{29} на интервале 100 лет

конфигурации к неустойчивой и обратно, 3) чистая циркуляция – неустойчивая конфигурация. На рисунке 1 справа приведены примеры поведения критического аргумента на столетнем интервале времени для каждого типа резонанса. Для случая 3) показаны два различных примера циркуляционного изменения критического аргумента. График б) на рисунке 1 позволяет определить нижние границы большой полуоси и наклона, на которых начинается действие резонанса Лидова–Козаи. Остановимся на определении этих границ подробнее.

На рисунках 2 – 4 приведены фазовые портреты резонанса Лидова–Козаи $\dot{\psi}_{29} = \dot{\omega} \approx 0$ в плоскости $x = e \cos \psi_{29}$, $y = e \sin \psi_{29}$, которые иллюстрируют в деталях общие данные, приведенные на рис. 1.

На рисунке 2 приведены динамические портреты резонанса Лидова–Козаи, которые показывают, что на орбитах с небольшими наклонами нет устойчивых конфигураций резонанса Лидова–Козаи.

Данные, приведенные на рис.3, показывают, что при наклоне $i = 45^\circ$, устойчивые конфигурации резонанса Лидова–Козаи возникают у объектов с большими полуосями от 40000 км и выше. Графики на рис.4 говорят о том, что при наклоне $i = 55^\circ$ область устойчивого резонанса начинается с 30000 км по большой полуоси, а для наклонов $60^\circ - 65^\circ$ нижняя граница опускается до 26000 – 25000 км и затем при $i = 70^\circ$ вновь поднимается до 30000 км. Насколько позволяют судить оценки, приведенные на рис 1, модельные объекты с наклонами около 60° показывают наличие устойчивого резонанса Лидова–Козаи в широком диапазоне больших полуосей от 25000 до 110000 км. Причем как раз нижняя граница приходится на орбиты объектов системы ГЛОНАСС. Как показано в (Бордовицына, Томилова, Чувашов, 2014), устойчивое влияние этого резонанса на отработавшие объекты системы ГЛОНАСС приводит к возрастанию эксцентриситетов их орбит. Движение объектов при этом остается регулярным.

В целом воздействие векового резонанса Лидова–Козаи на движение околоземных объектов проявляется в большой области орбитального пространства почти круговых орбит с наклонами от 45° до 90° и в диапазоне больших полуосей от 25000 до 120000 км. Причем верхняя граница резонансной области постепенно опускается с ростом наклона от 70° до 90° . На высоких приполярных орбитах имеется обширная область, где влияние резонанса Лидова–Козаи отсутствует.

$$e = 0.01, i = 45^\circ$$

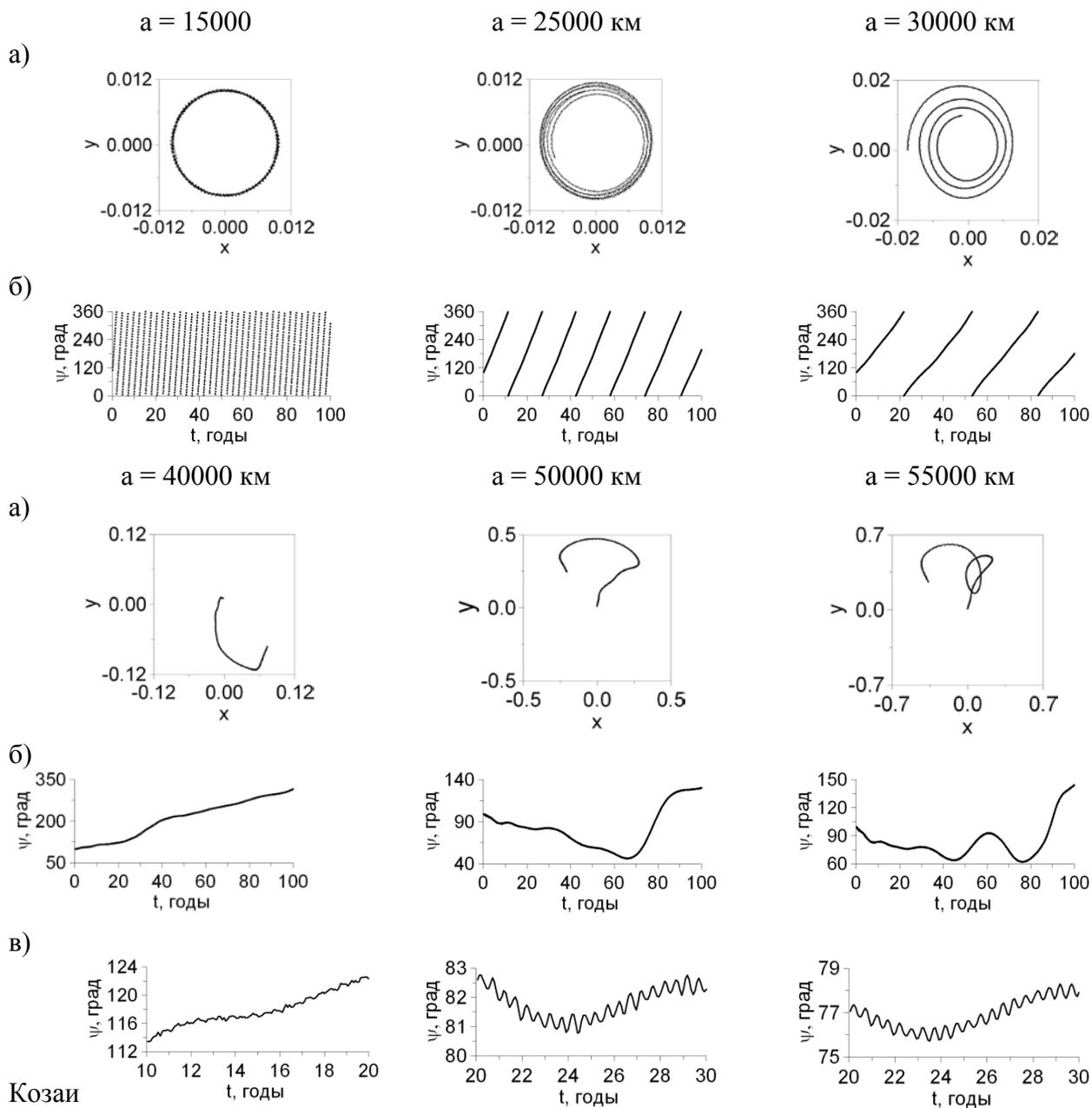


Рис. 3. Динамический портрет векового резонанса Лидова-Козаи $\dot{\psi}_{29} = \dot{\omega} \approx 0$ и эволюция критического аргумента ψ_{29} для ряда модельных объектов наклонением орбиты $i = 45^\circ$; а) фазовый портрет в плоскости $x = e \cos \psi_{29}$, $y = e \sin \psi_{29}$; б) эволюция критического аргумента ψ_{29} на интервале 100 лет; в) фрагмент рисунка б) на интервале 10 лет.

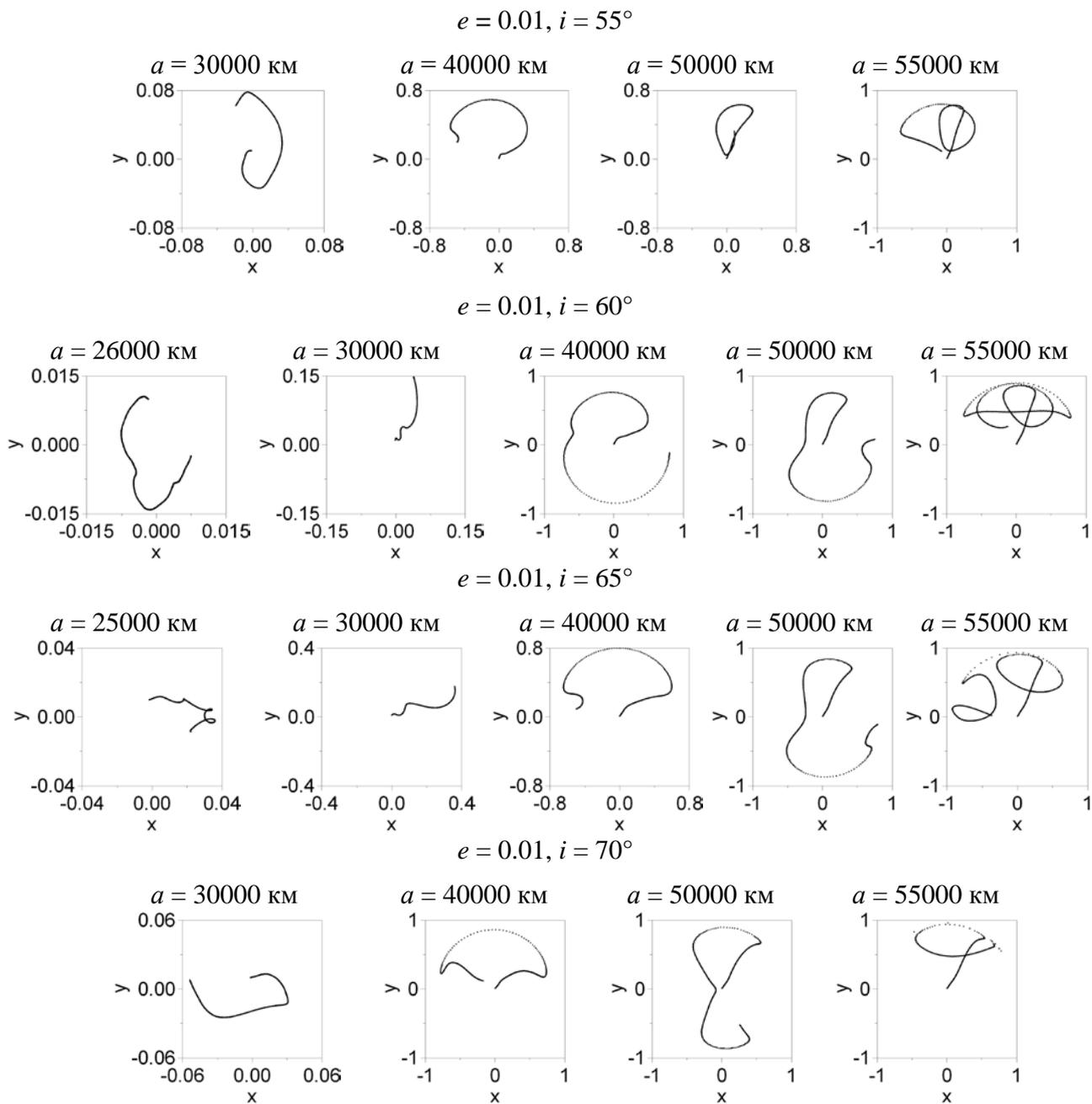


Рис. 4. Динамический портрет векового резонанса Лидова-Козаи $\dot{\psi}_{29} = \dot{\omega} \approx 0$ для модельных объектов с наклонениями от 55° до 70°

Влияние на орбитальную эволюцию

Рассмотрим влияние резонанса Лидова-Козаи на долговременную орбитальную эволюцию околоземных объектов. Нужно сказать, что в областях действия резонанса Лидова-Козаи выбрать объекты, которые были бы подвержены влиянию только этого резонанса, сложно, поскольку действие большинства резонансов также приходится на эту область околоземного пространства (Томи-

лова, Бордовицына, Чувашов, 2013), но все-таки несколько таких объектов найти удалось.

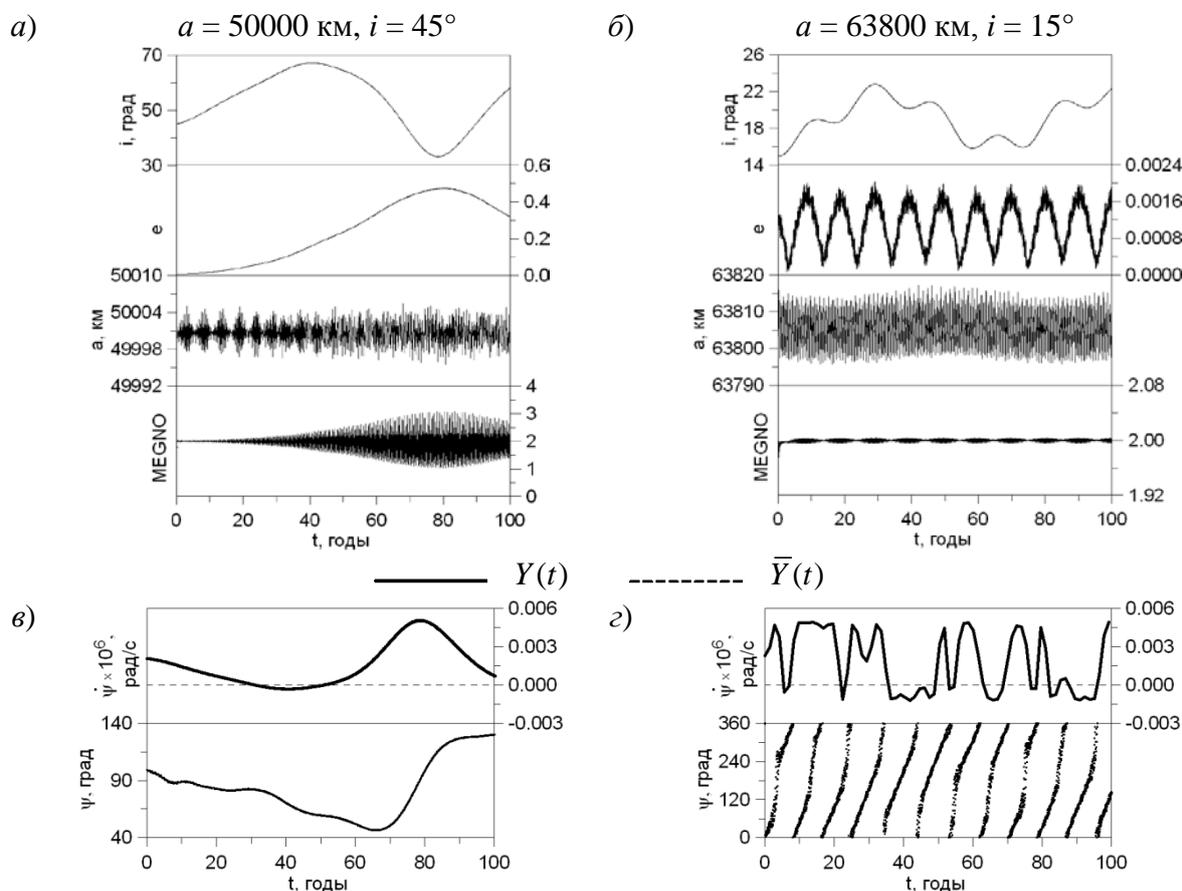


Рис.5 Орбитальная эволюция объектов с регулярным движением.

a) объект, подверженный действию устойчивого резонанса Лидова–Козаи, *б)* объект с неустойчивым действием резонанса Лидова–Козаи.

в) и *г)* соответствующие этим объектам изменения во времени резонансного соотношения и критического угла.

На рис.5 показана орбитальная эволюция двух объектов, один из которых (график *a*) подвержен влиянию устойчивого резонанса Лидова–Козаи, о чем свидетельствует поведение резонансного соотношения и критического аргумента, и объект (график *б*), на который резонанс Лидова–Козаи практически не влияет, поскольку конфигурация неустойчива, критический аргумент циркулирует. В первом случае наблюдается долгопериодическое возрастание эксцентриситета орбиты, во втором случае эксцентриситет сохраняет свое первоначальное значение.

На рис. 6 приведены данные по орбитальной эволюции двух объектов подверженных устойчивому влиянию резонанса Лидова–Козаи. В том и другом случае резонансное соотношение переходит через нулевое значение, а критический аргумент либрирует. Оба объекта имеют долгопериодические колебания эксцентриситета с большой амплитудой.

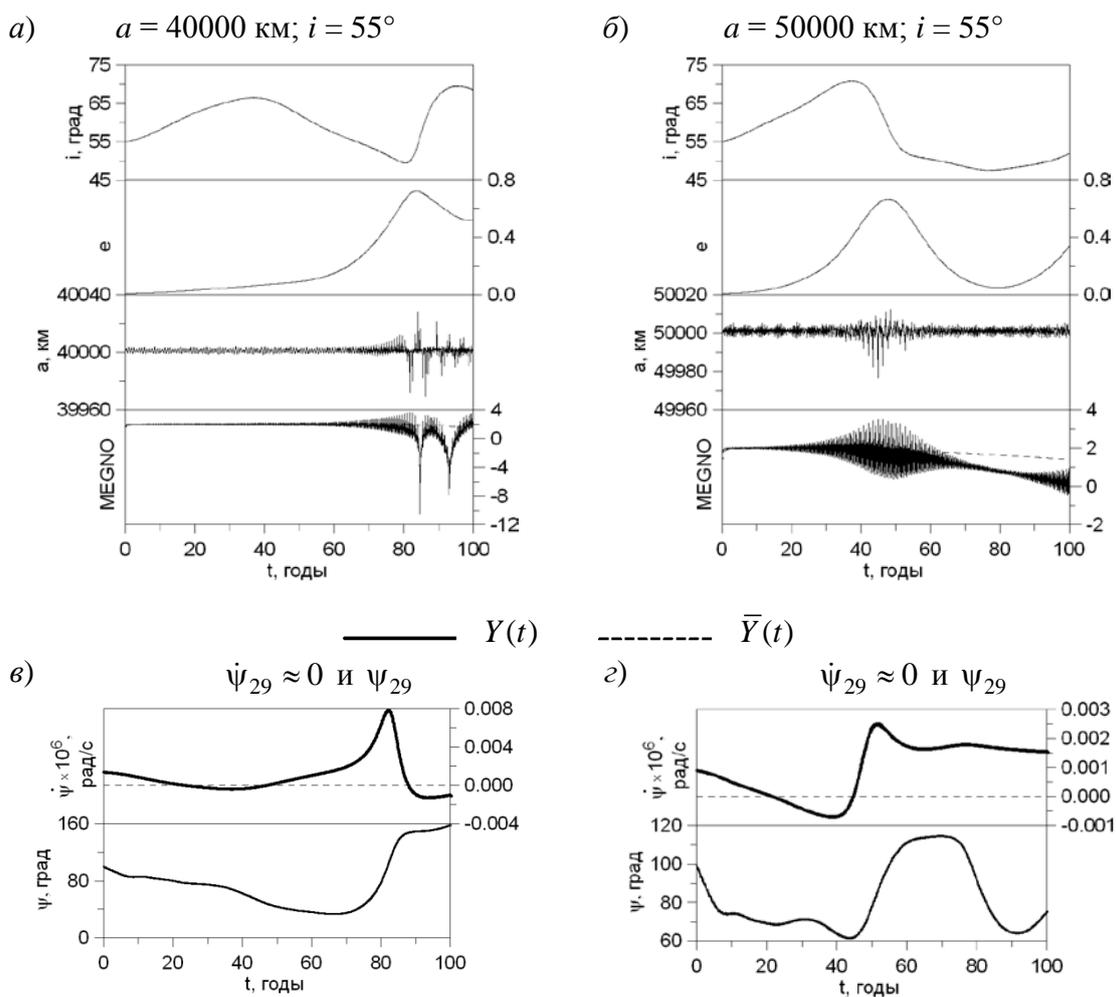


Рис.6. Орбитальная динамика модельных объектов при наличии устойчивого векового резонанса Лидова-Козаи. *а), б)* долговременная орбитальная эволюция элементов орбит и параметров MEGNO; *в), г)* изменение во времени резонансного соотношения $\dot{\psi}_{29} = \dot{\omega} \approx 0$ и его критического аргумента

На рис. 7 представлены более сложные случаи движения, связанные с влиянием на объекты помимо резонанса Лидова–Козаи других вековых резонансов.

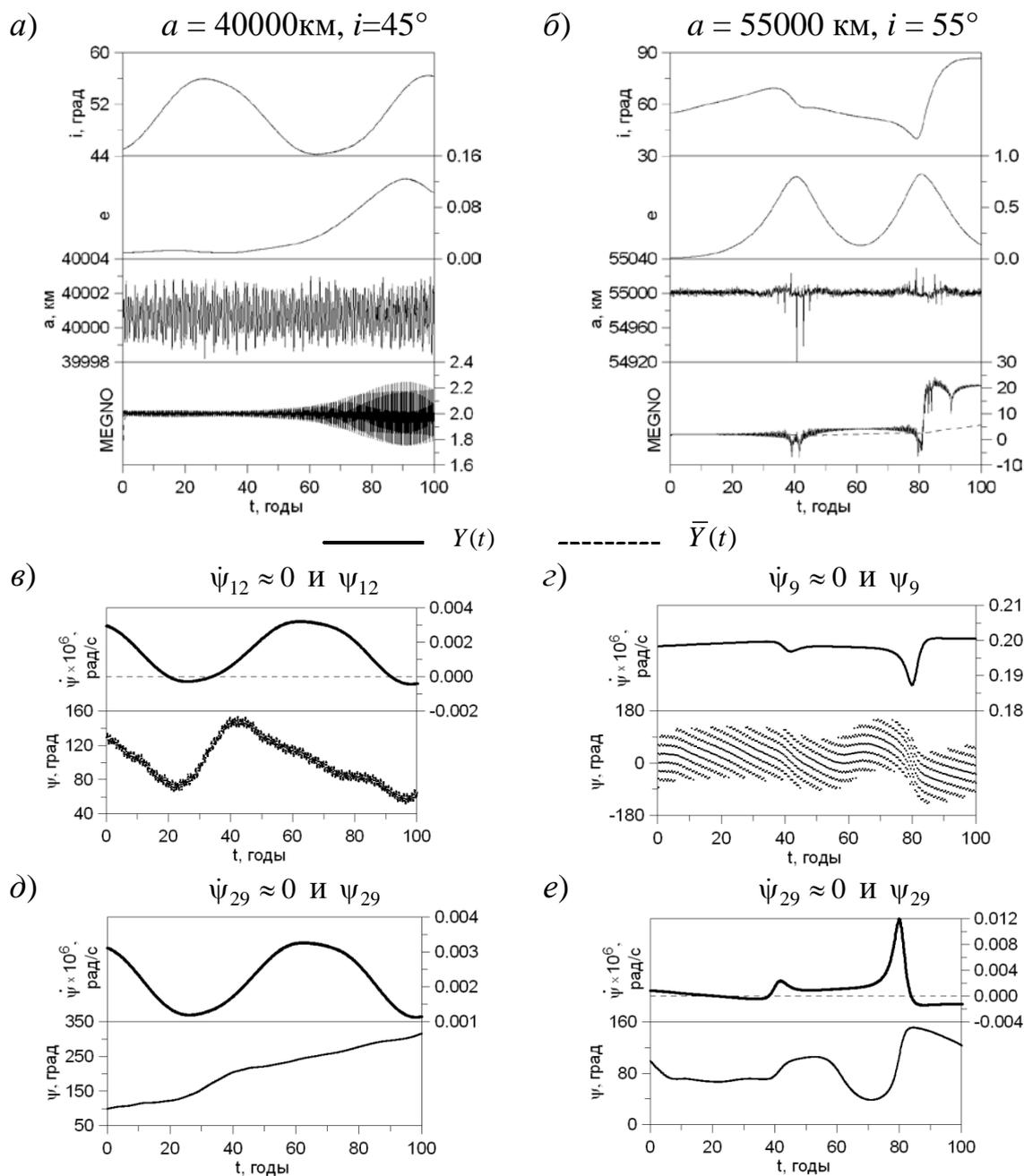


Рис.7 — Орбитальная динамика модельных объектов, в структуре возмущений которых присутствует влияние резонанса Лидова-Козаи. *а), б)* долговременная орбитальная эволюция элементов орбит и параметров MEGNO; *в) – е)* изменение во времени резонансных соотношений и их критических аргументов

На графике *а)* показана орбитальная эволюция объекта, на который помимо резонанса Лидова–Козаи действует апсидально-нодальный резонанс $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}'_S) + 2\dot{\omega} - 2\dot{\omega}'_S$, связанный с Солнцем. А на графике *б)* приведены данные об

орбитальной эволюции объекта, на который вместе с резонансом Лидова–Козаи действует резонанс $M'_S - \dot{\omega} + \dot{\omega}'_S$, связанный со средним движением Солнца.

В первом случае (графики *a*, *в* и *д*) влияние резонанса Лидова–Козаи следует считать слабым – резонансное соотношение не переходит через нулевое значение и критический аргумент скорее циркулирует, нежели либрирует. Влияние апсидально-нодального резонанса можно считать более уверенным. Этот резонанс также способен вызывать рост и долгопериодические колебания эксцентриситета орбиты (Rossi, 2008 Бордовицына, Томилова, 2014), но менее значительные, чем резонанс Лидова–Козаи, что мы и наблюдаем в данном случае.

В орбитальной эволюции объекта, приведенного на графике *б*, имеет место устойчивое влияние резонанса Лидова–Козаи, но в то же время на него действует вековой резонанс, связанный со средним движением Солнца. Влияние этого последнего резонанса можно считать слабым, так как его резонансное соотношение нигде не переходит через нулевое значение. В то же время его критический аргумент ведет себя сложным образом. В движении объекта наблюдается хаотичность, причем она появляется при достижении эксцентриситетом величины, большей 0.6 и при переходе критического аргумента резонанса Лидова–Козаи с одного уровня либрирования на другой.

Заключение

Таким образом, резонанс Лидова–Козаи распространен в значительной части орбитального пространства почти круговых орбит в диапазоне больших полуосей от 25000 до 110000 км и в диапазоне наклонений орбит от 45° до 90°. Область полностью устойчивого резонанса Лидова–Козаи вытянута вдоль наклонения, близкого к 60° для значений больших полуосей от 25000 до 110000 км.

Резонанс Лидова–Козаи оказывает заметное влияние на орбитальную эволюцию околоземных объектов, которое проявляется в возрастании и долгопериодическом изменении эксцентриситета с большой амплитудой колебаний.

Для орбит с большими эксцентриситетами общие закономерности эволюции сохраняются, однако рост эксцентриситета идет значительно быстрее (Бордовицына, Томилова, 2014).

Что касается объектов с обратным движением, то предварительное исследование, выполненное на интервале времени 50 лет, показывает некоторую симметрию распределения областей устойчивого влияния резонанса Лидова–

Козаи относительно оси $i = 90^\circ$. Однако этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Данное научное исследование выполнено при поддержке Программы «Научный фонд им. Д.И. Менделеева Томского государственного университета» (проект 8.1.54.2015).

Список литературы

1. Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса-Эверхарта// Вычислительные технологии. 2010. Т.15. № 4. С. 31 – 47.
2. Александрова А.Г., Томилова И.В., Бордовицына Т.В. Анализ влияния вековых резонансов на динамическую эволюцию околоземных объектов, движущихся по почти круговым орбитам в области супер-ГЕО // Изв. вузов. Физика. 2014. № 10/2. С. 95 – 102.
3. Бордовицына Т.В, Авдюшев В.А., Чувашов И.Н., Александрова А.Г., Томилова И.В. Численное моделирование движения систем ИСЗ в среде параллельных вычислений // Изв. вузов. Физика. 2009. №. 10/2. С. 5 – 11.
4. Бордовицына Т.В., Александрова А.Г., Чувашов И.Н. Комплекс алгоритмов и программ для исследования хаотичности в динамике искусственных спутников Земли // Изв. вузов. Физика. 2010. № 8/2. С. 14 – 21.
5. Бордовицына Т.В., Томилова И.В. Вековые резонансы в динамической эволюции околоземных космических объектов на вытянутых орбитах // Изв. вузов. Физика. 2014. № 4. С. 84 – 91.
6. Бордовицына Т.В., Томилова И.В., Чувашов И.Н. Влияние вековых резонансов на долговременную орбитальную эволюцию неуправляемых объектов спутниковых радионавигационных систем в области МЕО// Астрон. вестн. 2012. Т. 46, № 5. С. 356 – 368.
7. Бордовицына Т.В. , Томилова И.В., Чувашов И.Н. Вековые резонансы как источник динамической хаотичности в долговременной орбитальной эволюции неуправляемых спутников // Астрон. Вест. — 2014 — Т. 48. № 4. — С.280–289.
8. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит. 2009. 588 с.
9. Прохоренко В.И. Геометрическое исследование решений ограниченной круговой двукратно осредненной задачи трех тел // Космич. исслед. 2001. Т. 39. № 6. С. 622.
10. Прохоренко В.И. Долговременная эволюция орбит ИСЗ под влиянием гравитационных возмущений, обусловленных сжатием Земли, с учетом возмущений от третьих тел// Изв. вузов. Физика. 2006. № 2. С. 63 – 73.

11. Томилова И.В., Бордовицына Т.В., Чувашов И.Н. Вековые резонансы как фактор орбитальной эволюции околоземных объектов // Изв. вузов. Физика. 2013b. № 6/3. С. 238 – 240.
12. Chao C., Gick R., Long-term evolution of navigation satellite orbits // *Adv. Space Res.* 2004. V. 34. P 1221 – 1226.
13. Cincotta P.M., Girdano C.M., Simo C., Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits // *Physica D.* 2003. V. 182. P. 151 – 178.
14. Cunningham L.E., On the Computation of the Spherical Harmonic Terms Needed During the Numerical Integration of the Orbital Motion of an Artificial Satellite // *Cel. Mech.* 1970. V. 2, P. 207 – 216
15. Cook G.E. Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite // *Geophys. J.* 1962. V.6. № 3. P. 271 – 291.
16. Lidov M.L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies // *Planetary and Space Science*, 1962 V. 9, Is. 10, P. 719 – 759.
17. Lidov M.L., Yarskaya M.V. Integrable Cases in the Problem of the Evolution of a Satellite Orbit under the Joint Effect of an Outside Body and of the Non-centrality of the Planetary Field // *Cosmic Research*. Sept. 1974. V. 12. No. 2. P. 139 – 152.
18. Morbidelli, A. *Modern celestial mechanics: aspects of solar system dynamics* // London: Taylor & Francis. 2002. 380 p.
19. Rossi A. Resonant dynamics of Medium Earth Orbits: space debris // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2008. V. 100 P. 267 – 286.
20. Valk S., Delsate N., Lemaître A., Carletti T., Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator // *Adv. Space Res.* 2009. V. 43. P. 1509 – 1526.
21. Vashkov'yak, M. A. Construction of families of periodically evolving satellite orbits in the region of nearly equal influence of a planet's polar oblateness and an external body's attraction // *Astronomy Letters*. 1997. V. 23. Is. 2. P. 200 – 206.
22. Vashkov'yak, M. A. On the stability of stationary solutions of the double-averaged Hill's problem with an oblate central planet // *Astronomy Letters*. 1998a. V. 24. Is. 5. P. 682 – 691.
23. Vashkov'yak, M. A. On the families of periodically evolving orbits in Hill's averaged problem with allowance for oblateness of the central planet // *Astronomy Letters*. 1998b. V. 24. Is. 2. P. 185 – 192.

24. Vashkov'yak, M. A. On the periodic and asymptotic solutions in the neighborhood of equilibrium positions in the double-averaged Hill problem with allowance for the oblateness of a central planet// *Astronomy Letters*. 1999a. V. 25. Is.8. P. 544 – 551.
25. Vashkov'yak, M. A. Symmetric periodic solutions generated by stationary equilibrium states of the average Hill problem with allowance for the planet's oblateness// *Astronomy Letters*. 1999b. V. 25. Is. 10. P. 688 – 695.
26. Vashkov'yak M. A, Teslenko, N. M. Asymmetric Periodic Solutions of the Averaged Hill Problem with Allowance for a Planet's Oblateness // *Astronomy Letters*. 2000. V. 26, P. 331 – 337.
27. Vashkov'yak M. A, Teslenko, N. M. Stability of Periodic Solutions for Hill's Averaged Problem with Allowance for Planetary Oblateness // *Astronomy Letters*. 2001. V. 27, P. 198 – 205.

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ ВЕКОВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ ИСЗ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНЕШНИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.И. Прохоренко

Институт космических исследований РАН

vprokhorenko@mail.ru

Основная цель, которую ставит перед собой автор, состоит в популяризации достижений М.Л. Лидова в области качественных методов теории возмущений. В работе показано как полученные М.Л. Лидовым результаты могут быть использованы в качестве эффективного инструмента для понимания характера вековой эволюции орбит под влиянием внешних гравитационных возмущений при решении практических задач, связанных с выбором орбит для исследования околоземного космического пространства.

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

К работам М.Л. Лидова в области качественных методов теории возмущений в своё время внимание автора привлёк П.Е. Эльясберг, 100-летие которого мы отмечаем в 2014 году. Это было более двадцати пяти лет назад, однако вплотную заняться упомянутой тематикой автору удалось лишь в начале 2000 года, когда П.Е. и М.Л. уже не было с нами. Всё начиналось с исследования вековой эволюции высокоапогейных орбит, основную роль в которой играют внешние гравитационные возмущения. Эти исследования основывались на использовании первых интегралов спутникового варианта двукратноосредненной ограниченной задачи трёх тел, полученных М.Л. Лидовым более пятидесяти лет назад. Прежде чем применять указанные приближённые методы к решению практических задач, автор посвятил годы изучению работ М.Л. Лидова и исследованию области действия разработанной М.Л. Лидовым и его учениками качественной теории возмущений [Лидов, 1961], [Гордеева, 1968], [Ваишковьяк, 1999].

В процессе этих исследований автору удалось доказать теоремы о многообразиях начальных условий, при которых вековая эволюция эксцентриситета приводит (или не приводит) к соударению спутника с поверхностью центрального тела [Прохоренко, 2007]. Затем естественным образом возникла задача об исследовании областей преимущественного влияния гравитационных возмущений, обусловленных влиянием внешних тел и нецентральностью гравитационного поля центрального тела [Прохоренко, 2011]. Для этих исследований были использованы полученные в 1974 году в работе М.Л. Лидова и М.В. Ярской [Лидов, Ярская, 1974] интегрируемые случаи смешанной задачи. В результате этих исследований удалось получить границы областей преимущественного влияния двух рассматриваемых факторов на шкале возможных значений большой полуоси орбит спутников

планет. Для динамической системы Земля – Луна – Солнце – ИСЗ на шкале значений большой полуоси получены границы 37 000 км и 100 000 км. Первая из них является внешней границей преимущественного влияния сжатия Земли, вторая – внутренней границей преимущественного влияния внешних гравитационных возмущений. Между этими границами лежит область действия смешанных гравитационных возмущений на паритетных началах. Было показано, что внешние гравитационные возмущения воздействуют на эволюцию эксцентриситета практически на всей шкале возможных значений большой полуоси, однако эволюция эксцентриситета в каждой из упомянутых областей происходит по-разному и определяется эволюцией угловых элементов по правилам, которые диктует главный возмущающий фактор (или влияние двух возмущающих факторов на паритетных началах).

Следует отметить, что на начальном этапе космических исследований околоземного пространства вековая составляющая эволюции орбит под влиянием внешних гравитационных возмущений учитывалась только при запуске высокоапогейных орбит. И даже для таких орбит вековая составляющая эволюции учитывалась не в полной мере. Целью работы [Прохоренко, 2006] было стремление автора привлечь внимание к вопросу о том, что вековую составляющую эволюции под влиянием внешних гравитационных возмущений следует учитывать даже при запуске спутников на орбиты со значениями большой полуоси, принадлежащими области преимущественного влияния гравитационных возмущений от сжатия планеты. Для иллюстрации этой идеи в работе [Прохоренко, 2006] были продемонстрированы некоторые примеры. Исследования в этом направлении продолжаются.

В настоящей работе рассматриваются высокоапогейные орбиты, принадлежащие области преимущественного влияния внешних гравитационных возмущений. Прежде чем переходить к исследованиям, связанным с вековой эволюцией таких орбит, хотелось бы остановиться на одном объективном обстоятельстве, которое фактически являлось препятствием для достижения взаимопонимания между участниками сложного процесса, состоящего из выбора орбит, исходя из задач проектов, и запуска космического аппарата (КА) на выбранную орбиту.

Напомним, что запуск КА на орбиту осуществляется, исходя из заданных начальных значений двух угловых элементов, измеряемых относительно экваториальной системы координат (наклонения орбиты и аргумента перигея), а третий угловой элемент (прямое восхождение восходящего узла Ω_{eq0}) формируется в момент старта и определяется известным соотношением

$$\Omega_{eq0} = S_{Г0}(DT) + UTC \cdot \sigma \cdot 180/\pi + \lambda_{\Omega}(\lambda_{lp}, \varphi_{lp}, i_{eq}), \quad (1)$$

которое, с учётом фиксированных координат точки старта, связывает между собой значения следующих трёх свободных параметров: дата старта, время

старта и угловой орбитальный элемент Ω_{eq0} . Первое слагаемое в правой части этого выражения представляет собой звёздное время гринвичского меридиана в полночь даты старта, второе слагаемое определяется всемирным временем старта. Сумма первых двух слагаемых представляет собой звёздное время Гринвичского меридиана в момент старта, измеряемое в градусах в плоскости земного экватора относительно точки весеннего равноденствия. А третье слагаемое представляет собой измеряемую от Гринвичского меридиана географическую (геоцентрическую) долготу восходящего узла орбиты в момент старта и определяется географическими (геоцентрическими) координатами точки старта и наклоном орбиты к плоскости земного экватора. Исходя из этого, свобода выбора возможна только для двух из тройки упомянутых выше параметров, а значение третьего определяется из соотношения (1).

На начальной стадии космических исследований с использованием высокоапогейных орбит КА серии *Прогноз*, стартовавших в прошлом веке, начиная с 1972 года, в качестве двух свободных параметров использовались дата старта и время старта. И для этого были объективные причины: проблема заключалась в том, что при выборе времени старта необходимо было учитывать ограничение на гарантийный срок работы бортовой аппаратуры, который составлял одно полугодие. Попробуем, не вдаваясь в подробности, коротко пояснить, какие проблемы вытекают из этого обстоятельства. Большинство из первых орбит серии *Прогноз* были нацелены на изучение дневной области магнитосферы. Таким образом, при свободном выборе даты старта и учёте ограничения на выбор времени старта, начальное значение параметра Ω_{eq0} определялось однозначно из соотношения (1). В результате начальное значение параметра Ω_{eq0} в те времена могло регулироваться только путём выбора даты старта, а в отсутствие такой возможности, параметр Ω_{eq0} становился предметом произвола. Заметим что начальное значение прямого восхождения восходящего узла Ω_{eq0} при фиксированных начальных значениях остальных орбитальных элементов, является основным параметром, которым могли бы распорядиться экспериментаторы при выборе орбит, исходя из задач проектов. Таким образом, у экспериментаторов практически не оставалось никакой возможности влиять на выбор орбит. Добавим к этому, что начальное значение параметра Ω_{eq0} при фиксированных значениях остальных орбитальных элементов играет важную роль не только в геометрии орбиты, но и в характере вековой эволюции орбиты, который определяется значениями угловых орбитальных элементов измеренных относительно плоскости орбиты возмущающего тела (то есть, плоскости эклиптики).

В настоящее время, когда гарантийный срок работы бортовой аппаратуры измеряется годами, появилась возможность внести изменение в сложившийся стереотип запуска и при сохранении свободы выбора даты старта запускать КА на орбиты, соответствующие заранее выбранным значениям прямого восхождения восходящего узла.

2. ТЕОРИЯ М.Л. ЛИДОВА И ЕЁ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Целью этой работы является популяризация идей М.Л. Лидова и полученных им решений в качестве эффективного инструмента для исследования особенностей вековой эволюции орбит под влиянием внешних гравитационных возмущений и учёта этих особенностей при выборе орбит. Для начала приведем основные результаты М.Л. Лидова и его учеников, на которых основана настоящая работа.

Вековую составляющую эволюции высокоапогейных орбит под влиянием внешних гравитационных возмущений описывают полученное в работе [Лидов, 1961] решение интегрируемой системы эволюционных уравнений для двукратно осредненной задачи Хилла. Это решение получено в виде трёх первых интегралов и двух квадратур и выражается через безразмерный фокальный параметр $\varepsilon = 1 - e^2$ и угловые элементы, измеренные относительно плоскости орбиты возмущающего тела (эклиптики):

$$a = c_0, \quad \varepsilon \cos^2 i = c_1, \quad (1 - \varepsilon)(2/5 - \sin^2 \omega \sin^2 i) = c_2, \quad (2)$$

$$t - t_0 = -\frac{2}{5A_k} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{(1 - \varepsilon)\varepsilon^{1/2} \sin^2 i \sin 2\omega},$$

$$\Omega - \Omega_0 = -\frac{A_k}{2} \int_{i_0}^i \frac{5 \cos i ((1 - \varepsilon) \sin^2 \omega + \varepsilon) dt}{\varepsilon^{1/2}},$$

где

$$c_0 = a_0, \quad c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0, \quad c_2 = (1 - \varepsilon_0)(2/5 - \sin^2 \omega_0 \sin^2 i_0), \quad (3)$$

$$A_k = \frac{3}{2} \frac{\mu_k a^{3/2}}{a_k^3 \varepsilon_k^{3/2} \sqrt{\mu}} = \frac{3}{4} \frac{P}{\pi} \frac{\mu_k}{a_k^3 \varepsilon_k^{3/2}}$$

$\mu_k, a_k, \varepsilon_k$ – динамические параметры возмущающего тела.

Область возможных значений интегральных констант c_1, c_2 определяется следующими неравенствами

$$0 \leq c_1 < 1, \quad c_2(c_1) \in \begin{cases} \left(-(\sqrt{3/5} - \sqrt{c_1})^2, 2(1 - c_1)/5 \right) & \text{при } 0 \leq c_1 < 3/5, \\ (0, 2(1 - c_1)/5) & \text{при } 3/5 \leq c_1 < 1. \end{cases} \quad (4)$$

Что касается первого интеграла c_0 , то он свидетельствует о сохранении постоянного значения большой полуоси орбиты.

Примечание: Использование безразмерного фокального параметра ε вместо эксцентриситета e объясняется тем обстоятельством, что при постоянном значении большой полуоси убывание планетоцентрического расстояния перицентра сопровождается убыванием фокального параметра, в то время как эксцентриситет при этом возрастает. Для эллиптических орбит области значений этих параметров совпадают и принадлежат интервалу $(0, 1)$.

Итак, значения интегральных постоянных определяются начальными значениями четырёх орбитальных элементов, измеренных относительно плоскости орбиты возмущающего тела, т.е. относительно плоскости эклиптики.

2.1. Фазовые портреты интегральных кривых. Для представления особенностей вековой эволюции орбитальных элементов будем использовать фазовые портреты интегральных кривых (определяемых значениями интегральных констант c_1, c_2) в цилиндрической системе координат $(\varepsilon, \omega \bmod 360^\circ, c_1)$ на фазовых плоскостях $c_1 = \text{const}$.

В качестве примеров, на рис. 1, показаны фазовые портреты, соответствующие некоторым значениям c_1 . Такое представление фазовых портретов было предложено в работах автора [Прохоренко, 2002, 2014]. На рисунках тонировкой отмечены области, соответствующие отрицательным значениям c_2 . Сепаратриса $c_2 = 0$, разделяющая области значений c_2 разных знаков, проходит через седловые особые точки \oplus с координатами: $\varepsilon = 1, \sin^2 \omega = (2/5)/(1 - c_1)$. При значениях $0 < c_1 < 3/5$ в области отрицательных значений c_2 имеются особые точки типа центр \otimes с координатами: $\varepsilon = \sqrt{(5/3)c_1}, \sin^2 \omega = 1$. При $c_1 = 0$ особые точки сливаются в точку $\varepsilon = 0$.

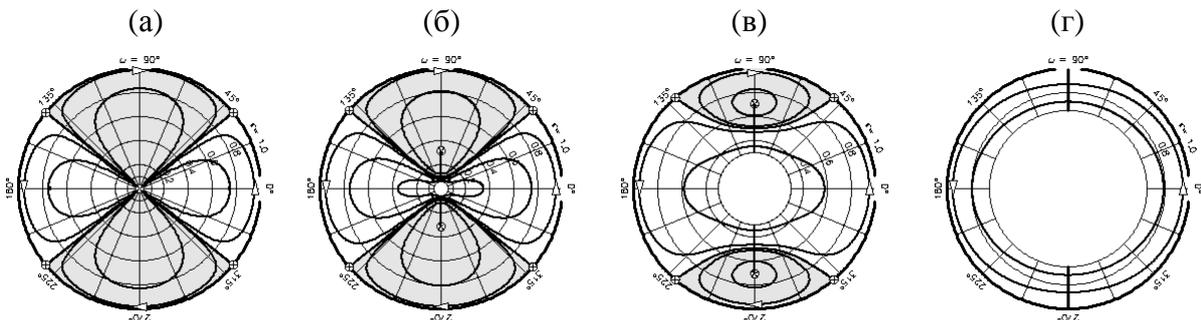


Рис.1. Интегральные кривые на фазовых плоскостях $c_1 = \text{const}$

Направления изменения аргумента перигея ω показаны стрелками. При положительных значениях c_2 эволюция аргумента перигея происходит в направлении против часовой стрелки и при $0 < c_1$ носит ротационный характер, а при отрицательных значениях c_2 эволюция ω имеет либрационный характер и происходит по часовой стрелке. Рисунки показывают, что при всех значениях c_1 область значений ε определяется неравенством $c_1 \leq \varepsilon \leq 1$.

2.2. Зависимость экстремальных значений фокального параметра ε от интегральных констант. Из выражений для первых интегралов вытекает параметрическое уравнение для фокального параметра ε при фиксированных значениях c_1, c_2 и свободном значении аргумента перигея ω

$$\varepsilon^2 \left(\sin^2 \omega - \frac{2}{5} \right) - \varepsilon \left(c_2 - \frac{2}{5} + (1 + c_1) \sin^2 \omega \right) + c_1 \sin^2 \omega = 0. \quad (5)$$

Минимальные значения $\varepsilon_{\min}(c_1, c_2)$ достигаются при $\sin^2 \omega = 1$ и представляют собой младший корень уравнения

$$\varepsilon^2 - \varepsilon \left(1 + \frac{5}{3}(c_1 + c_2) \right) + \frac{5}{3}c_1 = 0, \quad (6)$$

Максимальные значения $\varepsilon_{\max}(c_1, c_2)$ при отрицательных значениях c_2 представляют собой старший корень уравнения (6), а при положительных значениях c_2 достигаются при значениях $\sin^2 \omega = 0$ и выражаются формулой

$$\varepsilon_{\max}(c_1, c_2) = 1 - 5c_2/2. \quad (7)$$

Возвращаясь к рис. 1, заметим, что при любых значениях c_1 , отличающихся от нуля, значения $\varepsilon_{\min}(c_1, c_2)$ принадлежат выделенным отрезкам вертикальной оси, соответствующей значению $\cos \omega = 0$, а при $c_1 = 0$ значения $\varepsilon_{\min}(c_1, c_2) = 0$ при любых значениях c_2 .

Примечание. Значения ε_{\min} и ε_{\max} , которые зависят только от интегральных констант, и, следовательно, от начальных значений орбитальных элементов, тоже можно считать интегральными постоянными. И нужно быть готовыми к тому, что все эти постоянные, подобно кеплеровским элементам орбиты, могут оказаться оскулирующими при учёте дополнительных возмущающих факторов, например, короткопериодических составляющих гравитационных возмущений, связанных с орбитальными периодами возмущаемого и возмущающего тел.

2.3. О периоде долгопериодической составляющей эволюции орбиты.

Замкнутый характер интегральных кривых свидетельствует о периодическом характере вековой составляющей эволюции рассматриваемых орбит. Выражения для безразмерного периода $\tau_\varepsilon(c_1, c_2)$ долгопериодической составляющей эволюции фокального параметра ε через полный эллиптический интеграл первого рода были получены в работе Ю.Ф. Гордеевой [Гордеева, 1968].

Период T_ε долгопериодической составляющей эволюции фокального параметра выражается через безразмерный период $\tau_\varepsilon(c_1, c_2)$ и Кеплеров орбитальный период спутника P следующими формулами

$$T_\varepsilon = \frac{|\tau_\varepsilon(c_1, c_2)|}{A_k} = \frac{4\pi a_k^3 \varepsilon_k^{3/2}}{3P \mu_k} |\tau_\varepsilon(c_1, c_2)|, \quad (8)$$

где μ_k , a_k , ε_k – динамические параметры возмущающего тела.

Исследование поведения функции $|\tau_\varepsilon(c_1, c_2)|$ в области возможных значений интегральных постоянных c_1, c_2 было проведено в работе автора [Прохоренко, 2002]. Результаты этих исследований показаны на рис. 2 в виде линий уровня функции $|\tau_\varepsilon(c_1, c_2)|$, которые дают наглядное представление о роли переменных c_1, c_2 в поведении этой функции. Область отрицательных значений c_2 выделена тонировкой. В первую очередь обращает на себя внимание наличие областей симметрии функции $|\tau_\varepsilon(c_1, c_2)|$. Штриховая линия в области положительных значений c_2 является правой границей области, в которой (в первом

приближении) выполняется равенство $|\tau_\varepsilon(c_1, c_2)| = |\tau_\varepsilon(c_1, -c_2)|$. Осью симметрии этой области является линия $c_2 = 0$. Наблюдается ещё одна симметрия в области положительных значений c_2 , осью которой является горизонтальная штриховая линия, соответствующая значению $c_1 = 0.6$.

