

ОБ ИЗОБРАЖЕНИЯХ НА ПЛОСКОСТИ И РАСКРАСКАХ k -ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

Д. В. Карпов (Санкт-Петербург)

Мы будем рассматривать графы без петель (кратные ребра в ряде случаев допускаются). В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер — через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Говоря об изображении графов на плоскости, мы всегда будем подразумевать, что вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. Изображение каждого ребра содержит только две вершины — его концы. Мы будем считать, что в каждой *точке пересечения* пересекаются ровно два ребра (если в изображении графа через какую-то точку проходит более двух рёбер, несложно исправить изображение так, чтобы этого избежать). Мы наложим на изображение графа на плоскости еще одно условие: если A — точка пересечения двух рёбер e и f , то любая достаточно маленькая окружность с центром в A пересекает каждое из этих рёбер дважды, причем точки пересечения с e и f на окружности чередуются (если это условие не выполнено, несложно подправить изображение так, чтобы пересечение в точке A исчезло, см. рисунок 1).

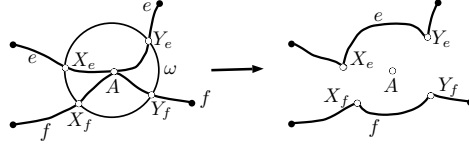


Рис. 1: Окрестность точки пересечения рёбер.

Напомним, что граф называется *планарным*, если его можно так изобразить на плоскости, что рёбра не пересекаются во внутренних точках. Следующее определение обобщает широко известное понятие планарного графа.

Определение. Граф G называется *k -планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, чтобы каждое ребро пересекало не более чем k других.

При $k = 0$ мы имеем обычный планарный граф. Чем больше k , тем сложнее возможная структура k -планарных графов.

Граф можно по-разному изобразить на плоскости. Чтобы избежать путаницы, мы будем обозначать конкретное изображение графа G другим шрифтом: $\mathcal{G}$.

Изображение планарного графа на плоскости называется *плоским графом*. Части, на которые плоский граф G разбивает плоскость, называются *гранями*.

Изображения k -планарных графов на плоскости. В этой статье мы будем рассматривать только такие изображения k -планарных графов на плоскости, в которых каждое ребро пересекает не более чем k других.

Несложно доказать, что для любого k -планарного графа G существует изображение $\mathcal{G}$, в котором никакое ребро не пересекает само себя. В частности, этими свойствами обладает изображение с минимальным числом точек пересечения ребер.

В некоторых работах граф называют k -планарным, если его можно так изобразить на плоскости, что на каждом ребре расположено не более k точек пересечения с другими ребрами. Верно ли, что этому более сильному условию удовлетворяют все k -планарные графы? То есть, верно ли, что любой k -планарный граф можно изобразить на плоскости так, чтобы никакие два ребра не пересекались более одного раза? Для больших k , скорее всего, ответ отрицательный. Рассмотрим случаи маленьких k .

Начнем с определения.

Определение. Назовем ребро изображения $\mathcal{G}$ *простым*, если оно не пересекает других рёбер и *непростым* в противном случае.

Обозначим через $E'(\mathcal{G})$ множество всех простых рёбер изображения $\mathcal{G}$, а через $P(\mathcal{G})$ — граф на $V(\mathcal{G})$ с рёбрами из $E'(\mathcal{G})$. Будем называть $P(\mathcal{G})$ *плоским графом* изображения $\mathcal{G}$.

Изображения 1-планарных графов. Начнем со случая $k = 1$. Кажущийся совершенно естественным результат следующей теоремы, наверное, следует считать фольклорным. Доказательство достаточно несложно.

Теорема 1. Пусть G — 1-планарный граф, а $\mathcal{G}$ — его изображение с минимальным числом точек пересечения рёбер. Тогда любые два пересекающихся (то есть, имеющих общую внутреннюю точку) ребра в изображении $\mathcal{G}$ пересекаются ровно в одной точке, а никакие два ребра с общим концом не пересекаются.

Следующая теорема показывает, что каждый 1-планарный граф имеет надграф с весьма простой структурой изображения. Впервые этот результат опубликован в работе Бородина [6] и был использован для доказательства 6-раскрашиваемости любого 1-планарного

графа.

Теорема 2 (О. В. Бородин, 1984). *Для любого 1-планарного графа H существует 1-планарный надграф G с тем же множеством вершин, который имеет такое изображение $\mathcal{G}$, что каждая пара пересекающихся рёбер в $\mathcal{G}$ будет парой диагоналей в границе четырёхугольника плоского графа $P(\mathcal{G})$. В надграфе H возможны кратные рёбра.*

Изображения 2-планарных графов. Аналогичный теореме 1 результат верен и для 2-планарных графов, но его доказательство намного более сложное. Эта теорема доказана в работе [8].

Теорема 3 (Д. В. Карпов, 2019). *Пусть G — 2-планарный граф, а $\mathcal{G}$ — его изображение с минимальным числом точек пересечения рёбер. Тогда любые два пересекающихся (то есть, имеющих общую внутреннюю точку) рёбра в изображении $\mathcal{G}$ пересекаются ровно в одной точке, а никакие два рёбра с общим концом не пересекаются.*

Рассмотрим граф пересечения рёбер плоского изображения графа G (вершины — рёбра из $E(G)$, две вершины смежны, если и только если соответствующие рёбра пересекаются). Для 1-планарного графа каждая компонента графа пересечения состоит из двух пересекающихся рёбер. Для больших k , даже для $k = 2$, компоненты графа пересечения могут иметь сколь угодно большой размер, что подсказывает нам: найти прямой аналог теоремы 2 даже для 2-планарных графов невозможно.

