4. Chartrand G., Harary F. Graphs with prescribed connectivities // Theory of Graphs. — NY : Academic Press, 1968. — P. 61–63.

5. Теребин Б. А., Абросимов М. Б. Об оптимальности реализации графов с заданными мерами связности // Прикладная дискретная математика. Приложение. — Томск: Издательский дом ТГУ, 2020. — С. 103–105.

6. Теребин Б. А., Абросимов М. Б. О минимальном числе рёбер в реализациях графов с заданными мерами связности // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы Междунар. науч. конф. — Саратов: Издат. центр «Наука», 2021. — С. 159–161.

DOI: 10.20948/dms-2022-62

СТРОЕНИЕ ИЗОМОРФИЗМОВ И ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ГРАФОВЫХ АВТОМАТОВ

В. А. Молчанов, Р. А. Фарахутдинов (Саратов)

Далее всюду под графом будем понимать ориентированный граф [1]. Для графа $G = (X, \rho)$ дугу $(x, y) \in \rho$ будем называть собственной, если $(y, x) \notin \rho$. Граф называется квазибесконтурным, если каждая его собственная дуга не содержится ни в каком контуре. Квазибесконтурный граф будем называть тривиальным, если у него нет собственных дуг, и нетривиальным, в противном случае. Граф $\breve{G} = (X, \rho^{-1})$ называется двойственным для графа $G = (X, \rho)$. Антиизоморфизмом графа $G_1 = (X_1, \rho_1)$ на граф $G_2 = (X_2, \rho_2)$ называется изоморфизм графа G_1 на двойственный к G_2 граф $\breve{G}_2$. Антиавтоморфизмом графа $G = (X, \rho)$ называется изоморфизм графа G на двойственный к себе граф $\breve{G}$.

Автомат $A = (X_1, S, X_2, \star, \diamond)$ называется графовым, если множество состояний X_1 и множество выходных сигналов X_2 наделены структурами графов $G_1 = (X_1, \rho_1)$ и $G_2 = (X_2, \rho_2)$, что для любого входного сигнала $s \in S$ функция переходов $\delta_s(x) = x \star s$ $(x \in X_1)$ является эндоморфизмом графа G_1 и функция выходов $\lambda_s(x) = x \diamond s$ $(x \in X_1)$ является гомоморфизмом графа G_1 в граф G_2. Символически такие автоматы обозначаются $A = (G_1, S, G_2, \star, \diamond)$. Графовый автомат $\mathrm{Atm}(G_1, G_2) = (G_1, \mathrm{End}\ G_1 \times \mathrm{Hom}(G_1, G_2), G_2, \star, \diamond)$ является универсально притягивающим объектом в категории [2] графовых автоматов, поэтому его называют универсальным графовым автоматом.

Для отображений $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ декартово произведение $f \times g : X \times X \to Y \times Y$ определяется по формуле $(f \times g)(u, v) = (f(u), g(v))$. Для любого преобразования φ множества X верно, что $(f \times g)(\varphi) = f^{-1}\varphi g$. Обозначим $f \times f = f^2$.

Изоморфизмом графового автомата $A_1 = (G_1, S_1, G_1', \star_1, \diamond_1)$, где $G_1 = (X_1, \rho_1)$, $G_1' = (X_1', \rho_1')$, на графовый автомат $A_2 = (G_2, S_2, G_2', \star_2, \diamond_2)$, где $G_2 = (X_2, \rho_2)$, $G_2' = (X_2', \rho_2')$, называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, h, g)$, состоящая из изоморфизмов $f : G_1 \to G_2$, $h : S_1 \to S_2$, $g : G_1' \to G_2'$, таких, что для любых $x \in X_1$, $s, t \in S_1$ выполняются условия: $h(s \cdot t) = h(s) \cdot h(t)$, $f(x \star_1 s) = f(x) \star_2 h(s)$, $g(x \diamond_1 s) = f(x) \diamond_2 h(s)$. Множество всех изоморфизмов автомата A_1 на автомат A_2 обозначается $\mathrm{Iso}(A_1, A_2)$. Изоморфизм автомата A_1 на себя называется автоморфизмом автомата A_1. Множество всех автоморфизмов автомата A_1 с бинарной операцией композиции образуют группу $\mathrm{Aut}\ A_1$.

Следующий результат описывает взаимосвязь изоморфизма полугрупп входных сигналов автомата с изоморфизмами его графов состояний и выходных сигналов.

Теорема 1. *Положим $i = 1, 2$. Пусть $G_i = (X_i, \rho_i)$, $G_i' = (X_i', \rho_i')$ — рефлексивные графы, граф G_1 имеет дугу, не входящую ни в один орцикл [3], $\mathrm{Atm}(G_i, G_i')$ — универсальные графовые автоматы с полугруппами входных сигналов $S_i = \mathrm{End}\ G_i \times \mathrm{Hom}(G_i, G_i')$, $h : S_1 \to S_2$ — изоморфизм полугруппы S_1 на полугруппу S_2. Тогда существуют изоморфизмы (или антиизоморфизмы) f, g_a $(a \in X_1)$ графов G_1, G_1' соответственно на графы G_2, G_2', что для любой пары $(\varphi, \psi) \in S_1$ имеет место равенство*

$$h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^{\varphi}), \tag{1}$$

где $\psi^{\varphi}(f(a)) = g_{\varphi(a)}(\psi(a))$ для всех $a \in X_1$.