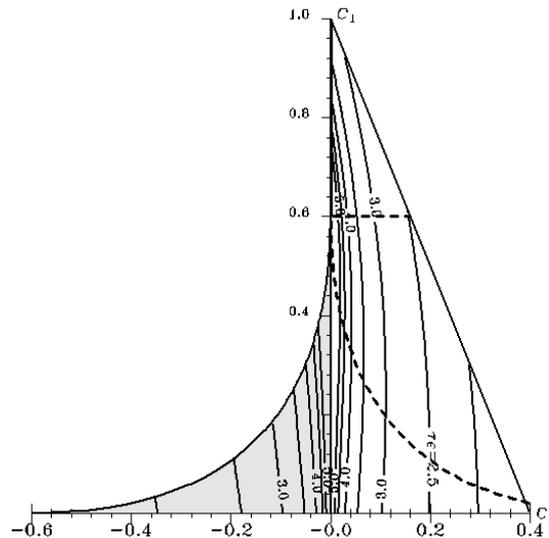


Рис.2 Линии уровня
безразмерного периода $\tau_\varepsilon(c_1)$.

При учёте гравитационных возмущений от системы тел, находящихся на компланарных (или почти компланарных) орбитах, расчётный период T_ε выражается следующей формулой

$$T_\varepsilon = \left(\sum_{j=1}^n A_k \right)^{-1} |\tau_\varepsilon(c_1, c_2)| = \frac{4\pi}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{a_k^3 \varepsilon_k^{3/2}} \right)^{-1} \frac{|\tau_\varepsilon(c_1, c_2)|}{P}, \quad (9)$$

где μ_k , a_k , ε_k – динамические параметры системы n возмущающих тел.

Итак, отметим, что период долгопериодической эволюции фокального параметра обратно пропорционален периоду оборота спутника по его орбите.

2.4. О возможности соударения спутника с планетой под влиянием внешних гравитационных возмущений. Решения эволюционных уравнений, полученные в работе М.Л. Лидова [Лидов, 1961], вместе с аналогичными решениями, полученными в работе Kozai [Kozai, 1962], вошли в научную литературу под названием механизм (или резонанс) Лидова - Козаи. Суть этого механизма состоит в том, что под влиянием внешних гравитационных возмущений происходит долгопериодическая эволюция эксцентриситета орбиты спутника (при сохранении постоянного значения большой полуоси). При увеличении эксцентриситета планетоцентрическое расстояние перицентра может стать меньше радиуса центрального тела и привести к пересечению орбиты с поверхностью планеты конечного радиуса, т.е. к соударению спутника с планетой. В работе [Лидов, 1961] показано, что при наклонениях орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела, близких к 90° , эволюция приводит к увеличению эксцентриситета орбиты до

значения, близкого к единице, и, соответственно, к уменьшению почти до нуля фокального параметра ε и планетоцентрического расстояния перицентра. В работе М.Л. Лидова [Лидов, 1963] был продемонстрирован впечатляющий пример эволюции гипотетической «Вертикальной Луны» на орбите, перпендикулярной к плоскости эклиптики, приводящей к соударению Луны с Землёй под влиянием возмущений от Солнца менее чем через 4.5 года.

Этот результат является достаточным условием для пересечения орбиты спутника с поверхностью центрального тела конечного радиуса R при значениях наклона к плоскости орбиты возмущающего тела, равных 90° , и удовлетворяет следующему необходимому условию

$$c_1 < \varepsilon^*(a/R) = 1 - (1 - R/a)^2 < \varepsilon_0. \quad (10)$$

В качестве иллюстрации для этого случая можно использовать рис. 1а, соответствующий нулевому значению интегральной константы c_1 , при котором все интегральные кривые пересекаются в точке $\varepsilon = 0$ и приводят к нулевому расстоянию перицентра орбиты при любых начальных значениях остальных орбитальных элементов.

Опыт показывает, что пересечения орбиты спутника с поверхностью планеты возможны и при далёких от 90° значениях наклона орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела. Исследованию этой проблемы был посвящен ряд работ автора [Прохоренко, 2007, 2011, 2014а]. Ниже приводятся основные результаты.

3. ОБОСНОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ ЛИДОВЫМ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

3.1. Теоремы о многообразиях начальных условий, приводящих (или не приводящих) к пересечению орбиты с поверхностью центрального тела для двукратно осредненной задачи Хилла. В работах автора [Прохоренко, 2007, 2011], на основе полученных М.Л. Лидовым первых интегралов двукратно осредненной задачи Хилла, в виде трёх теорем приведено описание многообразий начальных условий в пространстве M^4 с координатами $(a_0/R, \varepsilon_0, i_0, \omega_0)$. Для этого в пространстве M^4 была введена классификация трёх типов многообразий.

К многообразию I принадлежат значения $a_0/R, \varepsilon_0, i_0$, при которых во всей области возможных значений аргумента перицентра ω_0 выполняется условие пересечения орбиты спутника с поверхностью планеты

$$\varepsilon_{\min}(\varepsilon_0, i_0, \omega_0) \leq \varepsilon^*(a/R) < \varepsilon_0. \quad (11)$$

К многообразию II принадлежат значения $a_0/R, \varepsilon_0, i_0$, при которых во всей области возможных значений аргумента перицентра ω_0 выполняется условие непересечения орбиты спутника с поверхностью планеты.

$$\varepsilon^*(a/R) < \varepsilon_{\min}(\varepsilon_0, i_0, \omega_0) \leq \varepsilon_0. \quad (12)$$

К многообразию III принадлежат значения a_0/R , ε_0 , i_0 , при которых существует непустое множество значений ω_0 , удовлетворяющих условию непересечения (11), и множество значений ω_0 , удовлетворяющих условию пересечения орбиты спутника с поверхностью планеты. Граница, разделяющая эти множества значений ω_0 , определяется неравенством:

$$\varepsilon^*(a/R) = \varepsilon_{\min}(\varepsilon_0, i_0, \omega_0) < \varepsilon_0. \quad (13)$$

Напомним, что область возможных значений координат пространства M^4 определяется неравенствами: $1 < a_0/R$, $\varepsilon^*(a_0/R) < \varepsilon_0 < 1$, $0^\circ \leq \omega_0 \leq 360^\circ$, $0^\circ \leq i_0 \leq 180^\circ$, а угловые элементы измеряются относительно плоскости орбиты возмущающего тела.

Теорема 1. Орбитальные элементы $(a_0/R, \varepsilon_0, i_0)$ принадлежат многообразию типа I, если и только если выполняется неравенство

$$5/3 \cos^2 i_0 \leq \varepsilon^*(a_0/R) < \varepsilon_0 < 1.$$

Теорема 2. Достаточное условие принадлежности орбитальных элементов $(a_0, \varepsilon_0, i_0)$ многообразию типа II определяется неравенством:

$$\varepsilon^*(a_0/R) < c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0 < \varepsilon_0 < 1.$$

При выполнении неравенства

$$c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0 < \varepsilon^*(a_0/R) < \varepsilon_0 < 1$$

в области возможных значений ε_0 имеется граница $\varepsilon_{23}(a_0/R, i_0)$, разделяющая многообразия типа II и III:

$$\varepsilon_{23}(a_0/R, i_0) = \varepsilon^*(a_0/R) \frac{1 - (3/5)\varepsilon^*(a_0/R)}{\cos^2 i_0 - (\cos^2 i_0 - 2/5)\varepsilon^*(a_0/R)} < 1.$$

При выполнении неравенства $\varepsilon^*(a_0/R) < \varepsilon_{23}(a_0/R, i_0) < \varepsilon_0$ орбитальные элементы $(a_0, \varepsilon_0, i_0)$ принадлежат многообразию типа II.

Теорема 3. На многообразиях типа III, определяемых неравенством:

$$\varepsilon^*(a_0/R) < \varepsilon_0 < \varepsilon_{23}(a_0/R, i_0),$$

в области начальных значений аргумента перигея ω_0 существуют границы $\omega_3(a_0/R, \varepsilon_0, i_0)$, удовлетворяющие соотношению:

$$\sin^2 \omega_3(a_0/R, \varepsilon_0, i_0) = \frac{1}{\sin^2 i_0} \left(\frac{2}{5} + \frac{1 - \varepsilon^*(a_0/R)}{1 - \varepsilon_0} \left(\frac{3}{5} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon^*(a_0/R)} \cos^2 i_0 \right) \right)$$

и выделяющие область значений ω_0 , при которых вековая (долгопериодическая) эволюция приводит к пересечению орбиты с поверхностью планеты:

$$\sin^2 \omega_0 \leq \sin^2 \omega_3(a_0/R, \varepsilon_0, i_0).$$

При значениях ω_0 , удовлетворяющих обратному неравенству

$$\sin^2 \omega_3(a_0/R, \varepsilon_0, i_0) < \sin^2 \omega_0,$$

долгопериодическая эволюция не приводит к пересечению орбиты с поверхностью планеты.

3.2. Необходимые и достаточные условия для пересечения или непересечения вековой составляющей эволюции высокоапогейной орбиты спутника с поверхностью планеты под влиянием внешних гравитационных возмущений. Рассмотрим аналогичное введённому в разделе 3.1 пространство M^4 с координатами $(a_0/R, \varepsilon_0, c_1, c_2)$, область значений которых определяется неравенствами: $1 < a_0/R$, $\varepsilon^*(a_0/R) < \varepsilon_0 < 1$, $0 \leq c_1 \leq 1$, $-3/5 \leq c_2 \leq 2/5$. Для этого пространства результаты приведенных в разделе 3.1 исследований, можно выразить в виде следующих довольно лаконичных формулировок, которые могут быть использованы в качестве оснований для принятия решений при изучении картины, порождаемой вековой эволюцией орбит, и создании инструмента для выбора орбит с учётом особенностей их вековой эволюции.

Для пересечения в процессе вековой эволюции орбиты спутника с поверхностью планеты радиуса R необходимым и достаточным условием является выполнение неравенства

$$c_1 \leq \varepsilon_{\min}(c_1, c_2) < \varepsilon^*(a_0/R) < \varepsilon_0. \quad (14)$$

Это условие является обобщением результата М.Л. Лидова на случай произвольных начальных значений наклона орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела.

Для непересечения орбиты спутника с поверхностью планеты радиуса R в процессе вековой эволюции необходимым и достаточным условием является выполнение неравенства

$$\varepsilon^*(a_0/R) < \varepsilon_{\min}(c_1, c_2) \leq \varepsilon_0. \quad (15)$$

А достаточным условием для непересечения орбиты спутника с поверхностью планеты является выполнение неравенства:

$$\varepsilon^*(a_0/R) < c_1 \leq \varepsilon_{\min}(c_1, c_2) \leq \varepsilon_0. \quad (16)$$

Выполнение неравенств (15) или (16) создаёт предпосылки для периодического характера вековой эволюции орбиты.

3.3. Область возможного применения полученных М.Л. Лидовым первых интегралов для двукратно осредненной задачи Хилла. Перед практическим использованием описанных выше рекомендаций естественным образом возникла задача об исследовании областей преимущественного влияния гравитационных возмущений, обусловленных влиянием внешних тел и нецентральностью гравитационного поля главного тела. Для этих исследований в работе [Прохоренко, 2011] были использованы полученные в 1974 году в работе М.Л. Лидова и М.В. Ярской [Лидов, Ярская, 1974] интегрируемые случаи смешанной задачи. В результате этих исследований удалось получить границы областей преимущественного влияния двух рассматриваемых факторов на шкале возможных значений большой полуоси

орбит спутников планет. Для динамической системы Земля – Луна – Солнце – ИСЗ на шкале возможных значений большой полуоси получены границы 37 000 км и 100 000 км. Первая из них является внешней границей преимущественного влияния сжатия Земли, вторая – внутренней границей преимущественного влияния внешних гравитационных возмущений. Между этими границами лежит область действия смешанных гравитационных возмущений. Было показано, что внешние гравитационные возмущения воздействуют на эволюцию эксцентриситета практически на всей шкале возможных значений большой полуоси, однако эволюция эксцентриситета в каждой из упомянутых областей происходит по-разному и определяется эволюцией угловых элементов по правилам, которые диктует главный возмущающий фактор (или влияние двух возмущающих факторов на паритетных началах).

4. О РОЛИ КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТ

4.1. Короткопериодическая составляющая колебаний приращения высоты перигея за виток, связанная с полупериодом орбитального движения возмущающего тела.

При наклонениях орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела, отличных от 90° , угловое положение θ_k проекции возмущающего ускорения на плоскости орбиты спутника за период оборота возмущающего тела может принимать любые значения в диапазоне от 0 до 360° .

Исследованию короткопериодической составляющей эволюции орбиты связанной с периодом оборота возмущающего тела уделено большое внимание в книге П.Е. Эльясберга [Эльясберг, 1963]. В частности, была получена оценка амплитуды короткопериодических колебаний приращения $\delta h_{\pi k}$ высоты перигея за виток под влиянием возмущений от внешнего тела с индексом k

$$\text{ampl } \delta r_{\pi k}(a, \varepsilon) = \delta r_{\pi k \max} = \delta h_{\pi k \max} = Q_k a^4 e \sqrt{1-e^2} = Q_k a^4 \sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \quad Q_k = \frac{15}{2} \pi \frac{\mu_k}{\mu a_k^3}. \quad (17)$$

Также было показано, что при отличных от 90° значениях наклонения орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела период короткопериодических колебаний приращения высоты перигея совпадает с полупериодом орбитального движения возмущающего тела. Амплитуда короткопериодических колебаний приращения высоты перигея под влиянием Луны в 2.18 раза превосходит амплитуду соответствующих колебаний под влиянием Солнца в силу соотношения между коэффициентами $Q_m/Q_s = 2.18$

Посмотрим, что происходит с короткопериодической составляющей приращения высоты перигея при значении наклонения орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела $i = 90^\circ$, используя рис. 3. для

иллюстрации. На этом рисунке тонировкой выделены четверти, соответствующие значениям *истинной аномалии* θ_m проекции возмущающего ускорения на плоскость орбиты спутника, при которых происходит возрастание высоты перицентра за виток (оборот спутника по орбите). Напомним, что *истинная аномалия* измеряется от точки перигея.

В этом случае проекция возмущающего ускорения на плоскость орбиты спутника принадлежит линии узлов орбиты спутника на плоскости орбиты возмущающего тела, а угол проекции возмущающего ускорения θ_m при фиксированном положении восходящего узла AN (заданного значением *истинной аномалии* θ_{AN}) может принимать только два значения, отличающиеся друг от друга на 180° .

Положение линии узлов в орбитальной системе координат $O\xi\eta$ однозначно определяется значением аргумента перицентра ω (который измеряется в плоскости орбиты спутника от восходящего узла на плоскости орбиты возмущающего тела). Исходя из этого, угловое положение восходящего узла θ_{AN} и нисходящего узла θ_{DN} на плоскости орбиты спутника определяются следующими соотношениями:

$$\theta_{AN} = 360^\circ - \omega; \quad \theta_{DN} = 180^\circ - \omega. \quad (18)$$

На Рис. 3 показано положение линии узлов на плоскости орбиты спутника, соответствующее двум значениям аргумента перицентра ω_{III} и ω_{IV} , принадлежащим соответственно III и IV четвертям.

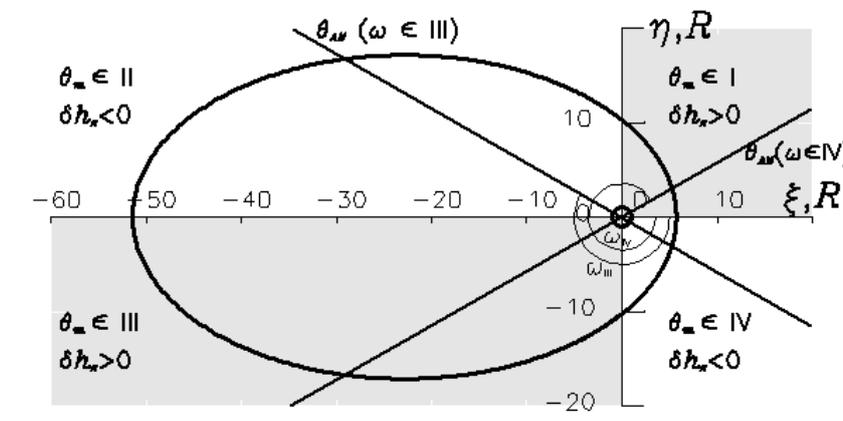


Рис. 3. Короткопериодическая составляющая при

Соответствующее значение аргумента перицентра для ω_{III} показано отрезком дуги окружности меньшего радиуса, а для ω_{IV} – отрезком дуги окружности большего радиуса. В первом случае значения θ_{AN} и θ_{DN} , удовлетворяющие соотношениям (18), принадлежат II и IV четверти, а во втором случае значения θ_{AN} и θ_{DN} принадлежат I и III четверти.

Это позволяет сформулировать следующую теорему, которая уже практически доказана предыдущими рассуждениями.

Теорема 4. При наклонении орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела $i_0 = 90^\circ$ вековое возрастание высоты перицентра (происходящее при значениях аргумента перицентра, принадлежащих четвертям с чётными номерами) сопровождается монотонным возрастанием короткопериодической составляющей приращения высоты перицентра. А вековое убывание высоты перицентра (происходящее при значениях аргумента перицентра, принадлежащих четвертям с нечетными номерами) сопровождается монотонным убыванием короткопериодической составляющей приращения высоты перицентра.

4.2. О предпосылках, обеспечивающих возможность осуществления коррекции орбиты при опасном снижении высоты перигея и о запасе высоты перигея при запуске спутника на орбиту.

Начнем с рассмотрения, имеющегося в нашем распоряжении, практического примера, связанного с коррекцией орбиты КА *СПЕКТР-Р*, стартовавшего в июле 2011 года.

Для предотвращения угрозы прекращения баллистического существования (к концу 2013) орбиты КА *Спектр-Р*, в 2012 году была осуществлена успешная превентивная коррекция орбиты, благодаря усилиям коллективов ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, НПО им. С.А. Лавочкина и других организаций, ответственных за баллистическое обеспечение рассматриваемого проекта. Краткий отчет об этой коррекции содержится в публикации [Артюхов М.И., Хартов В.В., Ширшаков А.Е. и др., 2012].

В работах [Прохоренко, 2014а] и [Зеленый, Застенкер, и др., 2014] было показано, что предпосылкой для возможности осуществления этой коррекции, являлось соотношение между значениями следующих параметров, характеризующих две составляющих эволюции орбиты КА *Спектр-Р*:

$$h_{\pi\min}(a_0, \varepsilon_0, i_0, \omega_0) = -440 \text{ км} \text{ и } \text{ampl } \delta h_{\pi\min}(a_0, \varepsilon^*(a_0 / R)) = 1191 \text{ км}$$

Первым из этих параметров является минимальное значение высоты перигея $h_{\pi\min}(a_0, \varepsilon_0, i_0, \omega_0)$ над поверхностью Земли, достижимое в процессе вековой эволюции орбиты. Вторым параметром является вычисляемое по формуле (17) значение амплитуды $\text{ampl } \delta h_{\pi\min}(a_0, \varepsilon^*)$ короткопериодических колебаний приращения высоты перигея за виток, обусловленных влиянием гравитационных возмущений от Луны (за полупериод её движения по орбите). Это значение амплитуды соответствует приближающимся к нулю значениям высоты перигея (при которых ε приближается к значению ε^*). Сумма этих двух величин составляет 650 км и даёт основание для возможности осуществления коррекции орбиты за счет «сдвига фазы» короткопериодической составляющей эволюции высоты перигея за полупериод орбитального движения Луны.

Такого рода коррекция, насколько известно автору, в отечественной практике была выполнена впервые и является большим научно-техническим

достижением, а также поводом для обсуждения существа вопроса о коррекции такого рода орбит.

Запишем выражение для минимального геоцентрического расстояния $r_{\pi\min}$ и минимального расстояния $h_{\pi\min}$ через первые интегралы c_1, c_2

$$r_{\pi\min}(a_0, c_1, c_2) = a_0(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_{\min}(c_1, c_2)}); \quad h_{\pi\min}(a_0, c_1, c_2) = r_{\pi\min}(a_0, c_1, c_2) - R,$$

где $R = 6371.2$ км – средний радиус Земли и начнем с того, что возникновение подобной опасности можно предотвратить при выборе таких начальных значений орбитальных элементов, при которых значение $h_{\pi\min}(a_0, c_1, c_2)$ имеет достаточный запас высоты h_{RES}

$$h_{RES} < h_{\pi\min}(a_0, c_1, c_2) - \text{ampl} \delta h_{\pi\min}(a_0, \varepsilon_{\min}(c_1, c_2)). \quad (19)$$

Неравенство (19) является достаточным условием для предотвращения возникновения угрозы опасности соударения. Отметим, что для орбиты КА Спектр-Р это неравенство не выполняется.

Достаточным условием для возможности возникновения опасности соударения является выполнение неравенства

$$h_{\pi\min}(a_0, c_1, c_2) - \text{ampl} \delta h_{\pi\min}(a_0, \varepsilon_{\min}(c_1, c_2)) < 0. \quad (20)$$

Возможность для предотвращения такой опасности за счёт сдвига фазы короткопериодической составляющей эволюции под влиянием гравитационных возмущений от Луны, существует при выполнении следующего неравенства:

$$0 < h_{\pi\min}(a_0, c_1, c_2) + \text{ampl} \delta h_{\pi\min}(a_0, \varepsilon^*(a_0 / R)), \quad (21)$$

а отсутствие такой возможности определяется неравенством:

$$h_{\pi\min}(a_0, c_1, c_2) + \text{ampl} \delta h_{\pi\min}(a_0, \varepsilon^*(a_0 / R)) < 0. \quad (22)$$

Идея заняться короткопериодической составляющей эволюции высокоапогейных орбит появились в процессе подготовки статьи [Прохоренко, 2015] в сборник к столетию П.Е. Эльясберга «Космическая баллистика. От истоков будущему», который вышел в издательства ИКИ РАН в 2015 году. В то время был также разработан опубликованный в работе [Прохоренко, 2014б] алгоритм выбора начального значения высоты перигея с любым наперёд заданным запасом h_{RES} , с учётом амплитуды короткопериодической составляющей эволюции высоты перигея под влиянием гравитационных возмущений от Луны. Запас начального значения

высоты перигея позволяет обеспечить свободу выбора даты старта, без необходимости учёта фазы упомянутой эволюционной составляющей.

Теперь основываясь на полученных М.Л. Лидовым первых интегралах двукратно осредненной задачи Хилла, попробуем создать инструмент для анализа особенностей вековой эволюции семейства орбит, свободным параметром которого является Ω_{eq0} . Свойства этого инструмента будем демонстрировать на примере семейства орбит КА серии *Прогноз*, стартовавших с 1972 по 1995.

5. СИТУАЦИОННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВЫБОРА ОРБИТ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОРБИТАЛЬНЫХ ТОРОВ

5.1. Орбитальный тор семейства орбит со свободным параметром Ω_{eq0} .

Рассмотрим геометрию семейства орбит в невращающейся системе координат *Oxyz* с фиксированными начальными значениями четырёх орбитальных элементов: большая полуось a_0 , эксцентриситет e_0 , наклонение i_{eq0} к плоскости земного экватора, аргумента широты перигея ω_{eq0} и свободным параметром Ω_{eq0} . Рассматриваемое семейство орбит принадлежит поверхности орбитального тора, который образуется в результате вращения вокруг оси *Oz* орбитального эллипса. Заметим, что под орбитальным эллипсом мы понимаем геометрическое место точек, через которые проходит спутник при изменении аргумента широты u_{eq} , измеряемого в плоскости орбиты от восходящего узла на плоскости экватора.

Понятие орбитальный тор было введено в работе автора [Прохоренко, 1983а] для геометрического представления эллиптической орбиты во вращающейся вокруг оси *z* системе координат и может быть использовано для представления геометрии семейства эллиптических орбит со свободным параметром Ω_{eq0} в невращающейся системе координат.

Запишем параметрическое уравнение меридионального сечения орбитального тора, используя в качестве параметра аргумент широты u_{eq} :

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \delta, \quad z = r \sin \delta, \quad (23)$$

где x , y , z – координаты произвольной точки орбиты в невращающейся экваториальной системе координат *Oxyz* (ось x которой направлена в точку весеннего равноденствия), а значения r и δ определяются следующими формулами:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(u_{eq} - \omega_{eq0})}, \quad \sin \delta = \sin u_{eq} \sin i_{eq0}. \quad (24)$$

Для определения координат x , y , z произвольной точки, принадлежащей поверхности орбитального тора, используются следующие формулы

$$x = r \cos \delta \sin \alpha, \quad y = r \cos \delta \cos \alpha, \quad z = r \sin \delta, \quad \alpha = \Omega_{eq0} + \Delta\alpha, \quad \text{tg } \Delta\alpha = \text{tg } u_{eq} \cos i_{eq0}. \quad (25)$$

На рис. 4а показано меридиональное сечение плоскостью Oyz орбитального тора, образуемого в системе координат $Oxyz$ семейством орбит со свободным значением параметра Ω_{eq0} , соответствующих приведенными в табл. 1 начальными значениями четырёх орбитальных элементов: a_0 , e_0 , i_{eq0} , ω_{eq0} , соответствующих орбитам серии *Прогноз- 1÷7*. В таблице значение большой полуоси a_0 , указано в километрах и в средних радиусах Земли ($R = 6371.2$ км), а значения наклона орбиты к плоскости земного экватора и аргумента перигея указаны в градусах.

Табл. 1

a_0 , км	a_0/R	e_0	i_{eq0}°	ω_{eq0}°	δ_{A0}°	$\Delta\alpha_{A0}^\circ$	ε_0	ε^*	P , сутки
106 600	16.7	0.935	65	290	58	131	0.131	0.116	4.

На рис. 4а показано наклонение орбиты i_{eq0} , которое определяет диапазон $-i_{eq0} < \delta < i_{eq0}$ возможных значений склонения δ , достижимых на рассматриваемом орбитальном торе, а также приведенное в табл. 1 склонение радиус-вектора апогея δ_{A0} , (которое соответствует значению $u_{eq} = \omega_{eq0} - 180^\circ$).

На рис. 4б показаны проекции на плоскость земного экватора рассматриваемого семейства орбит со свободным параметром Ω_{eq0} , значения которого с шагом $std = 60^\circ$ определяются следующей формулой:

$$\Omega_{eq0}(j) = (j-1) * std \quad \text{при } j = 1, 2, \dots, 360 / std \quad (26)$$

При каждом начальном значении Ω_{eq0} прямое восхождение α_{A0} точки апогея удовлетворяет следующему соотношению:

$$\alpha_{A0}(\Omega_{eq0}) = \Omega_{eq0} + \Delta\alpha_{A0}. \quad (27)$$

Постоянное для рассматриваемого семейства орбит значение $\Delta\alpha_{A0}$ определяется из соотношения (25) при $u_{eq} = \omega_{eq0} - 180^\circ$ и приведено в табл. 1. Значения параметра Ω_{eq0} для каждой орбиты на рис. 4б показаны в точках апогея. На этом рисунке показана разметка шкалы значений прямого восхождения α с шагом 30° , эта разметка снабжена датами, в которые направление Земля - Солнце проходит через соответствующие меридианы. Напомним, что положение Солнца в системе координат $Oxyz$ определяется прямым восхождением α и склонением δ . Даты равноденствий и солнцестояний отмечены на этой шкале соответствующими знаками Зодиака.

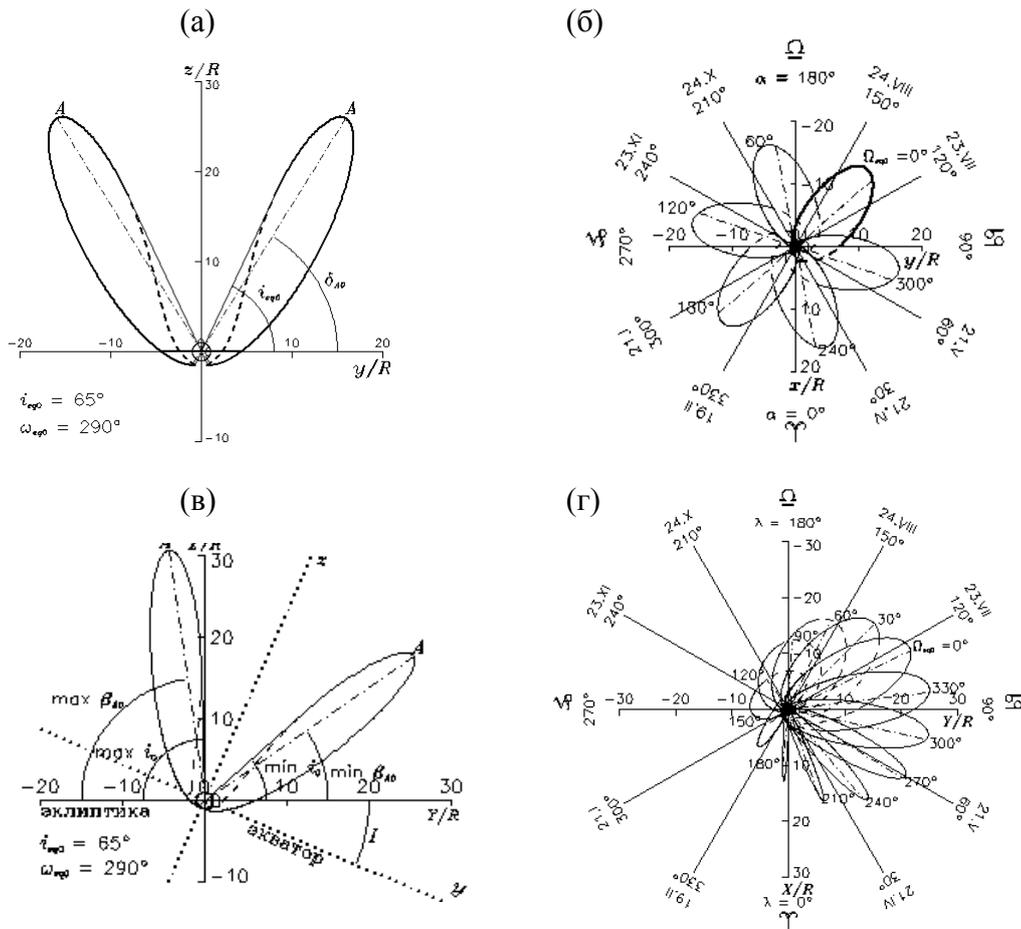


Рис. 4. Семейство орбит типа *Прогноз* – 1÷7 со свободным

Этот рисунок является подтверждением известного факта, который состоит в том, что все орбиты рассматриваемого семейства в системе координат $Oxyz$ похожи друг на друга и отличаются между собой лишь положением проекции орбиты на плоскость экватора и датой прохождения Солнца через меридиан, определяемый радиус-вектором точки апогея.

Однако, как показали космические исследования в области солнечно-земной физики, геометрия околоземного космического пространства связана с плоскостью эклиптики и с направлением Земля – Солнце, и это немаловажное обстоятельство необходимо учитывать при выборе орбит, исходя из задач проектов и геометрических моделей ключевых областей околоземного пространства.

Положение рассматриваемого орбитального тора относительно эклиптической системы координат $OXYZ$ (ось X которой направлена в точку весеннего равноденствия) показано на рис. 4в, г. На рис. 4в показано меридиональное сечение указанного тора плоскостью OYZ . Этот рисунок наглядно демонстрирует экстремальные значения наклона орбит рассматриваемого семейства к плоскости эклиптики: $\min i_0 = i_{eq0} - I$ и $\max i_0 = i_{eq0} + I$, соответствующие фиксированному значению i_{eq0} , а также экстремальные значения эклиптической широты точки апогея: $\min \beta_{A0} = \delta_{A0} - I$

и $\max \beta_{A0} = \delta_{A0} + I$. Оси Oz и Oy системы координат $Oxyz$ на этом рисунке показаны пунктирными линиями.

На рис. 4г показаны проекции «представителей» рассматриваемого семейства орбит на плоскость эклиптики, соответствующие различным значениям параметра Ω_{eq0} , указанным в точках апогея соответствующих орбит. На этом рисунке использованы значения Ω_{eq0} с шагом 30° , а также показана разметка шкалы значений эклиптической долготы, измеренной относительно точки весеннего равноденствия Υ , и даты, в которые Солнце проходит через соответствующие значения λ . Знаками зодиака отмечены даты равноденствий и солнцестояний. Следует учитывать, что разметка плоскости эклиптики по датам имеет приблизительный характер и зависит от эпохи, которой соответствует система координат $OXYZ$. Будем использовать эту разметку в первом приближении для понимания сути дела.

Сопоставление рисунков, показанных в верхнем и нижнем ряду рис. 4, демонстрируют существенное различие в геометрии орбит, рассматриваемых в различных системах координат (экваториальной и эклиптической).

5.2. Ситуационный анализ семейства орбит типа *Прогноз со свободным значением параметра Ω_{eq0}* . Будем рассматривать семейство орбит с фиксированными начальными значениями четырёх орбитальных элементов a_0 , e_0 , i_{eq0} , ω_{eq0} , заданных в системе координат $Oxyz$, связанной с плоскостью земного экватора, и показанных в табл. 1. В той же таблице показано начальное значение безразмерного фокального параметра $\varepsilon_0 = 1 - e_0$, а также критическое значение фокального параметра $\varepsilon^*(a_0/R)$, соответствующее нулевому значению высоты перигея над поверхностью Земли. Первый из этих параметров определяется начальным значением эксцентриситета, а второй – начальным значением большой полуоси орбиты. На рис. 5а, б показаны положения модельных границ магнитосферы (околоземной ударной волны, магнитопаузы и нейтрального слоя ночной области магнитосферы) относительно орбитального тора рассматриваемого семейства орбит для даты летнего солнцестояния. На рис. 5а показано сечение орбитального тора рассматриваемого семейства орбит плоскостью OYZ , которая проходит через точки летнего и зимнего солнцестояния и совпадает с полуденной плоскостью в дату летнего солнцестояния и с полуночной плоскостью в дату зимнего солнцестояния. С помощью рисунка 5а можно увидеть области магнитосферы, которые доступны рассматриваемому семейству орбит с фиксированными начальными значениями четырёх орбитальных элементов, и сделать выводы о пригодности этого семейства орбит для решения задуманных задач. В том случае, если рассматриваемый орбитальный тор демонстрирует пригодность рассматриваемого семейства орбит для решения задач проекта, можно приступить к выбору пятого элемента, который является свободным параметром выбранного семейства орбит. В противном случае орбитальный

тор можно подвергнуть «трансформации» путём изменения некоторых из четвёрки фиксированных элементов, начав с изменения аргумента перигея.

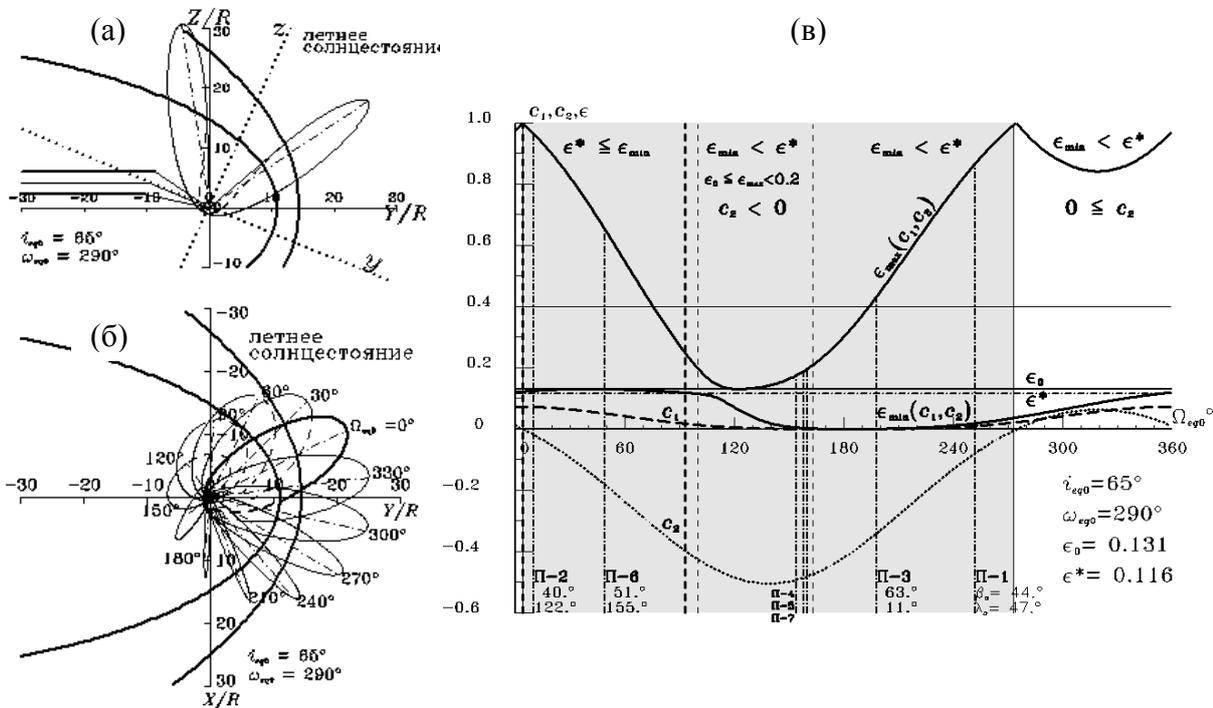


Рис. 5. Качественный анализ особенностей эволюции семейства орбит *Прогноз – 1* ÷ 7

На рис. 5в показана зависимость значений интегральных постоянных для рассматриваемого семейства орбит от значения свободного параметра Ω_{eq0} . Здесь по оси абсцисс отложены значения свободного параметра Ω_{eq0} , а по оси ординат – значения интегральных постоянных c_1 и c_2 , а также значения фокального параметра ϵ . Области возможных значений совокупности этих переменных укладываются в интервал $(-0.6, 1)$. Верхняя граница области возможных значений интегральной постоянной c_2 , равная 0.4, показана горизонтальной линией.

Штриховой линией на этом рисунке показана зависимость от Ω_{eq0} значений интегральной постоянной c_1 . Для значений интегральных постоянных c_2 использована пунктирная линия. Утолщенные сплошные линии показывают вычисленные, исходя из формул (6, 7), достижимые в процессе вековой эволюции экстремальные значения фокального параметра (соответствующие экстремальным значениям высоты перигея). Область значений Ω_{eq0} , которой соответствуют отрицательные значения c_2 , выделена тонировкой.

Попробуем разобраться в этой сложной, но весьма содержательной картине, которая создавалась в качестве наглядного инструмента для классификации значений свободного параметра Ω_{eq0} по различным признакам. Важную роль при обсуждении этих вопросов будут играть две горизонтальные

прямые линии, соответствующие начальному значению фокального параметра $\varepsilon = \varepsilon_0$ (утолщенная линия) и критическому значению фокального параметра $\varepsilon = \varepsilon^*(a/R)$ (штрихпунктирная линия).

Для того чтобы найти область значений Ω_{eq0} , при которых выполняется неравенство (15), обеспечивающие периодический характер вековой эволюции соответствующих орбит, необходимо сопоставить взаимное положение кривой, определяющей значение $\varepsilon = \varepsilon_{\min}(c_1, c_2)$ и штрихпунктирной линии $\varepsilon = \varepsilon^*(a/R)$. Точки пересечения этих двух линий определяют границы соответствующей области значений Ω_{eq0} , показанные утолщенными штриховыми вертикальными линиями, а область значений, в которой выполняется неравенство (15) принадлежит интервалу $(5^\circ, 90^\circ)$. Внутри этого интервала значения $\varepsilon = \varepsilon_{\min}(c_1, c_2)$, лежат выше линии $\varepsilon = \varepsilon^*(a/R)$. Неравенство $\varepsilon^*(a/R) \leq \varepsilon_{\min}(c_1, c_2)$, которое характеризует этот интервал значений Ω_{eq0} , приводится в верхней части рисунка. При значениях Ω_{eq0} , лежащих внутри указанного интервала, вековая составляющая эволюции фокального параметра ε (в первом приближении) имеет периодический характер. Период долгопериодической составляющей эволюции параметра ε , в основном, зависит от значения интегральной константы c_2 и увеличивается по мере её приближения к нулю. Значения периода долгопериодической составляющей эволюции фокального параметра ε хорошо характеризует показанная на рисунке кривая, соответствующая значению $\varepsilon_{\max}(c_1, c_2)$, которое возрастает вместе с возрастанием периода вековой составляющей эволюции этого параметра.

В остальной области значений Ω_{eq0} , лежащей за пределами указанного выше интервала, выполняется необходимое и достаточное условие (14), которое свидетельствует об ограниченности времени баллистического существования соответствующих орбит и предсказывает соударение спутника с поверхностью Земли. Для орбит с ограниченным временем баллистического существования мажорантой (верхней границей) времени баллистического существования является период вековой эволюции, поэтому время баллистического существования соответствующих орбит, так же как и период, неплохо характеризуется значением $\varepsilon_{\max}(c_1, c_2)$. В связи с этим можно выделить область значений свободного параметра, которой соответствуют минимальные значения времени баллистического существования. В этой области выполняется неравенство $\varepsilon_0 < \varepsilon_{\max}(c_1, c_2) < 0.2$, а границы этой области на шкале значений отмечены тонкими вертикальными штриховыми линиями. Для этой области характерны значения интегральной постоянной c_2 лежащие вблизи нижней границы ее возможных значений.

На рис. 5в штрихпунктирными вертикальными линиями показаны начальные значения параметра Ω_{eq0} для реализованных в семидесятые годы прошлого века орбит рассматриваемого семейства.

5.3. Годовые орбитальные торы в солнечно-эклиптической системе координат. Как известно, заданная в невращающейся геоцентрической системе координат $OXYZ$ орбита в кеплеровском приближении сохраняет своё постоянное положение. В то время как в системе координат SE, вследствие годового движения Земли вокруг Солнца, орбита образует годовой орбитальный тор. Для построения годового орбитального тора (ГОТ) используются угловые элементы, измеренные относительно плоскости эклиптики i_0 , ω_0 , Ω_0 . Годовой орбитальный тор образуется в результате вращения вокруг оси OZ орбитального эллипса, положение которого на плоскости орбиты с наклоном i_0 к плоскости эклиптики определяется аргументом перигея ω_0 , измеряемым относительно восходящего узла орбиты на плоскости эклиптики. Параметрическое уравнение меридионального сечения годового орбитального тора имеет следующий вид:

$$X_{SE}^2 + Y_{SE}^2 = r^2 \cos^2 \beta, \quad Z_{SE} = r \sin \beta,$$

где X_{SE} , Y_{SE} , Z_{SE} координаты произвольной точки орбиты в солнечно-эклиптической системе координат, а r и β – геоцентрическое расстояние и эклиптическая широта произвольной точки орбиты, зависящие от аргумента широты u , измеряемого в плоскости орбиты от восходящего узла орбиты на плоскости эклиптики:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(u-\omega_0)}, \quad \sin \beta = \sin u \sin i_0.$$

Положение каждой точки орбиты в системе координат $OXYZ$ определяется, исходя из следующих соотношений

$$X = r \cos \beta \cos \lambda, \quad Y = r \cos \beta \sin \lambda, \quad Z = r \sin \beta, \quad \lambda(u) = \Omega_0 + \Delta \lambda(u), \quad \text{tg } \Delta \lambda(u) = \text{tg } u \cos i_0.$$

Положение соответствующей точки в системе координат SE определяется долготой λ_{SE} , измеряемой относительно оси OX_{SE} , направленной на Солнце. Значения λ_{SE} и координаты X_{SE} , Y_{SE} определяются следующими формулами:

$$\lambda_{SE}(u) = \lambda(u) - \lambda_{\odot}, \\ X_{SE} = r \cos \beta \cos \lambda_{SE}, \quad Y_{SE} = r \cos \beta \sin \lambda_{SE},$$

где λ_{\odot} - эклиптическая долгота Солнца.

Каждая из орбит семейства со свободным значением параметра Ω_{eq0} образует в солнечно-эклиптической системе координат свой индивидуальный годовой орбитальный тор (не похожий на другие). На рис. 6 представлены годовые орбитальные торы при значениях параметра Ω_{eq0} с шагом 30° , каждый тор обозначен значением Ω_{eq0} , показанным в точке апогея.

На этих рисунках штрихпунктирными прямыми линиями для каждого тора показаны радиус-векторы точки апогея, а сплошными линиями – радиус-векторы точек, соответствующих максимальной эклиптической широте, равной наклону орбиты к плоскости эклиптики. Максимальная широта достигается в точке перехода спутника с восходящей ветви орбиты, показанной штриховой линией, на нисходящую ветвь, показанную сплошной линией.

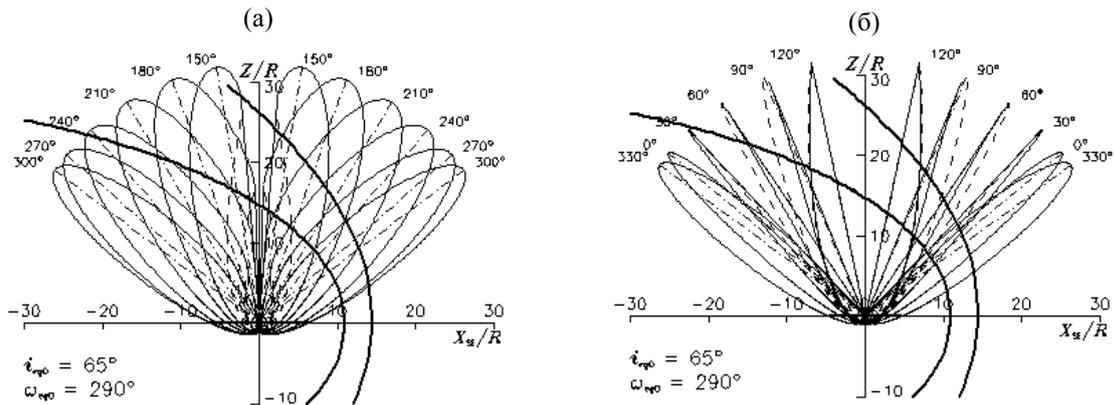


Рис. 6. Сечения полуденно-полуночной плоскостью годовых орбитальных торов семейства орбит типа Прогноз – $1 \div 7$ со свободным параметром Ω_{eq0}

Итак, выбор подходящей орбиты при фиксированных начальных значениях четырёх орбитальных элементов сводится к выбору пятого элемента. Отметим, что здесь и в дальнейшем, при анализе рассматриваемых орбит в системах координат, связанных с плоскостью эклиптики, в качестве параметров, характеризующих каждую из рассматриваемых орбит, будем использовать начальные значения трёх угловых элементов, измеряемых в экваториальной системе координат.

5.4. Ситуационный анализ некоторых орбит КА серии Прогноз. К ситуационному анализу этого семейства орбит мы возвращаемся не в первый раз (см. [Назиров, Прохоренко, Шейхет, 2002]). Рассмотрим некоторые примеры реализованных орбит КА серии Прогноз. Даты старта и начальные значения угловых элементов для этих орбит приведены в следующей таблице.

Табл. 2

	Дата старта	i_{eq0}°	ω_{eq0}°	δ_{A0}°	Ω_{eq0}°	α_{A0}°	i_0°	ω_0°	β_{A0}°	c_1	c_2	ε_{min}	ε_{max}
П-1	14.IV.72	65	290	58	252	23	74	313	45	.0096	-.079	.019	.866
П-2	29.VI.72	65	290	58	10	141	42	284	40	.0699	-.018	.12	.965
П-3	15.II.73	65	290	58	198	328	87	297	63	.0002	-.342	.0009	.430
П-4	26.XII.75	65	290	58	158	289	87	281	63	.0003	-.488	.003	.184
П-5	25.XI.76	65	290	58	156	287	87	282	78	.0003	-.484	.002	.192
П-6	22.IX.77	65	290	58	49	179	51.6	268	52	.0493	-.182	.126	.652
П-7	30.X.78	65	290	58	155	286	86	280	79	.0005	-.495	.005	.171
I-1	3.XIII.95	63	314	40	261	60	69	339	14	.0157	.254	.018	.364

В первом столбце этой таблицы указан номер КА рассматриваемой серии, далее угловые элементы, измеряемые в системе координат $Ox_2y_2z_2$ и $OXYZ$. Кроме того, в таблице указаны значения угловых координат, определяющих

начальное положение точки апогея на небесной сфере: прямое восхождения α_A и склонение δ_A , измеренные относительно плоскости земного экватора, а также эклиптическая широта β_A и значения $c_1, c_2, \varepsilon_{\min}(c_1, c_2), \varepsilon_{\max}(c_1, c_2)$.

