ДИАКОПТИКА И СТРУКТУРЫ ГРАФА

С. В. Курапов, М. В. Давидовский (Запорожье)

Известно множество видов графов [1, 2]. Нужно ли создавать математические модели для каждого вида или можно иметь одну универсальную математическую модель для описания дискретных графовых структур? Для построения такой модели можно использовать диакоптический подход к анализу сложных систем [3, 4]. Рассмотрим следующий вид графов.

Определение. *Несепарабельным графом* G называется связный неориентированный граф без петель, кратных ребер, мостов, точек сочленения и вершин с локальной степенью $d <= 2$.

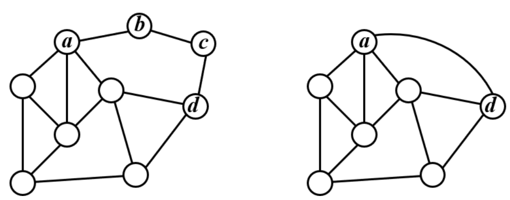

Рис. 1: Замена цепочки ребер одним ребром

Математические модели таких графов позволяют применить алгебраические матричные методы и сопоставить графу G векторное пространство суграфов $\pounds(G)$ [1]. В $\pounds(G)$ можно определить два подпространства: разрезов $S(G)$ и циклов $C(G)$. Такое представление позволяет применить для описания рисунка графа методы теории вращения Г. Рингеля, критерий планарности Маклейна, а также векторные инварианты для распознавания изоморфизма графов: цифровой $IL(G)$ и интегральный $IS(G)\&IC(G)$ [5, 6]. В общем случае перечисленные методы применимы не ко всякому графу. Например, нецелесообразно применять векторные методы к графу, имеющему хотя бы одну точку сочленения. Такой граф является разделимым и называется *сепарабельным.* Он разбивается на блоки, каждый из которых представляет собой максимальный неразделимый подграф. Применение циклических методов требует видоизменения некоторых графов. К таким относятся графы с петлями, кратным количеством ребер (мультиграфы), «висячими» вершинами и т. п. В некоторых видах графов цепочка ребер состоящих из вершин с локальной степенью два должна быть заменена одним ребром (рис. 1).

В любом сепарабельном графе G (рис. 2) путем замены ребер и вершин можно выделить несепарабельную (рис. 3) и дополнительную (рис. 4) части. Для анализа и синтеза графа применим метод исследования сложных систем по частям (диакоптический метод Г. Крона) [4]. Рассмотрим процесс декомпозиции на примере сепарабельного графа (рис. 2). Помещаем в дополнительную часть: ребра с вершиной имеющей единичную валентность; все петли с вершинами; цепочку ребер и ставим в ей соответствие неориентированное ребро в несепарабельной части графа; мультиребра и ставим им в соответствие неориентированное ребро в несепарабельной части графа; все ориентированные ребра и ставим им в соответствие неориентированное ребро в несепарабельной части графа.

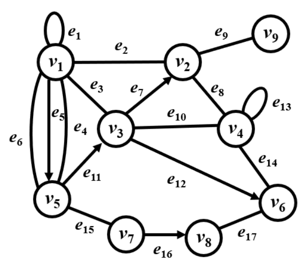

Рис. 2: Сепарабельный граф

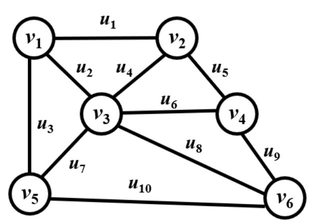

Рис. 3: Несепарабельный граф

Несепарабельная часть графа представлена на рис. 3, обозначим ее как G^*. Дополнительная часть графа представлена на рис. 4, обозначим ее как $D(G)$. Между ребрами и вершинами сепарабельного графа G и ребрами и вершинами несепарабельной части G^* устанавливается соответствие ϕ.

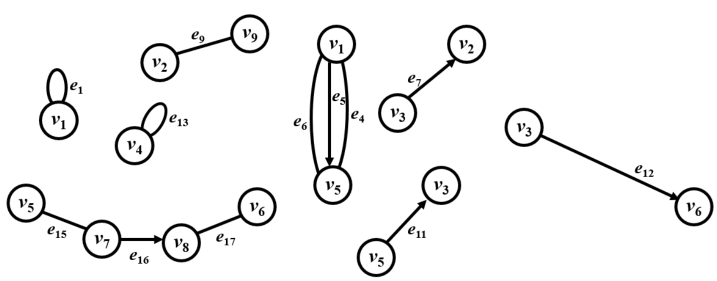

Рис. 4: Дополнительная часть графа $D(G)$

Представим алгоритм определения изоморфизма двух сепарабельных графов G_1 и G_2.

Шаг 1. Выделяем дополнительные части сепарабельных графов $D(G_1)$ и $D(G_2)$ и ставим в соответствие каждому из них его несепарабельную часть.

Шаг 2. Вычисляем векторные инварианты для несепарабельных частей графов G_1^* и G_2^*, определяем их изоморфизм. Если несепарабельные части не изоморфны,то G_1 и G_2 не изоморфны. Прекращаем вычисления.

Шаг 3. Для двух изоморфных несепарабельных графов G_1^* и G_2^* для задания соответствия между их вершинами и ребрами строим изоморфный им реперный граф G_3^*.

Шаг 4. Строим группу автоморфизма графа G_3^* и определяем все перестановки вершин в графе G_3^*.

Шаг 5. Осуществляем просмотр всех перестановок вершин с целью определения совпадения элементов дополнительных частей G_1 и G_2. В случае их совпадения графы G_1 и G_2 изоморфны, в противном случае — не изоморфны.

Список литературы

1. Свами М. Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984.

2. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

3. Тышкевич Р.И., Скуме П.В., Суздаль С.В. Алгебраическая теория декомпозиции графов // Национальная академия наук Беларуси. Труды института математики. — 2010. — Т. 18, вып. 1. — С. 99–115.

4. Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика). — М.: Наука, 1972.

5. Курапов С.В., Давидовский М.В. Структуры графа и теорема Уитни // Информационные технологии. — 2022. — Т. 28, вып. 3. — С. 133–140.

6. Курапов С.В., Давидовский М.В. Алгоритмические методы конечных дискретных структур. Изоморфизм несепарабельных графов. — Запорожье: Изд-во ЗНУ, 2021.

7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.

DOI: 10.20948/dms-2022-59