В следующей теореме показана связь между изоморфизмами универсальных графовых автоматов и их компонент.

Теорема 2. *Положим $i = 1, 2$. Пусть $G_i = (X_i, \rho_i)$, $G_i' = (X_i', \rho_i')$ — графы и f — изоморфизм G_1 на G_2, g — изоморфизм G_1' на G_2'. Упорядоченная тройка отображений $\gamma = (f, h, g)$ тогда и только тогда является изоморфизмом универсального графового автомата $\mathrm{Atm}(G_1, G_1')$ с полугруппой входных сигналов $S_1 = \mathrm{End}\ G_1 \times$*

$\mathrm{Hom}(G_1, G_1')$ *на универсальный графовый автомат* $\mathrm{Atm}(G_2, G_2')$ *с полугруппой входных сигналов* $S_2 = \mathrm{End}\ G_2 \times \mathrm{Hom}(G_2, G_2')$*, когда отображение* $h : S_1 \to S_2$ *определяется для всех* $(\varphi, \psi) \in S_1$ *по формуле* $h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), (f \times g)(\psi))$.

Следующая теорема описывает строение изоморфизмов полугрупп входных сигналов универсальных графовых автоматов.

Теорема 3. *Положим* $j = 1, 2$*. Пусть* $G_j = (X_j, \rho_j), G_j' = (X_j', \rho_j')$ *— рефлексивные графы, причем* G_1' *— антисимметричный,* G_1 *— нетривиальный квазибесконтурный и имеет компоненты связности* $\{X_{1_i}\}$*,* $i \in I$*, и пусть* $\mathrm{Atm}(G_j, G_j')$ *— универсальные графовые автоматы с полугруппами входных сигналов* $S_j = \mathrm{End}\ G_j \times \mathrm{Hom}(G_j, G_j')$*. Тогда отображение* $h : S_1 \to S_2$ *тогда и только тогда является изоморфизмом полугруппы* S_1 *на полугруппу* S_2*, когда для некоторого изоморфизма (антиизоморфизма)* $f : G_1 \to G_2$ *и некоторого семейства изоморфизмов (антиизоморфизмов)* $g_i : G_1' \to G_2'$*,* $i \in I$*, отображение* h *для всех* $(\varphi, \psi) \in S_1$ *определяется по формуле*

$$h(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^{\varphi}), \tag{2}$$

где $\psi^{\varphi}(f(a)) = g_i(\psi(a))$ *для любого* $a \in X_1$*, такого, что при некотором* $i \in I$ *выполняется* $\varphi(a) \in X_{1_i}$*.*

Пусть G, G' — графы и $\mathrm{Atm}(G, G')$ — универсальный графовый автомат над графами G, G'. Полученные результаты о строении изоморфизмов универсальных графовых автоматов позволяют исследовать взаимосвязь между группами автоморфизмов автомата $\mathrm{Atm}(G, G')$ и группами автоморфизмов его компонент. Обозначим через $\mathrm{Ant}\ G$ множество всех антиавтоморфизмов графа G, через $(\mathrm{Aut}\ G)^I$ — множество семейств автоморфизмов g_i $(i \in I)$ графа G.

Теорема 4. *Пусть* $G = (X, \rho)$ *— нетривиальный квазибесконтурный рефлексивный граф с компонентами связности* $\{X_{1_i}\}$*,* $i \in I$*,* $G' = (X', \rho')$ *— антисимметричный рефлексивный граф, и пусть* $A = \mathrm{Atm}(G, G')$ *— универсальный графовый автомат с полугруппой входных сигналов* $S = \mathrm{End}\ G \times \mathrm{Hom}(G, G')$*. Тогда для группы автоморфизмов Aut A автомата A, групп автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\ G$*,* $\mathrm{Aut}\ G'$ *графов* G*,* G'*, группы автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\ S$ *полугруппы входных сигналов* S *выполняются следующие условия:*

1) $\mathrm{Aut}\ A \cong \mathrm{Aut}\ G \times \mathrm{Aut}\ G'$*;*
2) *группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\ S$ *изоморфна алгебре с носителем* $(\mathrm{Aut}\ G \times (\mathrm{Aut}\ G')^I) \cup (\mathrm{Ant}\ G \times (\mathrm{Ant}\ G')^I)$ *и бинарной операци-*

ей $\cdot$, которая определяется по формуле

$$(f_1, g_1^i) \cdot (f_2, g_2^i) = \left(f_1 \cdot f_2, g_1^i \cdot g_2^{\tilde{f}_1(i)}\right),$$

где f_1, f_2 — автоморфизмы (антиавтоморфизмы) графа G, g_1^i, g_2^i $(i \in I)$ — семейства автоморфизмов (антиавтоморфизмов) графа G' и $\tilde{f}_1$ — перестановка множества индексов I, индуцируемая автоморфизмом (антиавтоморфизмом) f_1.

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

2. Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. — М.: Высш. шк., 1994.

3. Важенин Ю. М. Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Изв. вузов. Матем. — 1972. — Вып. 7. — С. 3–11.

DOI: 10.20948/dms-2022-63