Начальное положение проекций первых семи реализованных орбит на плоскость эклиптики в невращающейся системе координат $OXYZ$ показано на рис. 7а. Краткое имя каждой орбиты на рисунке показано в точке апогея.

На рис. 7б. показаны меридиональные сечения соответствующих этим орбитам годовых орбитальных торов полуденно-полуночной плоскостью во вращающейся солнечно-эклиптической системе координат SE . На этом рисунке показаны также сечения той же плоскостью границ магнитосферы: околосолнечной ударной волны и магнитопаузы.

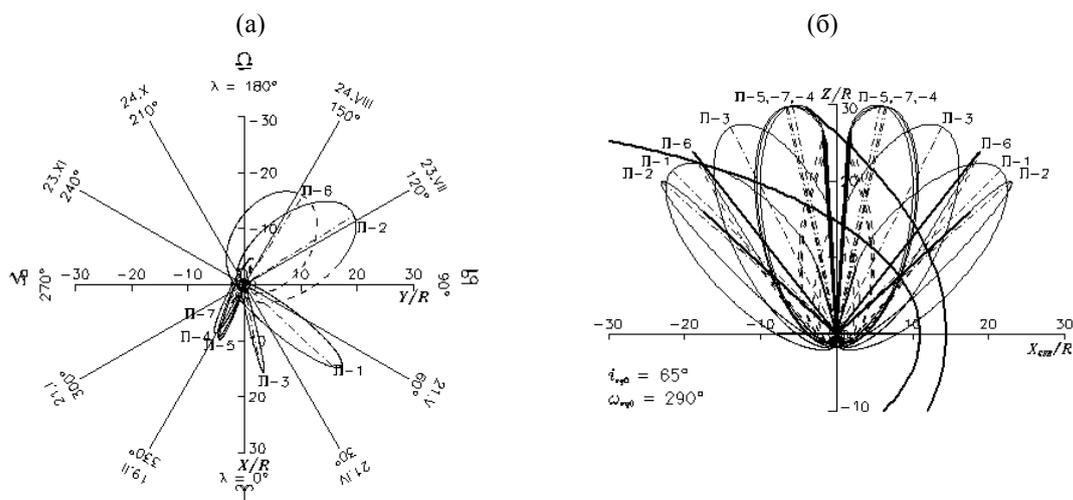


Рис.7. Проекция на плоскость эклиптики орбит *Прогноз* – 1÷7 в системе координат $OXYZ$ и годовые торы этих орбит в системе координат SE

Этот рисунок демонстрирует довольно большое разнообразие орбит рассматриваемого семейства и тем самым подтверждает необходимость использования ситуационных исследований при выборе орбит, исходя из задач проектов.

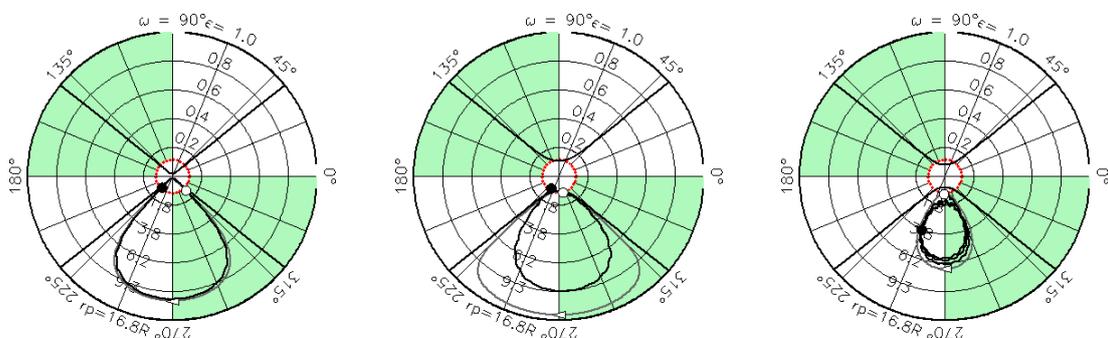


Рис.8. Фазовые портреты интегральных кривых для орбит КА *Прогноз*- 1, -2, -6

Наиболее интересными из рассматриваемого семейства орбит с точки зрения вековой эволюции являются орбиты (П-1, П-2 и П-6). Для первых двух из этих орбит характерна большая длительность баллистического существования (около 8 лет), а последняя из них отличается периодическим характером вековой эволюции и КА на этой орбите существует до сих пор, хотя связь с ним давно потеряна. Расчётное время завершения его баллистического существования приходится на начало 2019 года.

На рис. 8. показаны фазовые портреты вековой составляющей эволюции этих орбит, рассчитанные исходя из значений интегральных констант первых интегралов c_1 , c_2 , значения которых приведены в табл. 2. Эти фазовые портреты характеризуют зависимость фокального параметра от аргумента перигея, полученную аналитически. На тех же рисунках более жирными линиями показаны те же кривые, полученные исходя из начальных условий путём численного интегрирования с учётом всех возмущающих факторов.

На всех рисунках начальная точка показана светлым кружком, а конечная точка – тёмным кружком. Интересно отметить, что для орбиты *Прогноз-1* аналитическая и расчётная кривая практически совпадают, для орбиты *Прогноз-2* эти кривые значительно отличаются друг от друга, а для орбиты *Прогноз-6* расчётная кривая очень хорошо вписывается в область, очерчиваемую аналитической кривой. Все это полезно учитывать, принимая во внимание приближённый характер качественной теории возмущений.

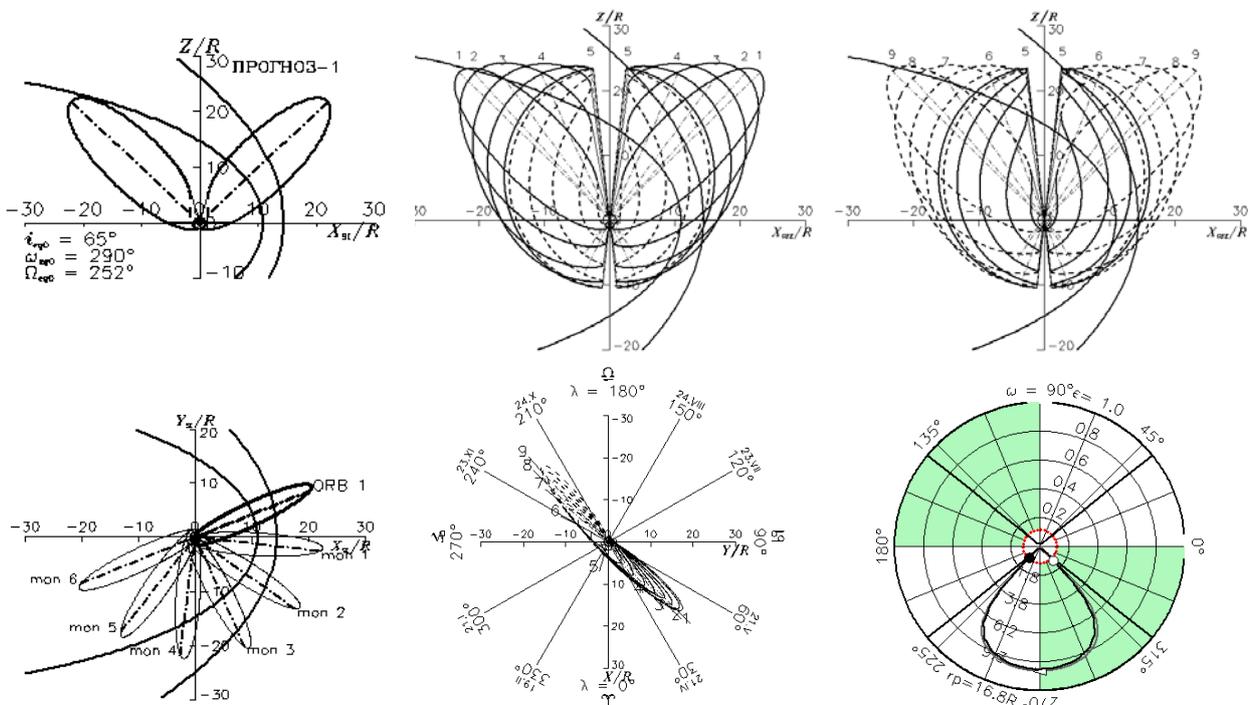


Рис. 9. Годовой орбитальный тор КА *Прогноз-1* и его вековая эволюция

На рис. 9 представлен ситуационный анализ орбиты КА *Прогноз-1*. На первом рисунке верхнего ряда показано сечение полуденно-полуночной плоскостью годового орбитального тора, соответствующего начальным значениям орбитальных элементов. Второй и третий рисунки демонстрируют с дискретностью один год сечения годовых орбитальных торов эволюционирующих под влиянием внешних гравитационных возмущений, полученные на основании результатов численного интегрирования.

На первом рисунке второго ряда показаны проекции орбиты на плоскость эклиптики в солнечно-эклиптической системе координат с дискретностью один месяц, в течение первого полугодия. На втором рисунке показаны проекции эволюционирующей орбиты на плоскость эклиптики в системе координат *OXYZ* с дискретностью один год. На последнем рисунке показан фазовый портрет вековой составляющей эволюции орбиты, который обсуждался выше.

5.5. Ситуационный анализ семейства орбит типа *Интербол-1*. Одной из главных целей многоспутникового проекта *Интербол* являлось изучение взаимодействия между удалёнными областями нейтрального слоя хвоста магнитосферы и авроральной областью околоземной магнитосферы. Ситуационному анализу при выборе орбит многоспутникового проекта *Интербол* была посвящена работа [Прохоренко, 1985]. КА *Интербол-1* был одиннадцатым из КА серии *Прогноз*, однако исходя из задач проекта, стало понятно, что его орбиту невозможно втиснуть в прокрустово ложе семейства орбит этой серии. Необходимо было не только менять начальное значение аргумента широты перигея, но и выбирать такое начальное значение прямого восхождения восходящего узла орбиты, которое бы обеспечило прохождение апогейного участка орбиты КА через полуночную область магнитосферы в зимнее время, а лучше всего, вблизи даты зимнего солнцестояния. Такая идея возникла не сразу и явилась результатом многочисленных обсуждений в процессе длительной подготовки проекта, старт которого много раз откладывался и состоялся в августе 1995 года.

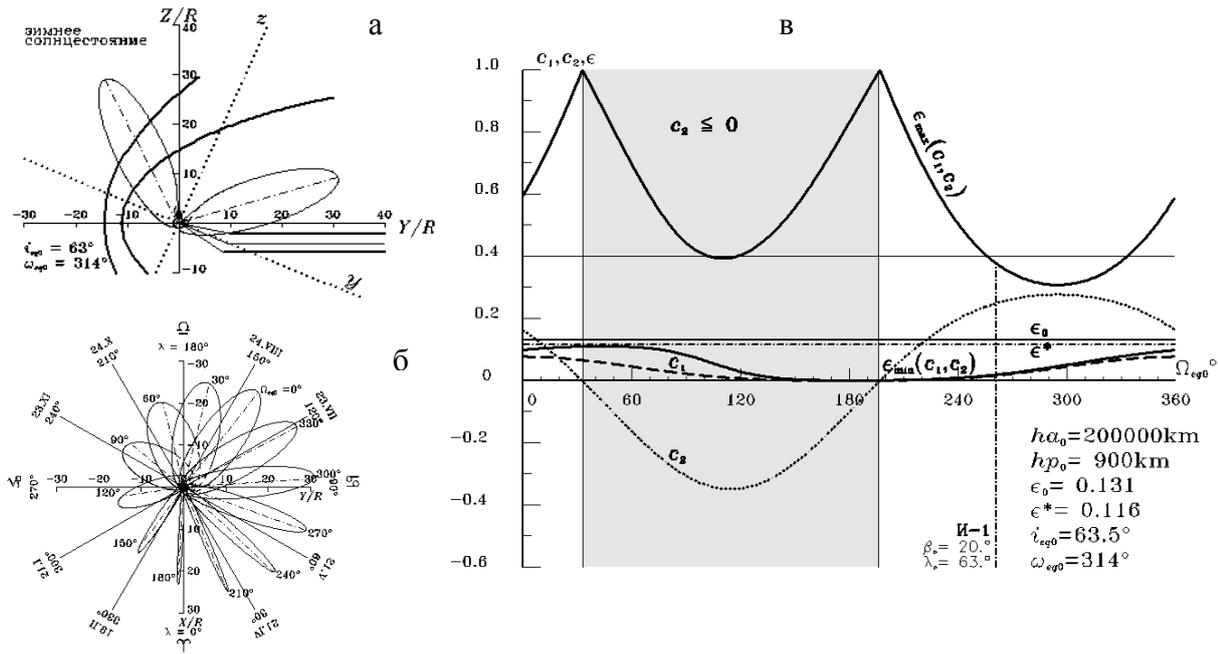


Рис. 10. Ситуационный и качественный анализ семейства орбит типа *Интербол-1*

Пользуясь описанными выше приёмами ситуационного анализа, рассмотрим орбитальный тор семейства орбит со свободным значением прямого восхождения восходящего узла Ω_{eq0} , при фиксированных значениях остальных четырёх орбитальных элементов, которые были выбраны для орбиты КА *Интербол-1*. Эти значения показаны на рис. 10в. Положение орбитального тора семейства орбит типа *Интербол-1*, построенного в экваториальной системе координат $Oxyz$, показано на рис. 10а в системе координат $OXYZ$. На рисунке показано сечение орбитального тора плоскостью OYZ , которая проходит через точки зимнего и летнего солнцестояния и совпадает с полуденной полуплоскостью магнитосферы Земли в дату летнего солнцестояния и с полуночной полуплоскостью в дату зимнего солнцестояния. Положение этого орбитального тора относительно модельных границ магнитосферы показано для даты зимнего солнцестояния. Линии, параллельные оси OY в анти солнечной (ночной) области магнитосферы моделируют нейтральный слой хвоста магнитосферы. Основная задача при выборе орбиты состояла в том, чтобы обеспечить удалённые пересечения орбиты с нейтральным слоем.

На рис. 10б показаны проекции на плоскость эклиптики различных орбит рассматриваемого семейства, соответствующих начальным значениям свободного параметра Ω_{eq0} , указанным в точках апогея. Для показанных орбит использованы значения параметра Ω_{eq0} на интервале $(0, 360^\circ)$ с шагом 30° .

Орбита КА *Интербол-1* имела начальное значение параметра $\Omega_{eq0} = 261^\circ$, которому соответствовало начальное значение эклиптической долготы точки апогея $\lambda = 63^\circ$. Исходя из этого, можно определить положение проекции этой

орбиты на плоскость эклиптики, среди других орбит рассматриваемого семейства, показанных на рис. 10б. А также можно определить даты, соответствующие прохождению радиус-вектора точки апогея орбиты КА *Интербол-1* через полуденный (21.V) и полуночный (23.XI) меридианы солнечно-эклиптической системы координат.

Как показывает рис. 10а, в рассматриваемом семействе орбит имеются орбиты, обеспечивающие пересечение нейтрального слоя на начальной стадии реализации проекта, но особо важную роль здесь может сыграть вековая составляющая эволюции орбиты под влиянием внешних гравитационных возмущений, которая зависит от знака интегральной константы c_2 . На рис. 10в показана картина качественного анализа рассматриваемого семейства орбит с точки зрения вековой составляющей эволюции и области значения свободного параметра, соответствующие значениям c_2 разного знака. Позиция орбиты КА *Интербол-1*, отмеченная на этом рисунке вертикальной штрихпунктирной линией, определяется значением $\Omega_{eq0} = 261^\circ$, принадлежит области положительных значений c_2 , при которых эволюция аргумента перигея носит ротационный характер.

На рис. 11 показан ситуационный анализ реализованной орбиты КА *Интербол - 1*. На первом рисунке верхнего ряда показано сечение полуденно-полуночной плоскостью годового орбитального тора, соответствующего начальным значениям орбитальных элементов, а второй рисунок демонстрирует с дискретностью один год эволюцию годового орбитального тора под влиянием внешних гравитационных возмущений. Для построения эволюционирующих орбитальных торов были использованы результаты численного интегрирования. Представленная на этом рисунке картина свидетельствует о том, что вековая эволюция обеспечивает широкий диапазон удалённых пересечений орбиты с нейтральным слоем хвоста магнитосферы.

Во втором ряду первый рисунок показывает проекции орбиты на плоскость эклиптики в солнечно-эклиптической системе координат с дискретностью один месяц в течение первых десяти месяцев после старта. На втором рисунке показаны проекции эволюционирующей орбиты на плоскость эклиптики в системе координат $OXYZ$ с дискретностью один год. На последнем рисунке показана интегральная кривая, соответствующая приведенным в табл. 5 значениям $c_1 = 0.0157$, $c_2 = 0.254$, полученным исходя из начальных элементов этой орбиты. На этом рисунке показана также зависимость фокального параметра от аргумента перигея, полученная в результате численного интегрирования с учётом всех возмущающих факторов. Эта кривая отличается от интегральной кривой в лучшую сторону, обеспечивая значительное возрастание максимального значения высоты перигея, по сравнению с тем, которое прогнозируется исходя из качественных методов теории возмущений, имеющих приближённый характер.

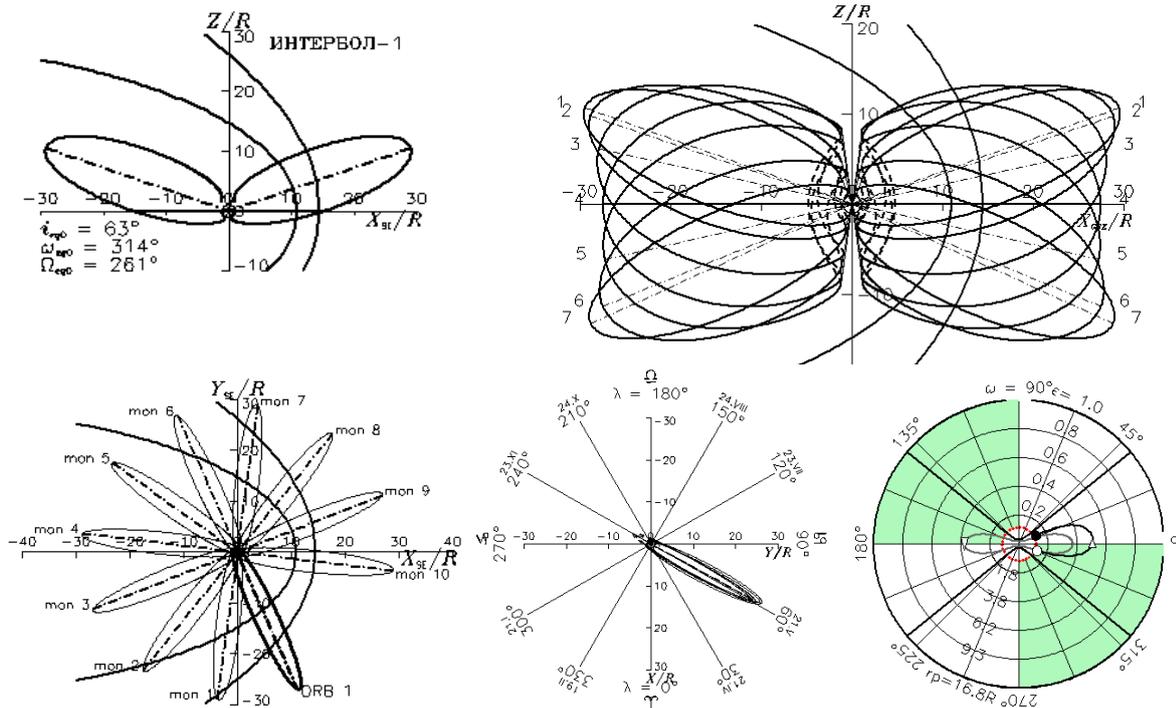


Рис. 11. Годовой тор орбиты КА *Интербол-1* и его вековая эволюция

Время существования орбиты КА *Интербол-1* составило около 5 лет. Следует отметить, что качественный анализ эволюции орбит рассматриваемого семейства, результаты которого демонстрирует рис. 10в, показывает, что все орбиты рассматриваемого семейства имеют ограниченное время баллистического существования. Самым простым способом увеличения времени баллистического существования орбиты (оставаясь в рамках рассматриваемого семейства орбит) является изменение свободного параметра Ω_{eq0} в сторону увеличения значения $\varepsilon_{\max}(c_1, c_2)$, зависимость которого от Ω_{eq0} показана на рис. 10в. Но такой поиск не должен стать самоцелью. В процессе подобного поиска не следует забывать об основной задаче проекта. Имеются и другие способы влиять на время существования орбиты, например, путём увеличения начального значения высоты перигея при сохранении высоты апогея, а можно и поднимать высоту апогея. Однако обсуждение этого вопроса может увести нас слишком далеко.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учитывая, что участниками сложного процесса, который связан с выбором орбит, исходя из задач проекта, и запуском спутника на выбранные орбиты, являются специалисты различных профессий: от физиков–теоретиков и экспериментаторов до специалистов в области небесной механики, баллистики и ракетной техники, на передний план выходит вопрос о взаимопонимании между участниками этого процесса. Настоящая работа

является попыткой автора разобраться в этом сложном процессе и внести свой вклад во всеобщее взаимопонимание.

Проблема выбора орбит, исходя из задач проектов, включает в себя две составляющих: ситуационный анализ, основанный на использовании моделей изучаемых областей, и качественный анализ особенностей вековой составляющей эволюции рассматриваемых орбит. Модели околоземного космического пространства, как правило, определяются в системе координат, связанной с плоскостью эклиптики и направлением на Солнце.

Характер вековой эволюции орбиты под влиянием внешних гравитационных возмущений также зависит от орбитальных элементов, заданных в системе координат, связанной с плоскостью орбиты возмущающего тела, т. е. с плоскостью эклиптики. Так что в процессе выбора орбит многие исследования приходится выполнять в системах координат, связанных с эклиптикой.

При этом запуск спутника на орбиту происходит в системе координат, связанной с плоскостью земного экватора. Исходя из этого, для достижения взаимопонимания между участниками проекта, через всю статью красной нитью проходит сохранение связи рассматриваемых вариантов орбиты с начальными условиями, определёнными в инерциальной системе координат, связанной с плоскостью земного экватора. В качестве эффективного инструмента для ситуационного анализа в работе используются орбитальные торы, которые были разработаны автором 35 лет назад и активно применялись в те годы в процессе выбора орбит для проекта *Интербол*.

Для исследования вековой составляющей эволюции рассматриваемых орбит используются качественные методы теории возмущения, в развитие которых большой вклад был внесен работами М.Л. Лидова и его школы. В качестве инструмента для исследования вековой составляющей эволюции орбит в работе используются полученные М.Л. Лидовым первые интегралы спутникового варианта двукратноосредненной ограниченной задачи трёх тел.

Основанием для создания этого инструмента послужили многолетние исследования автора, результатами которых были доказательства теорем о многообразиях начальных условий, приводящих или не приводящих к соударению спутников с поверхностью центрального тела под влиянием внешних гравитационных возмущений. Автором также были проведены исследования, позволяющие получить оценки границ области применения предлагаемого инструмента.

Одним из главных достоинств ситуационных исследований и качественных методов теории возмущений является то, что эти методы позволяют наглядно представить область, в которой нужно искать орбиту с нужными свойствами, вместо того, чтобы искать орбиту с нужными свойствами наугад, там, где её не может быть. А далее, учитывая, что качественные методы имеют приближенный характер, следует проверять выбранные орбиты на

соответствие поставленным задачам путем численного интегрирования с учётом всех возмущающих факторов.

Эти исследования позволяют преодолеть ряд недоразумений, связанных со сложившимся стереотипом запуска спутников. А также в очередной раз подтверждают известную истину о том, что судьба орбиты зависит от начальных значений её орбитальных элементов, которыми определяется положение орбиты в инерциальном пространстве. Основные рекомендации, вытекающие из этих исследований, заключаются в том, что при свободном выборе даты старта необходимо запускать КА на заранее выбранную орбиту, по принципу сначала выбирается орбита, а потом дата старта, а не наоборот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Артюхов М.И., Хартов В.В., Ширшаков А.Е. и др., 2012] *Артюхов М.И., Хартов В.В., Ширшаков А.Е. и др.* Космическая миссия «Радиоастрон». Первые результаты // Вестник, научно-технический журнал ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина. 2012. № 3. С. 2
- [Вашковьяк, 1999] *Вашковьяк М.А.* Об эволюции орбит далёких спутников Урана // Письма в Астрон. журн. 1999. Т. 23. № 7. С. 564-560.
- [Гордеева, 1968] *Гордеева Ю.Ф.* Зависимость элементов от времени в долгопериодических колебаниях в ограниченной задаче трех тел // Космич. Исслед. 1968. Т. 6. № 4. С. 536. (Cosmic Research P. 450).
- [Зеленый, Застенкер, и др., 2014] *Зеленый Л.М., Застенкер Г.Н., Петрукович А.А., Чесалин Л.С., Назаров В.Н., Прохоренко В.И. и др.* Эксперимент Плазма-Ф: три года на орбите // Вестник, научно-технический журнал ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина 2014 3(24). С. 12- 36. L. M. Zelenyi, G. N. Zastenker, A. A. Petrukovich, L. S. Chesalin, V. N. Nazarov, V. I. Prokhorenko and all. PLASMA-F Experiment: Three Years of On Orbit Operation // ISSN 0038_0946, Solar System Research, 2015, Vol. 49, No. 7, pp. 580–603. © Pleiades Publishing, Inc., 2015.
- [Лидов, 1961] *Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5-45.
- [Лидов, 1963] *Лидов М.Л.* О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // Сб. Проблемы движения искусственных небесных тел. Доклады на конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии. Москва 20-25 ноября 1961. Астрономический Совет АН СССР. 1963. С. 119-134.
- [Лидов, Ярская, 1974] *Лидов М.Л., Ярская М.В.* Интегрируемые случаи в задаче об эволюции орбиты спутника при совместном влиянии внешнего тела и нецентральности поля планеты // Космич. исслед. 1974. Т. XII. № 2. С. 155–170. (Cosmic Research P. 139).

- [Назиров, Прохоренко, Шейхет, 2002] Назиров Р.Р., Прохоренко В.И., Шейхет А.И. Ретроспективный геометрический анализ долгопериодической эволюции орбит и времени баллистического существования ИСЗ серии ПРОГНОЗ // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 5. С. 538–554.
- [Прохоренко, 1983а] Прохоренко В.И. Орбитальные торы в задачах ситуационных исследований // Пр. ИКИ АН СССР № 770. М. 1983. С. 26.
- [Прохоренко, 1983б] Прохоренко В.И. Ситуационный анализ орбит станций «ПРОГНОЗ» // Сб. Исследование солнечной активности и космическая система «ПРОГНОЗ». М. Наука, 1984. С. 214-230.
- [Прохоренко, 1984] Прохоренко В.И. Ситуационный анализ орбит ИСЗ типа «Прогноз» для солнечно-земных космических экспериментов // Сб. Навигационная привязка и статистическая обработка космической информации. М. Наука 1983. С. 67-80.
- [Прохоренко, 1985] Прохоренко В.И. Ситуационный анализ орбит Хвостового и Аврорального зондов в проекте «ИНТЕРБОЛ» // Пр. ИКИ АН СССР № 1037, М. 1985. С. 70.
- [Прохоренко, 2002] Прохоренко В.И. Исследование времени баллистического существования эллиптических орбит, эволюционирующих под влиянием гравитационных возмущений внешних тел // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 3. С. 285-294.
- [Прохоренко, 2006] Прохоренко В.И. Долговременная эволюция орбит ИСЗ под влиянием гравитационных возмущений, обусловленных сжатием Земли, с учетом возмущений от внешних тел // Изв. Вузов. Физика. Издание ТГУ. 2006. № 2. Приложение. С. 63-73.
- [Прохоренко, 2007] Прохоренко В.И. Об условиях пересечения орбиты спутника с поверхностью центрального тела конечного радиуса в двукратно осредненной ограниченной задаче трех тел. Труды МИАН РАН 2007 259:156-173, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 259: 150–166.
- [Прохоренко, 2011] Victoria I. Prokhorenko. On manifolds of initial conditions leading to intersection of orbits of satellites with planet under weak gravitational perturbations // Functional Analysis and Other Mathematics, DOI 10.1007.s11853-011-0046-y, Phasis, Springer, 2011. V. 3 № 2. P. 135-167.
- [Прохоренко, 2014а] Прохоренко Виктория. Об особенностях долговременной эволюции высокоапогейной орбиты КА Спектр-Р // Космич. исслед. 2014. Т. 52. № С. 132-152.
- [Прохоренко, 2014б] Прохоренко Виктория И. Проблема выбора высокоапогейных орбит искусственных спутников Земли с учетом времени баллистического существования // Космонавтика и ракетостроение. 2014. Т. 74. № 1. С. 30-41.
- [Прохоренко, 2015] Прохоренко В.И. О применении качественных методов теории возмущений при решении практических задач выбора и коррекции

орбит спутников планет с учетом вековой и долгопериодической составляющих эволюции под влиянием внешних гравитационных возмущений // Сб. Космическая баллистика - от истоков к будущему. Сборник трудов юбилейного заседания семинара по механике, управлению, информатике, посвященного 100-летию со дня рождения П.Е. Эльясберга 17-19 июня 2014 г., Россия, Таруса. Под ред. Р.Р. Назирова. М. ИКИ РАН 2015. С. 130-161.

- [Эльясберг, 1965] Эльясберг П.Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М. Наука, Физматлит. 1965. С. 540.
- [Kozai, 1962] Kozai. Y. Secular Perturbations of Asteroids with High Inclinations and Eccentricity // Astron J. 1962.V. 67. P. 591-598.

ВКЛАД М. Л. ЛИДОВА В ТЕОРИЮ ГАРАНТИРУЮЩЕГО ОЦЕНИВАНИЯ

А. И. МАТАСОВ

Лаборатория управления и навигации механико-математического
факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

E-mail: alexander.matasov@gmail.com

Вклад М. Л. Лидова в теорию гарантирующего оценивания фундаментален. М. Л. Лидов сделал гарантирующее оценивание инженерной наукой. В 1964 году в журнале "Космические исследования" была опубликована его пионерская работа [1], которая на полвека определила одно из основных направлений теории гарантирующего оценивания.

Во-первых, эта работа возникла из практических потребностей (в частности, поставленная и решенная в ней задача была нужна для обеспечения космических полетов). Во-вторых, в ней органично появились неквадратичные функционалы, что было нетипично для эры господства метода наименьших квадратов. В третьих, задача оценивания сводилась к линейному программированию с симплекс-методом в качестве алгоритма решения. Последнее обстоятельство также было необычным, поскольку было принято считать, что линейное программирование (и симплекс-метод) есть инструмент для решения задач математической экономики и к инженерным задачам не имеет отношения. Интересно отметить, что в этом же 1964 году вышли знаменитые работы Н. Н. Красовского¹ и П. Хьюбера², содержащие схожие идеи, но написанные в другом ключе.

"СХЕМА БОРТИКОВ"

Напомним поставленную М. Л. Лидовым задачу в ее современной форме, которая впоследствии получила название "схема бортиков".

Пусть имеются измерения

$$z_k = H_k q + \varrho_k, \quad |\varrho_k| \leq \sigma_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

¹Красовский Н. Н. К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем. *Прикладная математика и механика*, 1964, Т. 28, № 1, С. 3-14.

²Huber P. J. Robust estimation of a location parameter. *Annals of Mathematical Statistics*, 1964, vol. 35, No. 1, pp.73-101.

где $z_k \in \mathbb{R}^1$ – измерения, $H_k \in \mathbb{R}^m$ – известные векторы, $q \in \mathbb{R}^m$ – неизвестный вектор параметров, $\varrho_k \in \mathbb{R}^1$ – ошибки измерений. Требуется оценить скалярную величину $l = a^T q$, где a – заданный вектор.

Рассмотрим линейные оценщики для l вида

$$\hat{l} = \sum_{k=1}^N \Phi_k z_k,$$

где Φ_k – некоторые весовые коэффициенты. Будем искать эти весовые коэффициенты как решение следующей минимаксной задачи:

$$\min_{\{\Phi_k\}} \max_{q \in \mathbb{R}^m, \{|\varrho_k| \leq \sigma_k\}} |\hat{l} - l|.$$

Можно показать, что эта задача сводится к задаче математического программирования вида

$$\min_{\{\Phi_k\}} \sum_{k=1}^N \sigma_k |\Phi_k| \quad \text{при ограничениях} \quad \sum_{k=1}^N H_k \Phi_k = a.$$

Эта проблема очевидными заменами сводится к задаче линейного программирования, которая может быть решена, например, симплекс-методом. Таким образом, была не только сформулирована принципиально новая задача, но и дан конструктивный метод ее численного решения. Это было определяющим обстоятельством для практики. Важным следствием сведения к линейному программированию явилось и то, что оптимальный оценщик содержит не более, чем m отличных от нуля компонент. Этот вывод был парадоксальным, так как не соответствовал признанному мнению, что для достижения лучшей точности следует использовать все имеющиеся измерения. Кроме того, заодно решалась проблема с экономией числа измерений, что в некоторых приложениях чрезвычайно важно.

Как отмечено в [1], к такой же задаче математического программирования сводится тоже очень важная для приложений задача о "наихудшей корреляции", в которой ошибки имеют ограниченные дисперсии, но являются произвольно коррелированными. В работе [4] М. Л. Лидов рассмотрел обобщение задачи о "наихудшей корреляции", в которой, кроме неопределенно-коррелированной составляющей шума в измерениях, присутствует и белый шум. В [11] получена асимптотка оптимального оценивания в предположении о слабом влиянии белого шума. Полезное обобщение "схемы бортиков" на случай

произвольных линейных ограничений на шум измерений представлено в статье [15].

ЗАДАЧА ОБ ОБОБЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ КОРРЕКЦИИ

Поразительно, но описанная выше задача "схема бортиков" с ее решением симплекс-методом оказала большое влияние на другие важные для приложений задачи, не имеющие прямого отношения к оцениванию. Такой задачей является задача об обобщенной линейной импульсной коррекции (ОЛИК). Эта задача описана в другой классической работе М. Л. Лидова [2].

Пусть даны матрицы $D_k \in \mathbb{R}^{m \times n_k}$, $k = 1, \dots, N$ и вектор $a \in \mathbb{R}^m$. Задача ОЛИК имеет вид:

$$\min_{\{w_k, \alpha_k\}} \sum_{k=1}^N w_k \quad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{k=1}^N D_k \alpha_k w_k = a, \quad w_k \geq 0, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad \|\alpha_k\| = 1, \quad k = 1, \dots, N.$$

Такая задача возникает при коррекции траектории космического аппарата посредством реактивных двигателей (см., также, и [13]). Величины и ориентации корректирующих импульсов можно изменять, а расход топлива необходимо минимизировать. Несмотря на то, что эта задача внешне является невыпуклой, она может быть решена модификацией симплекс-метода. Правда, в отличие от классического линейного программирования, в котором задача теоретически решается за конечное число шагов, в задаче ОЛИК алгоритм имеет бесконечное число шагов из-за континуального характера допустимого множества векторов.

В этом случае хорошо иметь оценку степени неоптимальности текущего решения [2]. Следует отметить, что и для классического линейного программирования операции симплекс-метода не заканчиваются за конечное число шагов из-за численных ошибок. Поэтому такая оценка полезна и для канонической задачи линейного программирования. Сформулируем соответствующий результат для простейшего случая [21].

ОЦЕНКА НЕОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ НА ТЕКУЩЕЙ ИТЕРАЦИИ

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования:

$$\min_{\{x_k\}} \sum_{k=1}^N c_k x_k \quad \text{при ограничениях} \quad \sum_{k=1}^N A_k x_k = b, \quad x_k \geq 0.$$

Введем опорный базис $A_J = (A_1, \dots, A_m)$ (без ограничения общности можно считать, что он образован первыми m векторами), то есть такой базис, что A_1, \dots, A_m – линейно независимые векторы и

$$\sum_{k=1}^m A_k x_k = b, \quad x_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Определим величины z_{rs} как коэффициенты разложения векторов по опорному базису:

$$A_k = \sum_{s=1}^m A_s z_{ks}, \quad k = 1, \dots, N$$

и числа

$$r_k = \sum_{s=1}^m c_s z_{ks} - c_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad \text{и} \quad r = \max_{k=1, \dots, N} r_k.$$

Из теории линейного программирования известно, что если $r \leq 0$, то исходный опорный базис оптимален, а если $r > 0$, то – не оптимален.

Пусть на текущей итерации определен опорный базис (A_1, \dots, A_m) и значение функционала L_T . Введем оптимальный опорный базис $(A_{j_1}, \dots, A_{j_m})$. При этом

$$\sum_{s=1}^m A_{j_s} \tilde{x}_{j_s} = b, \quad \tilde{x}_{j_s} \geq 0, \quad s = 1, \dots, m;$$

оптимальное значение функционала на оптимальном опорном базисе обозначим \tilde{L} .

Л е м м а [21]. Справедлива оценка

$$L_T \leq \tilde{L} + r \sum_{s=1}^m \tilde{x}_{j_s}.$$

Далее рассмотрим случай $c_k > 0$. Без потери общности будем считать, что $c_k = 1$.

С л е д с т в и е [21]. Справедлива оценка

$$L_T \leq \tilde{L}(1+r).$$

ЗАДАЧА О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ ИЗМЕРЕНИЙ

В уже упомянутой работе [2] М. Л. Лидов показал, что при помощи ОЛИК можно решить и задачу о выборе оптимальной программы измерений (задачу Элфвинга³). Так что и здесь симплекс-метод с соответствующими модификациями может быть успешно применен. Задача о выборе оптимальной программы измерений, то есть программы, минимизирующей затраты на измерения при гарантированной точности оценивания выбранного параметра, в простейшей постановке сводится к следующей невыпуклой задаче [2, 21]:

$$\min_{\{w_s\}} \sum_{s=1}^N w_s \quad \text{при ограничениях} \quad a^T \left(\sum_{s=1}^N w_s G_s \right)^{-1} a = \sigma^2,$$

$$w_s \geq 0, \quad G_s \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad a \in \mathbb{R}^m, \quad s = 1, \dots, N.$$

Случай нескольких контролируемых параметров исследован в [5, 7]. Другие аспекты указанной задачи, связанные с ограничениями на компоненты w_s , рассмотрены в [3]. Достаточно полное изложение вышеперечисленных проблем с некоторыми обобщениями и поучительными комментариями представлено в [21].

ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕМОДЕЛИРУЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Вернемся к постановкам задач гарантирующего оценивания. В 1986 г. М. Л. Лидов рассмотрел задачу оценивания с учетом немоделируемых возмущений движения объекта [6] (см., также, [9]). Пусть движение объекта описывается уравнениями

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^m, \quad u(t) \in \mathbb{R}^r, \quad t \in [0, T].$$

Предполагается, что вектор возмущений $u(t)$ неизвестен, но ограничен по норме: $\|u(t)\| \leq \gamma(t)$, $t \in [0, T]$ (или покомпонентно: $|u_j(t)| \leq \gamma_j(t)$, $j = 1, \dots, r$).

³Elfving G. Optimum allocation in linear regression theory. *Annals of Mathematical Statistics*, 1952, vol. 23, No. 2, pp.255-262.

Измерения имеют вид

$$z(t) = H(t)x(t) + \varrho(t), \quad |\varrho(t)| \leq \sigma(t) \quad t \in [0, T].$$

Задача состоит в оценивании параметра $l = a^T x(0)$, где $a \in \mathbb{R}^m$ – заданный вектор. Оценка строится при помощи линейных "фильтров"

$$\hat{l} = \int_0^T \Phi(t)z(t) dt,$$

а оптимальная оценка определяется из решения минимаксной задачи

$$\min_{\Phi(t)} \max_{x(0), u(t), \varrho(t)} |\hat{l} - l|.$$

Здесь максимум ошибки оценки берется по всем неопределенным факторам, а минимум ищется по всевозможным весовым функциям "фильтра". Ясно, что такая постановка естественно обобщает "схему бортиков".

Введем фундаментальную матрицу $X(t)$ соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений, матрицу $b(t) = X^{-1}(t)B(t) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ и вектор $h(t) = X^T(t)H(t)$. Тогда описанную задачу можно свести к форме

$$z(t) = h^T(t)q + \xi(t), \quad q = x(0),$$

где

$$\xi(t) = \varrho(t) + h^T(t) \int_0^t b(\tau)u(\tau) d\tau, \quad |\varrho(t)| \leq \sigma(t), \quad \|u(t)\| \leq \gamma(t).$$

Для дискретных моментов измерений $0 = t_1 < t_2, \dots < t_N = T$ уравнение для измерений примет вид

$$z_k = h_k^T q + \xi_k, \quad h_k = h(t_k), \quad \xi_k = \xi(t_k),$$

а вектор ошибок $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ задается множеством

$$\mathcal{E} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N \mid \xi_k = \varrho_k + h_k^T \int_0^{t_k} b(\tau)u(\tau) d\tau \right\},$$

$$k = 1, \dots, N, \quad |\varrho_k| \leq \sigma_k = \sigma(t_k), \quad \|u(\tau)\| \leq \gamma(\tau).$$

Тогда основная проблема сводится к минимаксной задаче

$$\min_{\Phi} \max_{\xi \in \mathcal{E}} \Phi^T \xi \quad \text{при ограничении} \quad \sum_{k=1}^N h_k \Phi_k = a, \quad \Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)^T.$$

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Для численного решения игровой задачи оценивания при наличии немоделируемых возмущений М. Л. Лидов свел ее к уже рассмотренной выше задаче обобщенной импульсной коррекции [10, 12, 14]. Напомним, как это можно сделать [18]. Для дискретного набора измерений соответствующая вариационная задача примет вид

$$\min_{\Phi} \sum_{s=1}^N \left(\sigma_s |\Phi_s| + \int_{t_{s-1}}^{t_s} \gamma(\tau) \|b^T(\tau) \sum_{k=s}^N h_k \Phi_k\| d\tau \right)$$

$$\text{при ограничении} \quad \sum_{s=1}^N h_k \Phi_k = a.$$

Разобьем каждый интервал $[t_{s-1}, t_s]$ точками $t_{sj} = t_{s-1} + \Delta_s j$, $\Delta_s = \frac{(t_s - t_{s-1})}{p_s}$, $j = 0, \dots, p_s$ на p_s интервалов настолько малой длины Δ_s , что допустима аппроксимация

$$\int_{t_{sj-1}}^{t_{sj}} \gamma(\tau) \|\cdot\| d\tau \approx \|b_{sj}^T \sum_{k=s}^N h_k \Phi_k\|, \quad j = 1, \dots, p_s,$$

где

$$b_{sj}^T = b^T(\tau_{sj}) \gamma(\tau_{sj}) \Delta_s, \quad \tau_{sj} = (t_{sj-1} + t_{sj})/2.$$

Введем величины $d_{sjk} = b_{sj}^T h_k \in \mathbb{R}^r$, $v_k = |\Phi_k|$, $\alpha_k = \text{sign } \Phi_k$ и v_{sj} , β_{sj} такие, что

$$\sum_{k=s}^N d_{sjk} \Phi_k = -v_{sj} \beta_{sj}, \quad v_{sj} \geq 0, \quad \beta_{sj} \in \mathbb{R}^r, \quad \|\beta_{sj}\| = 1.$$

Тогда задача оценивания с немоделируемыми возмущениями сводится к следующей задаче обобщенной линейной коррекции:

$$\min_{\{v_k, v_{sj}, \alpha_k, \beta_{sj}\}} \sum_{k=1}^N \sigma_k v_k + \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^{p_s} v_{sj} \quad \text{при ограничениях}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N h_k \alpha_k v_k &= a, & \sum_{k=s}^N d_{sjk} \alpha_k v_k + v_{sj} \beta_{sj} &= 0, & j=1, \dots, p_s, & s=1, \dots, N, \\ v_k &\geq 0, & v_{sj} &\geq 0, & \alpha_k &\in \mathbb{R}^1, & |\alpha_k| &= 1, & \beta_{sj} &\in \mathbb{R}^r, & \|\beta_{sj}\| &= 1. \end{aligned}$$

В работе [16] численное решение задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями сведено к решению задачи обобщенного линейного программирования, получающейся из соответствующей двойственной задачи. На примере задачи оценивания параметра плоского околокругового движения ИСЗ, ранее решенной методом сведения к обобщенной импульсной коррекции, сопоставлены характеристики разных алгоритмов.

Эта двойственная задача имеет вид:

$$\max_{\{\xi, \alpha_k, w_s\}} \left(- \sum_{s=1}^m a_s w_s \right) \quad \text{при ограничениях}$$

$$\sum_{k=1}^n \xi^k \alpha_k + \sum_{s=1}^m H^s w_s = 0, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k=1, \dots, n,$$

где

$$\xi^k \in \mathbb{R}^N, \quad \xi^k \in \mathcal{E}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+, \quad k=1, \dots, n, \quad w_s \in \mathbb{R}^1, \quad s=1, \dots, m,$$

$$H^T = (h_1, \dots, h_N), \quad H = \left(\begin{matrix} 1 \\ H \\ \dots \\ H \\ m \end{matrix} \right).$$

В задачах обобщенного линейного программирования нередко встречается вырожденность решения (наличие нулевых или близких к нулевым значений базисных переменных). Задачам вырожденного линейного программирования посвящена статья [17]. Алгоритм, основанный на применении необходимых и достаточных условий оптимальности оценителя, представлен в [8]. Наиболее поздние статьи [18, 19, 20] носят обзорный и обобщающий характер. В частности, в [19] рассматриваются и задачи апостериорного оценивания.

В заключение подчеркнем, что работы М. Л. Лидова оказали огромное влияние на теорию гарантирующего оценивания и на приложения этой теории, в особенности в аэрокосмической области (см.,

например, ^{4 5 6}). Несмотря на прошествование немалых лет, они не потеряли своей значимости. Впрочем, это относится и ко всему научному наследию выдающегося ученого – Лауреата Ленинской премии Михаила Львовича Лидова.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л и д о в М. Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов. *Космические исследования*, 1964, Т. 2, № 5, С. 713-715.

[2] Л и д о в М. Л. Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траектории и выбора состава измерений и алгоритмы их решения. *Космические исследования*, 1971, Т. 9, № 5, С. 687-706.

[3] Л и д о в М. Л., Т е с л е н к о Н. М. Оптимизация решения некоторых задач управления полетом космических аппаратов методом спуска по параметру. *В сб.: Математическое обеспечение космических экспериментов*. М.: Наука, 1978, С. 112-142.

[4] Л и д о в М. Л. Минимаксная задача оценивания параметров траектории в непрерывной постановке. *Космические исследования*, 1984. Т. 22, № 4, С. 483-498.

[5] Л и д о в М. Л. Эффективный алгоритм решения задачи о выборе оптимальной программы измерений с ограничениями на ошибки оценки нескольких параметров. *Космические исследования*, 1985. Т. 23, № 4, С. 499-517.

[6] Л и д о в М. Л. Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения. *Космические исследования*, 1986. Т. 24, № 2, С. 246-276.

⁴Бахшиян Б. Ц., Назиров Р. Р., Эльясберг П. Е. *Определение и коррекция движения*. М.: Наука, 1980.

⁵Белоусов Л. Ю. *Оценивание параметров движения космических аппаратов*. М.: Физматлит, 2002.

⁶Акимов П. А., Деревянкин А. В., Матасов А. И. *Гарантирующее оценивание и l_1 -аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях*. М.: Издательство МГУ, 2012.

[7] Л и д о в М. Л., Б а к у м а Л. Н. Определение оптимальной программы измерений с ограничениями на ошибки оценок трех параметров движения суточного спутника. *Космические исследования*, 1986, Т. 24, № 4, С. 483-496.

[8] Л и д о в М. Л., Л я х о в а В. А. Численное решение минимаксной задачи оценивания параметров движения при наличии немоделируемых ускорений. *Космические исследования*, 1987, Т. 25, № 1, С. 3-17.

[9] Л и д о в М. Л. Игровая задача оценивания параметров движения при наличии немоделируемых ускорений. *Механика и научно-технический прогресс*. М.: Наука, 1987, Т. 1, С. 212-225.

[10] Л и д о в М. Л. Алгоритм оценивания параметров движения в задаче с немоделируемыми ускорениями. *Доклады АН СССР*, 1988, Т. 300, № 1, С. 51-54.

[11] Л и д о в М. Л. О длительности сеансов наблюдений при слабом влиянии белого шума. *Космические исследования*, 1988, Т. 26, № 2, С. 179-183.

[12] Л и д о в М. Л., Б а к у м а Л. Н. Применение алгоритма оптимальной коррекции для решения задач оценивания с немоделируемыми ускорениями. *Космические исследования*, 1988, Т. 26, № 3, С. 339-352.

[13] Л и д о в М. Л., Ж и р н о в В. А. Решение задачи сближения с несколькими астероидами алгоритмом оптимальной коррекции. *Космические исследования*, 1988, Т. 26, № 4, С. 508-518.

[14] Л и д о в М. Л. Оценивание параметров движения при действии немоделируемых ускорений. *Труды Математического института им. В. А. Стеклова*. М.: Наука, 1989, Т. 186, С. 59-63.

[15] Л и д о в М. Л., М а т а с о в А. И. Об одном обобщении задачи о "наихудшей корреляции". *Космические исследования*, 1989, Т. 27, № 3, С. 454-456.

[16] Л и д о в М. Л., Б а к у м а Л. Н. Экспериментальная проверка эффективности нового алгоритма для задачи оценивания с немоделируемыми возмущениями. *Космические исследования*, 1991, Т. 29, № 1, С. 115-126.

[17] Л и д о в М. Л. О модификации симплекс-метода линейного программирования в случае вырождения. *Космические исследования*, 1991, Т. 29, № 4, С. 499-508.

[18] Л и д о в М. Л., Б а х ш и я н Б. Ц., М а т а с о в А. И. Об одном направлении в проблеме гарантирующего оценивания. *Космические исследования*, 1991, Т. 29, № 5, С. 659-684.

[19] Л и д о в М. Л. К задаче гарантирующего оценивания. *Космические исследования*, 1991, Т. 29, № 6, С. 803-814.

[20] Л и д о в М. Л. Об опыте численного решения задач оценивания и стохастического управления в гарантирующей постановке. *Известия РАН. Сер. Техническая кибернетика*, 1993, № 4, С. 35-43.

[21] Л и д о в М. Л. *Минимаксные методы оценивания*. М.: Препринт № 71 за 2010 г. Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. 89 с.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ХИЛЛА

А. Б. Батхин, Н. В. Батхина

(ИПМ им. М. В. Келдыша, МАОУ СОШ №17 г. Щелково)

Аннотация

Изучаются семейства симметричных пространственных периодических решений задачи Хилла, порождённые вертикальными столкновительными траекториями. Используется методика, предложенная М. Л. Лидовым в серии работ, выполненных более тридцати лет назад. Полученные М. Л. Лидовым с соавторами результаты используются для получения более детальной информации о найденных семействах, а также вычисляются новые семейства симметричных периодических решений с локальной кратностью три и более.

1. Работы М. Л. Лидова по семействам пространственных периодических орбит задачи Хилла

С 1977 по 1988 годы М. Л. Лидов с соавторами выполнил серию работ, в которых исследовались периодические решения пространственной задачи Хилла. В [1] было анонсировано семейство пространственных периодических орбит, найденное для эллиптической ограниченной задачи трёх тел (ОЗТТ). Это семейство затем было численно изучено в [2] для предельного варианта ОЗТТ — пространственной задачи Хилла. Спустя три года, Михаил Львович подошёл к поставленной задаче системно. Вначале [3] был разработан аналитический аппарат необходимый для вычисления матрицы монодромии периодического решения в регуляризованных переменных Кунстаанхеймо-Штифеля [4]. Обобщённая процедура регуляризации позволила получить уравнения в вариациях регуляризованной системы Гамильтона с тремя степенями свободы, которые позволили эффективно находить мультипликаторы периодического решения для столкновительных орбит. Центральной работой, несомненно, является статья [5]. В ней, с одной стороны, подробно рассматривается пространственный вариант задачи Хилла, проводится анализ группы симметрий её канонических уравнений. С другой стороны, разрабатывается метод, с помощью которого можно находить начальные условия симметричных периодических орбит различных локальных кратностей, семейства которых пересекаются с семейством \mathcal{B}_0 вертикальных столкновительных орбит. Результат применения этого метода описан в работе [6], в которой численно исследовано с той или иной степенью подробности восемь семейств симметричных пространственных периодических решений. Одно из найденных семейств впоследствии было использовано для проектирования орбиты космической станции радиоинтерферометра [7].

Методика поиска периодических решений, предложенная М. Л. Лидовым в указанных выше работах, заключается в применении теории периодических решений второго рода по Пуанкаре. Этому виду решений было посвящено несколько глав в знаменитой работе «Новые методы небесной механики» А. Пуанкаре [8], и, кратко, идея этих решений состоит в следующем.

1) Пусть известно некоторое периодическое решение $x(t)$ периода T исследуемой системы. Если исходная система уравнений автономна, т. е. не зависит явно от времени, то это решение принадлежит некоторому семейству. В качестве параметра семейства обычно удобно выбрать значение некоторого первого интеграла, например, интеграла энергии.

2) С каждым периодическим решением связана матрица монодромии M , которая есть решение задачи Коши на периоде T с единичными начальными условиями уравнения в вариациях Пуанкаре системы вдоль периодического решения $x(t)$. Для автономных гамильтоновых систем матрица M будет симплектической с единичным определителем. Устойчивость периодического решения $x(t)$ в линейном приближении формулируется в терминах корней характеристического многочлена матрицы M , называемых мультипликаторами ρ_i . Удобно это сделать с помощью т. н. индексов устойчивости S_i , которые суть линейные комбинации мультипликаторов ρ_i и являются вещественными величинами. Если все индексы устойчивости S_i по модулю меньше единицы, то решение $x(t)$ устойчиво.

3) Пусть один из индексов устойчивости S_i периодического решения $x(t)$ с периодом T равен

$$S_i = \cos \left(2\pi \frac{p}{q} \right), \text{ где } p, q \in \mathbb{Z},$$

тогда в его окрестности существует новое периодическое решение $x^*(t)$ с периодом qT , называемое порождённым. Такое порождённое решение будет иметь локальную кратность p/q .

В качестве семейства порождающих решений (решений первого рода) М. Л. Лидов выбрал семейство вертикальных ударных решений семейства \mathcal{B}_0 . С помощью метода изолиний он вычислял критические орбиты, в окрестности которых имеются симметричные периодические решения второго рода. В [5] построены асимптотики начальных условий, по которым в [6] были вычислены семейства новых пространственных периодических решений.

2. Задача Хилла и её свойства

Задача Хилла является некоторым предельным случаем ограниченной задачи трех тел [9] и используется для исследования динамики тела «нулевой» массы (спутника) в окрестности меньшего из двух тяготеющих тел. Хотя задача Хилла неинтегрируема, но её уравнения движения в отличие от ОЗТТ не содержат массового параметра μ , что делает их существенно проще уравнений ОЗТТ.

Уравнения задачи Хилла в синодической системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\dot{x}_2 + 3x_1 - \frac{x_1}{r^3}, \\ \ddot{x}_2 = -2\dot{x}_1 - \frac{x_2}{r^3}, \\ \ddot{x}_3 = -x_3 - \frac{x_3}{r^3}, \end{cases} \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Уравнения (1) обладают единственным первым интегралом — интегралом Якоби

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = 3x_1^2 - x_3^2 + \frac{2}{r} - C$$

где C — постоянная Якоби.

Гамильтониан задачи имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - x_1 y_2 + x_2 y_1 - \frac{1}{r} - x_1^2 + \frac{1}{2} (x_2^2 + x_3^2) = -\frac{1}{2} C,$$

где \mathbf{y} — вектор импульсов, канонически сопряжённый вектору координат \mathbf{x} .

Канонические уравнения задачи Хилла инвариантны относительно конечной группы 8-го порядка преобразований расширенного фазового пространства, задаваемой образующими

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : (t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) &\rightarrow (-t, x_1, -x_2, x_3, -y_1, y_2, -y_3) \\ \Sigma_2 : (t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) &\rightarrow (-t, -x_1, x_2, x_3, y_1, -y_2, -y_3) \\ \Sigma_3 : (t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) &\rightarrow (-t, x_1, x_2, -x_3, -y_1, -y_2, y_3). \end{aligned}$$

Все периодические решения могут быть разделены на несколько групп, в зависимости от того, как они преобразуются под действием симметрий:

несимметричные решения, которые под действием любого из преобразований переходят в другие решения; всего таких различных решений может быть 8;

однократно симметричные решения, которые под действием одного из элементов группы переходят сами в себя, таких решений может быть 4;

двукратно симметричные решения, остающиеся инвариантными относительно пары преобразований, композиция которых не равна тождественному, таких решений может быть 2;

трёхкратно симметричные решения, инвариантные относительно любого из преобразований.

Наличие симметрий у порождающего решения влияет на структуру симметрий порождённого.

1) В [10; 11] было показано, что если порождающее решение несимметрично, то от него может ответвиться только несимметричное решение с кратным периодом.

2) Если порождающее решение однократно симметрично, то от него всегда ветвится однократно симметричное периодическое решение с кратностью $q \geq 2$. Потеря симметрии может произойти только для решений с кратностью $q = 1$.

3) Если порождающее решение двукратно симметрично, а от него ветвится решение с кратностью p/q , то симметрии последнего зависят от четности числителя p и знаменателя q . Если либо p , либо q чётные, то в окрестности порождающего решения появятся два новых периодических решения с кратностью q , каждое из которых будет обладать только одной из симметрий. Если обе величины p и q нечетные и $q > 2$, то новое решение будет обладать двойной симметрией. Подробнее см. [12, Гл. I].

4) Наконец, трехкратно симметричные периодические решения, которые в пространственной задаче Хилла представлены плоскими двукратно симметричными орбитами, могут порождать либо два решения с двойной симметрией, либо четыре решения с одной симметрией.

Как указано выше, порождающим семейством всех пространственных периодических решений Лидова является семейство вертикальных ударных орбит \mathcal{B}_0 . Дадим более подробное описание этого семейства.

3. Семейство \mathcal{B}_0 вертикальных орбит

Единственным частным решением задачи Хилла, которое может быть получено в аналитическом виде, являются орбиты семейства \mathcal{B}_0 . Это семейство обладает устойчивостью и выступает в роли порождающего для бесконечного числа пространственных периодических решений. Часть этих решений описана в работе [6].

Начальные условия орбит этого семейства определяются соотношениями: $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $x_3 = a$. Поскольку решение ударное, то его исследование можно провести только в регулярных координатах.

Регуляризация канонических уравнений (KS -регуляризация) задачи Хилла подробно описана в [4; 5; 12], поэтому здесь приведем лишь итоговые формулы. При KS -преобразовании точки шестимерного фазового пространства (\mathbf{x}, \mathbf{y}) переходят в точки (\mathbf{u}, \mathbf{v}) восьмимерного регуляризованного фазового пространства $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^8$ по следующим формулам:

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{v}}{2|\mathbf{u}|^2}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \end{pmatrix}.$$

При этом независимая переменная t подвергается преобразованию Зундмана

$$dt = |\mathbf{u}|^2 d\tau. \quad (3)$$

Согласно формулам (2), начальные условия орбит семейства \mathcal{B}_0 задаются

$$u_1 = u_3 = \sqrt{\frac{a}{2}} = \alpha, \quad u_2 = u_4 = v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0.$$

В KS -переменных движение вдоль физической оси OZ описывается уравнениями

$$u_2 = u_4 = v_2 = v_4 = 0, \quad u_1 = u_3 = \mathcal{Q}(\tau), \quad v_1 = v_3 = \mathcal{P}(\tau).$$

Тогда гамильтониан задачи Хилла принимает вид:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{8}\mathcal{P}^2 + h\mathcal{Q}^2 + 2\mathcal{Q}^6 - \frac{1}{2},$$

а канонические уравнения суть

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = -2h\mathcal{Q} - 12\mathcal{Q}^5, \quad \frac{d\mathcal{Q}}{d\tau} = \frac{\mathcal{P}}{4}. \quad (4)$$

При KS -регуляризации величина h выбирается так, что значение регуляризованного гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}} = 0$, тогда из начальных условий получаем

$$h = \frac{1 - 4\alpha^6}{2\alpha^2} = \frac{1 - a^3/2}{a} = \frac{1}{2}C.$$

Из канонических уравнений (4) и из преобразования Зундмана (3) легко получить зависимость периода T орбиты семейства \mathcal{B}_0 от начального условия a :

$$T = \int 2\mathcal{Q}^2 d\tau = 8 \int \frac{\mathcal{Q}^2 d\mathcal{Q}}{\mathcal{P}} = 4 \int_0^\alpha \frac{\mathcal{Q}^2 d\mathcal{Q}}{\sqrt{1 - 2h\mathcal{Q}^2 - 4\mathcal{Q}^6}}.$$

При малых a вклад в гамильтониан (4) слагаемого $2\mathcal{Q}^6$ мал, и движение хорошо аппроксимируется гармоническими колебаниями.

Проведем анализ устойчивости семейства \mathcal{B}_0 в линейном приближении. На рис. 1 показано поведение индексов устойчивости этого семейства в зависимости от начального условия — начальной z -координаты a . Здесь изображена только

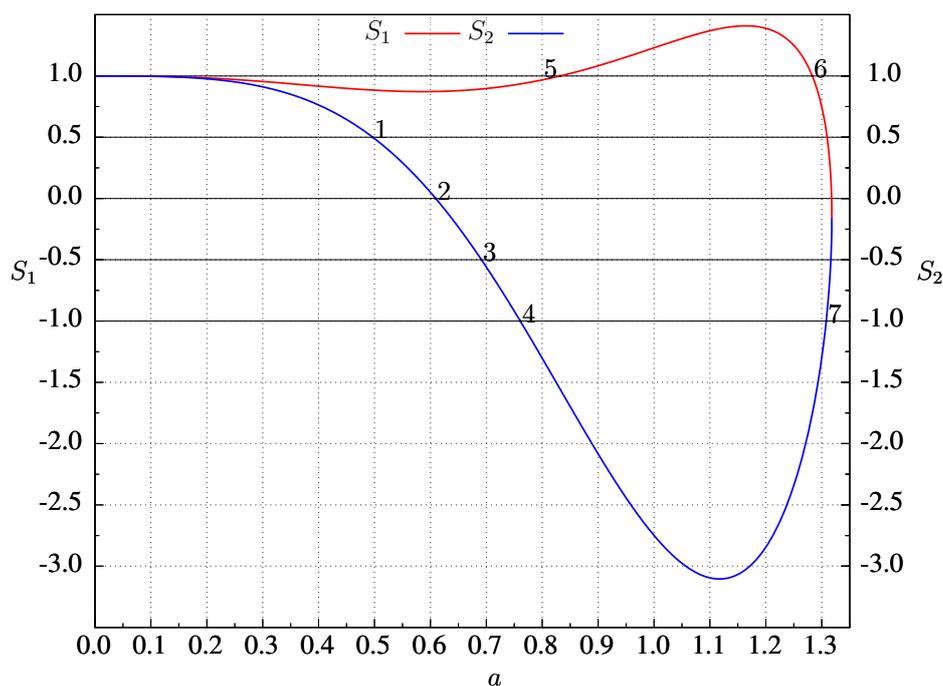


Рис. 1. Поведение индексов устойчивости семейства \mathcal{B}_0

часть графика, соответствующая случаю, когда оба индекса S_1 и S_2 вещественны. При $a > 1.3178$ семейство переходит в область комплексной неустойчивости, когда две пары мультипликаторов матрицы монодромии сходят с единичной окружности, причем одна пара смещается внутрь окружности, а вторая — наружу (см., например, [13]).

Можно выделить две области устойчивости семейства \mathcal{B}_0 . Первая область соответствует значениям начального параметра a из интервала $[0; 0.83211]$, вторая — значениям из интервала $[1.28312; 1.3180805]$. При малых значениях a ($a < 0.2$, $C \geq 10$) индексы устойчивости практически равны 1, это свидетельствует о том, что задача Хилла при больших значениях C близка к интегрируемой. При $a \leq 0.76070$ оба индекса принимают значения из интервала $[-1; +1]$, причем индекс S_1 убывает до значения 0.8722, затем возрастает, проходя критическое значение $+1$. Индекс S_2 монотонно убывает, принимая последовательно все значения из интервала устойчивости. Первый индекс S_1 достигает максимума при $a \approx 1.16$, затем убывает, проходя критическое значение $+1$, а второй индекс S_2 достигает минимума при $a \approx 1.12$ и возрастает, проходя критическое значение -1 . При $a \approx 1.3180805$ значения индексов становятся равными и они переходят в область комплексной неустойчивости.

На рис. 1 горизонтальными линиями указаны индексы устойчивости, соответствующие критическим значениям (сверху вниз) $+1$; $+0.5$; 0 ; -0.5 ; -1 . При соответствующих значениях параметра a в окрестности орбиты \mathcal{B}_0 появляются периодические решения с локальными кратностями 1; 6; 5; 4; 3; 2 соответственно. Цифрами на рис. 1 отмечены те значения a , для которых удалось найти и

исследовать порожденные периодические решения. Некоторые из этих решений частично описаны в работе [6].

Здесь следует отметить несколько важных особенностей семейства \mathcal{B}_0 , как порождающего. Во-первых, в работе [5, п.7] М. Л. Лидовым было доказано, что семейство \mathcal{B}_0 может порождать периодические решения только с симметриями относительно координатных плоскостей XOZ и YOZ . Во-вторых, орбиты этого семейства представляют собой отрезки, лежащие на пересечении двух плоскостей симметрий XOZ и YOZ , в то время, как все другие порождающие периодические решения ортогонально пересекали оси симметрии. Согласно п. 3) на стр. 4, симметрии порождаемых периодических решений существенно зависят от четности локальных кратностей этих решений, а именно, двойко симметричные периодические решения могут появляться только, если и числитель и знаменатель дроби p/q , определяющей локальную кратность, есть нечетные числа. Исследования показали, что симметрии порожденных от \mathcal{B}_0 орбит зависят от четности локальной кратности q . Можно высказать следующую гипотезу.

Гипотеза (О симметриях пространственных решений). Пусть в окрестности вертикальной орбиты семейства \mathcal{B}_0 имеется периодическое решение второго рода.

- Если локальная кратность q порожденного решения нечётная, то это решение будет обладать единственной симметрией либо относительно плоскости XOZ , либо относительно плоскости YOZ . Причем при $q = 1$ появляется только одно семейство, а при $q > 1$, появляется два однократно симметричных семейства.

- Если локальная кратность q порожденного семейства чётная, то это решение будет двойко симметричным. Причем при $q = 2$ или $q = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ появляется только одно семейство, а при других четных значения q появляется два двойко симметричных семейства.

В заключении отметим, что данное семейство состоит из двух взаимно симметричных относительно плоскости XOY ветвей, которые будем обозначать \mathcal{B}_0^+ для орбит из верхнего полупространства и \mathcal{B}_0^- из нижнего, соответственно. В силу этой симметрии, все исследования, выполненные для одной из ветвей с точностью до симметрии переносятся для другой ветви.

4. Описание семейств пространственных периодических орбит

Можно выделить два основных подхода для поиска семейств пространственных периодических решений.

I. В качестве периодических решений первого рода используются уже изученные семейства плоской задачи Хилла (см., например, [12]). При этом момент

пересечения плоского семейства с пространственным определяется с использованием параметра вертикальной устойчивости плоского семейства. Такой подход был предложен М. Эноном [14; 15].

II. В качестве периодического решения первого рода используется семейство вертикальных ударных орбит, от которого продолжаются семейства симметричных пространственных решений. Этот подход был предложен в М. Л. Лидовым [5; 6].

Исследование вертикальной устойчивости для основных семейств плоских периодических решений задачи Хилла было выполнено в работе [15] в соответствии с методикой, изложенной в [14]. При этом основное внимание уделялось случаям, когда значение индекса вертикальной устойчивости S_v семейства принимало значения ± 1 . Кратко, основные выводы, сделанные в работах [14; 15], следующие:

- 1) если индекс устойчивости $S_v = +1$, то при этом плоское семейство взаимодействует с пространственным той же кратности;
- 2) если индекс устойчивости $S_v = -1$, то при этом плоское семейство взаимодействует с пространственным удвоенной кратности;
- 3) тип пространственного семейства, порожденного плоским, зависит от смены знака соответствующего элемента матрицы монодромии.

Здесь S_v — индекс вертикальной устойчивости плоской периодической орбиты.

Начальное исследование пространственных решений было выполнено в [16] и на системном уровне продолжено в [12; 17], где описано более 30 новых семейств пространственных периодических орбит.

Ниже приведём описание основных семейств пространственных периодических решений, порождённых семейством \mathcal{B}_0 , и укажем их связь с другими семействами задачи Хилла. Поскольку периодические решения автономных систем не являются изолированными, а формируют однопараметрические семейства, то они могут быть условно разделены на несколько типов в зависимости от того, как они ведут себя при продолжении по параметру C .

Замкнутые семейства существуют только на некотором интервале значений интеграла C .

Полуоткрытые семейства могут быть продолжены по C только в одну сторону.

Открытые семейства существуют при всех значениях интеграла C .

Большая часть изученных семейств не является замкнутыми и продолжается по $C \rightarrow -\infty$. В этом случае укажем т. н. порождающую последовательность этого семейства, которая состоит из последовательности дуг — являющихся отрезками решений, проходящими через начало координат. Подробнее о порождающих решениях второго вида см. [10; 18] и, для плоской задачи Хилла в частности, [19—21].

Семейства периодических орбит, описанные в [6], обозначаются набором

символов $\mathcal{L}_0^k(i - j, N)$, который требует дополнительных пояснений. Буква \mathcal{L} означает семейство, вычисленное Лидовым, нижний индекс 0 является признаком задачи Хилла (массовый параметр $\mu \rightarrow 0$). Числа i и j задают симметрию, причем симметрии относительно плоскости XOZ соответствует число 3, симметрии относительно плоскости YOZ число 4. Натуральное число N выделяет то семейство, для которого выполнено условие ортогонального пересечения после N -кратного выполнения условия $z = 0$. И, наконец, число k определяет номер семейства, если все предыдущие параметры совпали, причем индекс k опускается, если семейство с указанными параметрами единственно.

Семейство $\mathcal{L}_0(3 - 3, 1)$ было независимо найдено и изучено в [2; 6] и [16]. Это замкнутое семейство симметричных относительно плоскости XOZ орбит. Основная особенность семейства состоит в том, что оно связывает между собой вертикальные орбиты семейств \mathcal{B}_0^\pm и плоские орбиты либрационных семейств a и c . На небольшом интервале изменения интеграла C семейство содержит устойчивые орбиты. При $C \approx 1.667$ ($a \approx 0.83211$) это семейство ответвляется от семейства \mathcal{B}_0^+ (на рис. 1 критическому значению соответствует точка 5, когда индекс устойчивости S_2 проходит через значение $+1$, т. е. периодическое решение второго рода имеет ту же кратность, что и порождающее решение), достигает минимума по C и затем при $C \approx 4.005$ пересекается с семейством плоских орбит a . При дальнейшем продолжении по параметру это семейство приближается к семейству \mathcal{B}_0^- , затем пересекается с семейством плоских орбит c и, наконец, возвращается к семейству \mathcal{B}_0^+ . Орбиты именно этого семейства были использованы в работе [7] для проекта «Радиоастрон». В [15; 16] оно названо a_{1v} . Характеристики этого семейства и поведение индексов устойчивости его орбит дано в [6; 12], примеры орбит даны в [12; 16]

Семейство $\mathcal{L}_0(3 - 4, 1)$ является полуоткрытым, его орбиты двояко симметричны и при неограниченном убывании C его период стремится к 4π . Ветвление этого семейства от вертикальной орбиты \mathcal{B}_0 происходит при $C \approx 2.068$ и $a \approx 0.7607$ (на рис. 1 критическому значению соответствует точка 4, когда индекс устойчивости S_1 проходит через значение -1 ; в этом случае порождаемое решение имеет локальную кратность 2 по отношению к порождающему), а при $C \approx 2.6488$ вдоль семейства достигается максимум по C . В окрестности этого значения константы индексы устойчивости близки к единице и, следовательно, орбиты семейства практически устойчивы. После прохождения максимума C монотонно стремится к $-\infty$, а орбиты семейства становятся неустойчивыми и стремятся к предельной орбите $\{\mathcal{B}_0^+, \mathcal{B}_0^-\}^2$ (здесь знак степени означает повторение соответствующей последовательности дуг). С плоскими семействами $\mathcal{L}_0(3 - 4, 1)$ не пересекается. Характеристика этого семейства приведена в [6], а примеры орбит даны на рис. 2.

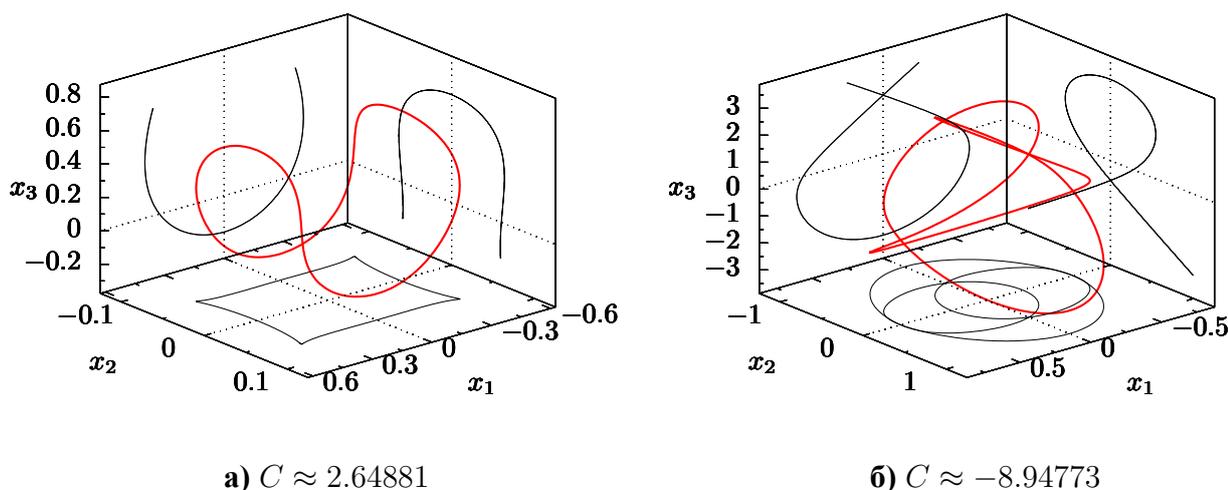


Рис. 2. Орбиты семейства $\mathcal{L}_0(3 - 4, 1)$.

Ненулевые начальные условия (x_1, x_3, y_2) , период T , значение интеграла Якоби C и индексы устойчивости приведённых выше периодических орбит семейства $\mathcal{L}_0(3 - 4, 1)$ даны в таблице 1.

Таблица 1. Начальные условия орбит семейства $\mathcal{L}_0(3 - 4, 1)$.

x_1	x_3	y_2	T	C	S_1	S_2	Рис.
-0.35930	0.64452	-0.54226	3.68845	2.64881	1.43739	-0.99623	2а)
0.25334	3.01233	-0.59975	12.06167	-8.94773	5.5e+05	9.4e+05	2б)

Семейство $\mathcal{L}_0(4 - 3, 1)$, как и описанное выше семейство $\mathcal{L}_0(3 - 3, 1)$, является замкнутым и состоит из двояко симметричных орбит. Ветвление этого семейства от вертикальной орбиты \mathcal{B}_0 происходит при $C \approx -0.181$ и $a \approx 1.30803$ (на рис. 1 критическому значению соответствует точка 7, когда индекс устойчивости S_1 проходит через значение -1), достигает максимума по C и пересекается с семейством прямых двояко симметричных плоских спутниковых орбит \mathfrak{g} при $C \approx 1.383$. Далее это семейство при продолжении пересекается с семейством вертикальных орбит \mathcal{B}_0^- и совпадает с самим собой. Таким образом, семейство $\mathcal{L}_0(4 - 3, 1)$ как и описанное выше семейство $\mathcal{L}_0(3 - 3, 1)$ «связывает» между собой плоские и вертикальные периодические орбиты. Для орбит этого семейства, близких к вертикальным, имеется устойчивость. Примеры орбит и соответствующих начальных условий даны в [12], где это семейство названо \mathfrak{g}_{2v} .

Семейство $\mathcal{L}_0(4 - 4, 1)$ ответвляется от семейства \mathcal{B}_0 при $C \approx -0.088$ и $a \approx 1.28312$ (на рис. 1 критическому значению соответствует точка 6, когда индекс устойчивости S_2 проходит через значение $+1$) и является незамкнутым. Его орбиты симметричны относительно плоскости YOZ и в пределе при

$C \rightarrow -\infty$ стремятся к предельному решению первого вида \mathcal{E} , размеры которого неограниченно возрастают. Индексы устойчивости двух ветвей семейства при этом стремятся к $+1$, причем один сверху, а другой снизу. Характеристика этого семейства приведена в [6], а примеры орбит даны на рис. 3.

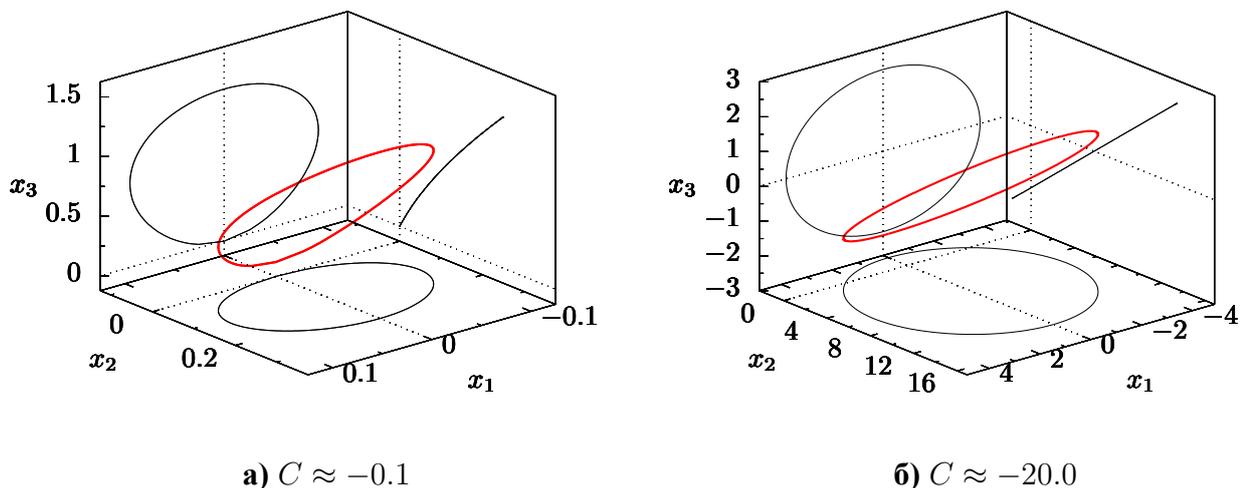


Рис. 3. Орбиты семейства $\mathcal{L}_0(3 - 4, 1)$.

В работе [6] в таблице 1 перечислены 15 значений начальной координаты a^* , при которых в окрестности вертикальной орбиты семейства \mathcal{B}_0 может появляться пространственное периодическое решение второго вида, однако в дальнейшем авторы этой работы ограничились описанием лишь восьми таких семейств. Тем не менее, указанные в таблице критические значения a^* вычислены достаточно точно, что позволило найти и исследовать новые семейства пространственных периодических решений. Здесь дадим лишь схематическое описание одного из этих новых семейств, поскольку работа по их детальному изучению ещё продолжается.

Новое семейство $\mathcal{L}_0^1(4 - 4, 3)$ появляется вблизи вертикальной орбиты при $a \approx 0.69128$, когда индекс устойчивости S_1 этой орбиты равен $-0.5 = \cos(2\pi/3)$ (на рис. 1 критическому значению соответствует точка 3, когда индекс устойчивости S_2 проходит через значение -0.5). Таким образом, локальная кратность нового решения равна трём. Найденное семейство состоит из однократно симметричных орбит с плоскостью симметрии YOZ . Данное семейство замкнуто. Оно начинается вблизи вертикальной орбиты семейства \mathcal{B}_0^+ верхнего полупространства, затем последовательно перестраивается и совпадает с вертикальной орбитой семейства \mathcal{B}_0^- нижнего полупространства. Аналогично ведёт себя симметричная относительно плоскости XOZ вторая ветвь этого семейства. В отличие от описанного выше семейства $\mathcal{L}_0(3 - 3, 1)$ данное семейство при переходе от вертикальных орбит семейства \mathcal{B}_0^+ к вертикальным орбитам семейства \mathcal{B}_0^- не

пересекает ни одного семейства плоских периодических решений. Перестройку орбит можно проследить на рис. 4.

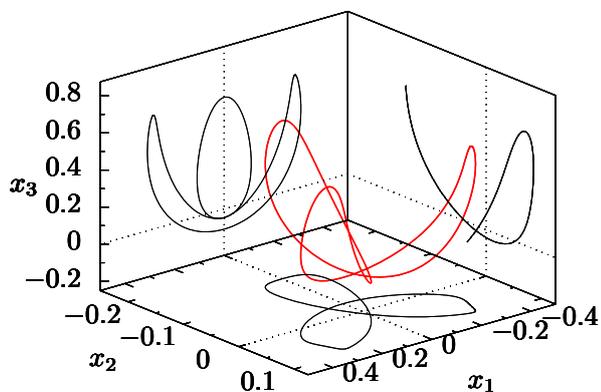
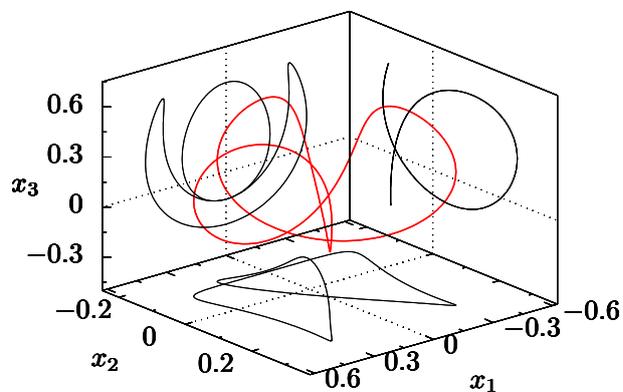
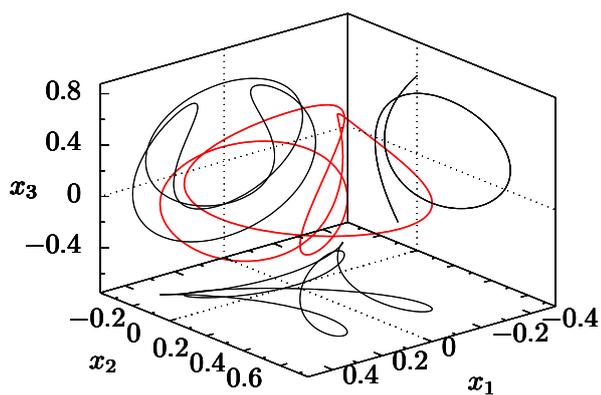
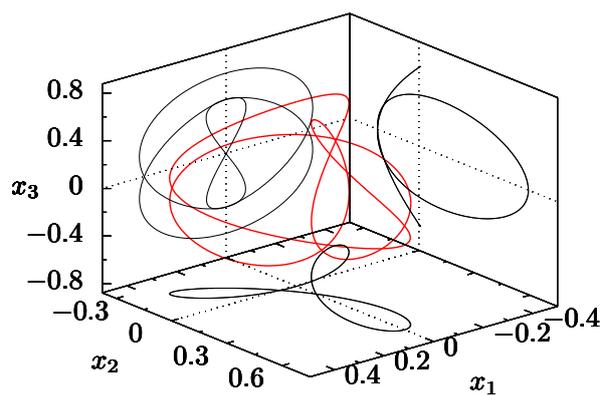
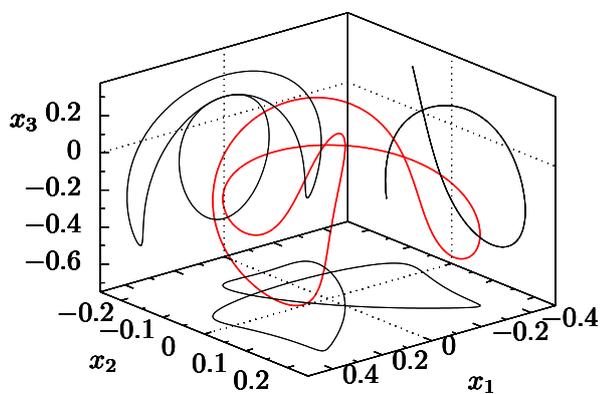
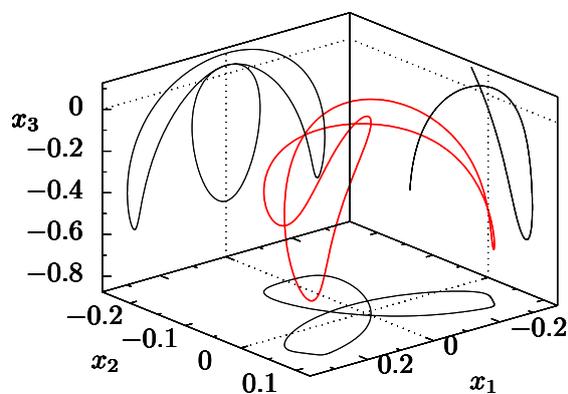
а) $C \approx 2.79319$ б) $C \approx 2.89121$ в) $C \approx 2.12650$ г) $C \approx 1.78839$ д) $C \approx 2.96190$ е) $C \approx 2.76743$

Рис. 4. Орбиты семейства $\mathcal{L}_0^1(4 - 4, 3)$.

Ненулевые начальные условия (x_2, x_3, y_1) , период T , значение интеграла Якоби C и индексы устойчивости приведённых выше периодических орбит семейства $\mathcal{L}_0^1(4 - 4, 3)$ даны в таблице 2.

Таблица 2. Начальные условия орбит семейства $\mathcal{L}_0^1(4 - 4, 3)$.

x_2	x_3	y_1	T	C	S_1	S_2	Рис.
-0.14536	0.60167	0.42091	3.80753	2.79319	0.69466	-0.76473	4а)
-0.13302	0.53509	0.80366	4.72061	2.89121	26.00318	15.56013	4б)
0.00091	0.61048	0.88051	6.04454	2.12650	538.86052	119.99758	4в)
-0.00004	0.67164	0.85928	6.55032	1.78839	7.81146	5.27700	4г)
-0.09415	0.22762	2.35373	4.32195	2.96190	1.95465	0.96106	4д)
-0.03042	0.09973	4.08065	3.77322	2.76743	0.76556	-0.79566	4е)

Заключение

Численный анализ семейств пространственных периодических решений задачи Хилла, выполненный с использованием разработок М. Л. Лидова, подтвердил высокое качество и эффективность этого метода. Анализ полученных семейств показал, что многие из них обладают устойчивостью, и, следовательно, соответствующие орбиты могут быть использованы в различных проектах. Некоторые из описанных в работе семейств выполняют роль связующего звена между семействами плоских периодических решений и семействами пространственных решений. Данный факт находится в хорошем согласии с гипотезой, сформулированной одним из авторов в [22], о том, что семейства периодических орбит задачи Хилла образуют единую сеть.

Список литературы

1. Лидов М. Л. Об одном ссемейств пространственных периодических орбит около Луны и планет // ДАН СССР. — 1977. — Т. 223, № 6.
2. Лидов М. Л., Рабинович В. Ю. Исследование семейств пространственных периодических орбит задачи трех тел // Космические исследования. — 1979. — Т. XVII, № 3. — С. 323—332.
3. Лидов М. Л. Увеличение размерности гамильтоновых систем, KS -преобразование, использование частных интегралов // Космические исследования. — 1982. — Т. XX, № 2. — С. 163—176.
4. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная механика. — М.: Наука, 1975. — 304 с.

5. *Лидов М. Л.* Метод построения семейств пространственных периодических орбит в задаче Хилла // *Космические исследования*. — 1982. — Т. XX, № 6. — С. 787—807.
6. *Лидов М. Л., Ляхова В. А.* Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость // *Космические исследования*. — 1983. — Т. XXI, № 1. — С. 3—11.
7. *Лидов М. Л., Ляхова В. А.* Об одном варианте орбиты для околоземного радиоинтерферометра // *Письма в АЖ*. — 1988. — Т. 14, № 9. — С. 851.
8. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Т. 2. — М.: Наука, 1972. — С. 9—356.
9. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. — М.: Наука, 1982. — 656 с.
10. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. — М.: Наука, 1990. — 296 с.
11. *Крейсман Б. Б.* Семейства периодических решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел // *Космические исследования*. — 2005. — Т. 43, № 2. — С. 1—23.
12. *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Задача Хилла. — Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2009. — 200 с.
13. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. — М.: Наука, 1972.
14. *Hénon M.* Vertical stability of periodic orbits in the restricted problem. I. Equal masses // *Astron. & Astr.* — 1973. — № 28. — С. 415—426.
15. *Hénon M.* Vertical stability of periodic orbits in the restricted problem. II. Hill's case // *Astron. & Astr.* — 1974. — № 30. — С. 317—321.
16. *Michalodimitrakis M.* Hill's problem: families of three dimensional periodic orbits (part I) // *Astrophysics and Space Science*. — 1980. — № 68. — С. 253—268.
17. *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Иерархия семейств периодических решений пространственной задачи Хилла // *Астрономический вестник*. — 2009. — Т. 43, № 2. — С. 187—192.
18. *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1997. — 278 с. — (Lecture Note in Physics. Monographs ; 52).

19. *Hénon M.* New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2003. — Т. 85. — С. 223—246.
20. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // *Космические исследования*. — 2013. — Т. 51, № 4. — С. 308—322.
21. *Батхин А. Б.* Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // *Космические исследования*. — 2013. — Т. 51, № 6. — С. 497—510.
22. *Батхин А. Б.* Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла // *ДАН*. — 2014. — Т. 458, № 2. — С. 131—137.

ВОСПОМИНАНИЯ О ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ МЕХАНИКЕ М.Л. ЛИДОВЕ**В.А. Сарычев***Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН**vas31@rambler.ru*

Лидов Михаил Львович родился 4 октября 1926 года в городе Черкассы Киевской области в семье Лидова Льва Иосифовича и Перельман Генриэты Исааковны. В 1933 г. семья Лидовых переехала в Москву. В школу Миша пошел, по-видимому, в 1935 г. в возрасте 9 лет. В 1934 г. на семью обрушилось несчастье. Отец, Лев Иосифович, член КПСС с 1917 г., был репрессирован (осужден по 38 статье - контрреволюционная деятельность) и вернулся домой лишь в 1955 г. после реабилитации. Родители после возвращения отца из заключения жили в Москве и оба умерли в 1984 г.

Во время учебы Миши в школе основным добытчиком в семье была мать. Война с немцами началась, когда Миша перешел в шестой класс. Жить в Москве, как и в других местах страны, было трудно. В период с декабря 1942 г. по май 1944 г. (восьмой-девятый классы школы) Миша официально устроился во МХАТ им. М. Горького рабочим постановочной части сцены. На этой работе он был занят по вечерам. МХАТ был расположен рядом с домом семьи Лидовых (они жили на Пушкинской улице, дом 7/5, кв. 25). Хочу отметить, что подработка в МХАТ была очень популярна у студентов МГУ. Нанимали студентов на один вечер. Надо было помочь рабочим сцены установить все необходимое для спектакля. После этого студенты могли пойти в зал и посмотреть спектакль. После окончания спектакля необходимо было навести порядок на сцене. За один вечер студент получал 5 или 10 рублей. Учитывая, что стипендия на первом курсе была около 200 рублей, такая подработка была крайне полезной.

После окончания 9 класса Миша в мае 1944 г. (ему не было еще 18 лет) добровольцем ушел на фронт. Служил в авиационных частях Советской армии, расположенных на территории Польши, был мастером авиавооружения, заведующим авиационным складом, старшим авиамехаником. Демобилизовался в марте 1951 г. в звании старшины (запас I категории). За время службы был награжден четырьмя медалями, а в 1985 г. награжден Орденом Отечественной войны II степени как бывший фронтовик и в связи с 40-й годовщиной со дня Победы.

Еще во время службы в Советской армии Михаил Львович решил поступать на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Ему пришлось, находясь в армии, отучиться в 10 классе вечерней школы, получить аттестат зрелости, и в 1949 г. он поступил на заочное отделение механико-математического факультета МГУ. После мобилизации из армии Михаил Львович в сентябре

1951 г. перевелся на 3 курс дневного отделения механико-математического факультета, который и закончил с отличием в 1954 г.

До 1951 г. я о Лидове, естественно, не слышал. Однако, я был хорошо знаком с группой, в которую он попал, перейдя на очное отделение. Комсомольская организация мехмата организовала шефскую работу на факультете. Сводилась она к оказанию помощи старшекурсников младшекурсникам. Я учился на 2 курсе и был комсоргом группы. Мне поручили эту шефскую работу организовать в одной из групп 1 курса. С наиболее активными студентами группы я часто встречался, помогал советами. Со студентами мы подружились, и эта дружба сохранилась у нас до теперешних дней. Среди этих студентов были хорошо знакомые нам лица: Новожилов И.В., Парусников Н.А., Девянин Е.А., Сазыкин Г.Р., Белецкий В.В. На одной из встреч с бывшими подшефными студентами я познакомился с Лидовым. Во время встречи он молчал, присматривался к новому человеку. В дальнейшем наши отношения были вполне дружескими, но встречались мы, в основном, на общеинститутских и общефакультетских мероприятиях, научные интересы у нас были разные: М.Л. Лидов активно участвовал в работе семинара по механике сплошной среды Л.И. Седова, я работал в семинаре по механике тел переменной массы и ракетодинамике, руководимом А.А. Космодемьянским.

Естественно, о научной работе М.Л. Лидова на факультете я ничего не знал; он не любил хвастаться своими успехами. Но, просматривая позже список его работ, я был потрясен. Меня удивили первые его публикации:

1. Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютоновского тяготения. ДАН СССР. 1954.
2. Конечный интеграл уравнений одномерных автомодельных адиабатических движений газа. ДАН СССР. 1955.
3. К теории линеаризованных решений около одномерных автомодельных движений газа. ДАН СССР. 1955.
4. К теории неустановившихся движений газа с учетом сил тяготения. ПММ. 1955.
5. Автомодельное движение газа со сферической симметрией в поле гравитирующего центра. Астрономический журн. 1957.
6. Сопротивление неориентированного тела при движении в разреженном газе. Известия АН СССР. Сер. геофизическая. 1957.
7. О температурном режиме искусственного спутника Земли. Известия АН СССР. Сер. геофизическая. 1957 (совместно с Карпенко А.Г.).
8. О предельных решениях вблизи особой точки. ДАН СССР. 1958.

Поражает объем выполненной за столь короткий срок работы, результаты которой опубликованы в виде 8 статей в лучших журналах нашей страны. Отметим, что Михаил Львович первые два года обучения на заочном отделении мехмата, находясь в армии, мог тратить свое свободное от службы время лишь на подготовку и сдачу экзаменов в МГУ. И лишь на 3 курсе смог приступить к

осмысливанию газодинамических задач, которые он, по-видимому, обсуждал с Л.И. Седовым.

Пропустив один год после окончания мехмата, М.Л. Лидов начал с июня 1955 г. работать младшим научным сотрудником в Междуведомственной комиссии по координации и контролю научно-теоретических работ в области организации и осуществления межпланетных сообщений при Астрономическом совете АН СССР, руководимой академиком А.А. Благонравовым. Работа в Комиссии была мало интересной, и основное время Михаил Львович тратил на продолжение и подготовку к публикации начатых еще в университете работ по механике сплошной среды. Из опубликованных работ хочу особо отметить статью [6], которая оказалась особо востребованной при исследовании динамики движения спутника на орбите.

В 1957 г. М.Л. Лидов был принят на работу в Отделение прикладной математики. Рекомендовал его Д.Е. Охоцимскому В.А. Егоров. Не исключено, что к проблеме зачисления Михаила Львовича на работу в Институт имел отношение и М.В. Келдыш. В личном деле М.Л. Лидова сохранились документы о приеме на работу.

Заявление М.Л. Лидова: "Прошу принять меня на постоянную работу в ОПМ".

Резолюция Д.Е. Охоцимского в отдел кадров: "Прошу зачислить на должность мнс с окладом 1350 руб. с 29 XI 1957 г."

Естественно, в дальнейшем Михаил Львович с успехом прошел через все научные должности: научного сотрудника (1958), старшего научного сотрудника (1965), ведущего научного сотрудника, главного научного сотрудника (1993).

В связи с началом работы М.Л. Лидова в ИПМ, я вновь столкнулся с замечательным фактом. Ему на новой работе пришлось резко изменить научную тематику. Удивительно, но переход на космическую тематику произошел очень быстро. Об этом говорит хотя бы тот факт, что за два года Михаил Львович получил в новой для него области результаты, приведшие к награждению его Ленинской премией за 1960 год. Десять лет спустя он был награжден орденом Трудового Красного Знамени. Обе награды были связаны с выдающимися исследованиями Михаила Львовича по лунной программе. Следует отметить также, что в 1993 г. имя М.Л. Лидова было присвоено открытому в 1979 г. астероиду № 4236. Более подробно о научно-исследовательской работе Михаила Львовича мы можем узнать из рассказов его учеников и входящих в его группу сотрудников Института.

М.Л. Лидову в 1964 г. при защите кандидатской диссертации, посвященной определению плотности атмосферы по наблюдаемому торможению искусственных спутников Земли, была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук. Михаил Львович неоднократно выдвигался в члены - корреспонденты и один раз в действительные члены Академии наук СССР. Однако положительного результата добиться не удалось.

Замечательные исследования М.Л. Лидова были известны не только в нашей стране. Мне приходилось слышать ссылки на его работы в докладах зарубежных ученых на конгрессах Международной Астронавтической Федерации. John Breakwell и, особенно, Robert Farquhar, узнав, что мы с Лидовым работаем в одном Институте, не раз интересовались его публикациями. Михаил Львович часто выступал на конференциях и съездах в Советском Союзе, где его доклады пользовались неизменным успехом. Однако оформление его поездок для участия в работе научных съездов за рубежом, как правило, было неудачным. Он принял участие лишь в работе Симпозиумов по исследованию космического пространства в Польше и Болгарии.

Появившись в отделе №5, Михаил Львович очень быстро установил добрые отношения с сотрудниками. Он достаточно легко сходился с людьми. Может быть, сказывался его жизненный опыт. Сотрудниками отдела тогда, как правило, были только что окончившие ВУЗ мальчишки и девчонки. При организации отдела, в июне 1953 г. нас вначале было всего 6 человек (Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Егоров В.А., Таратынова Г.П., Власова З.П., Сарычев В.А.). Но отдел быстро рос. Мы все были счастливы - новая очень интересная тематика, новые необычные задачи.

Тогда в Институте часто устраивались вечера, субботники, приглашались артисты. Как правило, на этих мероприятиях присутствовали заведующие отделами и М.В. Келдыш. Часто организовывались поездки сотрудников Института за город летом (купание) и зимой (лыжи). Была загородная база для летнего отдыха сотрудников с детьми. Дирекция снимала для сотрудников водный бассейн (около станции метро "Парк культуры"), который пользовался большой популярностью. Во всех этих мероприятиях Михаил Львович с удовольствием принимал участие. Особым вниманием у нас с ним пользовался бассейн, дни посещения которого мы старались не пропускать. Из начальства помню в бассейне А.А. Самарского, К.И. Бабенко, М.Р. Шуру-Буру. Там было очень весело. Месткомом были даже устроены соревнования на первенство по Институту на 100-метровой дистанции.

Следует отметить колоссальную научно-организационную работу Михаила Львовича. Он был членом редколлегии журналов "Космические исследования" и "Письма в Астрономический журнал", научным редактором раздела "Динамика полета" энциклопедии "Космонавтика", членом Совета по проблемам навигации и автоматического управления, Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике. Работая на кафедре теоретической механики мехмата МГУ (по совместительству), он вместе с В.А. Егоровым руководил семинаром по механике космического полета.

Уже 22 года прошло без Михаила Львовича Лидова, но память о нем - добром товарище, замечательном механике, прекрасном учителе хранят в своей памяти его ученики и немногочисленные старые сотрудника отдела № 5.

О М.Л. ЛИДОВЕ В РАННИЕ ГОДЫ КОСМИЧЕСКОЙ БАЛЛИСТИКИ

А.К. Платонов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
platonov@keldysh.ru

Это ж почти
 неподвижности мука
 Мчатся куда-то
 со скоростью звука,
 Зная наверно,
 что есть уже где-то
 Некто,
 летающий
 со скоростью света!
 Леонид Мартынов

Эти знаменитые строки, как и само имя поэта Леонида Мартынова, я впервые услышал от Михаила Львовича (Миши) Лидова, как и многое другое с пользой сказанное им, о чём хорошо помнится и о чём, безусловно, мне приятно будет рассказать. Он появился в нашем коллективе в самый разгар работ по созданию алгоритмов и программ на новой, тогда для нас самой мощной ЭВМ того времени – институтской «Стреле». Честно говоря, его появление прошло практически незаметно – познакомились: "Миша – Саша, Зоря, Рая" и - пока всё.

Наша, сформированная Дмитрием Евгеньевичем Охоцимским бригада (Зарина Петровна Власова и Вера Константиновна Шелухина – пассивный участок траектории, Раиса Константиновна Казакова и Нина Васильевна Григорьева – активный участок траектории, и – автор этих строк), была нацелена на дублирование и проверки расчётов ОКБ-1, связанных с созданием первого спутника Земли. Все мы вместе уже имели большой и весьма результативный опыт двухлетней работы в ИТМиВТ АН СССР на первой отечественной ЭВМ "БЭСМ", созданной Сергеем Алексеевичем Лебедевым ([1], с. 234). Созданная позже Радиопромом СССР "Стрела", хотя и была заметным шагом перехода от образца единственной в стране БЭСМ к серийному выпуску очень нужных таких машин, но эта промышленная машина была заметно менее удобной в программировании, чем "академическая" БЭСМ С.А. Лебедева и его учеников – студентов физфака МГУ, МЭИ, МИИС и

техникумов [2]. Нам было нужно не только переписать в системе команд «Стрелы» уже работающие на БЭСМ программы, но и создать много новых вместе с баллистиками отдела С.С. Лаврова в ОКБ-1 С.П. Королёва. Мы испытывали большие трудности, и эта деятельность занимала всё рабочее и нерабочее время.

Поэтому неожиданное появление в машинном зале Д.Е. Охоцимского с незнакомым молодым человеком, представленным нам учеником Л.И. Седова (что не вызвало эмоций) и сотрудником АстроСовета АН СССР (это было замечено), особых последствий в тот день не имело. Честно говоря, нам было, казалось, не до этого, не очень нужного нам помощника, который почему-то был нужен Дмитрию Евгеньевичу, но который не знал устройства ЭВМ и особенностей работы в этой новой области. Хотя АстроСовет - это хорошо, поскольку Астрономия была предметом нашей ежедневной деятельности - только это я и подумал, когда они ушли.

Насколько я был наивен и самоуверен, я понял довольно скоро и не раз я позже с усмешкой вспоминал эти мои мысли при нашем знакомстве. Миша легко и просто включился в работу и удивительно быстро освоил тонкости «Стрелы». А тонкостям вычислительной математики и, особенно, небесной механики и астрономии, как оказалось, научить он лучше нас мог кого угодно и сам. И самое главное - в самый разгар отладки алгоритмов и программ рядом неожиданно оказался очень полезный острый ум и точный глаз, взваливший на себя нелёгкий труд вникания в громадный объём чисел, неспешно вылезавших из табулятора перфокарт «Стрелы».

Дело в том, что ни о какой машинной графике тогда и речи не было, все графики рисовались нами вручную, но, что было крайне неудобно - в отличие от БЭСМ, печатавшей в процессе счёта колонки нужных чисел на узкой ленте бумаги рядом с пультом машины, «Стрела» не печатала цифры, а пробивала по 12 чисел на перфокарте¹. Надо было ждать конца пробивки всех перфокарт и

¹ Не все знают, что с 1892 г - времени переписи населения России (когда Россия поддержала маленькую тогда американскую фирму IBM, купив у неё технику для пробивки перфокарт и выполнения операций сортировки пробитых чисел, их сложения, вычитания, печати - "табуляции") и вплоть до 1953 г - момента создания С.А. Лебедевым БЭСМ - все не ручные на арифмометрах, а "машинные" расчёты - прежде всего в Госкомстате - выполнялись на потомках этой американской техники с помощью 12-строчных перфокарт. Для решения проблем развития техники сортировщиков, сумматоров и табуляторов перфокарт в АНСССР имелся специальный ИТМиВТ - Институт точной механики и вычислительной техники, которому по принадлежности и было поручено постановлением Правительства создать БЭСМ - "Большую электронную счётную машину". И на первых порах

лишь после этого – идти в соседнюю комнату, где на неспешном табуляторе колода перфокарт, наконец, превращалась в желанные и с нетерпением ожидаемые числа. Если раньше мне непрерывно нужно было бегать туда-сюда между пультом «Стрелы» и табулятором, то теперь стало возможным целиком погрузиться в машинные коды, зная, что Миша не хуже, а и лучше меня найдёт несуразности в получаемых многих сотнях восьмиразрядных чисел. Нам стало намного легче вместе сначала только отлаживать, а потом и вместе придумывать новые и весьма непростые модели баллистики полёта ракеты со спутником и параметров получаемой траектории спутника.

Работа нас очень сдружила, да и не только работа. Например, Миша однажды притащил нас (Раю Казакову, Зорю Власову и меня) в конце работы в его любимое, рядом с его домом Театральное кафе - напротив Художественного театра. Это было безумно любопытно и всем нам непривычно, да и по деньгам было не просто, но делали мы это затем вместе с ним неоднократно и с большим удовольствием. Надо сказать, что при первом таком посещении мы узнали, что он, оказывается, вырос за кулисами сцены МХАТа, что он прошёл войну, и что он кончил мехмат уже после армии. И я только тогда вдруг осознал, что Миша намного старше, чем мне казалось, и в жизни он, безусловно, грамотней и намного опытней меня. Миша очень многому позже научил меня, но уже здесь, в этом 1956 г. и в этом Театральном кафе на Художественном проезде я, смешно признаться, с его подачи впервые попробовал и полюбил не только кофе с мороженым, но и кофе с коньяком.

Выяснилось, что Миша любит шахматы, я принёс из дома шахматные часы, и мы с ним стали в свободные минуты азартно "резать в блиц". Он думал быстрее меня и неплохо знал ряд дебютов. Силы были примерно равны, но у меня чаще, чем у него падал флажок к его торжеству. Интересно, что это наше увлечение вскоре насторожило Д.Е. Охоцимского, и он довольно резко запретил нам шахматы на территории отдела. Довод был интересный: "Это футболисты должны отдыхать за шахматами. А вам, людям, занятым научной работой, шахматы бесполезны...". Про футбол, правда, он нам ничего не сказал, но Миша сказал, что он не прочь и в футбол сыграть.

Выяснилось, что у всех нас с Мишей много общих тем для обсуждения, дискуссий и горячих споров, не только, что и как делать, но и по жизни. Разговоры эти многократно велись по ночам в машинном зале, когда мы, сидя на диване около пульта, ожидали результатов не очень быстро по теперешним

советской вычислительной техники табуляторы продолжали играть определённую роль в сознании конструкторов новой электроники и чиновников в Минрадиопроме.

меркам считающей «Стрелы» (2000 трёхадресных операций в сек. заставляли ждать иногда до полутора часов). Я очень благодарен «Стреле», поскольку она подарила нам эти часы душевных бесед, причём, безусловно - в разговорах и в общении Миша дал нам всем гораздо больше, чем, наверное, мы ему.

Его великолепная память хранила громадное число стихов, которые он любил к месту процитировать, что всех нас поражало. Например, упомянутые в эпитафии строки он с хитрой улыбкой отчеканил мне, глядя на широкий лист бумаги табуляторной выдачи "Стрелы" с числами наконец-то полученного решения краевой задачи построения одной из траекторий полёта к Луне. Эта его стихотворная реплика была ответом на мой восторженный возглас – "Смотри, долетели, всё-таки, по трёх-с-половиной-суточной²!". И я был так поражён этими строками, что постарался (не без труда - никакой Википедии тогда и в помине не было) раздобыть сборник стихов Л. Мартынова и запоем прочитать всё написанное этим неповторимым мастером неожиданных мыслей и рифм.

Другой случай быстрого роста моей симпатии и большого уважения к Мише Лидову связан с АстроСоветом. Будучи с детства любителем Астрономии я, конечно, сразу же стал расспрашивать Мишу об АстроСовете. Что сделал Миша? Он меня туда просто привёл, и я на всю жизнь благодарен ему за этот шаг. По дороге он, к моему удивлению, сказал, что ему было скучно там работать, и он рад, что попал в ОПМ. Но главное меня ждало впереди. Мы оказались в небольшой пустой комнате со столами, заваленными бумагами, одна стена которой вся - от окна до дверей и от пола до потолка - была сплошным стеллажом с громадным количеством одинаковых книг в твёрдых переплётах с красивым золотым тиснением. Миша взял одну из них, открыл, и я со смесью удивления и восхищения красотой печати увидел на глянцевой бумаге страниц строгие колонки дат, имён и - чисел, чисел, чисел... И тут Миша объяснил, что это, оказывается, - хранимое в АстроСовете полное собрание астрономических измерений, по которым Ньюком построил свою знаменитую теорию движения планет. Причём, в этих томах содержатся не

² Здесь нужно пояснение. Мы тогда подробно исследовали зависимость погрешности реализации траекторий полёта к Луне от времени полёта. При этом полёт к Луне, из-за условий видимости момента сближения с Луной, возможен с целым числом суток и обязательным добавлением ещё полусуток, нужных для поворота Земли от её позиции в момент старта ракеты до её позиции с видимостью Луны. На медленных траекториях с их временами полёта больше 3-х суток краевая задача из-за нелинейностей влияния стартовых отклонений очень плохо сходилась. Было придумано много алгоритмических хитростей расширения стандартного метода Ньютона, чтобы получить упомянутую траекторию.

только двухсотлетние измерения положения планет и Луны, начиная от наблюдений Тихо Браге до конца XIX века, но и последующие их уточнения. Миша показал мне, как в каждой строке страницы содержатся имя наблюдателя, его личная константа параметра точности выполнения им измерений, параметры телескопа, дата и значения полученных измерений и последующие даты и значения уточнений параметров погрешностей телескопа и астронома. Глядя на том в руках Миши, я буквально кожей почувствовал и осознал, насколько велик достигнутый уровень культуры и тщательности в астрометрии.

И, как показали последующие годы совместной работы с М.Л. Лидовым, эти слова о высоком уровне точности и тщательности хранения самых разнообразных знаний относятся и к нему самому! Он всегда в такой же высокой степени был точен и строг в своих высказываниях. Я думаю, что это было связано с его прекрасным математическим образованием. Вообще, в ОПМ эта черта была очень заметна у многих: чуть что-то скажешь не совсем точно - тебя сразу поправят... И я, конечно, тоже старался быть таким же. Но Миша в наших спорах был совершенно непробиваемым "монополистом на истину". И, надо сказать, - потому лишь, что эта истина была им заранее уже глубоко продумана, осознана и сформулирована.

Одна из таких его истин однажды заметно изменила моё восприятие мира, и я до сих пор не знаю, стоит ли это большой благодарности. Я не помню уже, что стало предметом спора между нами, но помню, что мой, как мне казалось, непробиваемый довод за что-то, против чего он активно возражал, было: "Миша! Ведь это – прогресс!". И Миша вдруг ответил: "Саша, А ТЫ УВЕРЕН, ЧТО ПРОГРЕСС – ЭТО ХОРОШО?" Я, признаться, оторопел. У меня никаких сомнений в этом не было. Конечно, новое – это элемент развития, его всегда надо поддержать, мне это казалось бесспорным и очевидным. И вот оказывается, что есть человек, которому это не очевидно! Это было удивительно. Если бы это сказал кто-то другой, то я, пожалуй, подумал о нём, что это просто недалёкий человек - что с ним спорить... Но в Лидовских устах это звучало серьёзно. Я промолчал, задумался и понял, что, хоть и не хочется, но я вынужден согласиться с правотой этой неожиданной и малоприятной Мишиной мысли. К сожалению, на протяжении последующих лет жизни мне много раз пришлось с горечью вспоминать этот Мишин вопрос и удивляться, как глубоко и далеко он смотрел в будущее в те далёкие 60-е годы...

Наше посещение АстроСовета и вдохновенный рассказ Миши Лидова о теории Ньюкома запомнились мне на всю жизнь. Напомню, что тогда у нас, в ОПМ речь шла пока лишь о будущем запуске Спутника, и нас тогда интересовали только более простые параметры Земли – расположения пунктов в её гринвичской системе координат и свойства её атмосферы. До планет ещё дело не дошло, да и имя Ньюкома мне было лишь знакомо из школьных занятий в кружке московского Планетария. И, смешно сказать, что прошло всего лишь полтора года, и для нас обеих теория Ньюкома стала предметом ежедневных занятий и тесных общений с Институтом теоретической астрономии АН СССР в Ленинграде. Но это было позже.

А тогда мы, признаться, не очень активно, но всё же занимались также и подготовкой баллистического обеспечения научных приборов в составе разрабатываемого первого ИСЗ. В этой деятельности вся тяжесть общения с внешней средой легла на плечи "новенького" - Миши Лидова (нас «Стрела» из машинного зала не очень отпускала). Прекрасная его память получаемых в расчётах чисел, его готовность и редкое умение сообразить, вычислить в уме и дать ответ на неожиданный вопрос сразу сделали его полезным участником многих совещаний у М.В. Келдыша. Я очень хорошо помню непрерывно приезжавших к Мстиславу Всеволодовичу молодых активных разработчиков научного оборудования К.И. Грингауза (ионосфера), С.Н. Вернова (космические лучи), Ш.Ш. Долгинова (магнитометрия), Т.Н. Назаровой (микрометеориты), В.Г. Истомина (масс-спектрометрия ионосферы). Они часто обращались к нам с просьбами, связанными с необходимостью привязки ожидаемых измерений к нужным им расстояниям от Земли и направлениям в пространстве (на Солнце, на определённую звезду и т.п.). И Лидов очень плодотворно с ними взаимодействовал.

Здесь я должен сделать отступление и сказать, что, как я уже об этом писал, к моему удивлению М.В. Келдыш ещё на самой заре начала работ по созданию ИСЗ, в отличие от многих из нас, чья главная забота была - КАК ЭТО СДЕЛАТЬ?, неожиданно поставил вопрос – ЧТО ЭТО МОЖЕТ ДАТЬ НАУКЕ? Вопрос этот был очень правильный и своевременный, но, как это тогда было принято, ответ на него принял типичный "отраслевой", в данном случае – "академический" характер. М.В. Келдышу пришлось самому искать внутри академической структуры пути организации возможностей разработки, конструирования и изготовления бортовых научных приборов, что повлияло на задержку их разработки. И одновременно – нужно было решать нелёгкую задачу пробивания научных приборов на борт космического аппарата. В нашей

среде ходил анекдот, что на протяжении многих лет вес космических аппаратов неуклонно увеличивается, но вес научного оборудования на борту всегда остаётся равным 10 кг. И все совещания в кабинете Келдыша были направлены на решение этих проблем. Их решением через ряд лет стали не только запуск научного спутника, но и образование в стенах ОПМ нового академического Института космических исследований (ИКИ) с его директором – академиком Г.И. Петровым (см. [1] – сс. 235, 241 и 477).

Но в те ранние годы первых спутников и лунников мне всегда казалось, что мы, занимаясь задачами прицеливания и наведения космических аппаратов, мало решаем насущные задачи баллистического обеспечения работы научных приборов в космосе. Я хорошо помню, как к нам за помощью обратилась Татьяна Николаевна Назарова из института Вернадского, и мы рассчитали для её прибора относительные параметры метеорных потоков и ожидаемой траектории полёта космического аппарата. И здесь опять нужно отдать должное Мише Лидову - он в те годы сам стал ставить и решать вместе с Зорей Власовой подобные задачи в машинном зале Стрелы на тех программах, которые уже были у нас под рукой. Это, к слову, дало ему в будущем большой авторитет и крепкие связи с сотрудниками ИКИ, которые узнали его в пору самого начала решения их задач.

Первый Спутник Земли был запущен именно в день рождения Миши – 4 октября, а незадолго до этого, 18 сентября 1957 г. в день рождения К.Э. Циолковского мы с Мишей и с Севой Егоровым принимали участие в торжествах открытия памятника Циолковскому в г. Калуге. Вспоминая эти события, мне кажется очень символичным, что космическая техника так тесно связала эти два близких дня рождения. А знаменитый тост С.П. Королёва на банкете по этому случаю: "Выпьем за полёт ... Мысли!", как теперь мы видим, Михаил Львович Лидов во все последующие годы очень успешно и активно исполнял своими публикациями. А первую возможность продемонстрировать это ему подарил в его день рождения именно факт запуска ИСЗ, давший ему новый предмет мысленного анализа появившихся новых экспериментальных данных.

Сразу после появления на небе этого, ещё не академического "Объекта Д", а простейшего "Объекта ПС" С.П. Королёва, открывшего "дорогу в космос", наши пути с Мишей ненадолго разошлись. Меня вместе с В.А. Егоровым, Р.К. Казаковой и Ю.В. Зоновым Д.Е. Охоцимский переключил на новую срочную работу вместе с Тимуром Магометовичем Энеевым по разработке первой машинной методики определения орбиты ИСЗ по результатам

программной обработки его оптических наблюдений. Эта наша очень непростая и поучительная работа с Тимуром Магометовичем подробно описана в [3] и [4].

Оптические измерения моментов видимости спутника в разных местах Земли позволяли следить за периодом обращения Спутника³, который, как показывали наблюдения, медленно изменялся. И вот тут Миша Лидов, оставшись на время в одиночестве, сразу же решил попробовать извлечь научную пользу из факта запуска такого простейшего (без научной аппаратуры) спутника. Он взялся определить параметры плотности верхних слоёв атмосферы Земли по наблюдениям за изменениями периода обращения спутника⁴. Очевидно, что решение этой "обратной" задачи определения причин торможения спутника гораздо сложнее решения "прямой" задачи определения следствий присутствия атмосферы с известной плотностью воздуха. Такая прямая задача ещё до запуска спутника была у нас в ОПМ уже численно решена - в связи с задачей определения времени жизни Спутника [5]. Чтобы разобраться в проблемах обратной задачи Лидову пришлось построить и проанализировать новую аналитическую модель связей изменения орбиты спутника с физическими параметрами атмосферы, влияющими на движение сферического тела в газе [6].

Я очень хорошо помню, как ещё в самом начале наших работ с Т.М. Энеевым, примерно через неделю или две после запуска ИСЗ, пришел к нам Миша и сказал: "Плотность атмосферы по наблюдениям за торможением периода орбиты Спутника без знания параметров орбиты, увы, определить нельзя, но - можно определить её комплексный параметр, равный $\rho\sqrt{H}$, где ρ - плотность атмосферы, а H - высота однородной атмосферы в простейшей барометрической её модели". Миша не был бы самим собой, если бы тут же не добавил, что $H \sim 8$ км, и что это та высота атмосферы, которая получится, если весь её воздух собрать с его плотностью у Земли. Он всегда приводил числа и всегда объяснял их физический смысл.

В этом эпизоде проявилось замечательное качество его ума, которое я с восхищением не раз наблюдал и позднее. В любой задаче М. Л. Лидов умел не просто найти ответ, а найти именно такой ответ, который наиболее полезен для приложений, и в котором, что важно - обязательно раскрыто ясное понимание

³ Точнее, - оптически наблюдался не маленький 1-й Спутник, а большая по размерам вторая ступень ракеты Р-7, которая, естественно, тоже стала спутником Земли.

⁴ Он был не один: такую же задачу, как выяснилось позже, стал решать в НИИ-4 и "хозяин" наблюдаемых периодов ИСЗ – П.Е. Эльясберг.

существа дела. Ярким примером этого его качества является написанный им учебник Теоретической механики, который отличается удивительно ясностью изложения сложных мест курса и чёткой его направленностью на приложения (прежде всего - в небесной баллистике).

Часто при мне Миша, опираясь на удобную свою модель существа дела, быстро находил решение и требуемое число, просто - прикинув всё в уме. Умением считать в уме он, надо сказать, владел мастерски, и я благодарен ему за то, что это позже стало и моим методом. Дело в том, что однажды, когда я стал на логарифмической линейке (она всегда была у меня в кармане) умножать два числа Миша посмотрел на меня и вдруг сказал: "Саша, нужно уметь считать в уме!". Его правота меня зацепила, и... пришлось мне, спасибо ему, научиться считать в уме. При отладке программ это умение резко сокращает время на анализ их правильности и диагностирование ошибок.

Но прошло ещё полгода и после состоявшегося, наконец, успешного запуска академического "Объекта Д", ставшего уже третьим отечественным спутником, началась новая сложнейшая трёхлетняя работа по достижению Луны. Мы снова оказались в старом составе, поскольку на первом этапе работ надо было уже созданные нами программы баллистики активного и пассивного участков орбиты спутника перестроить на задачу построения траектории полёта к Луне с обеспечением всех проблем наблюдения за полётом и поддержки работы научных приборов Лунника.

Из сказанного выше можно увидеть, что со временем как-то так само получилось, что Миша стал неформальным лидером в нашей команде. Но на этом Лунном этапе работ он стал и формальным лидером. Обычно Дмитрий Евгеньевич, ставя задачу, назначал и руководителя собранного им для её решения коллектива. Но при сообщении нам о новой задаче реализации лунного проекта он неожиданно спросил нас, с кем ему общаться, кто будет командовать – я или Лидов? Это было ново и удивительно. Теперь я думаю, что просто он не хотел меня обидеть, и если бы я взялся быть лидером, то, скорее всего, он меня бы переубедил. Но тогда, несколько оторопев, я, подумав какой большой объём программистского труда ждёт меня на машине и, понимая при этом, что у меня нет ни уверенности, ни желания командовать Лидовым, я ответил: "Пусть командует Миша". Так Миша Лидов стал нашим и формальным руководителем, и он хорошо командовал, а мы хорошо подчинялись ему.

Я лишь один раз ненадолго пожалел об этой ситуации подчинения. Дело было в чём-то настолько принципиальном для меня, что я - ну никак не хотел

согласиться с тем, что говорил Лидов. Но Миша и тут показал себя во всей красе его живого ума. Он в ответ на мои горячие возражения по делу вдруг сказал (забыть я это не могу!) : "Саша! Ты же сам выбрал меня бригадиром! А БРИГАДИР ИМЕЕТ ПРАВО НА САМОУПРАВСТВО". Я оторопел, Мишины слова и, главное, их неожиданная правота в моей родной отчизне так меня восхитили, что я рассмеялся и смирился: действительно сказать было нечего - он имеет право.

Для нас всех лунная программа была громоздкой работой по внедрению новых параметров теории движения Луны и её селенографии в уже работавшие ранее программы численного интегрирования активного и пассивного участков траектории. Эта работа очень сблизила нас с Мишей - мы понимали друг друга с полуслова. Следует подчеркнуть, что существующее теперь ясное понимание и умение решать проблемы организации средств баллистического обеспечения для проектирования полётов к Луне и к планетам тогда только возникало и накапливалось очень постепенно - в процессах коллективного обсуждения и поиска способов реализации очередного полёта к очередному сроку. Практически, новые алгоритмы и программные комплексы для решения краевых задач прицеливания (сначала - для попадания в Луну, а позже – для облёта Луны с фотографированием её обратной стороны, затем для реализации мягкой посадки на Луну и создания её спутников) и алгоритмы для сопутствующих задач определения ожидаемых погрешностей реализации этих полётов к Луне - все они были разработаны не сразу. Они были неоднократно переработаны и, наконец, окончательно поняты и реализованы. И эта общая работа была наполнена плодотворным взаимным обогащением знаний и умений в баллистике, в программировании, в небесной механике и в вычислительной математике.

Лидов очень удачно экранировал нас от длительных общений с Дмитрием Евгеньевичем, что освобождало время, нужное для написания и отладки программ. Особенно это было заметно и важно во время почти круглосуточного процесса проектирования для ОКБ-1 по идее Д.Е. Охоцимского первого в нашей истории гравитационного манёвра у Луны с реализацией условий первого фотографирования её обратной стороны и условий последующего возвращения к Земле [7], [8].

Путём использования притяжения Луны тогда удалось организовать возвращение от Луны к Земле по такой северной траектории, которая обеспечила возможность выполнения в процессе обратного полёта траекторных измерений и формирование целеуказаний наземным радиосистемам для приема

полученных фотографий Луны в краткий момент пролёта КА на расстоянии от Земли не более 50 тыс. км. Множество требований к траектории такого полёта к Луне было большим:

- пролёт Луны не ближе, чем 100 км;
- фотографирование всей обратной стороны Луны;
- фотографирование должно выполняться вблизи прямой Луна–Солнце (вот – ещё одно условие интерполяции);
- наклонение плоскости траектории возвращения должно быть больше 50° – из условий видимости с территории нашей страны;
- КА на расстоянии до Земли не более 20 тыс. км должен быть видим из Крыма – там был организован пункт дальней космической радиосвязи.

Поскольку этим требованиям должны были удовлетворять все траектории трубки рассеивания, нам нужно было построить в придуманной к тому времени картинной плоскости Луны прицельные изолинии выполнения всех этих условий, после чего прицелиться в центр области пересечения этих изолиний. Это требовало массовых вычислений громадного числа траекторий полёта к Луне. Мы создали для этой цели некий "пулемёт" для последовательности вычислений траекторий полёта к Луне, который круглые сутки "тарактел" на Стреле, а "патроны его пулемётной ленты" - начальных или краевых условий этих траекторий формировали Лидов с Охоцимским, рисуя вручную по результатам наших расчётов изолинии условий на миллиметровке⁵.

Следует заметить, что такая постановка краевой задачи прицеливания не одной «номинальной» траекторией полёта, а всей областью возможных траекторных ошибок выведения возникла и была решена впервые в этой работе ([9], сс 138-144).

Мишина роль в наших реализациях была очень яркой. Его напор не позволял расслабиться ни на день, а разговоры с ним по существу проблем были бесценны. Он часто лишь одной фразой порождал у нас понимание нужного направления мыслей и последующих длительных действий. Приведу несколько примеров таких случаев.

Для построения первого приближения задач прицеливания и для ускорения вычислений мы с Зорей Власовой и с Верой Шелухиной стали, кроме процессов численного интегрирования, пытаться реализовывать расчёты параметров траекторий в рамках модели конических сечений. Миша это очень

⁵ Позже, при нашей работе с ОКБ Лавочкина тесно работавший с М.Л. Лидовым молодой тогда Константин Георгиевич Суханов создал первую в стране машинную, очень непростую программу автоматического построения "пулемётных" расчётов вдоль изолинии условий. Это был первый важный шаг в сторону создания средств машинной графики.

поддержал и тут же предложил сделать две операции: "ДКЭ" и "ЭДК" - связать прямым и обратным преобразованием элементы орбиты (Э) с декартовыми координатами (ДК), получаемыми в численном интегрировании.

Теперь это очевидные и общепринятые операции, но тогда это была совершенно новая реализационная идея организации прямого способа связи между результатами точных вычислений траекторных параметров численными методами интегрирования уравнений движения и средствами баллистического анализа орбит в модели кеплерового приближения. В этом, казалось бы, не очень значимом предложении Лидова, на самом деле для нас содержалась некая "реакция спускового крючка". Дело в том, что эти операции с их названиями, которые предложил Лидов, довольно быстро породили понимание системной необходимости построения тем же способом других аналогичных операций преобразования данных в парадигме программных средств конических сечений. И в конечном итоге это обстоятельство привело нас к созданию алгебраически полного понятийно-смыслового построения библиотеки имён и средств программных процедур для описания параметров движения в космосе в кеплеровом приближении [10], положенного позже в основу первой отечественной интерактивной системы проектирования орбит на графическом дисплее [11].

Другим примером такой эффективной Лидовской "подсказки" был родившийся в обсуждении с ним метод управления интерполяцией интегральных функций в методе Рунге-Кутты численного интегрирования траекторий движения. Проблема выхода на заданное значения функции интегрируемых переменных возникала и ранее - ещё в работах на БЭСМ. Первым "звонком" был требуемый выход на заданное значение скоростного напора - для обнуления угла атаки на участке выведения крылатой "Бури" на маршевый режим полёта в работах с ОКБ С.А. Лавочкина или для сброса колпака головной части ракет ОКБ С.П. Королёва. Ещё сравнительно малые скорости изменения высоты полёта на этих районах активного участка движения ракет и малые размеры шагов интегрирования из-за высокой динамики их разгона позволяли выходить на достаточно грубо заданное значение нужной функции просто на границе шага интегрирования. В другом случае, на больших скоростях для определения конца активного участка на заданном числе 2 Маха скорости полёта и реализации модели расцепки "Бури" с ускорителями под её крылом мы совершали линейную интерполяцию между соседними шагами в окрестности этого числа Маха.

Но при планировании полётов к Луне для посадки на поверхность или для выхода на орбиту её спутника возникло большое число интерполируемых функций. Понадобилось определять моменты начала, кульминации и конца видимости Лунника из разных наземных пунктов. Кроме этого, была необходимость знать моменты времени достижения множества разных заданных расстояний до Луны: входа в сферу действия гравитации Луны (расстояние до центра Луны ~ 66 тыс. км), расстояния ~ 8 тыс. км для построения "Лунной вертикали" (требуемой ориентации тормозного двигателя), расстояния 75 км от поверхности Луны для включения тормозного посадочного двигателя и, наконец, расстояния ~ 1738 км радиуса Луны для определения места посадки. А в случае возможного промаха нужно было определить момент и величину минимального расстояния до Луны, а затем – снова момент выхода из её сферы действия. При этом для возможности сравнения согласованных по параметрам совпадений-несовпадений результатов вычислений ОПМ и ОКБ-1 С.П. Королёва были нужны сравнительно высокие точности интерполяции многих, даже не очень по делу строго заданных величин.

Стало ясно, что нужно уметь интерполировать не только разные функции на единственное их заданное значение, но, к тому же, уметь интерполировать одну и ту же функцию на последовательность заданных её значений с определением всех возможных моментов удовлетворения этих условий. Стало ясно, что необходимо разумно реализовать режим интерполяции в виде стандартной части метода численного интегрирования и управлять шагом интегрирования, чтобы не "проскочить" эти моменты. В методе Рунге Кутты было удобно для управления шагом интегрирования в окрестности нуля интерполируемой функции использовать стандартный метод Ньютона поиска корня уравнения, опираясь на вычисление величины интерполируемой функции и величины её производной. Однако при первом же прогоне этого алгоритма выяснилось, что для продолжения интегрирования движения после точки сходимости интерполяции нужно на некоторое время выключать работу метода Ньютона (нацеленного на эту точку и поэтому – возвращающегося к ней) и затем где-то снова её включать. Это нужно было организовывать в каждом конкретном случае интерполируемой функции. Но Миша неожиданно предложил очень эффективный и, главное, стандартный для любых функций способ включения-выключения интерполяции. По его идее в качестве условия присутствия-отсутствия процесса интерполяции на каждом шаге интегрирования нужно было просто взять условие неравенства-равенства знака производной интерполируемой функции выбранному знаку условного

признака. И в точке сходимости интерполяции нужно изменить знак этого признака на противоположный знак, если условие интерполяции не меняется, или изменить нужным образом и условие, и признак.

В этом примере хорошо виден стиль мышления Лидова, ориентированного на понимание свойств имеющихся данных с позиции их практической полезности. Действительно, интерполируемая функция и её производная в методе Ньютона уже известны. И можно сообразить, что на участке сходимости метода Ньютона знак производной всегда противоположен знаку функции. Поэтому достаточно один раз выбрать знак признака противоположным знаку функции в начале вычислений, и в дальнейшем предложенное правило ожидания нужного знака производной будет обеспечивать сходимость ко всем корням уравнения интерполируемой функции с заданным её значениям. И это годится для любой интерполируемой функции.

Этот "Признак Лидова" перешёл из программ интерполяции в кодах Стрелы в программы в кодах М-20, затем - БЭСМ-4, затем - БЭСМ-6, а далее - в реализации программ численного интегрирования на Фортране, Паскале и Си.

Примеров резкого поворота разработок от вовремя сказанного замечания или соображения в процессе развития космической техники я помню много ("*боковушка*" С.С. Камынина, датчик 15-К В.П. Скотникова, лунная вертикаль В.В. Ивашкина, солнечная коррекция Л.В. Шевченко, "*наук*" В.А. Егорова, "*звёздочка*" Т.М. Энеева) - можно и продолжить [9], [12], [13]. Это явление, на мой взгляд, имеет характер назревшего "кризиса непонимания", разрушаемого одним соображением. Оно возникает в условиях лишённого отношений конкуренции хорошо сработавшегося грамотного коллектива, готового понять с полуслова, подхватить и развить услышанное. Но здесь необходимо присутствие вдумчивого острого ума у кого-то из присутствующих⁶. И именно М.Л. Лидов, с его уникальными хорошо известными научными результатами и – с его малоизвестными ценными подсказками, был таким важным участником всех работ.

Примером этому служит история возникновения и развития понятия картинной плоскости. Она уже была описана в [9], но, вспоминая Лидова, я должен сказать, что это понятие впервые и совсем не сразу возникло у нас с ним при поиске удобных краевых условий для задачи достижения Луны.

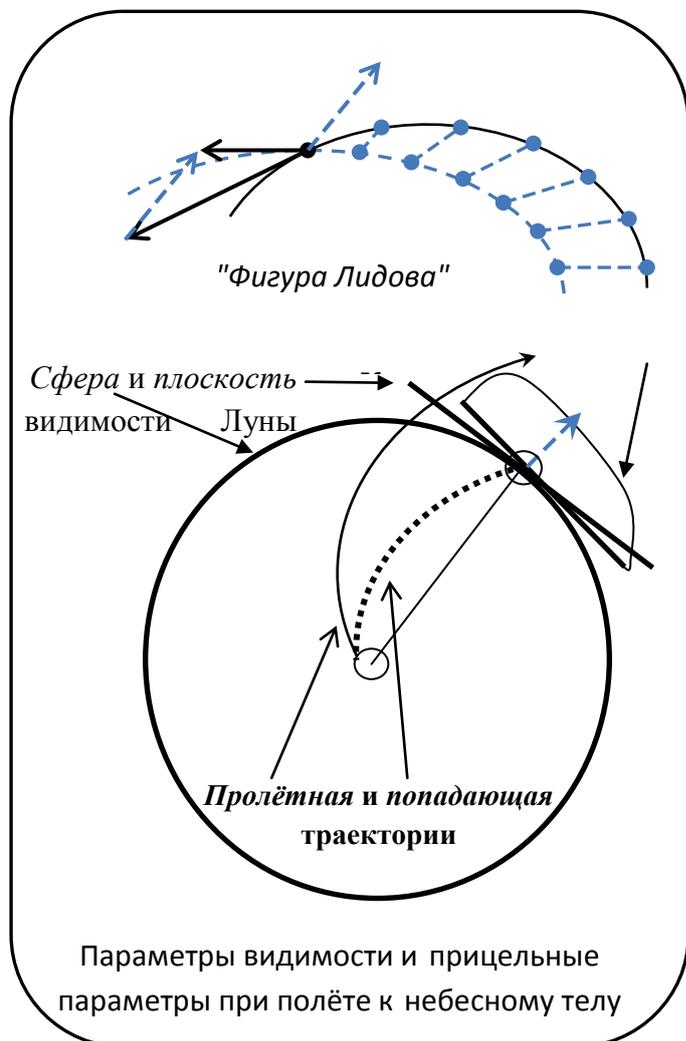
⁶ Обычно такие события малого воздействия делом или даже словом, приводящего к большим реальным последствиям, остаются не отмеченными до юбилея автора - при условии живых ещё свидетелей.

Первоначально было совершенно неясно, в какой системе координат формировать краевые условия попадания в Луну, двигающуюся по небосводу со скоростью 13° в сутки. Поскольку В.А. Егоров - первый исследователь лунных траекторий - описывал их в системе координат, связанной с линией Земля-Луна [14], мы, следуя ему, в качестве условий краевой задачи полёта к Луне выбрали сферические координаты на сфере с центром в центре Земли и с радиусом, равным расстоянию Земля-Луна в момент её достижения. В борьбе с тригонометрическими нелинейностями этих параметров в их зависимости от искомых параметров времени старта ракеты и времени выключения двигателя третьей ступени (нового "Блока Е" ОКБ-1) мы, вместо сферических координат, стали использовать декартовы координаты в плоскости, касательной к этой сфере в той же точке пересечения сферы с орбитой Луны в момент её достижения. Но это мало помогло скорости сходимости краевой задачи - оставалась заметная геометрическая нелинейность этих параметров. И тут при обсуждении этой проблемы Миша Лидов нарисовал картину изменения взаимного положения Лунника и Луны в процессе полёта, и - всё стало понятным! Стало очевидным, что надо работать в декартовых координатах некой плоскости, названной им "картинной" плоскостью, ортогональной направлению на центр Луны при подлёте к ней. Лидов рассуждал так: Направление на Луну в процессе полёта к ней поворачивается в абсолютном пространстве, но, говорил он, - при сближении с Луной кривые траектории можно заменить прямыми, и при предельном движении по этим прямым направления на Луну будут параллельны друг другу. Поэтому надо где-то вблизи Луны, - например, на расстоянии её сферы действия, построить плоскость, ортогональную направлению на центр Луны, далее долететь до этой плоскости и - зафиксировать координаты точки её пересечения.

В результате обсуждения Мишиного рисунка быстро стало понятным, что в качестве нормали картинной плоскости служит вектор относительной скорости в момент сближения с Луной. Это позволило построить простые алгоритмы формирования прицельных параметров, взятые на вооружение всеми баллистиками страны в том 1958 году для решения краевой задачи поиска траектории попадания в Луну. Год спустя, для фотографирования обратной стороны Луны возникло важное понятие прицельной дальности в картинной плоскости, исключаящее нелинейности и от лунной гравитации.

Но важно отметить, что ставшее фундаментальным понятие картинной плоскости, как и само её имя, возникло, благодаря тому, что Миша Лидов в нужный момент нарисовал очень нужный, простой плоский рисунок,

объясняющий существо дела. Его роль была в том, что он толкнул направление мыслей от привычного рассмотрения параметров геоцентрического движения к



анализу движения относительно Луны, которое в пределе удобно описывается линейными соотношениями. Одновременно замечаю, что, опираясь на параметры треугольника скоростей при встрече с Луной, Лидов буквально на пальцах показал нам то неожиданное обстоятельство, что место встречи с Луной на её поверхности однозначно определено временем прямого полёта к ней. Оно должно лежать на линии, идущей налево вверх из центра видимого диска Луны (при бесконечной скорости полёта к Луне) и до границы видимого диска (при апогее орбиты, близком к расстоянию до Луны - когда Луна со скоростью 1

км/сек налетает на практически неподвижный объект). Каждая точка этой линии соответствует времени полёта до Луны. Для 2,5 суточного полёта точка встречи с Луной лежит в Море Дождей.

В это время нас всех, естественно, очень беспокоили проблемы влияния ошибок радиосистем на точность определения орбитальных параметров Лунника. На эту тему, начиная от работы Т.М. Энеева с Н.И. Золотухиной [15], было предложено много методов оценки [16], [15]. Однако, на мой взгляд, самый практичный и логически простейший из них был предложен Лидовым [17]. Его мысль заключалась в необходимости определять влияние лишь систематических погрешностей измерений, поскольку случайные погрешности усредняются в процессе обработки получаемых данных. А ввиду априорной неизвестности величины и знака систематических ошибок, самым простым способом оценки их влияния на шесть искомых баллистических параметров

орбиты является минимаксное моделирование их предполагаемых наихудших значений диагональной ковариационной матрицей для шести выбранных наилучших для результата оценки мест выполнения измерений. Отображение этой матрицы на шестимерный эллипсоид в пространстве параметров орбиты или на эллипс в картинной плоскости и даёт искомую оценку влияния систематических ошибок. Особенно просто, говорил Миша, можно реализовать такую оценку, если эти шесть мест измерений просто расположить равномерно вдоль орбиты. Этим способом мы с ним пользовались довольно часто, не наблюдая большой разницы с более взвешенными оценками команды Э.Л. Акима.

Более подробное описание минимаксных методов, предложенных М.Л. Лидовым можно найти в препринте ИПМ 2010 г., подготовленного его учениками [18].

После успешного фотографирования обратной стороны Луны произошло событие, которое, как мне кажется, повлияло на некий поворот Мишиных интересов от вычислительной баллистики в сторону сложных эволюционных проблем небесной механики, которые нельзя решить простым численным интегрированием из-за накопления вычислительных погрешностей. Причина этого поворота оказалась связанной с эйфорией большого успеха этого полёта. Действительно, кроме открытия свойств обратной стороны Луны и резкого продвижения методов небесной баллистики в результате великолепного гравитационного манёвра у Луны был получен ещё один результат - был создан новый спутник Земли с апогеем за орбитой Луны и довольно высоким перигеем. И вот один из очень уважаемых астрономов тогда восторженно объявил: "Создан вечный искусственный спутник Земли!".

Утверждение вызвало у Лидова большие сомнения. Орбитами траекторий облёта Луны в более ранние годы много занимался В.А. Егоров, и мы из его результатов знали, что периодические траектории такого рода очень редки. И более того, было ясно, что раз орбита спутника была создана притяжением Луны, то рано или поздно спутник и Луна могут близко встретиться снова, и что именно тогда сотворит гравитационное поле Луны с орбитой нашего спутника заранее сказать нельзя.

Полученная орбита нового спутника была нам хорошо известна (она была хорошо определена в ОПМ группой Э.Л. Акима [16] и командой П.Е. Эльясберга в НИИ-4 [19] из траекторных наблюдений на участке возвращения от Луны к Земле). И вот Миша Лидов решил опровергнуть вечность жизни нового спутника, запустив вперед по времени численное

интегрирование полученной орбиты нашей программой расчёта геоцентрической траектории Лунника в гравитационных полях сжатой Земли, Луны и Солнца. Он сделал это вместе с Зорей Власовой, и они получили, что через несколько месяцев Луна своим притяжением кинет этот спутник к Земле.

Но Миша понимал, что этот результат крайне ненадёжен: в нём не учтены возмущения от планет и, главное, - накопления неизвестных ошибок округления численного интегрирования. В таких задачах нужно построение классической небесно-механической "теории движения", обеспечивающей методами осреднения вековое прогнозирование движения, освобождённого от короткопериодических его вариаций. И Миша стал всё чаще думать и говорить об этом. Способствовало этому и другая, увлékшая его (достаточно умозрительная, но методически важная) задача: может ли существовать Луна на орбите с наклоном 90° ?. И я помню, как он однажды пришёл и гордо сообщил нам: "Я её угробил!" (см. [20] и [21])

Так или иначе, но после этих событий наши дорожки с Мишей немного разошлись. Наша команда была переключена Дмитрием Евгеньевичем на работу по проектированию вместе с группой Т.М. Энеева полётов к Венере и Марсу. А М.Л. Лидов вместе с новыми сотрудниками (Н.М. Тесленко, М.А. Вашковьяком, О.С. Рыжиной, В.А. Ляховой, а также многими его учениками и помощниками) продолжал тянуть эволюционно-спутниковую тематику, плодотворно развивая методы анализа эволюции орбит. Одной из первых отечественных работ по эволюции орбит спутников Земли с высокими их апогеями, имеющей важное практическое значение, была работа М.Л. Лидова по проектированию орбиты нового научного спутника "Электрон" [22].

После реализации полёта к Луне в задаче полёта к планетам нужно было много добавить нового в программы расчётов активного и пассивного участков полёта (новые ракетные ступени и связь геоцентрического движения с гелиоцентрическим). Как это делать, было совершенно понятно - это нужно было просто сделать, и мы это делали. Но возникла необходимость решения и совершенно новой малопонятной проблемы коррекции ошибок активного участка траектории в середине пассивного участка полёта, без решения которой правильно сблизиться с планетой – целью полёта - было невозможно. Но как решить эту проблему, даже как поставить задачу – было неясно.

И вспоминая М.Л. Лидова, нужно сказать, что он своими вопросами и замечаниями заметно помог в самом начале разбирательства с проблемой коррекции параметров орбит. Дело было в том, что все мы, так или иначе, в

прошлом прошли через решение вариационных задач [23], [24], [25] и, в связи с этим, вначале всем нам казалось, что задача оптимизации расхода топлива на коррекцию ошибок движения – задача вариационного исчисления. Эта точка зрения была разрушена в процессе трёх или четырёх семинаров отдела, на которых горячо обсуждалась готовящаяся диссертация В.А. Рясина в простейшей постановке задачи исправления ошибок, предложенной Д.Е. Охоцимским. Роль Лидова на этих семинарах трудно переоценить. Его очень дельные вопросы несколько раз приводили к решениям "доработать и продолжить обсуждение". Рясина иногда было жаль, но в результате коллективного обсуждения и, к слову - помощи Н.Н. Ченцова, возникла, наконец, наиболее строгая постановка задачи об отыскании оптимальной стратегии коррекции ошибок траектории полета космического аппарата. И появилось понимание, что это совсем не вариационная задача, а совершенно нового типа задача разбиения пространства информационных данных об ошибках движения на области одинаковых стратегий коррекционных действий с их неодинаковыми параметрами⁷ (см. [9] – с.153).

Эта задача о разбиении и о построении в линейном приближении стратегий коррекции применительно к полётам к Марсу, к Венере (а позже - и к Луне) стала предметом моих исследований [26]. И я хорошо помню очередную Мишину подсказку, когда в ответ на мой горячий рассказ ему об избыточности числа возможных вариантов действий при малом числе параметров прицеливания Миша задумчиво произнёс: "ТАМ ДОЛЖНА БЫТЬ ПЛОСКОСТЬ...". Одна плоскость (картинная) уже была, и это Мишино замечание толкнуло меня в нужную сторону поиска средств её линейного отображения в пространстве корректирующих импульсов. После удачно придуманной системы координат, связанной с градиентами осей в картинной плоскости и была определена эта упомянутая Мишей плоскость, содержащая оптимальные импульсы для коррекции любых ошибок в картинной плоскости.

Приведу ещё один пример такого "Δ-влияния ε-сказанного" Мишей в задаче коррекции. Он был первым, кто обратил внимание на заведомо негауссовый характер ошибок исполнения будущих коррекций, ввиду их нелинейной зависимости от величины корректирующего импульса. Сам он не стал это развивать, а стал аппроксимировать эти ошибки их линейной мажорантой. Но именно это Мишино замечание и толкнуло меня на создание не гауссовой, а полной модели погрешностей исполнения коррекции ещё не известных, но ожидаемых орбитальных ошибок движения.

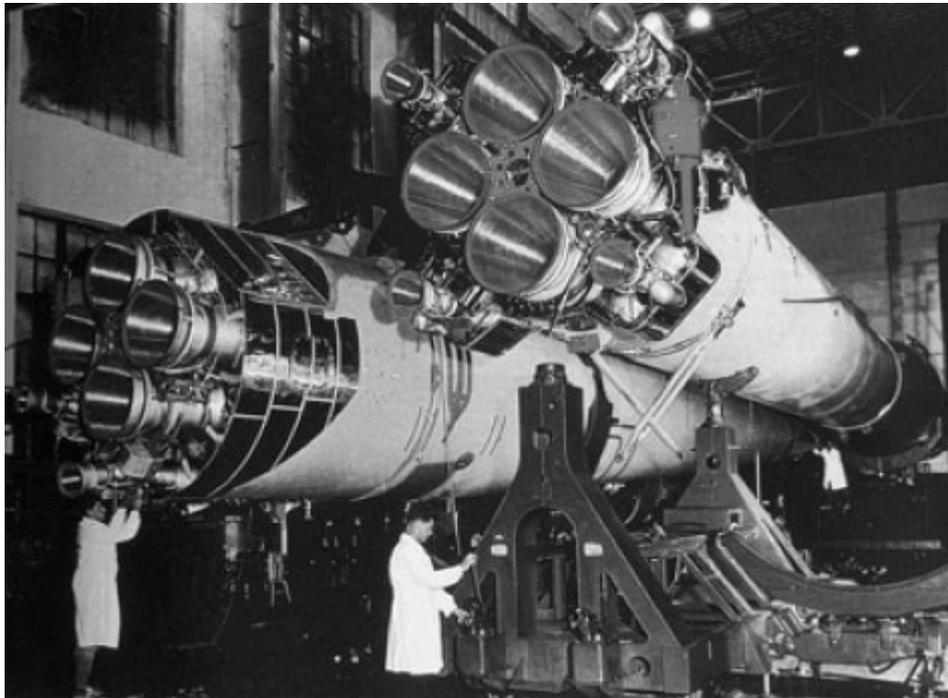
⁷ Следует отметить, что этот же тип задач управления присутствует и в робототехнике.

Большими событиями в моей жизни были наши совместные с Лидовым командировки. С ним как-то легко было делить тяготы переездов и быта.

Самая ранняя из наших общих командировок была поездка на полигон на запуск наконец готового к пуску "Объекта Д". Нам было сказано, что мы должны лететь Аэрофлотом до аэропорта Джусалы, а там "вас будет ждать майор с машиной". Я этому поверил, а Миша – нет. Никто в Джусалах нас не ждал, и Мишины попытки выяснить проблему в комендатуре аэропорта кончились тем, что рядовой, пытавшийся сообщить о нашем прилёте и настойчиво вызывавший: "Крейсер!, ..Крейсер!.. Крейсер!.." вдруг вскочил по стойке "Смирно" и злобно прокричал в трубку: "Товарищ полковник! Я по телефону ещё матом не выражался!!", - после чего мы своим ходом стали добираться туда, куда нас послали.

От этой первой поездки у меня остались в памяти два ярких момента: - глубокое удивление Лидова, когда он увидел в МИКе расчехлённую ракету Р-7, и - мое тревожное удивление, когда мы позже смотрели на её огненный старт.

Миша был очень удивлён, что сопло ЖРД ракеты такое короткое и камеры сгорания расположены в хвосте ракеты, а не в её голове, как на рисунке Циолковского.



И тут мне стало понятным, почему Миша практически никогда не вникал в перипетии наших с Раей Казаковой расчётов активного участка ракеты, - он, прекрасно понимая механику точки или тела переменной массы, никогда до этого не думал о технической стороне дела. Многое из того, что мне –

выпускнику кафедры ЖРД в МАИ было очевидным, ему – выпускнику Мехмата МГУ было неведомым. В этом эпизоде мне вдруг раскрылась степень существующего разрыва разных видов высшего образования.

А позже меня до глубины души потрясла картина запуска Р-7: вдруг красное пламя полностью охватило всю видимую часть утопленной в землю ракеты (я решил, что - всё кончено), а потом из этого огня не спеша вылезла вся ракета с её огненным хвостом и, проткнув низкую облачность, скрылась. Много раз потом мы с Мишей видели удачные и неудачные пуски, но никогда больше этого столба огня на старте не было. Дело в том, что старт "Объекта Д" был всего лишь четвёртым или пятым успешным пуском Р-7, и не все особенности устройства её висячего старта были сразу очевидны. А позже на старте была устроена специальная водяная завеса, и пламя ракетного двигателя перестало лизать ракету.

Сам стоящий в МИКе "Объект Д" представлял собой блестящий увешанный научными приборами усечённый конус с торчащими вбок антеннами телеметрии. Вокруг него толпились все упомянутые выше хозяева приборов - Миша сразу же нашел много знакомых и со своими графиками на миллиметровке погрузился в тесное общение с ними.

Запомнилась и другая наша общая с Мишей поездка – наша первая командировка в Крым, в Симеиз на гору Кошка (Миша любил точные данные: "Луна -13° в сутки", "Кошка – 342 м над уровнем моря"). Нас в ожидании пуска к Луне направили в помощь Е.Я. Богуславскому, который на территории Симеизской астрономической обсерватории создал первый отечественный пункт дальней космической связи. Мне эта поездка запомнилась на всю жизнь одной Мишиной фразой, сказанной в довольно регулярной жизненной ситуации. Нам опять пообещали в Ялте "майора с машиной", который опять не появился, и мы оказались в громадной толпе на автобусной станции. И вот, наконец, появился автобус, который вдруг своим задом, подавая к остановке, повалил человек пять на землю, включая женщину с ребёнком на руках, а толпа, не обращая внимания на их крики и вопли, кинулась штурмовать двери автобуса, и вот тут Миша, глядя на всё это, как-то грустно и задумчиво произнёс: "ДА,.. ГЛАВНОЕ, - **ВОВРЕМЯ ОТТОЛКНУТЬ ЖЕНЩИН И ДЕТЕЙ!**". На наших глазах именно так всё и происходило. Мы были в обстоятельствах острой служебной необходимости, и решительность Лидова, смешанная с его благородством, помогла и соседним детям толпы, и нам всё же оказаться внутри автобуса.

У меня эта Мишино чёткое определение всегда всплывает в уме, когда в метро или в любом другом месте я вижу толпу активных людей, стремящихся любой ценой войти или влезть и сесть или встать, где удобнее.

Я полагаю, что Мише Лидову эти транспортные неурядицы в его жизненной активности были хорошо знакомы.

Он много раз участвовал с докладами в разных дальних конференционных поездках. К тому же, я помню, как мы с трудом добирались до глухой деревни далеко за Тайшетом на БАМе, чтобы по приглашению киевского астронома Клима Ивановича Чурюмова наблюдать там полное солнечное затмение. Миша в этой поездке был неподражаем во всех эпизодах пересадок, билетов и ночёвок в этой поездке. И, конечно, Миша обязательно каждые майские праздники плывал на байдарках по весенним рекам.

К слову, я впервые об В.И. Арнольде услышал от Миши Лидова после его возвращения из одного такого похода. Они там познакомились, и Миша привёз оттуда большое уважение и симпатию к нему, которое, как мы теперь видим, было взаимным.

Мне кажется, что именно после этого контакта с молодым Арнольдом Миша очень увлёкся проблемой устойчивости Солнечной системы, и в нашей комнате стали происходить его с А.М. Молчановым интереснейшие обсуждения математического содержания проблемы конца Вселенной и справедливости второго закона термодинамики.

Заканчивая эти воспоминания, я с горечью хочу напомнить одну из стихотворных строк упоминаемого выше Л. Мартынова, которая особенно относится к личности рано ушедшего от нас М.Л. Лидова:

"Незаменимых нет?

Нет – заменимых нет!"

Теперь, когда Михаила Львовича уже много лет нет с нами, мы особенно чувствуем жестокую справедливость этих слов. В то время не все его труды были сразу замечены. Но, конечно же, сделанное им осталось во многих умах его коллег и учеников. И я позволю себе в чисто Лидовском стиле сказать об этом строками другого замечательного поэта нашего времени:

Но труд, - хоть был он и не впрок,
Видать, остался в отзвуке, -
И пять его легчайших строк
Витать остались в воздухе...

Леонид Филатов

Действительно, многое, созданное Михаилом Львовичем Лидовым, не забыто и продолжает продуктивно витать в воздухе...

Я очень люблю эту
фотографию!
Зоря Власова и
Миша Лидов очень
хорошо здесь
смотрят на меня, и
их выражение лиц
(доброе у Зори и
задумчивое у Миши)
так выразительно
напоминают
атмосферу нашей
дружной
круглосуточной
работы на Стреле!



Литература

1. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. 493 с.
2. *Лебедев С.А.* Электронные вычислительные машины //М.: Изд-во АН СССР, Научно-популярная серия, 1956.
3. *Энеев Т.М., Платонов А.К., Казакова Р.К.* Определение параметров искусственного спутника по данным наземных измерений// В сб. "Искусственные спутники Земли" М.:АН СССР вып.4, 1960г. С. 43-55.
4. *Платонов А.К., Казакова Р.К.* Первая машинная обработка траекторных измерений спутника Земли.
// Вестник Российской Академии наук. Том 72, № 9. Изд. Наука. 2002.
5. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Таратынова Г.П.* Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты // "Успехи физических наук" т.LXIII, вып.1, сентябрь 1957. С. 33-52.
6. *Лидов М.Л.* Определение плотности атмосферы по наблюдаемому торможению первых искусственных спутников Земли //Искусственные спутники Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Вып. 1. С 9-20.
7. *Келдыш М.В., Власова З.П., Лидов М.Л., Охоцимский Д.Е., Платонов А.К.* Исследование траекторий облета Луны и анализ условий фотографирования и передачи информации. // В кн.: Келдыш М.В. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. С. 261-309.
8. Первые фотографии обратной стороны Луны. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
9. *Платонов А.К.* О построении движений в баллистике и мехатронике //Прикладная небесная механика и управление движением. - Сб. статей, посвящённый 90-летию со дня рождения Д.Е.Охоцимского. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. – с.127-222
- 10.*Платонов А.К., Казакова Р.К.* Язык для расчета характеристик движения в прикладных задачах небесной механики //Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 1974. №78. 49 с.
- 11.*Платонов А.К., Казакова Р.К.* Система проектирования орбит в прикладных задачах небесной механики //Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 1976. №106.39 с.
- 12.*Платонов А.К.* Долгий путь к звёздам. В кн. Будущее прикладной математики. Лекции для молодых учёных. Поиски и открытия. / под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»,2009. – 640 с.

13. *Охоцимский Д.Е., Камынин С.С.* Баллистические возможности составных ракет. Отчет МИАН СССР им. В.А.Стеклова. 1951 г.
14. *Егоров В.А.* Пространственная задача достижения Луны. М.: Наука. 1965.
15. *Платонов А.К., Иванов Д.С.* Методы обработки измерений: учебное пособие// М.: МФТИ. 2013. – 108 с. ISBN 978-5-7417-0497-4
16. Аким Э.Л., Энеев Т.М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений // Космич. исслед. 1963. Вып. 1. Т. 1. – С. 5.
17. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов/ // Космич. исслед. 1964. Т. 2. № 5. С. 713.
18. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. №71. 87 с.
19. Эльясбег П.Е. Определение движения по результатам измерений // М.: Наука. 1976.
20. *Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел//Искусственные спутники Земли.М.: Изд-во АН СССР, 1961.. Вып. 8. С 5-45.
21. *Вашковьяк М.А.* О научной деятельности профессора М.Л.Лидова и о развитии его работ по эволюции спутниковых орбит (к 80-летию со дня рождения) <http://www.keldysh.ru/memory/lidov/vashkovyak.pdf>
22. *Келдыш М.В., Лидов М.Л.* Орбиты спутников "Электрон". В кн.: Келдыш М.В. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. С. 356-385.
23. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // "Успехи физических наук" т.LXIII, вып.1, сентябрь 1957г. С. 5-32.
24. *Голубев Ю.Ф.* Дифференцирование функционалов. Метод Охоцимского. // Прикладная небесная механика и управление движением. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. – С. 33 – 57.
25. *Келдыш М.В., Казакова Р.К., Платонов А.К.,* Коррекция траекторий полёта к Венере и Марсу. - В кн. М.В.Келдыш "Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика". М.: Наука, 1988г. С. 385 – 414.

М. Л. Лидов

**ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
ВНЕШНИХ ТЕЛ**

До последнего времени в работах, посвященных эволюции орбит искусственных спутников, подробно исследовались влияние на орбиту спутника отличия гравитационного поля Земли от центрального и влияние торможения спутника в земной атмосфере. В некоторых работах учитывались и более тонкие эффекты эволюции, связанные с вращением земной атмосферы. Изменение параметров орбит искусственных спутников Земли из-за гравитационного притяжения Луны и Солнца лишь оценивалось. Оценки показывали, что близкие к Земле искусственные спутники испытывают незначительное влияние других небесных тел, практически недоступное для наблюдений при современных средствах измерений. Однако уже для американского спутника «Авангард I» радиотехнические средства измерений оказались в этом смысле достаточно точными. Обработка результатов измерений в течение двух лет существования этого спутника показала [1], что наблюдаемую эволюцию параметров орбиты невозможно объяснить без учета гравитационного воздействия Луны и Солнца (и даже светового давления).

В случае орбиты спутника «Авангард I» изменение высоты перигея орбиты составляло в течение года величину порядка 5 км. Такие величины эволюции существенны для точного прогнозирования положения спутника, но не являются определяющими для времени его существования, а также, по-видимому, несущественны для выполнения научных и технических задач, связанных с его запуском.

В практике космических полетов впервые существенное влияние гравитационного притяжения Луны и Солнца на изменение орбиты спутника отмечалось в случае полета советской Автоматической межпланетной станции, запущенной 4 октября 1959 года. Орбита спутника Земли, в который превратилась Автоматическая межпланетная станция после сближения с Луной, эволюционировала таким образом [2,3], что, несмотря на начальную высоту перигея орбиты порядка $47 \cdot 10^3$ км, через 11 оборотов высота перигея, согласно прогнозу, полученному из расчета, стала меньше радиуса Земли, и станция прекратила свое существование.

Столь же принципиальными могут оказаться эффекты влияния Луны и Солнца для спутников типа «Эксплорер VI» [4], орбиты которых имеют близкие к поверхности Земли положения перигея и высоты апогея $50 \div 100 \cdot 10^3$ км.

Отношение массы Земли к массе Луны равно 81,53. Вследствие этого при геометрическом равенстве орбит спутника Земли и спутника Луны

орбита последнего будет испытывать возмущение от Земли в $(81,53)^2$ раза более интенсивное, чем влияние Луны на такой же спутник Земли.

При изучении эволюции орбит искусственных спутников, как правило, приходится исследовать довольно широкую (в общем случае пятимерную) область возможных значений параметров. Использование для такого исследования точных решений систем дифференциальных уравнений небесной механики, даже в том случае, если эти решения получаются при помощи быстродействующих электронных машин, потребовало бы затраты значительного времени и трудоемкого последующего анализа. Поэтому вполне естественно применение для исследования различных приближенных аналитических методов. Например, в [5] оценки влияния Луны и Солнца на первоначально круговую орбиту искусственного спутника Земли проведены методом получения точных решений линеаризованных уравнений небесной механики. В этой работе при упрощении уравнений предполагалось, что отношение расстояния между положением спутника в возмущенном и невозмущенном движении к радиусу орбиты достаточно мало.

Задачей настоящей работы было получение наиболее простых формул для приближенного исследования эволюции достаточно широкого класса орбит спутников. Эти формулы должны были, с одной стороны, позволить выявить основные качественные закономерности в характере изменений элементов орбиты и, с другой стороны, обеспечить возможность с определенной степенью приближения быстро получать количественные оценки эволюции орбиты за один оборот и за длительное время. Знание качественных закономерностей позволяет уменьшить область исследования, а при необходимости количественного расчета эволюции на длительное время приближенные формулы существенно сокращают время расчета.

Основным допущением, использованным в работе, является предположение о достаточной малости отношения высоты апоцентра спутника к расстоянию от возмущающего тела до центрального тела, вокруг которого обращается спутник. Это предположение, естественно, ограничивает класс орбит, эволюцию которых можно рассматривать с помощью предлагаемого метода. Однако, жертвуя точностью расчета, этот класс можно сделать достаточно широким. Так, например, для спутника Земли с высотой апогея $50 \cdot 10^3$ км (примерно $1/7$ расстояния до Луны) вековые уходы элементов за оборот спутника под влиянием Луны по полученным ниже приближенным формулам можно вычислить с точностью $1 \div 3\%$.

Другие условия получения приближенных формул для изменений элементов орбиты за оборот спутника связаны с малостью этих изменений. Предположения этого рода аналогичны предположениям, использованным в работе [6] для приближенного расчета эволюции орбиты под действием торможения в атмосфере и вследствие отличия гравитационного поля Земли от центрального. Изменения элементов орбиты, рассмотренные в работе [6], были либо монотонными, либо периодическими функциями с большим периодом. Этот факт определял большую эффективность различных экстраполяционных методов расчета изменения элементов орбиты на большом интервале времени. В случае гравитационных возмущений орбиты спутника планетами изменения элементов орбиты за оборот спутника, оставаясь малыми по величине, как функции от числа оборотов носят колебательный характер с частотой, которая может быть сравнительно высокой. Значение этой частоты определяется периодом обращения возмущающего тела вокруг центрального, около которого обращается спутник. Это обстоятельство, по-видимому, уменьшит эффективность применения

для нашей задачи разрабатываемых ускоренных методов точного расчета эволюции орбит спутников [7] по сравнению с их приложениями к задачам, рассмотренным в [6].

Используя метод дополнительного осреднения быстропеременных коэффициентов, связанных с движением возмущающего тела, в разделах 6 и 7 настоящей работы получены формулы для приближенного расчета изменения элементов орбиты спутника за несколько оборотов, или (в определенных случаях) даже за период обращения возмущающего тела. Этот способ во многих случаях, не увеличивая значительно погрешности счета, позволяет ускорить расчет изменения за длительное время элементов орбиты спутника.

Уравнения для элементов орбиты, осредненных за оборот возмущающего тела, вследствие их простоты являются особенно удобными для различного рода оценок. Для определенного класса орбит и центральных тел (существенно, чтобы влияние нецентральности основного гравитационного поля являлось второстепенным возмущающим фактором) эти уравнения будут описывать главную часть эволюции. В то же время в рамках таких упрощенных уравнений удастся полностью проследить эволюцию для любых параметров орбиты спутника.

Величину погрешности в вычисленных по приближенным формулам изменения элементов орбиты спутника можно для данной орбиты оценить по порядку величин, которыми пренебрегали при выводе формул. Более аккуратные совокупные оценки, по-видимому, наиболее просто получить сравнением расчета по приближенным формулам с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений, где сходимость результатов при уменьшении шага интегрирования является достаточно надежным критерием точности. В разделе 10 обсуждаются результаты такого сравнения для орбит спутников Земли и Луны. Для получения совокупных оценок погрешности приближенного метода рассмотрены орбиты, в определенном смысле граничные с точки зрения применения приближенной методики. Погрешности для этих орбит оказываются уже вполне заметными (составляют величины нескольких процентов), но, по-видимому, допустимыми для исследовательских целей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Предполагаются заданными в некоторый момент времени значения следующих оскулирующих элементов орбиты спутника, обращающегося около центральной точки с константой гравитационного потенциала μ : p — параметр оскулирующего эллипса; e — его эксцентриситет; ω — угловое расстояние перицентра от узла; i — наклон орбиты; ϑ — истинная аномалия; $u = \omega + \vartheta$ — аргумент широты; Ω — долгота восходящего узла.

Отсчет углов i , ω , Ω , u ведется от перемещающейся вместе с центральным телом координатной плоскости OXY декартовой системы координат XYZ , не вращающейся в абсолютном пространстве.

Движение спутника вокруг центральной точки испытывает возмущение гравитирующих точек с константами гравитационных потенциалов μ_k ($k = 1, 2, \dots$). Положения точек по отношению к центральному телу заданы векторами $\mathbf{r}_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$). В рассматриваемом интервале времени $t \gg t_0$ исследуется ограниченная задача. Влиянием массы спутника на центральное тело и возмущающие тела пренебрегаем.

В проводимом приближенном рассмотрении часто можно будет пред-

полагать, что возмущающие точки движутся по эллиптическим орбитам вокруг центральной точки. В этом случае зависимость $r_k(t)$ определяется по известным элементам: $p_k, e_k, \omega_k, \Omega_k, i_k, u_k$ в момент t_0 .

Предполагается, что параметры орбиты спутника и величины возмущающих сил таковы, что оскулирующая орбита в течение одного оборота спутника практически мало отличается от эллиптической с фиксированными параметрами, соответствующими значениям оскулирующих элементов, например, в перигентре. Эти фиксированные для данного оборота элементы и будем называть элементами орбиты спутника.

Изменение элементов орбиты от оборота к обороту представляет собой вековой уход, следствием которого может быть существенное изменение формы и расположения в пространстве орбиты спутника по отношению к первоначальной орбите в момент t_0 .

Отвлекаясь от конкретного положения спутника на орбите, в дальнейшем будем интересоваться лишь областью изменения элементов орбиты в течение определенного времени.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВОЗМУЩАЮЩИЕ СИЛЫ

Для получения приближенных формул, описывающих эволюцию орбиты искусственного спутника, возьмем в качестве исходных точные уравнения движения в оскулирующих элементах [6], где в качестве независимого переменного принято значение истинной аномалии ϑ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{d\vartheta} &= \frac{2r^3\gamma}{\mu} T, \\ \frac{de}{d\vartheta} &= \frac{r^2\gamma}{\mu} \left[S \sin \vartheta + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \cos \vartheta + e \frac{r}{p} T \right], \\ \frac{d\omega}{d\vartheta} &= \frac{r^2\gamma}{\mu e} \left[-S \cos \vartheta + \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \sin \vartheta - e \frac{r}{p} W \operatorname{ctg} i \sin u \right], \\ \frac{d\Omega}{d\vartheta} &= \frac{r^3\gamma}{\mu p} W \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{di}{d\vartheta} &= \frac{r^3\gamma}{\mu p} W \cos u, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\mu e} S \cos \vartheta - \frac{r^2}{\mu e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T \sin \vartheta}, \quad (2)$$

S, T, W — проекции возмущающего ускорения соответственно на радиус-вектор, на перпендикуляр к нему в плоскости оскулирующего эллипса и на перпендикуляр к плоскости оскулирующего эллипса.

Для возмущающего ускорения $F^{(k)}$, испытываемого спутником, удаленным от центрального тела на радиус-вектор r , под действием гравитирующей точки с потенциалом μ_k , которая в свою очередь удалена от центрального тела на радиус-вектор r_k , справедлива формула [8]

$$F^{(k)} = \mu_k \left(\frac{r_k - r}{|r_k - r|^3} - \frac{r_k}{r_k^3} \right). \quad (3)$$

В дальнейшем будем рассматривать спутники, для которых всегда выполняется условие $r_k \gg r$. В этом случае выражение для ускорения

$\mathbf{F}^{(k)}$ можно разложить в ряд по параметру $\frac{r}{r_k}$

$$\mathbf{F}^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{F}_i^{(k)}.$$

Первые два члена этого ряда, соответствующие первой и второй степени отношения $\frac{r}{r_k}$, имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{(k)} = \frac{\mu_k}{r_k^2} \left[3 \frac{\mathbf{r}_k (\mathbf{r} \mathbf{r}_k)}{r_k r_k^2} - \frac{\mathbf{r}}{r_k} \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_2^{(k)} = \frac{\mu_k}{r_k^2} \left[\left(-\frac{3}{2} \frac{r^2}{r_k^2} + \frac{15}{2} \frac{(\mathbf{r}_k \mathbf{r})^2}{r_k^4} \right) \frac{\mathbf{r}_k}{r_k} - 3 \frac{(\mathbf{r}_k \mathbf{r})}{r_k^2} \frac{\mathbf{r}}{r_k} \right]. \quad (5)$$

Введем в рассмотрение орбитальную систему координат, в которой ось 1 направлена из центральной точки на перицентр орбиты спутника, ось 2 ортогональна ей, направлена в сторону движения тела и лежит в плоскости орбиты, ось 3 направлена по нормали к плоскости орбиты спутника.

Направляющие косинусы радиуса-вектора \mathbf{r}_k в этой системе координат обозначим соответственно ξ_1, ξ_2, ξ_3 (здесь и в дальнейшем мы опускаем индекс k у направляющих косинусов).

Выражение для компонент S, T, W возмущающих сил получаем в следующем виде:

в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} S_1^{(k)} &= \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r}{r_k} [3\xi^2 \cos^2(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) - 1], \\ T_1^{(k)} &= -3 \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r}{r_k} \xi^2 \cos(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) \sin(\vartheta - \vartheta_\varepsilon), \\ W_1^{(k)} &= 3 \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r}{r_k} \xi_3 \xi \cos(\vartheta - \vartheta_\varepsilon); \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

во втором приближении

$$\left. \begin{aligned} S_2^{(k)} &= \frac{15}{2} \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r^2}{r_k^2} \left[\xi^3 \cos^3(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) - \frac{3}{5} \xi \cos(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) \right], \\ T_2^{(k)} &= -\frac{15}{2} \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r^2}{r_k^2} \left[\xi^3 \cos^2(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) \sin(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) - \frac{1}{5} \xi \sin(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) \right], \\ W_2^{(k)} &= \frac{15}{2} \frac{\mu_k}{r_k^2} \frac{r^2}{r_k^2} \xi_3 \left[\xi^2 \cos^2(\vartheta - \vartheta_\varepsilon) - \frac{1}{5} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

здесь $\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$; ϑ_ε — истинная аномалия проекции вектора \mathbf{r}_k на плоскость орбиты спутника, $\sin \vartheta_\varepsilon = \frac{\xi_2}{\xi}$, $\cos \vartheta_\varepsilon = \frac{\xi_1}{\xi}$.

Представим r_k в виде $r_k = \frac{p_k}{\Delta_k}$, где p_k — характерное расстояние до возмущающего тела, Δ_k — в общем случае заданная безразмерная положительная функция времени. В случае, если орбита возмущающего тела является эллипсом, то p_k — параметр орбиты, а $\Delta_k = 1 + e_k \cos \vartheta_k$.

Используя соотношение $r = \frac{P}{\Delta}$, где $\Delta = 1 + e \cos \vartheta$, можно выражения для S , T , W переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} S_1^{(k)} &= 3 \frac{\mu_k P}{P_k^2 P_k} \left[\beta_1 \cos^2 \vartheta + 2\beta_3 \cos \vartheta \sin \vartheta - \frac{\beta_6}{3} + \beta_2 \sin^2 \vartheta \right] \frac{1}{\Delta}, \\ T_1^{(k)} &= -3 \frac{\mu_k P}{P_k^2 P_k} \left[(\beta_1 - \beta_2) \cos \vartheta \sin \vartheta + \beta_3 (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) \right] \frac{1}{\Delta}, \\ W_1^{(k)} &= 3 \frac{\mu_k P}{P_k^2 P_k} \left[\beta_5 \cos \vartheta + \beta_4 \sin \vartheta \right] \frac{1}{\Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} S_2^{(k)} &= \frac{15 \mu_k P^2}{2 P_k^2 P_k^2} \left[\gamma_1 \cos^3 \vartheta + 3\gamma_3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + 3\gamma_6 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_2 \sin^3 \vartheta - \frac{3}{5} \alpha_1 \cos \vartheta - \frac{3}{5} \alpha_2 \sin \vartheta \right] \frac{1}{\Delta^2}, \\ T_2^{(k)} &= -\frac{15 \mu_k P^2}{2 P_k^2 P_k^2} \left[-\gamma_3 \cos^3 \vartheta + (\gamma_1 - 2\gamma_6) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + \right. \\ &\quad \left. + (2\gamma_3 - \gamma_2) \cos \vartheta \sin^2 \vartheta + \gamma_6 \sin^3 \vartheta - \frac{1}{5} \alpha_1 \sin \vartheta + \frac{1}{5} \alpha_2 \cos \vartheta \right] \frac{1}{\Delta^2}, \\ W_2^{(k)} &= \frac{15 \mu_k P^2}{2 P_k^2 P_k^2} \left[\gamma_4 \cos^2 \vartheta + 2\gamma_7 \cos \vartheta \sin \vartheta + \gamma_5 \sin^2 \vartheta - \frac{\alpha_3}{5} \right] \frac{1}{\Delta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь были введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \xi_1 \Delta_k^4, & \alpha_2 &= \xi_2 \Delta_k^4, & \alpha_3 &= \xi_3 \Delta_k^4, \\ \beta_1 &= \xi_1^2 \Delta_k^3, & \beta_2 &= \xi_2^2 \Delta_k^3, & \beta_3 &= \xi_1 \xi_2 \Delta_k^3, \\ \beta_4 &= \xi_2 \xi_3 \Delta_k^3, & \beta_5 &= \xi_1 \xi_3 \Delta_k^3, & \beta_6 &= \Delta_k^3, \\ \gamma_1 &= \xi_1^3 \Delta_k^4, & \gamma_2 &= \xi_2^3 \Delta_k^4, & \gamma_3 &= \xi_1^2 \xi_2 \Delta_k^4, \\ \gamma_4 &= \xi_1^2 \xi_3 \Delta_k^4, & \gamma_5 &= \xi_2^2 \xi_3 \Delta_k^4, & \gamma_6 &= \xi_2^2 \xi_1 \Delta_k^4, \\ \gamma_7 &= \xi_1 \xi_2 \xi_3 \Delta_k^4. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ

1. Из (2) и (6) следует, что максимальное отличие величины γ от единицы (по порядку величины) характеризуется параметром, пропорциональным $\frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{r_k} \right)^3 \frac{1}{e}$ в случае малых эксцентриситетов, и параметром, пропорциональным $\frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{r_k} \right)^3 \frac{1}{1-e}$ в случае эксцентриситетов, близких к единице (здесь a — большая полуось орбиты). Для примера рассмотрим случай возмущения Луной спутника Земли, полуось орбиты которого порядка $30 \div 40 \cdot 10^3$ км. В этом случае

$$\frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{r_k} \right)^3 \sim 10^{-5}.$$

Эта оценка показывает, что для широкого класса орбит спутников практически со всеми значениями эксцентриситета можно с определенной степенью приближения принимать $\gamma = 1$. Дальнейший вывод будет основан на уравнениях, в которых $\gamma = 1$.

2. Значения оскулирующих параметров p, e, \dots на одном обороте можно представить в виде суммы постоянной части этих параметров в некоторой точке орбиты, например в ее перицентре p_0, e_0, \dots и переменной части $\delta p, \delta e, \dots$

Из уравнений следует, что характерные значения величин $\delta p, \delta e, \dots$ на данном обороте пропорциональны отношению ускорения, вызванного возмущающим телом, к ускорению от центрального тела. Поэтому в случае орбит, достаточно близких к центральному телу, отличием параметров орбиты от постоянных можно пренебречь в правых частях уравнений (1), что может привести к ошибке в определении векового ухода параметров за один оборот порядка $\frac{\delta p}{p}, \frac{\delta e}{e}, \dots$

Например, для спутника Земли с апогеем орбиты порядка $50 \cdot 10^3$ км эта погрешность может составить $10^{-3} \div 10^{-4}$ от величины вычисленного ухода элемента. Оба проведенных упрощения являются стандартным приемом линеаризации уравнений с малым параметром, который уже использовался в [6] для исследования эволюции орбиты спутника под действием торможения в атмосфере и вследствие отличия гравитационного поля Земли от центрального.

В принятом приближенном рассмотрении уравнения, описывающие процесс, становятся линейными с линейной зависимостью от возмущающих сил. Поэтому при определении векового ухода элементов за один оборот спутника под действием некоторой суммы ускорений $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$ от

самых различных возмущающих факторов \mathcal{F} можно независимо определить уходы под влиянием каждого из факторов и общий результат получить простым суммированием $\Delta p = \sum \Delta p_i, \Delta e = \sum \Delta e_i \dots$ В частности, как независимые можно рассматривать и уходы элементов под действием каждого члена ряда (3) разложения возмущающего ускорения по степеням $\frac{r}{r_k}$.

3. Переменность в течение времени одного оборота величин $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, определенных формулами (10), при фиксированных элементах орбиты связана с движением возмущающего тела в абсолютном пространстве.

Третьим существенным предположением, которое будет использовано при выводе приближенных формул, является предположение, что величины $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ представимы в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_i^* + \left(\frac{d\alpha_i}{dt}\right)^* \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\alpha_i}{dt^2}\right)^* (\Delta t)^2 + \dots, \\ \beta_i &= \beta_i^* + \left(\frac{d\beta_i}{dt}\right)^* \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\beta_i}{dt^2}\right)^* (\Delta t)^2 + \dots, \\ \gamma_i &= \gamma_i^* + \left(\frac{d\gamma_i}{dt}\right)^* \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\gamma_i}{dt^2}\right)^* (\Delta t)^2 + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

причем в интервале времени, равном половине периода обращения спутника, с достаточной для исследования степенью приближения

можно при аппроксимации α_i , β_i , γ_i ограничиться небольшим числом членов ряда (в частности, в настоящей работе двумя). Здесь $\Delta t = t - t^*$, где t^* — некоторый фиксированный момент временного интервала, соответствующего данному обороту.

4. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ЗА ОДИН ОБОРОТ СПУТНИКА

Подставим в уравнения (1) выражения для возмущающих ускорений (8) и проинтегрируем по истинной аномалии от 0 до 2π . В результате получим интегральные формулы для изменения элементов за один оборот $\Delta_1^{(k)} p$, $\Delta_1^{(k)} e$, $\Delta_1^{(k)} \omega$, $\Delta_1^{(k)} \Omega$, $\Delta_1^{(k)} i$. Индекс k соответствует k -му возмущающему телу, а нижний индекс указывает на использованное приближение в разложении возмущающего ускорения.

Подстановка в уравнения (1) второго приближения для возмущающих ускорений (9) и интегрирование по ϑ от 0 до 2π дает интегральные формулы для приращений $\Delta_2^{(k)} p$, $\Delta_2^{(k)} e$, ...

Например, для приращений $\Delta_i^{(k)} p$, используя упрощающие предположения пунктов 1 и 2 приближенного рассмотрения раздела 3, имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1^{(k)} p &= -6 \frac{\mu_k p^4}{\mu p_k^3} \left[E \left([\beta_1 - \beta_2] \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\Delta^4} \right) + E \left(\beta_3 \frac{\sin^2 \vartheta}{\Delta^4} \right) - E \left(\beta_3 \frac{\cos^2 \vartheta}{\Delta^4} \right) \right], \\ \Delta_2^{(k)} p &= -15 \frac{\mu_k p}{\mu} \left(\frac{p}{p_k} \right)^4 \left[-E \left(\gamma_3 \frac{\cos^3 \vartheta}{\Delta^5} \right) + E \left([\gamma_1 - 2\gamma_6] \frac{\cos^2 \vartheta \sin \vartheta}{\Delta^5} \right) + \right. \\ &\quad \left. + E \left([2\gamma_3 - \gamma_2] \frac{\cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{\Delta^5} \right) + E \left(\gamma_6 \frac{\sin^3 \vartheta}{\Delta^5} \right) - \frac{1}{5} E \left(\alpha_1 \frac{\sin \vartheta}{\Delta^5} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} E \left(\alpha_2 \frac{\cos \vartheta}{\Delta^5} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\text{где } E(\beta_j f(\vartheta)) = \int_0^{2\pi} \beta_j f(\vartheta) d\vartheta.$$

Аналогичные формулы (несколько более громоздкие) получаются и для изменения других элементов орбиты.

Все функции $f(\vartheta)$, входящие в интегралы, являются рациональными тригонометрическими функциями типа

$$f(\vartheta) = \frac{\cos^m \vartheta \sin^l \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^n}. \quad (13)$$

Теперь используем третье предположение раздела 3. Разлагая α_j , β_j , γ_j в ряд по степеням Δt , интегралы $E(\alpha_j f(\vartheta))$, $E(\beta_j f(\vartheta))$, ... представим в виде рядов типа

$$E(\beta_j f(\vartheta)) = \beta_j^* E(f(\vartheta)) + \left(\frac{d\beta_j}{dt} \right)^* E(\Delta t f(\vartheta)) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \beta_j}{dt^2} \right)^* E((\Delta t)^2 f(\vartheta)) + \dots \quad (14)$$

Здесь по-прежнему $\Delta t = t - t^*$, причем за время t^* естественно принять время, соответствующее истинной аномалии $\vartheta = \pi$, т. е. время, соответствующее положению спутника в апоцентре.

Соответственно, каждое из приращений элементов получаем в виде

суммы $\Delta_i^{(k)} x = \sum_{s=1}^{\infty} \Delta_{is}^{(k)} x$. Например, для $\Delta_1^{(k)} p$, $\Delta_2^{(k)} p$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1^{(k)} p &= \Delta_{11}^{(k)} p + \Delta_{12}^{(k)} p + \Delta_{13}^{(k)} p + \dots, \\ \Delta_2^{(k)} p &= \Delta_{21}^{(k)} p + \Delta_{22}^{(k)} p + \Delta_{23}^{(k)} p + \dots \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для первых двух членов первого ряда (15), согласно (12) и (14), получим следующие интегральные формулы:

$$\Delta_{11}^{(k)} p = -6 \frac{\mu_k p_4}{\mu p_k^3} \left[(\beta_1^* - \beta_2^*) E \left(\frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\Delta^4} \right) + \beta_3^* E \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{\Delta^4} \right) - \beta_3^* E \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{\Delta^4} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^{(k)} p &= -6 \frac{\mu_k p^4}{\mu p_k^3} \left\{ \left[\left(\frac{d\beta_1}{dt} \right)^* - \left(\frac{d\beta_2}{dt} \right)^* \right] E \left(\Delta t \frac{\cos \vartheta \sin \vartheta}{\Delta^4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d\beta_3}{dt} \right)^* E \left(\Delta t \frac{\sin^2 \vartheta}{\Delta^4} \right) - \left(\frac{d\beta_3}{dt} \right)^* E \left(\Delta t \frac{\cos^2 \vartheta}{\Delta^4} \right) \right\}, \end{aligned}$$

причем β_j^* , $\left(\frac{d\beta_j}{dt} \right)^*$ здесь отнесены к моменту времени $t = t^*$.

Для получения окончательных формул для каждой составляющей $\Delta_{ij}^{(k)} x$ приращения любого из элементов орбиты за оборот спутника необходимо вычислить определенные интегралы вида $E \left((\Delta t)^s \frac{\cos^m \vartheta \sin^l \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^n} \right)$, где s, l, m, n — натуральные числа. Если в качестве t^* взять момент, когда $\vartheta = \pi$, то Δt будет нечетной функцией ϑ , и интегралы в случае нечетной суммы $s + l$ будут равны нулю. При $s = 0$ для вычисления таких интегралов существуют рекуррентные формулы. В случае, когда сумма $s + l$ — четная и $s > 0$, для вычисления интегралов целесообразно использовать метод интегрирования по частям и соотношение

$$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \sqrt{p\mu}, \quad (16)$$

которое остается справедливым в случае приближенного рассмотрения с принятым в пункте 2 раздела 3 предположением.

Ниже приводятся формулы для приращений $\Delta_{11} x$, $\Delta_{12} x$, $\Delta_{21} x$, полученные после соответствующих преобразований.

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} a &= 0, \\ \Delta_{11} e &= -15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k} \right)^3 e \varepsilon^{1/2} \beta_3, \\ \Delta_{11} i &= 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k} \right)^3 \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left[\left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon \right) \beta_5 \cos \omega - \frac{1}{5} \varepsilon \beta_4 \sin \omega \right], \\ \Delta_{11} \Omega &= 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k} \right)^3 \frac{1}{\varepsilon^{1/2} \sin i} \left[\left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon \right) \beta_5 \sin \omega + \frac{1}{5} \varepsilon \beta_4 \cos \omega \right], \\ \Delta_{11} \omega &= 3\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k} \right)^3 \varepsilon^{1/2} [4\beta_1 - \beta_2 - \beta_6] - \Delta_{11} \Omega \cos i, \\ \varepsilon &= 1 - e^2, \quad a = \frac{p}{\varepsilon} - \text{большая полуось орбиты спутника;} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_{12}a &= -\frac{3}{2} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 aT \left[e(e+4) \left(\frac{d\beta_2}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d\beta_6}{dt}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + (2e^2 + 4e - 1) \left(\frac{d\beta_1}{dt} - \frac{d\beta_2}{dt}\right) \right], \\
 \Delta_{12}e &= -3 \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \varepsilon T \left[\frac{e+4}{4} \left(\frac{d\beta_2}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d\beta_6}{dt}\right) + \left(\frac{1}{8}e - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{d\beta_1}{dt} - \frac{d\beta_2}{dt}\right) \right], \\
 \Delta_{12}i &= \frac{9}{8} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 T \left(e^2 + \frac{32}{9}e - \frac{2}{3} \right) \left[\frac{d\beta_4}{dt} \cos \omega - \frac{d\beta_5}{dt} \sin \omega \right], \\
 \Delta_{12}\Omega &= \frac{9}{8} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{T}{\sin i} \left(e^2 + \frac{32}{9}e - \frac{2}{3} \right) \left[\frac{d\beta_5}{dt} \cos \omega + \frac{d\beta_4}{dt} \sin \omega \right], \\
 \Delta_{12}\omega &= -3 \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{T}{e} \left(\frac{9}{8}e^3 + \frac{8}{3}e^2 - e - \frac{4}{3} \right) \frac{d\beta_3}{dt} - \cos i \Delta_{12}\Omega,
 \end{aligned} \right\} (18)$$

где $T = \frac{2\pi}{V\mu} a^{3/2}$ — период обращения спутника;

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_{21}a &= 0, \\
 \Delta_{21}e &= \frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \varepsilon^{1/2} \left[\left(1 - \frac{6}{7}\varepsilon\right) \gamma_3 + \frac{\varepsilon}{7} \gamma_2 - \left(1 - \frac{3}{7}\varepsilon\right) \frac{\alpha_2}{5} \right], \\
 \Delta_{21}i &= -\frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{e}{\varepsilon^{1/2}} \left[\left(1 - \frac{4}{7}\varepsilon\right) \gamma_4 \cos \omega + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{7} \varepsilon (\gamma_5 \cos \omega - 2\gamma_7 \sin \omega) - \left(1 - \frac{3}{7}\varepsilon\right) \frac{1}{5} \alpha_3 \cos \omega \right], \\
 \Delta_{21}\Omega &= -\frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{e}{\varepsilon^{1/2} \sin i} \left[\left(1 - \frac{4}{7}\varepsilon\right) \gamma_4 \sin \omega + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{7} \varepsilon (\gamma_5 \sin \omega + 2\gamma_7 \cos \omega) - \left(1 - \frac{3}{7}\varepsilon\right) \frac{1}{5} \alpha_3 \sin \omega \right], \\
 \Delta_{21}\omega &= -\frac{75}{2} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{\varepsilon^{1/2}}{e} \left[\frac{5}{4} \left(1 - \frac{4}{5}\varepsilon\right) \gamma_4 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon\right) \gamma_6 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{13}{20} \left(1 - \frac{9}{13}\varepsilon\right) \alpha_1 \right] - \Delta_{21}\Omega \cos i.
 \end{aligned} \right\} (19)$$

Здесь и в дальнейшем у величин α_i^* , β_i^* , γ_i^* , $\left(\frac{d\beta_i}{dt}\right)^*$ значок * опущен. Укажем на некоторые следствия, вытекающие из полученных выше формул.

1. Равенство нулю приращений $\Delta_{11}a$ и $\Delta_{21}a$ связано с тем, что приращения $\Delta_{11}x$ и $\Delta_{21}x$ относятся к случаю неподвижной в абсолютном пространстве возмущающей точки. Для неподвижного возмущающего тела движение спутника происходит в консервативном поле сил. Поскольку, кроме того, предполагается, что элементы орбиты не изменяются в течение одного оборота, то к концу оборота спутник оказывается в той же точке пространства, и, следовательно, приращение полной энергии будет равно нулю.

Кроме того, приращения $\Delta_{11}p$, $\Delta_{11}i$, $\Delta_{11}\Omega$ связаны дополнительным соотношением, обусловленным существованием в случае неподвижного возмущающего тела интеграла, связанного с сохранением проекции

вектора кинетического момента на направление к возмущающему телу. В наших обозначениях этот интеграл имеет вид

$$\sqrt{\mu p} \xi_3 = \text{const}, \quad (20)$$

откуда $\frac{1}{2} \frac{\Delta_{i1} p}{p} \xi_3 + \Delta_{i1} \xi_3 = 0$. Используя условие $a = \text{const}$, имеем

$$\frac{\Delta_{i1} p}{p} = -2 \frac{e \Delta_{i1} e}{e}. \text{ Для } \Delta_{i1} \xi_3 \text{ можно получить формулу } \Delta_{i1} \xi_3 = \bar{\xi}_1 \Delta_{i1} \Omega \sin i - \bar{\xi}_2 \Delta_{i1} i,$$

где

$$\bar{\xi}_1 = \xi_1 \cos \omega - \xi_2 \sin \omega, \quad \bar{\xi}_2 = \xi_1 \sin \omega + \xi_2 \cos \omega.$$

Окончательно соотношение, связывающее приращения $\Delta_{i1} e$, $\Delta_{i1} \Omega$, $\Delta_{i1} i$, имеет вид

$$-\frac{e \Delta_{i1} e}{e} \xi_3 + (\xi_1 \cos \omega - \xi_2 \sin \omega) \Delta_{i1} \Omega \sin i - (\xi_1 \sin \omega + \xi_2 \cos \omega) \Delta_{i1} i = 0. \quad (21)$$

Непосредственной подстановкой приращений последовательно из (17) и (19) в (21) можно убедиться в справедливости интеграла (20). Соотношением (21) можно воспользоваться для контроля правильности счета приращений $\Delta_{i1} x$.

2. В большинстве задач, для которых будет использоваться приближенная методика, основные качественные и количественные эффекты эволюции орбиты будут определяться первым приближением приращений $\Delta_{i1} x$. Оставаясь в рамках первого приближения, можно вывести несколько закономерностей, удобных для понимания процесса эволюции.

Изменение высоты перигея орбиты r_π и изменение эксцентриситета при $a = \text{const}$ связаны простым соотношением $\Delta r_\pi = -a \Delta e$, получаемым из формулы $r_\pi = a(1 - e)$ при неизменном a .

Знак изменения эксцентриситета определяется, согласно (17), знаком величины $\beta_3 = \xi_1 \xi_2 \Delta_k^3$.

Отсюда следует, что для орбит, для которых первое приближение является определяющим, справедлива следующая закономерность.

Высота перигея будет увеличиваться в случае, если истинная аномалия ϑ_ξ проекции вектора возмущающего ускорения находится в первой или третьей четверти. В случае, если истинная аномалия ϑ_ξ находится во второй или четвертой четверти, высота перигея будет уменьшаться.

3. Вместо положения узла Ω и углового расстояния перигея от узла ω можно рассматривать долготу α и широту φ вектора Лапласа (вектора, направленного от центрального тела на перигей). Широтой φ в общем случае мы называем угловое расстояние вектора Лапласа от плоскости XU , а долготу α определяем как угловое расстояние между осью X и проекцией вектора Лапласа на плоскость XU .

Связь между ω , i , Ω , α , φ определяется формулами.

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \omega \sin i, \\ \cos(\alpha - \Omega) &= \frac{\cos \omega}{\cos \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Согласно (22),

$$\cos \varphi \Delta \varphi = \cos \omega \sin i \Delta \omega + \sin \omega \cos i \Delta i,$$

$$\sin \omega \Delta \omega = \sin (\alpha - \Omega) \cos \varphi (\Delta \alpha - \Delta \Omega) + \cos (\alpha - \Omega) \sin \varphi \Delta \varphi.$$

Подставляя в эти формулы приращения $\Delta_{11}x$ из (17), после преобразования получим формулы приращений $\Delta_{11}\varphi$ и $\Delta_{11}\alpha$, которые можно использовать вместо $\Delta_{11}\Omega$ и $\Delta_{11}\omega$ в системе (17):

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11}\varphi &= 3\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{\varepsilon^{1/2}}{\cos \varphi} [(4\beta_1 - \beta_2 - \beta_6) \cos \omega \sin i - \beta_4 \cos i], \\ \Delta_{11}\alpha &= 3\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{\varepsilon^{1/2}}{\cos^2 \varphi} [(4\beta_1 - \beta_2 - \beta_6) \cos i + \beta_4 \cos \omega \sin i]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Согласно (23), для сильно вытянутых орбит при $e \rightarrow 1$ (или, что то же, $\varepsilon \rightarrow 0$) наблюдается стабильность угловых координат перигея в абсолютном пространстве. При $\varepsilon \rightarrow 0$ эволюция орбиты носит следующий характер: плоскость орбиты быстро поворачивается вокруг линии апсид (т. е. быстро меняются параметры i , Ω , ω), причем сама линия апсид остается практически неподвижной.

5. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ α_i , β_i , γ_i И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВИЖЕНИЯ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ТЕЛА ПО ЭЛЛИПСУ

Для сокращения записи при вычислении величин α_i , β_i , γ_i и их производных ниже будем использовать правила умножения матриц, т. е. если две матрицы A и B заданы таблицами

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mk} \end{vmatrix},$$

то их произведением $C = AB$ будет матрица элементов c_{ij} с n строками и k столбцами; причем элемент c_{ij} вычисляется как сумма парных произведений элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}.$$

В частности, если матрица B содержит всего один столбец, то мы имеем дело с произведением матрицы на вектор, в результате которого вновь получаем вектор (по тому же правилу).

По-видимому, в большинстве задач приближенного исследования эволюции орбит спутников можно будет считать, что движение возмущающего тела около центрального описывается формулами задачи двух тел. Орбита возмущающего тела может быть определена параметрами p_k , e_k , i_k , Ω_k , ω_k , а положение возмущающего тела на орбите задается аргументом широты u_k в момент t_0 . В этом случае за величину p_k в формулах (17)–(19) принимается параметр орбиты возмущающего тела, а Δ_k в формулах (10) в соответствии с законом кеплеровского движения будет равно $\Delta_k = 1 + e_k \cos (u_k - \omega_k)$.

Пусть \mathbf{r}_k^0 — единичный вектор, определяющий направление на возмущающее тело. В матричной записи проекции вектора \mathbf{r}_k^0 на орбитальные оси координат определяются формулой

$$\xi = D_1 \mathbf{U}_1, \quad (24)$$

где векторы ξ и \mathbf{U}_1 имеют вид

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \cos u_k \\ \sin u_k \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Матрицу

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

можно представить в виде произведения трех матриц (27)–(29) $D_1 = CBA$, где матрица A определяет проекции вектора \mathbf{r}_k^0 на оси системы координат XYZ ; матрица B определяет переход от системы XYZ к эйлеровой системе координат (одна из осей направлена на восходящий узел орбиты спутника, вторая ось ортогональна первой и лежит в плоскости орбиты спутника, а третья ось ортогональна плоскости орбиты спутника); матрица C определяет переход от эйлеровой системы координат к орбитальной.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \Omega_k & -\sin \Omega_k \cos i_k \\ \sin \Omega_k & \cos \Omega_k \cos i_k \\ 0 & \sin i_k \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega \cos i & \cos \Omega \cos i & \sin i \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$C = \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Представление вектора ξ в виде (24) удобно для дифференцирования и интегрирования этого вектора по времени либо по параметру u_k .

Из интеграла площадей для возмущающего тела имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_k}{dt} &= b \Delta_k^2, \\ b &= \frac{2\pi}{T_k \varepsilon_k^{3/2}}, \quad \varepsilon_k = 1 - e_k^2, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

T_k — период обращения возмущающего тела вокруг центрального. Производные высших порядков от u_k по времени могут быть получены

последовательным дифференцированием:

$$\frac{d^2 u_k}{dt^2} = -2b^2 e_k \Delta_k^3 \sin(u_k - \omega_k) \quad (31)$$

и т. д.

Из (24) и (30) следует:

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\xi_1}{dt} \\ \frac{d\xi_2}{dt} \\ \frac{d\xi_3}{dt} \end{pmatrix} = D_1 \frac{dU_1}{dt} = b \Delta_k^2 D_1 \frac{dU_1}{du_k} = b \Delta_k^2 D_1 \begin{pmatrix} -\sin u_k \\ \cos u_k \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Аналогично, используя (31), имеем

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = b D_1 \frac{d}{dt} \left(\Delta_k^2 \frac{dU_1}{du_k} \right) = b^2 \Delta_k^2 D_1 \frac{d}{du_k} \left(\Delta_k^2 \frac{dU_1}{du_k} \right) \quad (33)$$

и т. д.

Формулы (10), (24), (30), (32) позволяют вычислить все величины α_i , β_i , γ_i и $\frac{d\beta_i}{dt}$, входящие в системы уравнений (17)–(19). При этом для расчета приращений нужно в (24), (30) и (32) подставить значение $u_k = u_k^*$, соответствующее середине времени оборота спутника ($t = t^*$).

В дальнейшем более удобно использовать следующее представление. Введем в рассмотрение векторы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \end{pmatrix} \quad (34)$$

и векторы

$$U_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 u_k \\ \cos u_k \sin u_k \\ \sin^2 u_k \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} \cos^3 u_k \\ \cos^2 u_k \sin u_k \\ \cos u_k \sin^2 u_k \\ \sin^3 u_k \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Векторы α , β , γ , согласно предыдущим определениям, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= D_1 U_1 \Delta_k^4, \\ \beta &= D_2 U_2 \Delta_k^3, \quad \beta_6 = \Delta_k^3, \\ \gamma &= D_3 U_3 \Delta_k^4, \end{aligned} \quad (36)$$

где D_2 и D_3 — матрицы, получаемые из элементов матрицы D_1 следующим

образом:

$$D_2 = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & 2d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \\ d_{21}^2 & 2d_{21}d_{22} & d_{22}^2 \\ d_{11}d_{21} & d_{11}d_{22} + d_{12}d_{21} & d_{12}d_{22} \\ d_{31}d_{21} & d_{31}d_{22} + d_{32}d_{21} & d_{32}d_{22} \\ d_{11}d_{31} & d_{12}d_{31} + d_{11}d_{32} & d_{12}d_{32} \end{vmatrix} \quad (37)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} d_{11}^3 & 3d_{11}^2d_{12} & 3d_{11}d_{12}^2 & d_{12}^3 \\ d_{21}^3 & 3d_{21}^2d_{22} & 3d_{21}d_{22}^2 & d_{22}^3 \\ d_{11}^2d_{21} & d_{22}d_{11}^2 + 2d_{11}d_{21}d_{12} & d_{21}d_{12}^2 + 2d_{11}d_{12}d_{22} & d_{12}^2d_{22} \\ d_{11}^2d_{31} & d_{32}d_{11}^2 + 2d_{11}d_{31}d_{12} & d_{31}d_{12}^2 + 2d_{11}d_{12}d_{32} & d_{12}^2d_{32} \\ d_{21}^2d_{31} & d_{32}d_{21}^2 + 2d_{21}d_{31}d_{22} & d_{31}d_{22}^2 + 2d_{21}d_{22}d_{32} & d_{22}^2d_{32} \\ d_{21}^2d_{11} & d_{12}d_{21}^2 + 2d_{11}d_{21}d_{22} & d_{11}d_{22}^2 + 2d_{12}d_{21}d_{22} & d_{12}d_{22}^2 \\ d_{11}d_{21}d_{31} & d_{11}d_{21}d_{32} + d_{11}d_{22}d_{31} + d_{12}d_{21}d_{31} & d_{11}d_{22}d_{32} + d_{12}d_{21}d_{32} + d_{12}d_{22}d_{31} & d_{12}d_{22}d_{32} \end{vmatrix} \quad (38)$$

Входящие в уравнение (18) величины $\frac{d\beta_i}{dt}$, согласно (36), вычисляются по формулам

$$\frac{d\beta}{dt} = \left. \begin{vmatrix} \frac{d\beta_1}{dt} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{d\beta_5}{dt} \end{vmatrix} = D_2 \frac{d}{dt} (\mathbf{U}_2 \Delta_k^3) = D_2 b \Delta_k^2 \frac{d}{du_k} (\mathbf{U}_2 \Delta_k^3) \right\} \quad (39)$$

$$\frac{d\beta_6}{dt} = -3e_k b \Delta_k^4 \sin(u_k - \omega_k).$$

Компоненты вектора $\frac{d}{du_k} (\mathbf{U}_2 \Delta_k^3)$ формальным дифференцированием получаем в следующем виде:

$$\frac{d}{du_k} (\mathbf{U}_2 \Delta_k^3) = \begin{vmatrix} -2\Delta_k^3 \cos u_k \sin u_k - 3e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \cos^2 u_k \\ \Delta_k^3 \cos 2u_k - 3e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \cos u_k \sin u_k \\ 2\Delta_k^3 \cos u_k \sin u_k - 3e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \sin^2 u_k \end{vmatrix}.$$

6. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ ЗА НЕСКОЛЬКО ОБОРОТОВ СПУТНИКА

В случае приближенного рассмотрения можно и удобно для определенного класса орбит, достаточно близких к центральному телу, при расчете приращений элементов орбиты спутника пренебречь в правых частях уравнений изменением этих элементов не только на одном обороте (как это предполагалось в разделе 3), но и на ряде последовательных оборотов спутника. При этом оказывается невозможным определить суммарное приращение элемента простым умножением приращения, например, на первом

из рассматриваемых оборотов на число оборотов спутника, так как даже при закрепленных элементах орбиты соотношения (17) — (19) содержат параметры α_i , β_i , γ_i , которые, вообще говоря, заметно изменяются при движении возмущающего тела.

Пусть $\Delta_m x$ — приращение какого-либо из элементов орбиты за m -й оборот. Согласно приближенным формулам, $\Delta_m x$ при неизменных параметрах орбиты является функцией среднего момента времени для данного оборота t_m^* или, иначе, $\Delta_m x$ — функция u_m^* . Приращение δx за N последовательных оборотов будет суммой

$$\delta x = \sum_{m=1}^N \Delta_m x.$$

Пусть $\Delta t = T$ — период обращения спутника. Тогда δx можно записать в виде интегральной суммы

$$\delta x = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^N \Delta_m x \cdot \Delta t. \quad (40)$$

Теперь предположим, что рассматривается случай, когда соотношение между периодом обращения спутника T и периодом обращения возмущающего тела T_k , от которого в среднем зависит скорость изменения положения вектора \mathbf{r}_k^0 , таково, что сумму (40) можно заменить интегралом

$$\delta x = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \Delta x dt, \quad (41)$$

где t_0 — начальный момент, а $t_N - t_0$ — время, в течение которого спутник совершит N оборотов.

Предполагая элементы p, e, \dots, ω в правых частях уравнений (17)–(19) неизменными за время этих N оборотов спутника, в силу линейности формул (17)–(19) по $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \frac{d\beta_i}{dt}$ соответствующие формулы для приращений $\delta_{11}x, \delta_{12}x, \delta_{21}x, \dots$ за N оборотов получаются простой заменой величин $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \frac{d\beta_i}{dt}$ в формулах (17)–(19) интегралами

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \alpha_i dt, \quad \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \beta_i dt, \quad \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \gamma_i dt, \quad \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \left(\frac{d\beta_i}{dt} \right) dt.$$

Обозначим интегралы

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \alpha_i dt &= [\alpha_i], \quad \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \beta_i dt = [\beta_i], \quad \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \gamma_i dt = [\gamma_i], \\ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \left(\frac{d\beta_i}{dt} \right) dt &= \left[\frac{d\beta_i}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Для случая движения возмущающего тела вокруг центрального по законам кеплеровского движения, согласно (30), (36) и (39), справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
 [\alpha] &= \begin{vmatrix} [\alpha_1] \\ [\alpha_2] \\ [\alpha_3] \end{vmatrix} = D_1 \mathbf{V}_1, & [\beta] &= \begin{vmatrix} [\beta_1] \\ [\beta_2] \\ \vdots \\ [\beta_5] \end{vmatrix} = D_2 \mathbf{V}_2, \\
 [\gamma] &= \begin{vmatrix} [\gamma_1] \\ [\gamma_2] \\ \vdots \\ [\gamma_7] \end{vmatrix} = D_3 \mathbf{V}_3, & \left[\frac{d\beta}{dt} \right] &= \begin{vmatrix} \frac{d\beta_1}{dt} \\ \frac{d\beta_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\beta_5}{dt} \end{vmatrix} = D_4 \mathbf{V}_4,
 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{V}_1 &= \frac{1}{Tb} \int_{u_0}^{u_N} \mathbf{U}_1 \Delta_k^2 du_k, \\
 \mathbf{V}_2 &= \frac{1}{Tb} \int_{u_0}^{u_N} \mathbf{U}_2 \Delta_k du_k, \\
 \mathbf{V}_3 &= \frac{1}{Tb} \int_{u_0}^{u_N} \mathbf{U}_3 \Delta_k^2 du_k, \\
 \mathbf{V}_4 &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \frac{d}{dt} (\mathbf{U}_2 \Delta_k^3) dt = \frac{1}{T} \left\{ \mathbf{U}_2 \Delta_k^3 \right\}_{u_0}^{u_N},
 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где u_0 и u_N — значения аргумента широты возмущающего тела в моменты времени t_0 и t_N . В формуле для вектора \mathbf{V}_4 использовано обычное обозначение для разности функции в двух точках $\{f(u)\}_{u_0}^{u_N} = f(u_N) - f(u_0)$.

Не охваченная формулами (42), величина $[\beta_6]$ вычисляется непосредственно

$$[\beta_6] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_N} \Delta_k^3 dt = \frac{1}{Tb} \int_{u_0}^{u_N} \Delta_k du_k = \frac{1}{Tb} \left\{ u_k + e_k \sin(u_k - \omega_k) \right\}_{u_0}^{u_N}. \quad (44)$$

После вычисления интегралов в (43) для компонент V_{ij} векторов \mathbf{V} получаем формулы (индекс i относится к вектору, а индекс j — к соответствующему номеру компоненты)

$$\left. \begin{aligned}
 V_{11} &= \frac{1}{bT} \left\{ \sin u_k + e_k \left[\cos \omega_k \left(u_k + \frac{1}{2} \sin 2u_k \right) + \sin \omega_k \sin^2 u_k \right] + \right. \\
 &+ e_k^2 \left[\cos^2 \omega_k \left(\sin u_k - \frac{1}{3} \sin^3 u_k \right) - \frac{2}{3} \sin \omega_k \cos \omega_k \cos^3 u_k + \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{3} \sin^2 \omega_k \sin^3 u_k \right] \right\}_{u_0}^{u_N}, \\
 V_{12} &= \frac{1}{bT} \left\{ -\cos u_k + e_k \left[\cos \omega_k \sin^2 u_k + \sin \omega_k \left(u_k - \frac{1}{2} \sin 2u_k \right) \right] + \right. \\
 &+ e_k^2 \left[-\frac{1}{3} \cos^2 \omega_k \cos^3 u_k + \frac{2}{3} \sin \omega_k \cos \omega_k \sin^3 u_k - \right. \\
 &+ \left. \left. \sin^2 \omega_k \left(\cos u_k - \frac{1}{3} \cos^3 u_k \right) \right] \right\}_{u_0}^{u_N},
 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned}
 V_{21} &= \frac{1}{bT} \left\{ \frac{1}{2} u_k + \frac{1}{2} \sin u_k \cos u_k + e_k \left[\cos \omega_k \left(\sin u_k - \frac{1}{3} \sin^3 u_k \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} \sin \omega_k \cos^3 u_k \right] \right\}_{u_0}^{u_N}, \\
 V_{22} &= \frac{1}{bT} \left\{ \frac{1}{2} \sin^2 u_k + \frac{1}{3} e_k \left(-\cos \omega_k \cos^3 u_k + \sin \omega_k \sin^3 u_k \right) \right\}_{u_0}^{u_N}, \\
 V_{23} &= \frac{1}{bT} \left\{ \frac{1}{2} u_k - \frac{1}{2} \sin u_k \cos u_k + e_k \left[\frac{1}{3} \cos \omega_k \sin^3 u_k + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sin \omega_k \left(-\cos u_k + \frac{1}{3} \cos^3 u_k \right) \right] \right\}_{u_0}^{u_N},
 \end{aligned} \right\} (46)$$

$$\left. \begin{aligned}
 V_{31} &= \frac{1}{bT} \left\{ \sin u_k - \frac{1}{3} \sin^3 u_k + e_k \left[\cos \omega_k \left(\frac{3}{4} u_k + \sin u_k \cos u_k + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \sin u_k \cos u_k \cos 2u_k \right) - \frac{1}{2} \sin \omega_k \cos^4 u_k \right] + \\
 &\quad + e_k^2 \left[\cos^2 \omega_k \left(\sin u_k - \frac{2}{3} \sin^3 u_k + \frac{1}{5} \sin^5 u_k \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{5} \cos \omega_k \sin \omega_k \cos^5 u_k + \sin^2 \omega_k \left(\frac{1}{3} \sin^3 u_k - \frac{1}{5} \sin^5 u_k \right) \right] \right\}_{u_0}^{u_N}, \\
 V_{32} &= \frac{1}{bT} \left\{ -\frac{1}{3} \cos^3 u_k + e_k \left[-\frac{1}{2} \cos \omega_k \cos^4 u_k + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sin \omega_k \left(\frac{1}{4} u_k - \frac{1}{4} \sin u_k \cos u_k \cos 2u_k \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + e_k^2 \left[-\frac{1}{5} \cos^2 \omega_k \cos^5 u_k + 2 \cos \omega_k \sin \omega_k \left(\frac{1}{3} \sin^3 u_k - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{5} \sin^5 u_k \right) - \sin^2 \omega_k \left(\frac{1}{3} \cos^3 u_k - \frac{1}{5} \cos^5 u_k \right) \right] \right\}_{u_0}^{u_N}, \\
 V_{33} &= \frac{1}{bT} \left\{ \frac{1}{3} \sin^3 u_k + e_k \left[\cos \omega_k \left(\frac{1}{4} u_k - \frac{1}{4} \sin u_k \cos u_k \cos 2u_k \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sin \omega_k \sin^4 u_k \right] + e_k^2 \left[\cos^2 \omega_k \left(\frac{1}{3} \sin^3 u_k - \frac{1}{5} \sin^5 u_k \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \sin \omega_k \cos \omega_k \left(\frac{1}{3} \cos^3 u_k - \frac{1}{5} \cos^5 u_k \right) + \frac{1}{5} \sin^2 \omega_k \sin^5 u_k \right] \right\}_{u_0}^{u_N}, \\
 V_{34} &= \frac{1}{bT} \left\{ -\left(\cos u_k - \frac{1}{3} \cos^3 u_k \right) + e_k \left[\frac{1}{2} \cos \omega_k \sin^4 u_k + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sin \omega_k \left(\frac{3}{4} u_k - \sin u_k \cos u_k + \frac{1}{4} \sin u_k \cos u_k \cos 2u_k \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + e_k^2 \left[-\cos^2 \omega_k \left(\frac{1}{3} \cos^3 u_k - \frac{1}{5} \cos^5 u_k \right) + \frac{2}{5} \sin \omega_k \cos \omega_k \sin^5 u_k - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sin^2 \omega_k \left(\cos u_k - \frac{2}{3} \cos^3 u_k + \frac{1}{5} \cos^5 u_k \right) \right] \right\}_{u_0}^{u_N}.
 \end{aligned} \right\} (47)$$

7. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЕКОВЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ЗА ПЕРИОД ОБРАЩЕНИЯ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ТЕЛА

В случае орбит спутников, для которых предположение раздела 6 о закреплении элементов орбиты на несколько оборотов с достаточной степенью приближения допустимо для всего периода обращения возму-

шающего тела T_k , можно получить особенно простые формулы для средних за оборот возмущающего тела изменений элементов.

Подставим в формулы (45)–(47) $u_N = u_0 + 2\pi$. В результате этого получим

$$\left. \begin{aligned} V_{11} &= \frac{2\pi e_k \cos \omega_k}{bT}, \\ V_{12} &= \frac{2\pi e_k \sin \omega_k}{bT}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{21} &= \frac{\pi}{bT}, \\ V_{22} &= 0, \\ V_{23} &= \frac{\pi}{bT}, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{31} &= \frac{3}{2} \frac{\pi e_k}{bT} \cos \omega_k, \\ V_{32} &= \frac{1}{2} \frac{\pi e_k}{bT} \sin \omega_k, \\ V_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\pi e_k}{bT} \cos \omega_k, \\ V_{34} &= \frac{3}{2} \frac{\pi e_k}{bT} \sin \omega_k. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Вектор $V_4 = 0$ согласно (43). Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае все приращения $\delta_{ij}x$ за оборот возмущающего тела для любых i и для $j > 1$ равны нулю, так как под интегралами (41) будут стоять полные дифференциалы по времени от периодических функций с периодом возмущающего тела.

Приращения $\delta_{21}x$ пропорциональны величинам компонент векторов V_1 и V_3 , которые в свою очередь, согласно (48) и (50), пропорциональны эксцентриситету орбиты возмущающего тела e_k . В соответствии с этим отношения приращений $\delta_{21}x$ к $\delta_{11}x$ имеют порядок $\frac{a}{P_k} e_k$.

Если исследовать вековые уходы за период обращения возмущающего тела, имеющего орбиту с малым эксцентриситетом, то в случае справедливости основного предположения $\frac{a}{P_k} \ll 1$ (и при выполнении всех других предпосылок) приращениями $\delta_{21}x$ часто можно пренебрегать.

В настоящем разделе мы ограничимся исследованием приращений $\delta_{11}x$.

Согласно определению величины b (30), имеем $\frac{\pi}{bT} = \frac{1}{2} \frac{T_k}{T} \varepsilon_k^{3/2}$. При этом $\frac{T_k}{T} \approx N$ — число оборотов спутника за период обращения возмущающего тела.

Если при расчете $\delta_{11}x$ воспользуемся вектором $\frac{V_2}{N}$, то получим формулы изменений элементов орбиты спутника за один оборот, осредненных за период возмущающего тела.

Возьмем в качестве основной системы отсчета XYZ систему координат, плоскость XU которой совпадает с орбитой возмущающего тела.

В этом случае $i_k = 0$. Параметр Ω_k также можно положить равным нулю, считая, что ω_k отсчитывается от оси X .

Из физических соображений ясно, что средние приращения $\delta_{11}x$, вообще говоря, должны зависеть от угла $\Omega = \omega_k$ между узлом орбиты спутника и перигеем орбиты возмущающего тела, а не от каждого из этих параметров в отдельности. Согласно (26)–(29), матрица D_1 (а следовательно, и матрицы D_2 и D_3) не зависит от ω_k . Согласно (49), вектор $\frac{\mathbf{V}_2}{N}$ тоже не зависит от ω_k . Поэтому и приращения $\delta_{11}x$ не будут зависеть от ω_k , а следовательно, и от положения узла орбиты спутника Ω . Таким образом, оказывается возможным при выводе средних соотношений для приращений положить $\Omega = 0$.

Полагая в (27)–(29) $i_k = \Omega_k = \Omega = 0$, имеем

$$D_1 = CBA = \begin{vmatrix} \cos \omega & \cos i \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos i \cos \omega \\ 0 & -\sin i \end{vmatrix}. \quad (51)$$

В этом случае матрица D_2 , согласно (37), имеет вид

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cos^2 \omega & x_1 & \cos^2 i \sin^2 \omega \\ \sin^2 \omega & x_2 & \cos^2 i \cos^2 \omega \\ -\sin \omega \cos \omega & x_3 & \cos^2 i \sin \omega \cos \omega \\ 0 & x_4 & -\sin i \cos i \cos \omega \\ 0 & x_5 & -\sin i \cos i \sin \omega \end{vmatrix}. \quad (52)$$

Второй столбец матрицы D_2 вычислять не нужно, так как компонента $V_{22} = 0$.

Средние значения величин $\bar{\beta}_i$ получаем при помощи (42), используя матрицу D_2 в виде (52) и компоненты вектора $\frac{\mathbf{V}_2}{N}$, определяемые согласно (49). Кроме того, $\bar{\beta}_6$ получаем из (44) при $u_N = u_0 + 2\pi$:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\beta}_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon_k^{3/2} (\cos^2 \omega + \cos^2 i \sin^2 \omega), \\ \bar{\beta}_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_k^{3/2} (\sin^2 \omega + \cos^2 i \cos^2 \omega), \\ \bar{\beta}_3 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_k^{3/2} \sin^2 i \sin \omega \cos \omega, \\ \bar{\beta}_4 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_k^{3/2} \sin i \cos i \cos \omega, \\ \bar{\beta}_5 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_k^{3/2} \sin i \cos i \sin \omega, \\ \bar{\beta}_6 &= \varepsilon_k^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Подставляя $\bar{\beta}_i$ из (53) в (17) вместо соответствующих β_i , получим уравнения для изменений за один оборот элементов орбиты, осредненных за период обращения возмущающего тела. Эти изменения обозна-

чим через $\frac{\delta x}{\delta N}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta a}{\delta N} &= 0, \\ \frac{\delta e}{\delta N} &= \frac{1}{2} A e \varepsilon^{1/2} \sin^2 i \sin 2\omega, \\ \frac{\delta i}{\delta N} &= -\frac{1}{2} A \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{1/2}} \sin i \cos i \sin 2\omega, \\ \frac{\delta \omega}{\delta N} &= A \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left[(\cos^2 i - \varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{2}{5} \varepsilon \right], \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$A = \frac{15}{2} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k} \right)^3 \varepsilon_k^{3/2}. \quad (55)$$

Последние два уравнения системы (54) при анализе иногда удобнее заменять уравнениями для долготы α и широты φ линии апсид. Уравнение для α и φ можно получить либо из (54), используя связи (22), либо непосредственной подстановкой величин β_i в (23)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \varphi}{\delta N} &= A \varepsilon^{1/2} \frac{\sin i \cos \omega}{\cos \varphi} \left[\frac{2}{5} - \sin^2 \varphi \right], \\ \frac{\delta \alpha}{\delta N} &= \frac{1}{5} A \varepsilon^{1/2} \frac{\cos i}{\cos^2 \varphi} [1 - 4 \sin^2 \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Вместо уравнения для изменения эксцентриситета (второе из уравнений (54)) можно рассматривать эквивалентное уравнение для ε

$$\frac{\delta \varepsilon}{\delta N} = -A (1 - \varepsilon) \varepsilon^{1/2} \sin^2 i \sin 2\omega. \quad (57)$$

Из первых двух уравнений (54) и связи $r_\pi = a(1 - e)$ вытекает следующая закономерность в отношении знака векового ухода высоты перицентра за оборот возмущающего тела: высота перицентра будет увеличиваться в случае, если угловое расстояние ω перицентра от восходящего узла на плоскости орбиты возмущающего тела принадлежит второй или четвертой четверти и соответственно будет происходить понижение высоты перицентра, если ω принадлежит первой или третьей четверти.

Ниже проводится исследование системы (54). При этом, предполагая приращения δx достаточно малы, будем рассматривать по известному методу отношение вариаций $\frac{\delta x}{\delta N}$ как обычные производные.

Система (54), кроме тривиального интеграла $a = \text{const}$, в общем случае обладает двумя интегралами:

$$\varepsilon = \frac{c_1}{\cos^2 i} \quad (58)$$

и

$$1 - \varepsilon = \frac{c_2}{\frac{2}{5} - \sin^2 i \sin^2 \omega}, \quad (59)$$

где c_1 и c_2 — постоянные, определяемые начальными значениями $\varepsilon_0, i_0, \omega_0$.

$$c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0, \quad c_2 = (1 - \varepsilon_0) \left(\frac{2}{5} - \sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0 \right). \quad (60)$$

Интегралы (58), (59) определяют зависимости $\varepsilon = f_1(\omega)$ и $\cos i = f_2(\omega)$, и решение всей задачи находится двумя квадратурами:

$$N - N_0 = \frac{1}{A} \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{\varepsilon^{1/2} d\omega}{\left[(\cos^2 i - \varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{2}{5} \varepsilon \right]}, \quad (61)$$

$$\Omega - \Omega_0 = -A \int_{N_0}^N \frac{\cos i}{\varepsilon^{1/2}} \left[(1 - \varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{1}{5} \varepsilon \right] dN. \quad (62)$$

Специальные случаи решений системы (54).

1. Пусть $\sin i_0 = 0$, т. е. $i_0 = 0$ или $i_0 = \pi$.

Из уравнений (54), (56) следует

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}, \quad \frac{\delta \alpha}{\delta N} = \pm \frac{1}{5} A \varepsilon_0^{1/2} \\ i = 0, \quad \varphi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

(знак плюс соответствует $i_0 = 0$, а знак минус соответствует $i_0 = \pi$), т. е. в случае, если орбита спутника в начальный момент лежит в плоскости орбиты возмущающего тела, то все параметры (за исключением долготы линии апсид) остаются в среднем неизменными. Линия апсид поворачивается в плоскости орбиты возмущающего тела в среднем с постоянной скоростью.

2. Пусть $\cos i_0 = 0$.

В этом случае $i = i_0 = \frac{\pi}{2}$, $\Omega = \Omega_0 = \text{const}$. Параметры ε и ω связаны интегралом (59)

$$1 - \varepsilon = \frac{c_2''}{5 \cos 2\omega - 1}, \quad (64)$$

$$c_2'' = (1 - \varepsilon_0) (5 \cos 2\omega_0 - 1). \quad (65)$$

Здесь предполагается, что $\omega_0 \neq \omega_1^*$, где $\omega_1^* = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{5}$; $\omega_2^* = -\omega_1^*$; $\omega_3^* = \pi - \omega_1^*$; $\omega_4^* = \pi + \omega_1^*$.

Из последнего уравнения (54) и соотношения (64) получаем уравнение для $\omega(N)$

$$\frac{\delta \omega}{\delta N} = \frac{4}{10} (5 \cos 2\omega - 1) \sqrt{1 - \frac{c_2''}{5 \cos 2\omega - 1}}. \quad (66)$$

Характер решения зависит от начального значения ω_0 .

а) Пусть $\omega_2^* < \omega_0 < \omega_1^*$ (или $\omega_3^* < \omega_0 < \omega_4^*$). В этом случае $\delta \omega > 0$ и ω монотонно растет.

Если $\omega_2^* < \omega_0 < 0$ (или $\omega_3^* < \omega_0 < \pi$), то решение имеет следующий характер. До тех пор пока $\omega < 0$ ($\omega < \pi$), $\delta \varepsilon > 0$ и эксцентриситет орбиты уменьшается, достигая при $\omega = 0$ ($\omega = \pi$) минимального значения, которое можно получить из (64),

$$e_{\text{мин}}^2 = \frac{e_0^2 (5 \cos 2\omega_0 - 1)}{4}. \quad (67)$$

С дальнейшим ростом ω эксцентриситет орбиты растет и при $\omega = \bar{\omega}$, где

$$5 \cos 2\bar{\omega} - 1 = (1 - \varepsilon_0)(5 \cos 2\omega_0 - 1), \quad (68)$$

ε обращается в нуль (т. е. $e = 1$).

Из (66) следует, что значение $\omega = \bar{\omega}$ достигается за конечное число оборотов. Выделение четверти для $\bar{\omega}$ производится из того условия, что $\bar{\omega}$ принадлежит к тому же интервалу ω , что и ω_0 . Из (68) следует, что $\bar{\omega} < \omega_1^*$ (или в соответствующем случае $\bar{\omega} < \omega_4^*$).

Если центральное тело имеет радиус R , то падение на поверхность произойдет раньше, чем ε обратится в нуль, а именно при

$$\tilde{\varepsilon} = 1 - \left(1 - \frac{R}{a}\right)^2 \quad (69)$$

и $\tilde{\omega}$, определяемом согласно (64),

$$5 \cos 2\tilde{\omega} - 1 = \frac{(1 - \varepsilon_0)(5 \cos 2\omega_0 - 1)}{1 - \tilde{\varepsilon}}. \quad (70)$$

Если $0 < \omega_0 < \omega_1^*$ или $\pi < \omega_0 < \omega_4^*$, то участка с уменьшением эксцентриситета не будет. В других отношениях характер эволюции орбиты совпадает с участком рассмотренного случая, где эксцентриситет растет.

б) В случае $\omega_1^* < \omega_0 < \omega_3^*$ или $\omega_4^* < \omega_0 < 2\pi + \omega_2^*$ имеем $\delta\omega < 0$, и ω монотонно убывает от своего начального значения ω_0 до соответствующего значения $\tilde{\omega}$, определяемого (69) и (70). В этом случае $\omega_1^* < \tilde{\omega} < \frac{\pi}{2}$ ($\omega_4^* < \tilde{\omega} < \frac{3}{2}\pi$). Если в рассматриваемом случае $\frac{\pi}{2} < \omega_0 < \omega_3^*$ ($\frac{3}{2}\pi < \omega_0 < 2\pi + \omega_2^*$), то первоначально происходит уменьшение эксцентриситета до минимального значения, которое, согласно (64), равно

$$e_{\text{мин}}^2 = \frac{e_0^2(1 - 5 \cos 2\omega_0)}{6}, \quad (71)$$

а потом последующее его увеличение до определяемого (69) значения в момент падения на поверхность центрального тела.

Если ω_0 уже меньше, чем $\frac{\pi}{2}$ (или $\frac{3}{2}\pi$ соответственно), то эволюция начинается сразу с роста эксцентриситета.

в) В случае $\omega_0 = \omega_i^*$ имеем $\omega = \omega_i^* = \text{const}$ и из (57) следует

$$\frac{\delta\varepsilon}{\delta N} = -A(1 - \varepsilon)\varepsilon^{1/2} \sin 2\omega_i^*. \quad (72)$$

При ω_0 равном ω_1^* или ω_4^* ε монотонно убывает до значения $\tilde{\varepsilon}$, определяемого (69) и соответствующего падению на поверхность центрального тела. В случае $\omega_0 = \omega_2^*$ или $\omega_0 = \omega_3^*$ происходит монотонное возрастание ε и приближение орбиты к круговой. Однако из анализа случая б можно заключить, что решение $\omega_0 = \omega_2^*$ или $\omega_0 = \omega_3^*$ неустойчиво.

Из проведенного рассмотрения следует, что, за исключением специальных начальных данных $\omega_0 = \omega_2^*$ и $\omega_0 = \omega_3^*$, все орбиты, плоскости которых ортогональны плоскости возмущающего тела, эволюционируют таким образом, что спутник падает на центральное тело через конечный интервал

времени. Специальным выбором ω_0 можно получить временное значительное уменьшение первоначального эксцентриситета орбиты спутника по сравнению с начальным. Из формул для $e_{\text{мин}}$ следует, что наибольшее уменьшение e можно получить в случае ω_0 , достаточно близких к ω_2^* или ω_3^* .

3. Пусть $\sin^2 \varphi_0 = \sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0 = \frac{2}{5}$.

В этом случае $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ и существуют два интеграла:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \cos^2 i_0}{\cos^2 i}, \quad \sin^2 \omega = \frac{2}{5} \frac{1}{\sin^2 i}.$$

Зависимость $\omega(N)$ определяется из уравнения

$$\frac{\delta \omega}{\delta N} = A \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^{1/2}} \left(\sin^2 \omega - \frac{2}{5} \right). \quad (73)$$

Из второго интеграла следует, что $\sin^2 i_0 \geq \frac{2}{5}$, $\sin^2 \omega \geq \frac{2}{5}$ и $\delta \omega \geq 0$; знак равенства в последнем соотношении может иметь место лишь при $i_0 = 90^\circ$, т. е. в рассмотренном выше (в пункте 2) случае с.

В рассматриваемом теперь пункте 3 можно различить два случая:

$$a) \arcsin \sqrt{\frac{2}{5}} \leq i_0 < \frac{\pi}{2}; \quad б) \frac{\pi}{2} < i_0 \leq \pi - \arcsin \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

В обоих случаях решение может существовать при ω , лежащем в интервалах (ω_1^*, ω_3^*) и $(\omega_4^*, \omega_2^* + 2\pi)$.

Пока $\omega < \frac{\pi}{2}$ (либо $\omega < \frac{3}{2}\pi$ для второго интервала), с ростом ω эксцентриситет орбиты растет, а наклонение орбиты в случае *a* — уменьшается, а в случае *б* — растет.

Когда ω достигает значения $\frac{\pi}{2}$ (или $\frac{3}{2}\pi$), то величина ε достигает своего минимального значения

$$\varepsilon_{\text{мин}} = \frac{5}{3} \varepsilon_0 \cos^2 i_0.$$

Наклонение в этой точке имеет значение $i = \arcsin \sqrt{\frac{2}{5}}$ в случае *a* и $i = \pi - \arcsin \sqrt{\frac{2}{5}}$ в случае *б*.

С дальнейшим ростом ω эксцентриситет орбиты падает и орбита стремится к круговой, а наклонение стремится к 90° и может достигнуть значения, определяемого формулой

$$\cos^2 i = \varepsilon_0 \cos^2 i_0.$$

Однако при ε , достаточно близком к 1, исследуемые формулы становятся уже непригодными для описания средней эволюции орбиты.

4. При ω_0 и i_0 , удовлетворяющих условиям $\cos \omega_0 = 0$ и $\cos^2 i_0 = \frac{3}{5} \varepsilon_0$, и любом ε_0 в качестве решения системы (54) существует орбита в среднем с постоянными элементами $\omega = \omega_0 = \pm \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $i = i_0$, $\varphi = \varphi_0$, где $\sin^2 \varphi_0 = 1 - \frac{3}{5} \varepsilon_0$.

Долгота линии апсид α удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta\alpha}{\delta N} = \pm \frac{1}{5} A \sqrt{\frac{5}{3}} \left(\frac{12}{5} \varepsilon_0 - 3 \right), \quad (74)$$

где знак плюс берется при $\cos i_0 > 0$, а минус — при $\cos i_0 < 0$. В этом случае вся эволюция в среднем является вращением орбиты вокруг нормали к плоскости движения возмущающего тела.

Общий случай эволюции орбиты с произвольными начальными данными.

Эволюция определяется константами c_1 и c_2 интегралов (58), (59). Из определения имеем $c_1 = \varepsilon_0 \cos^2 i_0 < 1$, $c_2 = (1 - \varepsilon_0) \left[\frac{2}{5} - \left(1 - \frac{c_1}{\varepsilon_0} \right) \sin^2 \omega_0 \right]$.

В случае, когда $c_2 > 0$, нетрудно видеть, что максимальное значение c_2 при неизменных ε_0 , i_0 получается при $\sin^2 \omega_0 = 0$ и достигает величины

$$c_{2, \text{макс}}(c_1, i_0) = \frac{2}{5} (1 - \varepsilon_0) = \frac{2}{5} \left(1 - \frac{c_1}{\cos^2 i_0} \right).$$

Далее следует, что при фиксированном c_1 наибольшее значение $c_{2, \text{макс}}(c_1, i_0)$ получается при $\cos^2 i_0 = 1$, т. е. при $i_0 = 0$ (либо $i_0 = \pi$); в этом случае имеем

$$c_{2, \text{макс}} = \frac{2}{5} (1 - c_1), \quad c_1 = \varepsilon_0.$$

В случае $c_2 < 0$ обозначим $c'_2 = -c_2$. Максимальное значение c'_2 (при фиксированных ε_0 и c_1) достигается при $\sin^2 \omega_0 = 1$ и равно $c'_{2, \text{макс}}(c_1, \varepsilon_0) = (1 - \varepsilon_0) \left(\frac{3}{5} - \frac{c_1}{\varepsilon_0} \right)$. В свою очередь, рассматривая $c'_{2, \text{макс}}(c_1, \varepsilon_0)$ как функцию ε_0 и определяя ее экстремум по ε_0 , найдем, что наибольшие возможные значения $c'_{2, \text{макс}}(c_1, \varepsilon_0)$ имеют место при $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{5}{3} c_1}$. При заданном c_1 наибольшие возможные значения c'_2 (или наименьшие значения c_2) определяются соотношением

$$c'_{2, \text{макс}} = -c_{2, \text{мин}} = \frac{3}{5} \left(1 - \sqrt{\frac{5}{3} c_1} \right)^2 = \frac{3}{5} (1 - \varepsilon_0)^2.$$

Область возможных значений параметров c_1 и c_2 представлена на рис. 1. В плоскости (c_1, c_2) характерные точки имеют координаты $A(1, 0)$; $B(0, \frac{2}{5})$; $O(0, 0)$; $E(0, -\frac{3}{5})$; $D(\frac{3}{5}, 0)$.

Линия AB , ограничивающая область возможных значений параметров $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, определена уравнением $c_2 = \frac{2}{5} (1 - c_1)$. Как следует из проведенного выше анализа, такая связь параметров соответствует $\cos^2 i_0 = 1$, т. е. специальному случаю решений системы (54), разобранному в пункте 1 данного раздела.

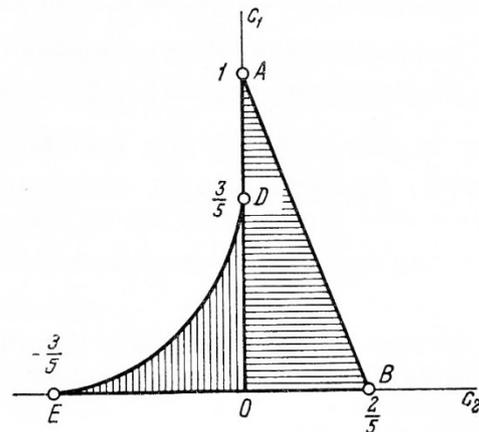


Рис. 1. Область возможных значений констант c_1 и c_2

Линия OA соответствует случаю $c_2 = 0$ (т. е. $\sin^2 \varphi_0 = \frac{2}{5}$). Совокупность таких решений исследована в пункте 3.

Линия BE соответствует $c_1 = 0$, что согласно определению отвечает орбитам, ортогональным плоскости орбиты возмущающего тела; эволюция таких орбит рассмотрена в пункте 2.

Линия ED отвечает начальным значениям параметров $\sin^2 \omega_0 = 1$, $\cos^2 i_0 = \frac{3}{5} \varepsilon_0$, при которых, как следует из пункта 4, эволюция носит характер простого поворота орбиты вокруг нормали к плоскости возмущающего тела.

В результате получаем, что граничные линии области возможных значений параметров c_1 и c_2 отвечают ряду специальных случаев начальных данных, рассмотренных выше.

Из последнего уравнения (54) следует, что знак $\delta\omega$ определяется знаком выражения

$$(\cos^2 i - \varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{2}{5} \varepsilon. \quad (75)$$

При $\frac{c_1}{\varepsilon^2} > 1$ с учетом (58) имеем $\delta\omega \geq 0$ при любом ω . При $\frac{c_1}{\varepsilon^2} < 1$ для удовлетворения условия $\delta\omega \geq 0$, как следует из (75), (58), (59), необходимо выполнение неравенства

$$\frac{\frac{2}{5} - \frac{c_2}{1 - \varepsilon}}{1 - \frac{c_1}{\varepsilon}} \leq \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2}}. \quad (76)$$

Поскольку в рассматриваемом случае $1 - \frac{c_1}{\varepsilon} > 1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} > 0$, то условие $\delta\omega > 0$ заведомо будет удовлетворено при $c_2 > 0$. Отсюда следует, что при $c_2 > 0$ происходит постоянное возрастание ω . Напомним, что условие $c_2 > 0$ соответствует классу орбит с начальным значением широты линии апсид φ_0 , удовлетворяющим условию $\sin^2 \varphi_0 = \sin^2 \omega_0 \sin^2 i_0 < \frac{2}{5}$, и произвольными значениями остальных параметров.

Рассмотрим случай $c_2 > 0$. Согласно (54) и (57), значения $\omega = 0$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \pi$ и $\omega = \frac{3\pi}{2}$ являются экстремальными для функций $\varepsilon(N)$ и $i(N)$. Из (57) имеем

$$\left(\frac{\delta^2 \varepsilon}{\delta N^2} \right)_{\substack{\omega=0 \\ \omega=\pi}} = -A(1 - \varepsilon) \varepsilon^{1/2} \left[\sin^2 i \frac{\delta}{\delta \omega} (\sin 2\omega) \cdot \frac{\delta \omega}{\delta N} \right]_{\substack{\omega=0 \\ \omega=\pi}} < 0,$$

т. е. точки, в которых $\omega = 0$ или $\omega = \pi$, являются точками максимума функции ε и, следовательно, согласно (58), точками минимума $\cos^2 i$.

В точках, где $\omega = \frac{\pi}{2}$ или $\omega = \frac{3}{2}\pi$, реализуется минимум функции ε и максимум $\cos^2 i$. Подставляя значения $\omega = 0$ ($\omega = \pi$) в (59), получим

$$\varepsilon_{\max} = 1 - \frac{5}{2} c_2. \quad (77)$$

Для определения ε_{\min} из (58) и (59) при $\omega = \frac{\pi}{2}$ ($\omega = \frac{3}{2}\pi$) получаем уравнение

$$\varepsilon_{\min}^2 - \left[1 + \frac{5}{3} (c_1 + c_2) \right] \varepsilon_{\min} + \frac{5}{3} c_1 = 0. \quad (78)$$

Уравнение (78) имеет два положительных корня. Физически возможное решение определяется условием $\varepsilon < 1$

$$\varepsilon_{\text{мин}} = \frac{1 + \frac{5}{3}(c_1 + c_2) - \sqrt{\left[1 + \frac{5}{3}(c_1 + c_2)\right]^2 - \frac{5}{3} \cdot 4c_1}}{2}. \quad (79)$$

Из формулы (58) получим

$$(\cos^2 i)_{\text{макс}} = \frac{c_1}{\varepsilon_{\text{мин}}}, \quad (\cos^2 i)_{\text{мин}} = \frac{c_1}{\varepsilon_{\text{макс}}}. \quad (80)$$

Если $\varepsilon_{\text{мин}} > \tilde{\varepsilon} = 1 - \left(1 - \frac{R}{a}\right)^2$, где R — радиус центрального тела то в рассматриваемом случае ($c_2 > 0$) параметры ε и i колеблются с периодом ΔN , равным числу оборотов, в течение которых величина ω меняется на π

$$\Delta N = \frac{1}{A} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \pi} \frac{\frac{1}{\varepsilon^2} d\omega}{\left[(\cos^2 i - \varepsilon) \sin^2 \omega + \frac{2}{5} \varepsilon\right]}. \quad (81)$$

Если $\varepsilon_{\text{мин}} < \tilde{\varepsilon} = 1 - \left(1 - \frac{R}{a}\right)^2$, то при $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ произойдет соударение с центральным телом при значениях i и ω , определяемых из интегралов (58) и (59).

Рассмотрим теперь случай $c_2 < 0$. Обозначим $-c_2 = c'_2 > 0$. Выражение (59) перепишем в виде

$$\varepsilon = 1 - \frac{c'_2}{\sin^2 i \sin^2 \omega - \frac{2}{5}}. \quad (82)$$

Условие $c'_2 > 0$ требует, чтобы $\sin^2 i_0 \sin^2 \omega_0 > \frac{2}{5}$, а следовательно, и каждый из сомножителей должен по крайней мере удовлетворять условию $\sin^2 \omega_0 > \frac{2}{5}$, $\sin^2 i_0 > \frac{2}{5}$. Из (82) следует, что значения ω будут заключаться в одном из интервалов (ω_1^*, ω_3^*) или $(\omega_4^*, \omega_2^* + 2\pi)$, в зависимости от того, какому из этих интервалов принадлежит ω_0 . Экстремальные значения $\varepsilon_{\text{эктр}}$ и $(\cos i)_{\text{эктр}}$ могут достигаться в этом случае только при $\omega = \frac{\pi}{2}$ (или $\omega = \frac{3}{2}\pi$). Соответствующее уравнение для $\varepsilon_{\text{эктр}}$ получаем из (58) и (82) в следующем виде:

$$\varepsilon_{\text{эктр}}^2 - \left[1 + \frac{5}{3}(c_1 - c'_2)\right] \varepsilon_{\text{эктр}} + \frac{5}{3} c_1 = 0. \quad (83)$$

Приняв во внимание найденную выше область возможных значений c_1 и c_2 , можно показать, что оба корня уравнения (83) являются положительными и лежат в интервале между $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$. Предельные случаи для значений $\varepsilon_{\text{эктр}}$ соответствуют особым решениям, рассмотренным в пунктах 2 и 3 соответственно.

Экстремальные значения $\omega_{\text{эктр}}$ определяются из условия $\delta\omega = 0$. Из этого условия, согласно (54), получаем

$$\left(\frac{c_1}{(\varepsilon^*)^2} - 1\right) \sin^2 \omega_{\text{эктр}} + \frac{2}{5} = 0. \quad (84)$$

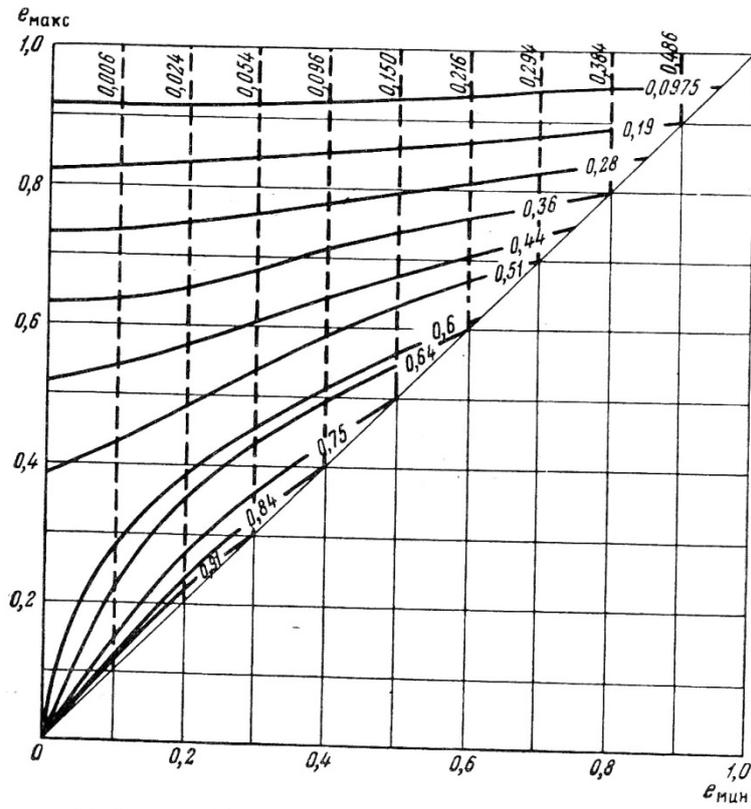


Рис. 2. Связь между экстремальными значениями эксцентриситета при различных значениях c_1 (сплошные линии) и $c_2 > 0$ (штриховые линии)
 Цифры около линий показывают соответствующие значения постоянных c_1 и $1,5 c_2$

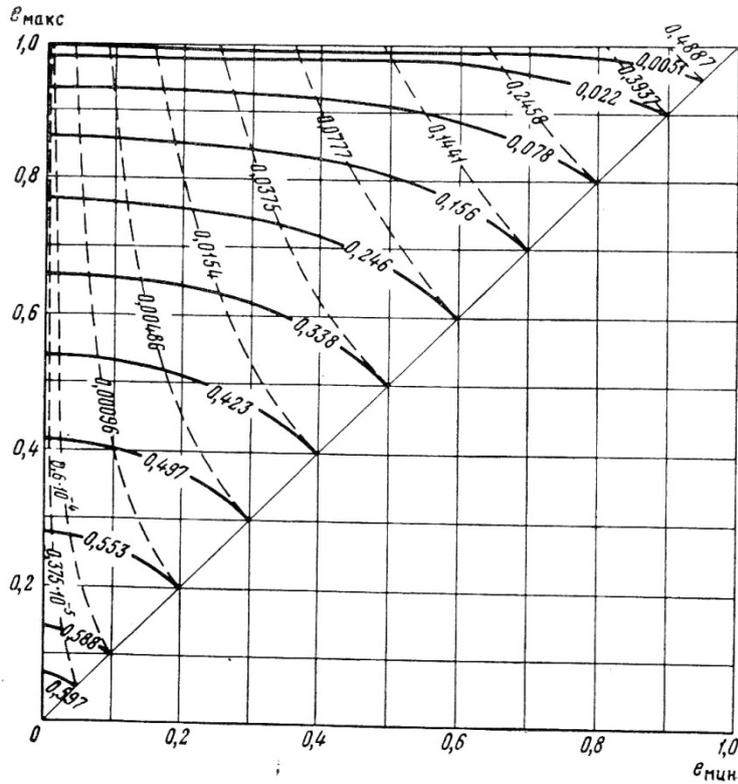


Рис. 3. Связь между экстремальными значениями эксцентриситета при различных значениях c_1 (сплошные линии) и $c_2 < 0$ (штриховые линии)
 Цифры около линий показывают соответствующие значения постоянных c_1 и $c_2' = -c_2$

Здесь ε^* значение ε при $\omega = \omega_{\text{экстр}}$. Уравнение (84) вместе с (58) и (82) позволяет получить уравнение для ε^*

$$(\varepsilon^*)^2 \left(c_2' - \frac{2}{5} c_1 \right) + \frac{4}{5} c_1 \varepsilon^* - c_1 \left(\frac{2}{5} + c_2' \right) = 0. \quad (85)$$

Нетрудно установить, что для рассматриваемой области (c_1, c_2') в интервале $(\varepsilon = 0, \varepsilon = 1)$ существует только один корень ε^* .

Два значения $\omega_{\text{экстр}}$ получаем, согласно (84), как два корня, симметричных относительно $\omega = \frac{\pi}{2}$ или $\omega = \frac{3}{2} \pi$ (в случае, если $\omega_0 \in (\omega_4^*, 2\pi + \omega_2^*)$).

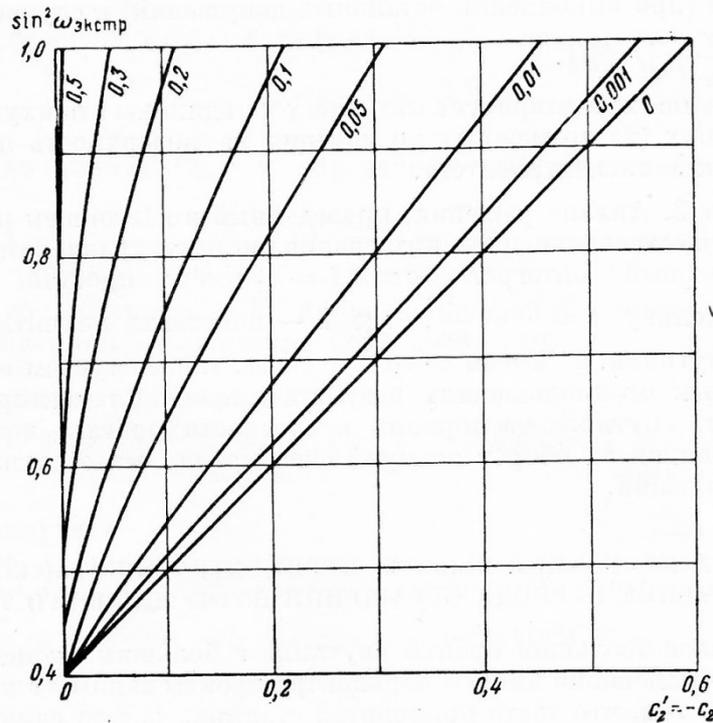


Рис. . Зависимость $\sin^2 \omega_{\text{экстр}}$ от $c_2 < 0$ при различных значениях c_1 . Цифры около линий показывают соответствующие значения c_1 .

Из проведенного рассмотрения следует, что при $c_2 < 0$ не только изменение ε и i , как это было в случае $c_2 > 0$, но и изменение расстояния перицентра от узла ω носит периодический характер. При этом остается возможность падения спутника на поверхность центрального тела в случае, если центральное тело имеет конечный радиус R и минимальное значение $\varepsilon_{\text{мин}}$ удовлетворяет неравенству $\varepsilon_{\text{мин}} < \varepsilon$.

Изменение положения узла Ω определяется уравнением (62) и носит характер ухода, направление которого зависит от знака $\cos i$.

На рис. 2 в плоскости экстремальных значений эксцентриситета $(\varepsilon_{\text{мин}}, \varepsilon_{\text{макс}})$ проведены линии постоянных значений констант c_1 (сплошная линия) и c_2 (пунктирная линия) для значений $c_2 > 0$. На рис. 3 в той же плоскости проведены изолинии c_1 и c_2 для случая $c_2 < 0$. На рис. 4 для случая $c_2 < 0$ показана зависимость экстремальных значе-

ний $\sin^2 \omega_{\text{внстр}}$ ст c_2 для различных значений c_1 . Все эти графики рассчитаны по формулам, приведенным в настоящем разделе.

Замечание 1. В результате рассмотрения, проведенного в настоящем разделе, найдено, что для определенной области начальных данных максимальные значения эксцентриситета $e_{\text{макс}}$, которые достигаются в процессе эволюции, имеют величину, близкую к единице или (в случае $i = 90^\circ$) даже $e_{\text{макс}} = 1$. Однако при e , достаточно близких к единице, величина γ (см. пункт 1 в разделе 3) может сильно отличаться от единицы, и приближенные формулы настоящего раздела не будут описывать реальную эволюцию.

Если центральное тело имеет конечный радиус R , то результаты настоящего раздела о падении спутника на поверхность центрального тела будут справедливы (при выполнении остальных допущений) в случае, если величина $\frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{r_k} \right)^3 \frac{a}{R} \ll 1$.

Эта величина характеризует отличие γ от единицы в наихудшем случае самых больших (из возможных до падения на поверхность центрального тела) значений эксцентриситета.

Замечание 2. Анализ решения, проведенный в настоящем разделе, опирается на существование двух интегралов системы уравнений (54). Отметим, что первый интеграл $\varepsilon \cos^2 i = c_1$ имеет простой физический смысл. Поскольку $\varepsilon = \frac{p}{a} = \frac{c^2}{\mu a}$, где c — константа момента количества движения спутника, то имеем $c \cdot \cos i = \text{const}$, т. е. получаем естественный при сделанных предположениях результат: проекция вектора кинетического момента спутника на нормаль к плоскости орбиты возмущающего тела, осредненная за оборот возмущающего тела, остается постоянной в процессе эволюции.

8. ОЦЕНКА КОЛЕБАНИЙ ВЫСОТЫ ПЕРИЦЕНТРА ОРБИТЫ СПУТНИКА В ТЕЧЕНИЕ ПЕРИОДА ОБРАЩЕНИЯ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ТЕЛА

При анализе эволюции орбиты спутника с большим эксцентриситетом исследование изменения высоты перигея орбиты занимает особое место. Это связано с тем, что часто приходится сталкиваться со случаями, когда высота перигея орбиты такого спутника близка к радиусу центрального тела. В этих случаях относительно малое изменение угловых координат может быть несущественным, а такого же порядка относительные изменения высоты перигея орбиты будут существенны, так как при этом происходит относительно большое изменение расстояния от поверхности центрального тела до перигея.

Оценку колебаний высоты перигея орбиты спутника в пределах периода обращения возмущающего тела проведем в рамках первого приближения $\delta_{11}x$ уходов элементов. Изменение высоты перигея δr_π за N оборотов, согласно связи $r_\pi = a(1 - e)$ и результатам раздела 6 (в предположениях этого раздела), определяется формулой

$$\delta r_\pi = 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{r_k} \right)^3 a e e^{1/2} [\beta_3].$$

Из определения $[\beta_3]$ по (42) следует, что экстремальные значения $[\beta_3]$, а следовательно, и экстремальные значения δr_π достигаются при $\beta_3 = \xi_1 \xi_2 \Delta_k^3 = 0$.

Можно показать, что условие $\xi_1 = 0$ определяет значения аргумента широты возмущающего тела $u^{\text{макс}}$, при которых реализуются максимумы функции $[\beta_3]$, а условие $\xi_2 = 0$ позволяет определить точки минимума этой функции.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \cos \psi_1 &= \frac{d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{12}^2}}, & \sin \psi_1 &= \frac{d_{12}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{12}^2}}, \\ \cos \psi_2 &= \frac{d_{21}}{\sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2}}, & \sin \psi_2 &= \frac{d_{22}}{\sqrt{d_{21}^2 + d_{22}^2}}. \end{aligned}$$

Тогда из условия $\xi_1 = 0$ и выражения (24) для ξ_1 получаем

$$u_{1,2}^{\text{макс}} = \psi_1 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично условие $\xi_2 = 0$ определяет точки достижения минимумов

$$u_{1,2}^{\text{мин}} = \psi_2 \pm \frac{\pi}{2}.$$

Если за плоскость XU принять плоскость орбиты возмущающего тела, то матрица D_1 [формула (26)] имеет вид

$$D_1 = \begin{vmatrix} \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i & \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\ -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i & -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i \end{vmatrix}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} d_{11}^2 + d_{12}^2 &= \cos^2 \omega + \sin^2 \omega \cos^2 i = \cos^2 \varphi, \\ d_{21}^2 + d_{22}^2 &= 1 - \cos^2 \omega \sin^2 i, \\ d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12} &= \cos i. \end{aligned}$$

При помощи этих соотношений находим, что

$$\sin(\psi_2 - \psi_1) = \frac{\cos i}{\cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 \omega}}.$$

При $\sin i = 0$ (плоскость орбиты спутника совпадает с плоскостью орбиты возмущающего тела) $\psi_2 - \psi_1 = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, радиусы-векторы возмущающего тела $\mathbf{r}_k(u^{\text{мин}})$ и $\mathbf{r}_k(u^{\text{макс}})$ ортогональны. При $i = \frac{\pi}{2}$ получаем $\psi_2 = \psi_1$ и, следовательно, экстремальные точки являются точками перегиба функции.

Ортогональность векторов $\mathbf{r}_k(u^{\text{мин}})$ и $\mathbf{r}_k(u^{\text{макс}})$, кроме случая $\sin i = 0$, будет иметь место при $\sin 2\omega = 0$, т. е. когда реализуются случаи симметричного или антисимметричного положения орбиты спутника относительно плоскости орбиты возмущающего тела. В общем случае $|u_1^{\text{макс}} - u_1^{\text{мин}}| \neq |u_2^{\text{макс}} - u_1^{\text{мин}}|$, хотя всегда $|u_2^{\text{макс}} - u_2^{\text{мин}}| = |u_1^{\text{макс}} - u_1^{\text{мин}}|$ и $|u_2^{\text{макс}} - u_1^{\text{макс}}| = \pi$, $|u_2^{\text{мин}} - u_1^{\text{мин}}| = \pi$.

Подставим в выражения (46) для составляющих вектора V_2 значения $u_N = u_{1,2}^{\text{макс}}$ и $u_N = u_{1,2}^{\text{мин}}$ и согласно (42) определим $[\beta_3]$ в этих точках. Положим для упрощения формул, что ось X направлена на перицентр орбиты возмущающего тела ($\omega_k = 0$). В этом случае формулы для $[\beta_3]$ в указанных точках будут иметь вид

$$[\beta_3(u_{1,2}^{\text{макс}})] = \left[\beta_3 \left(\psi_1 \pm \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{bT} \left\{ - \frac{\sin^2 i \sin 2\omega}{2} \cdot \frac{\psi_1 \pm \frac{\pi}{2}}{2} + \frac{1}{2} d_{11} d_{22} \pm \right. \\ \left. \pm e_k \frac{\frac{2}{3} d_{11}^4 d_{21} + \frac{1}{3} d_{11}^3 d_{12} d_{22} + d_{11}^2 d_{12}^2 d_{21} + d_{11} d_{12}^3 d_{22} + d_{12}^4 d_{21}}{(d_{11}^2 + d_{12}^2)^{3/2}} \right\} + C,$$

$$[\beta_3(u_{1,2}^{\text{мин}})] = \left[\beta_3 \left(\psi_2 \pm \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{bT} \left\{ - \frac{\sin^2 i \sin 2\omega}{2} \cdot \frac{\psi_2 \pm \frac{\pi}{2}}{2} + \frac{1}{2} d_{21} d_{12} \pm \right. \\ \left. \pm e_k \frac{\frac{2}{3} d_{21}^4 d_{11} + \frac{1}{3} d_{21}^3 d_{22} d_{12} + d_{21}^2 d_{22}^2 d_{11} + d_{21} d_{22}^3 d_{12} + d_{22}^4 d_{11}}{(d_{21}^2 + d_{22}^2)^{3/2}} \right\} + C,$$

где $C = [\beta_3(u_0)]$ — постоянная, определяемая начальными условиями.

Изменение δr_π от максимального до минимального значения (в некотором смысле амплитуда колебаний) определится формулой

$$\mathfrak{D} = \delta r_\pi^{\text{макс}} - \delta r_\pi^{\text{мин}} = 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k} \right)^3 a e \varepsilon^{1/2} \left\{ [\beta_3(u^{\text{макс}})] - [\beta_3(u^{\text{мин}})] \right\}.$$

Величину \mathfrak{D} можно представить в виде суммы трех слагаемых $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3$, где \mathfrak{D}_1 отвечает первым членам, стоящим в фигурных скобках формул для $[\beta_3]$. Приращение \mathfrak{D}_1 связано с наличием векового ухода высоты перицентра за оборот возмущающего тела. Составляющая \mathfrak{D}_2 связана со вторыми членами в фигурных скобках и равна

$$\mathfrak{D}_2 = 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k} \right)^3 a e \varepsilon^{1/2} \frac{\cos i}{2} \frac{1}{bT}.$$

Эта составляющая определяет амплитуду колебаний δr_π при отсутствии векового ухода элементов за оборот возмущающего тела и при $e_k = 0$ (круговая орбита возмущающего тела).

Слагаемое \mathfrak{D}_3 отвечает членам, пропорциональным эксцентриситету орбиты возмущающего тела.

При переходе от первого максимума $u_1^{\text{макс}}$ к первому минимуму $u_1^{\text{мин}}$ составляющая \mathfrak{D}_2 равна по величине и противоположна по знаку величине \mathfrak{D}_2 , отвечающей переходу от первого минимума ко второму максимуму $u_2^{\text{макс}}$. Отсюда следует, что для круговых орбит возмущающего тела и при отсутствии векового ухода элементов за оборот возмущающего тела высота перицентра будет в течение оборота возмущающего тела дважды достигать (равных друг другу) максимальных и дважды (равных друг другу) минимальных значений. Даже при отсутствии векового ухода за оборот возмущающего тела, если его орбита имеет эксцентриситет, отличный от нуля, два максимальных значения δr_π , которые достигаются в течение одного оборота возмущающего тела, в общем случае уже не будут равны по величине. Также не будут равны в общем случае и два минимальных значения δr_π .

В предположениях разделов 4—6 нетрудно получить формулы для экстремальных значений и всех остальных элементов орбиты.

При этом, так же как это сделано выше для приращений δr_π , сначала определяется значение аргумента широты возмущающего тела $u_{x_i}^{\text{ЭКСТР}}$, при котором реализуется экстремум данного элемента x_i . Значение $u_{x_i}^{\text{ЭКСТР}}$ находится из условия $\Delta x_i = 0$, где Δx_i определяется соотношениями (17). Подставляя значения $u_{x_i}^{\text{ЭКСТР}}$ в выражение δx_i (формулы (17) с заменой β_i на $[\beta_i]$), находим искомую величину.

Используя в этих операциях следующие приближения для приращений ($\Delta_{12}x$, $\Delta_{22}x, \dots$ и $\delta_{12}x$, $\delta_{22}x, \dots$), можно уточнить в рамках предположений настоящей работы величины экстремальных значений элементов орбиты спутника за оборот возмущающего тела.

9. МЕТОД РАСЧЕТА ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТЫ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ФОРМУЛАМ

Для искусственных спутников Земли с большими высотами апогея в общем случае основными факторами, определяющими эволюцию орбиты, будут: 1) возмущающее влияние Луны; 2) возмущающее влияние Солнца; 3) отличие гравитационного поля Земли от центрального; 4) торможение в земной атмосфере.

Для вычисления векового ухода элементов орбиты спутника Земли за один оборот вследствие отличия гравитационного поля Земли от центрального можно использовать формулы, полученные в [6]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_c \Omega &= -\frac{2\pi\alpha}{p^2\mu} \cos i, \\ \Delta_c \omega &= \frac{\pi\alpha}{p^2\mu} (5 \cos^2 i - 1), \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

где $\alpha = 0,266360022 \cdot 10^{11} \text{ км}^5 \cdot \text{сек}^{-2}$. Здесь Ω , ω , i связаны с плоскостью земного экватора.

Эти приближенные формулы получены интегрированием соответствующих уравнений в оскулирующих элементах при предположениях, эквивалентных предположениям, отмеченным в пунктах 1 и 2 раздела 3 настоящей работы, и при учете первого приближения в разложении гравитационного потенциала Земли. Остальные элементы орбиты в рассматриваемом приближении не имеют векового ухода, связанного с отличием гравитационного поля Земли от центрального.

Согласно второму уравнению (54), средние изменения эксцентриситета (а следовательно и высоты перигея орбиты) вследствие возмущения планетами пропорциональны $\sin^2 i \cdot \sin 2\omega$, где ω и i отсчитываются от плоскости орбиты возмущающего тела.

При исследовании совместных влияний возмущений Луны, Солнца и отличия гравитационного поля Земли от центрального за длительное время нецентральность гравитационного поля будет оказывать существенное влияние, в частности, и на характер изменения высоты перигея. При этом, кроме прямого изменения $\sin 2\omega$ из-за смещения широты перигея $\Delta_c \omega$, будет происходить изменение параметра $\sin^2 i \cdot \sin 2\omega$ из-за поворота орбиты спутника на угол $\Delta_c \Omega$ около полюса мира. Вследствие существующего наклона плоскости лунной орбиты и плоскости эклиптики к земному экватору при таком повороте также будет происходить изменение i и ω .

В рамках приближенного рассмотрения для учета изменения за оборот спутника полуоси (Δ_{Ta}) и эксцентриситета (Δ_{Te}) вследствие торможения спутника в атмосфере также могут быть использованы конечные формулы (например, формулы (5) — (7) работы [9]). Однако для многих исследовательских задач можно будет отвлечься от влияния торможения атмосферы на эволюцию орбиты, ограничиваясь рассмотрением орбит, у которых перигей удален от поверхности Земли, например, более чем на 300 км. В этом случае торможение спутника в атмосфере часто будет мало влиять на эволюцию орбиты по сравнению с другими факторами.

В качестве основной плоскости XU отсчета углов можно принять плоскость земного экватора. Поскольку в расчете предполагается учитывать и эволюцию, обусловленную нецентральностью поля Земли ($\Delta_c \Omega$ и $\Delta_c \omega$), то плоскости лунной орбиты или эклиптики не имеют какого-либо преимущества.

Для приближенного исследования можно считать, что Луна и Солнце движутся вокруг Земли по эллипсам, задаваемым параметрами p_1, e_1, \dots для Луны и p_2, e_2, \dots для Солнца. Положения Луны и Солнца на орбитах задаются в начальный момент аргументами широты u_1 и u_2 соответственно.

Кроме параметров орбит и констант гравитационных потенциалов Луны μ_1 и Солнца μ_2 , задаются периоды обращения Луны T_1 и Солнца T_2 вокруг Земли. При этом, по-видимому, целесообразно использовать в расчете сидерические периоды.

Приращение Δx_s элемента x_s орбиты спутника за оборот определяется как сумма приращений

$$\Delta x_s = \Delta_{11}^{(1)} x_s + \Delta_{12}^{(1)} x_s + \Delta_{21}^{(1)} x_s + \Delta_{11}^{(2)} x_s + \Delta_{12}^{(2)} x_s + \Delta_{21}^{(2)} x_s + \Delta_c x_s, \quad (87)$$

$$s = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Верхние индексы в $\Delta_{ij}^{(k)} x$ соответствуют приращениям, связанным с действием Луны (индекс 1) и Солнца (индекс 2). Нижние индексы, как принято в работе, соответствуют первому и второму приближениям (формулы (4)—(5)) в разложении возмущающего ускорения (индекс i) и первому и второму приближениям (формула (11)) при учете движения возмущающего тела в течение одного оборота спутника (индекс j). Член $\Delta_c x_s$ обозначает приращение, обусловленное отличием гравитационного поля Земли от центрального.

Если перигей спутника находится вблизи поверхности Земли, а высота апогея $r_\alpha \approx 50 \cdot 10^3$ км, то величина $\frac{r_\alpha}{p_1} \approx \frac{1}{7}$. При учете в разложении возмущающего ускорения членов порядка $O\left(\frac{r_\alpha^2}{p_1^2}\right)$ (т. е. приращений

$\Delta_{21}^{(1)} x_s$) можно ожидать, что погрешность в вычислении вековых изменений элементов за оборот будет порядка процентов. Для такого спутника могут быть того же порядка погрешности при учете только первого приближения в изменениях элементов вследствие движения Луны в процессе одного оборота $\Delta_{12} x_s$. Принимая точность в несколько процентов допустимой, можно, например, не учитывать в расчете приращений элементов $\Delta_{12}^{(2)} x_s$ и $\Delta_{21}^{(2)} x_s$, связанных с влиянием Солнца.

Для вычисления приращений $\Delta_{ij} x_s$ (или $\delta_{ij} x_s$) необходимо определить значения аргументов широты $u_1^{(m+1)}$ и $u_2^{(m+1)}$ в конце шага (по времени), на котором определяются приращения.

По данным элементам орбиты возмущающих тел, известным $u_k^{(m)}$ в начале m -го шага и по заданному шагу $t^{(m+1)} - t^{(m)}$ можно определить значения $u_k^{(m+1)}$ ($k = 1, 2$). Для этого, вообще говоря, приходится решать уравнение Кеплера. Поскольку орбиты возмущающих тел имеют малые эксцентриситеты, при этом можно использовать различные приближенные методы решения этого уравнения [10].

Если рассматриваются приращения за один оборот, то $t^{(m+1)} - t^{(m)} = T$, где T — период спутника. При расчете приращений $\Delta_{ij}x_s$ за один оборот спутника при достаточно малом эксцентриситете орбиты возмущающего тела e_k и малом $\frac{T}{T_k}$ приращение аргумента широты за оборот $\Delta u_k = u_k^{(m+1)} - u_k^{(m)}$ можно получить в первом приближении в виде

$$\Delta u_k = \frac{2\pi\Delta_k^2}{\varepsilon_k^{3/2}} \frac{T}{T_k}, \quad (88)$$

и значение u_k^* , которое следует использовать при вычислении α^* , β^* , γ^* , $\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^*$ по формулам (36), (39), получается в виде

$$u_k^* = u_k^{(m)} + \frac{\Delta u_k}{2}. \quad (89)$$

Если скорость изменения элементов орбиты спутника позволяет рассматривать приращения элементов сразу за n оборотов, то результирующее приращение находим аналогично (87) в виде суммы

$$\delta x_s = \delta_{11}^{(1)}x_s^1 + \dots + \delta_{21}^{(2)}x_s + \delta_c x_s \quad (s = 1, 2, \dots, 5). \quad (90)$$

Приращения $\delta_{ij}x_s$ определяются согласно (17)–(19) с использованием векторов $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$, $\left[\frac{d\beta}{dt}\right]$ в виде (42). Значения $u_k^{(m+1)}$ ($k = 1, 2$) находятся решением уравнения Кеплера при приращении времени, равном $t^{(m+1)} - t^{(m)} = nT$.

Для уходов $\delta_c x_s$ из-за нецентральности гравитационного поля имеем $\delta_c x_s = n\Delta_c x_s$, где $\Delta_c x_s$ определяется соотношениями (86).

Система уравнений (87) или (90) является замкнутой системой разностных уравнений для зависимых переменных x_1, \dots, x_5

$$\text{либо} \quad \left. \begin{aligned} \delta x_s &= f_s(x_1, \dots, x_5, N) \quad (s = 1, 2, \dots, 5) \\ \Delta x_s &= \Phi_s(x_2, \dots, x_5, N) \quad (s = 1, 2, \dots, 5). \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

За независимое переменное можно, например, принять порядковый номер оборота спутника N .

Систему (91) можно использовать для расчета эволюции орбиты спутника за длительное время. При этом необходимо для системы (91) решить задачу Коши.

В простейшем случае можно применить метод Эйлера. Если известны элементы $x_s^{(m)}$ на m -ом шаге, то элементы на $m+1$ шаге определяются как $N^{(m+1)} = N^{(m)} + 1$, $x_s^{(m+1)} = x_s^{(m)} + \Delta x_s^{(m)}$, либо при шаге на

n оборотов $N^{(m+1)} = N^{(m)} + n$, $x_s^{(m+1)} = x_s^{(m)} + \delta x_s^{(m)}$. По-видимому, всегда можно будет использовать при необходимости метод Эйлера с пересчетом, в котором после определения $\Delta x_s^{(m)}$ по значениям $x_s^{(m)}$ в начале шага приращения Δx_s пересчитываются, используя в правых частях (91) средние для шага значения x_s

$$\Delta x_s^{(m+\frac{1}{2})} = \Phi_s \left(x_1^{(m)} + \frac{\Delta x_1^{(m)}}{2}, x_2^{(m)} + \frac{\Delta x_2^{(m)}}{2}, \dots, N \right).$$

Эти простейшие методы могут быть использованы всегда. Возможность и целесообразность использования для системы (91) методов решения более высокого порядка [7], опирающихся на определенную гладкость решений x_s , должна исследоваться специально.

Замечание. Осредненные приращения $\frac{\delta x}{\delta N}$, согласно (54), существенно зависят от величин ω и i , отсчитываемых от плоскости орбиты возмущающего тела. Кроме указанных выше факторов, обуславливающих изменение этих элементов, следует отметить влияние на величины ω и i , отсчитываемые от плоскости лунной орбиты, солнечной прецессии орбиты Луны. Узел плоскости лунной орбиты на эклиптике в среднем поворачивается на 0,05 градуса в сутки. При расчете эволюции за длительное время этот эффект вносит существенные коррективы в величины уходов параметров орбиты спутника. При расчете эволюции за несколько лет, не меняя методики расчета, опирающейся на неизменность орбиты возмущающего тела, можно на каждом шаге вносить поправки в элементы орбиты Луны, учитывающие прецессию орбиты Луны. Также параметрически можно учесть и обусловленное тем же эффектом изменение углового расстояния перигея лунной орбиты от экваториального узла.

10. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ПО ПРИБЛИЖЕННЫМ ФОРМУЛАМ С ТОЧНЫМ РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Совокупные оценки точности решения задачи по приближенным формулам были проведены сравнением расчета по формулам настоящей работы с численным интегрированием системы дифференциальных уравнений небесной механики. Были рассчитаны примеры эволюции параметров орбиты спутников Земли и Луны.

В точной постановке решалась задача совместного движения Земли, Луны, Солнца и спутника. Интегрирование велось в декартовой невращающейся системе координат, связанной с центром центрального тела. Для ряда последовательных оборотов на минимальном расстоянии орбиты от центрального тела по декартовым координатам вычислялись оскулирующие элементы. Изменение этих элементов и сравнивалось с соответствующими значениями, вычисляемыми по приближенным формулам.

Погрешности приближенной методики будут тем больше, чем больше максимальное удаление спутника от центрального тела. Поэтому для целей сравнительных оценок были приняты орбиты спутников с апоцентром, достаточно удаленным от центрального тела. При этом ограничивались размерами орбит спутников, при которых точность приближенного метода

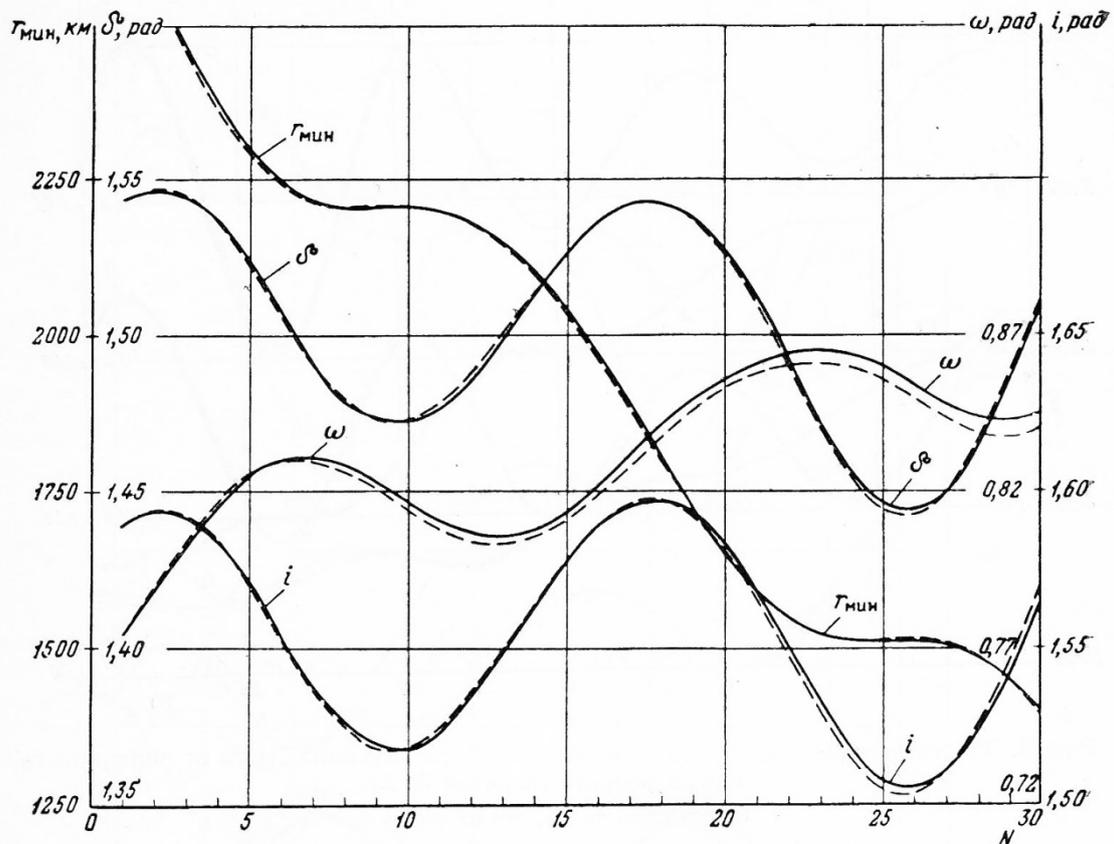


Рис. 5. Зависимость оскулирующих элементов орбиты спутника Луны от порядкового номера оборота (вариант № 1)

Сплошные кривые — точное интегрирование системы дифференциальных уравнений совместного движения Земли, Луны, Солнца и спутника; штриховые кривые — расчет по приближенным формулам

была бы еще удовлетворительной для целей исследования. О степени уменьшения или увеличения погрешности с изменением орбиты спутника можно получить надежные представления по зависимости (по порядку величины) погрешности приближенного метода от параметров орбиты спутника.

При сравнении рассматривались орбиты спутников Земли типа орбит «Эксплорер VI» с высотами перигея порядка радиуса Земли и высотами апогея порядка $50 \div 70 \cdot 10^3 \text{ км}$. В этих случаях погрешность приближенного расчета составляла менее 5% от величины ухода. Для рассматриваемых орбит можно ожидать такого порядка погрешности в основном из-за использования в приближенном расчете только первого и второго приближений в разложении возмущающего ускорения от Луны.

На рис. 5—9 для спутника Луны приведены графики зависимости от номера оборота оскулирующих элементов орбиты спутника на минимальном расстоянии от Луны. Зависимости определены численным интегрированием дифференциальных уравнений (сплошные линии). Для сравнения приведены те же зависимости, полученные по приближенным формулам (пунктирные линии). Приближенный расчет проводился с шагом в один оборот и с использованием для интегрирования системы (91) метода Эйлера с пересчетом.

Исходные минимальные и максимальные расстояния от Луны для пяти рассчитанных вариантов даны в табл. 1.

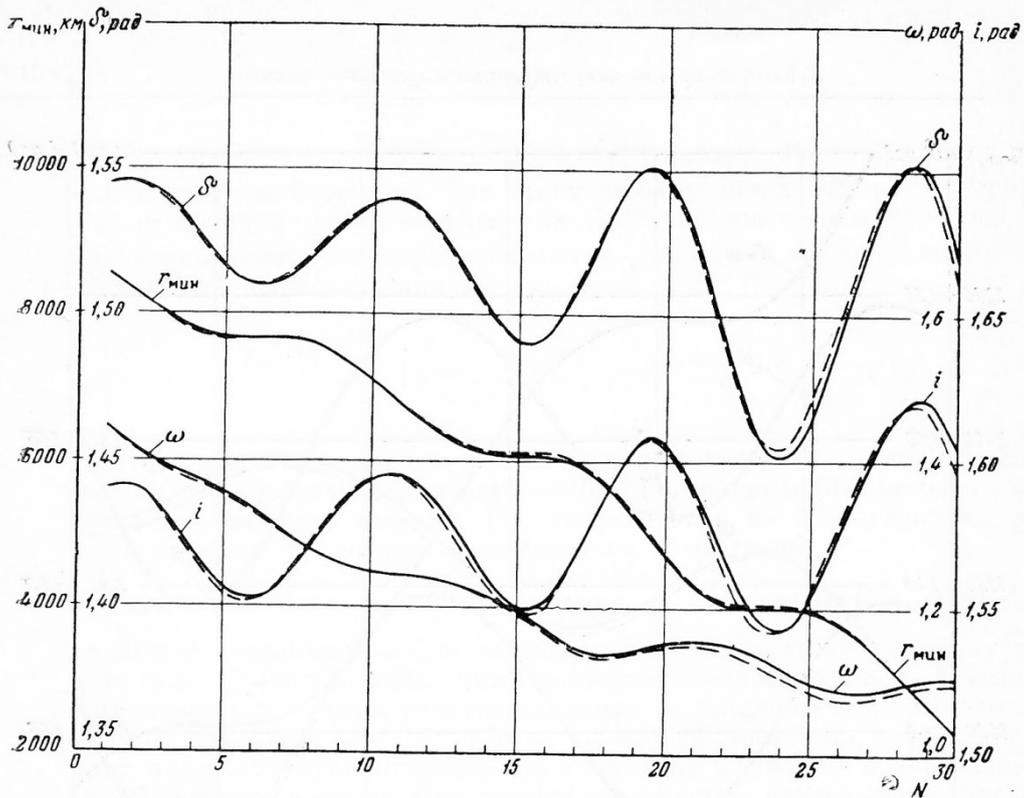


Рис. 6. Зависимость оскулирующих элементов орбиты спутника Луны от порядкового номера оборота (вариант № 2)
 Обозначения те же, что на рис. 5

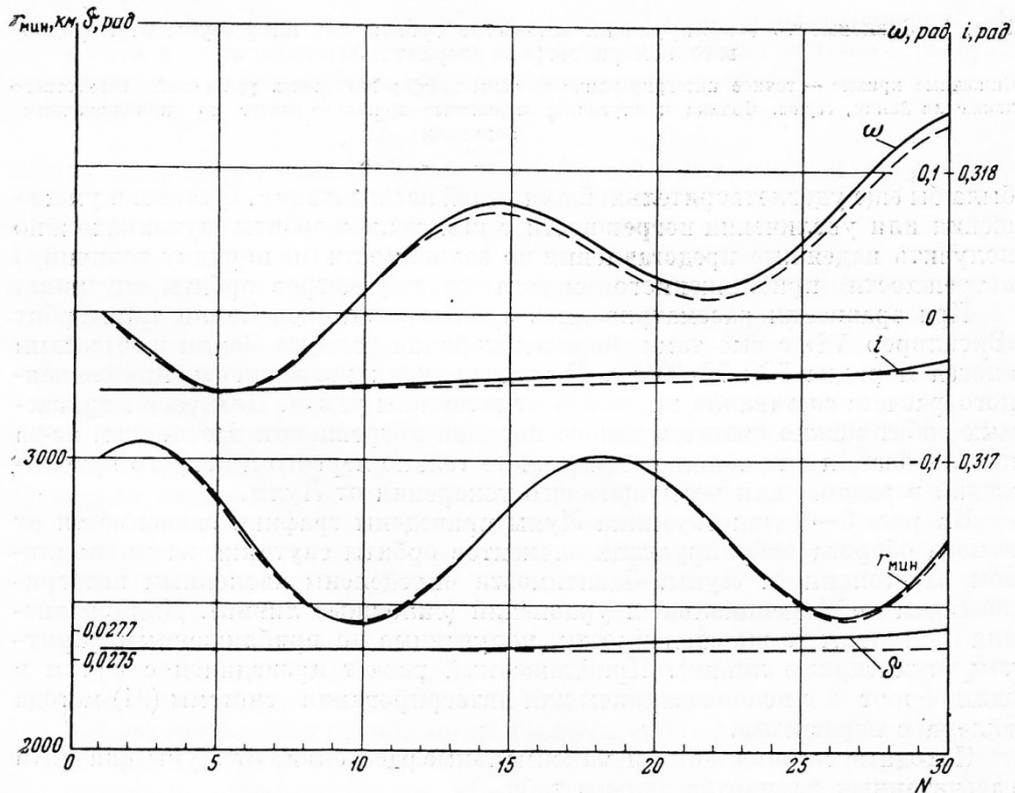


Рис. 7. Зависимость оскулирующих элементов орбиты спутника Луны от порядкового номера оборота (вариант № 3)
 Обозначения те же, что на рис. 5

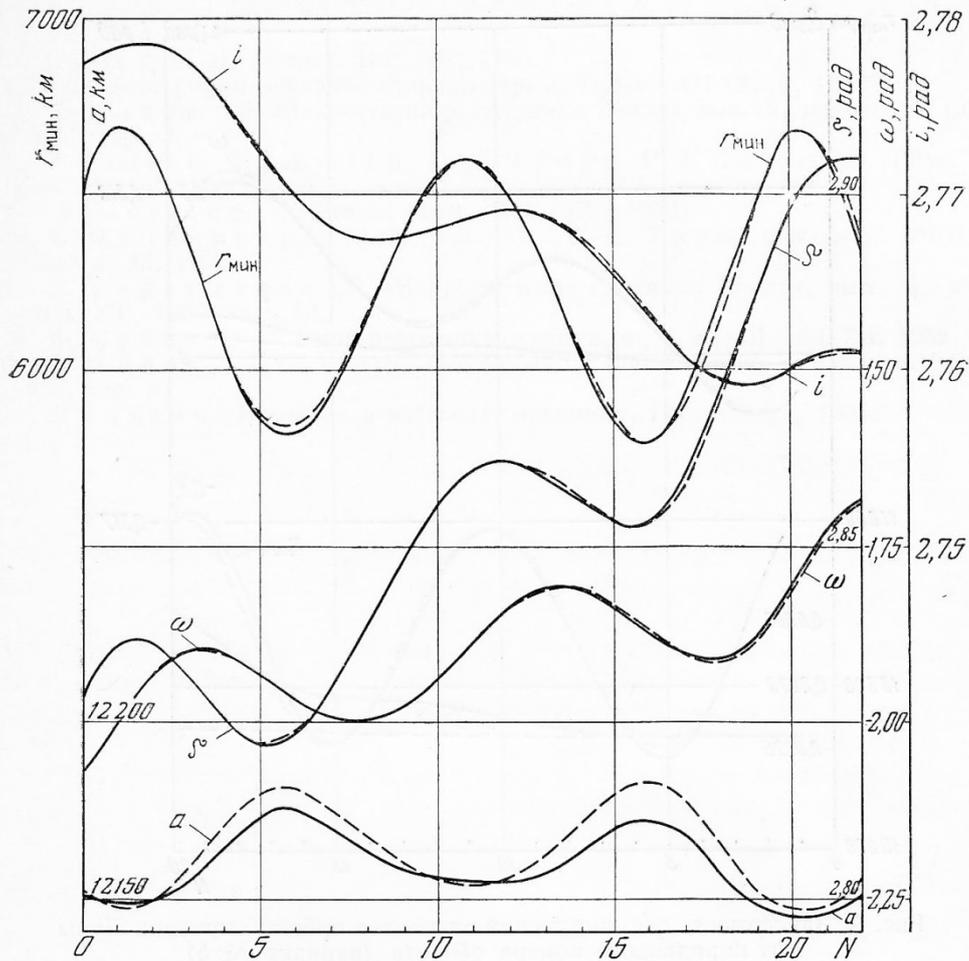


Рис. 8. Зависимость оскулирующих элементов орбиты спутника Луны от порядкового номера оборота (вариант № 4)

Обозначения те же, что на рис. 5

Угловые элементы в расчете и на графиках отсчитываются от плоскости земного экватора. Первые два варианта (рис. 5 и 6) соответствуют орбите спутника с наклоном к плоскости лунной орбиты, близким к 90° . Здесь оценивается особый случай, когда высота перицентра имеет в основном монотонный уход в течение полного оборота Земли. Графики рис. 7—9 относятся к орбитам, плоскости которых близки к плоскости орбиты воз-

Таблица 1

Вариант	$r_{\text{макс}}, 10^3 \text{ км}$	$r_{\text{мин}}, 10^3 \text{ км}$
1	15,35	2,65
2	17,34	8,54
3	15,00	3,00
4	17,80	6,50
5	26,00	11,00

муцающего тела (Земли). В этом случае высота перицентра имеет колебания с периодом примерно равным половине лунного месяца.

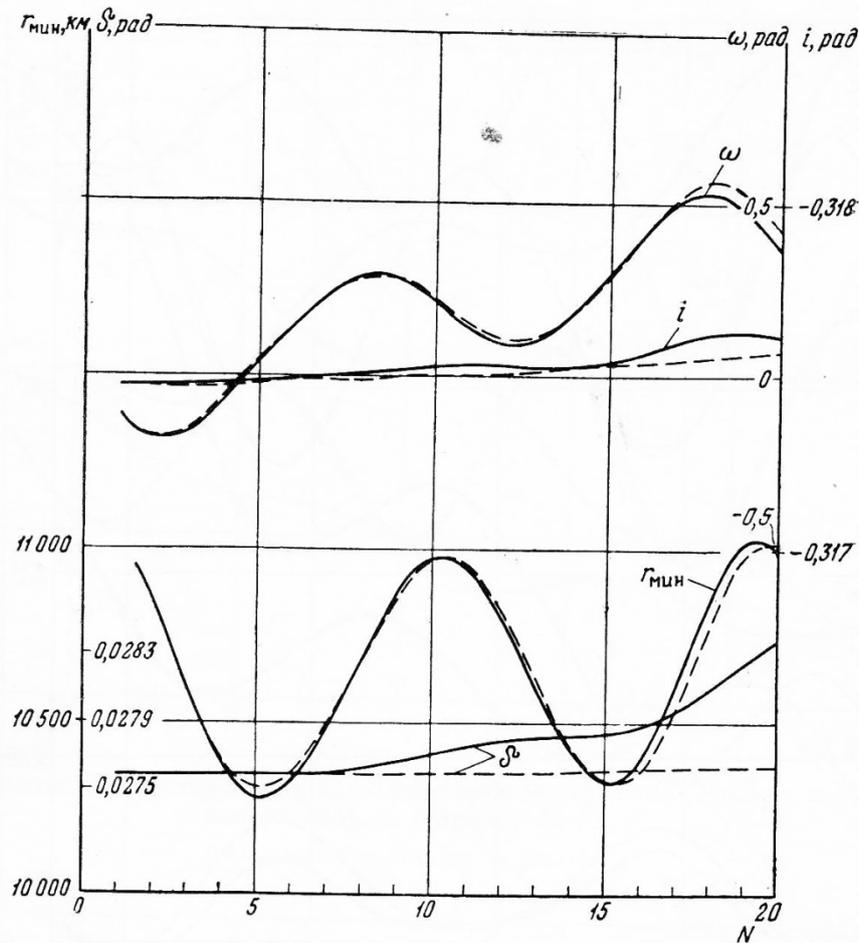


Рис. 9. Зависимость оскулирующих элементов орбиты спутника Луны от порядкового номера оборота (вариант № 5)
Обозначения те же, что на рис. 5

Сравнение производится на протяжении 20—30 оборотов спутника. Для всех рассмотренных орбит это количество оборотов соответствует времени больше лунного месяца.

Для рассматриваемых орбит спутника Луны основным фактором, определяющим погрешности приближенной методики, должна быть большая величина возмущающего ускорения (нарушается условие неизменности элементов орбиты в течение одного оборота) и длительные периоды обращения (погрешности, связанные с учетом лишь первого приближения в движении возмущающего тела в течение оборота спутника).

На основании проведенных оценок можно заключить, что для исследовательских целей и целей предварительных расчетов приближенный метод может быть использован для достаточно широкого (в смысле практики космических полетов) класса орбит спутников.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Д. Е. Охочимского за ряд замечаний, высказанных по поводу настоящей статьи.

Дата поступления 7 декабря 1960 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. M u s e n et al. Science, **131**, 935, 1960.
2. Первые фотографии обратной стороны Луны. Изд-во АН СССР, 1959.
3. Л. И. С е д о в. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 5, изд-во АН СССР, 1960, стр. 3.
4. C. P. S o n e t t, E. I. S m i t h, D. K. J u d g e, P. J. C o l e m a n. Phys. Rev. Lett., **4**, 161, 1960.
5. F. T. G e y l i n g. J. Frankl. Inst., **269**, 375, 1960.
6. Д. Е. О х о ц и м с к и й, Т. М. Э н е е в, Г. П. Т а р а т ы н о в а. УФН, **63**, вып. 1а, 33, 1957.
7. Г. П. Т а р а т ы н о в а. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, изд-во АН СССР, 1960, стр. 56.
8. М. Ф. С у б б о т и н. Курс небесной механики, т. 2, М.—Л., ОНТИ, 1937.
9. М. Л. Л и д о в. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 1, изд-во АН СССР 1958, стр. 9.
10. Ф. М у л ь т о н. Введение в небесную механику. Гостехиздат, 1935.