Мы представим результат, делающий изображение 2-планарного графа чуть более упорядоченным.

Определение. 1. В плоском изображении графа для каждой вершины x можно упорядочить по часовой стрелке *выходы* рёбер из этой вершины. Два выхода назовём *соседними*, если между ними хотя бы с одной стороны нет других выходов рёбер.

2. Назовем граф G' *2-диагональным*, если его можно изобразить на плоскости так, что каждое ребро пересекает не более чем два других, а для любой вершины x среди любых трёх последовательных выходов рёбер из x есть выход хотя бы одного простого ребра.

3. Говоря об *изображении* $\mathcal{G}'$ 2-диагонального графа G' на плоскости, мы всегда будем подразумевать, что оно удовлетворяет свойству из определения. Плоский граф $G = P(\mathcal{G}')$ мы будем называть *плоским* графом 2-диагонального графа G' .

В случае, когда плоский граф $P(\mathcal{G})$ двусвязен, граница каждой его грани — простой цикл. Условие 2-диагональности тогда утверждает, что из каждой вершины грани выходит не более чем две диагонали (то есть непростых рёбра, изображенных внутри этой грани).

Теорема 4 (Д. В. Карпов, 2019). *Любой 2-планарный граф H имеет 2-диагональный надграф H' на том же множестве вершин (то есть, с $V(H') = V(H)$). В графе H' допускаются кратные ребра.*

Теорема 2 помогла Бородину доказать, что хроматическое число 1-планарного графа не более 6. Так и теорема 4, опубликованная в [8], помогает доказать оценку на хроматическое число 2-планарных графов.

Изображения k -планарных графов при $k \geq 3$. При $k \geq 3$ в общем случае не доказано аналога теорем 1 и 3. Для k -планарных графов мы можем предложить лишь более слабый результат, причем при дополнительном условии.

Теорема 5 (Д. В. Карпов, 2019). *Пусть $k \geq 3$ — натуральное число, G — рёберно $(2k + 1)$ -связный k -планарный граф, а $\mathcal{G}$ — его изображение с минимальным числом точек пересечения рёбер. Тогда любые два пересекающихся (то есть, имеющих общую внутреннюю точку) ребра в изображении $\mathcal{G}$ пересекаются ровно в одной точке.*

Отметим, что в теореме 5 не запрещает рёбрам с общим концом иметь одну точку пересечения.

Стоит отметить один результат о пересечении ребер в изображении, верный для k -планарного графа при любых k . Этот результат получен Пахом и Тотом в работе [3] и является весьма полезным. В частности, он используется в качестве леммы для доказательства теорем из [8].

Точки пересечения и концы делят рёбра на части — также ломаные. Если A и B — две точки на ребре e (возможно, его концы), то через AeB мы будем обозначать участок ребра между этими точками.

Определение. Пусть e и f — два ребра в плоском изображении $\mathcal{G}$ графа G , а X и Y — две их общие точки (точки пересечения или концы), причем участки XeY и XfY не пересекаются друг с другом и в одной из областей, ограниченной ими, нет вершин графа G . Мы будем называть такую ситуацию *зацеплением* рёбер e и f .

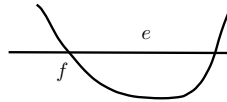


Рис. 2: Зацепление.

Теорема 6 (J. Pach, G. Toth, 1997.). Пусть $\mathcal{G}$ — изображение k -планарного графа G с минимальным числом точек пересечения. Тогда $\mathcal{G}$ не имеет зацеплений.

Верхняя оценка на количество ребер k -планарного графа. Напомним классический факт: из формулы Эйлера следует, что для планарного графа G без петель и кратных рёбер с $v(G) \geq 3$ выполняется неравенство $e(G) \leq 3(v(G) - 2)$.

Пах и Тот [3] оценили количество ребер в k -планарном графе без петель и кратных ребер при $1 \leq k \leq 4$.

Теорема 7 (J. Pach, G. Toth, 1997.). Пусть $k \leq 4$. Тогда для k -планарного графа G без петель и кратных рёбер с $v(G) \geq 3$ выполняется неравенство $e(G) \leq (k + 3)(v(G) - 2)$.

Оценка из теоремы 7 для $k = 1$ и $k = 2$ точна.

Для $k = 1$ пусть G'_n — плоский граф на n вершинах, все грани которого — четырёхугольники. Несложно построить такие графы для всех достаточно больших n . Проведем в G'_n две диагонали каждой грани и получим серию 1-планарных графов G_n с $e(G_n) = 4(n - 2)$.

Отметим, что в полученной серии примеров любая пара пересекающихся ребер — это диагонали грани-четырёхугольника плоского графа соответствующего изображения. Напомним, что любой 1-планарный граф по теореме 2 имеет такой надграф. Есть намного более простое доказательство теоремы 7 для случая 1-планарных графов, это утверждение напрямую следует из теоремы 2.

Для $k = 2$ мы построим серию плоских графов H'_n на n вершинах, все грани которых — пятиугольники (такие графы существуют при всех достаточно больших $n = 3m + 2$). Построим 2-планарный граф H_n , проведя в H'_n все 5 диагоналей каждой грани. Получим серию 2-планарных графов H_n с $e(H_n) = 5(n - 2)$.

При $k = 3$ результат теоремы 7 можно улучшить, это сделали Пах и Тот с соавторами в 2006 году [4].

Теорема 8 (J. Pach, R. Radoićić, G. Tardos, G. Toth, 2006). Для 3-планарного графа G без петель и кратных рёбер с $v(G) \geq 3$ выполняется неравенство $e(G) \leq 5.5(v(G) - 2)$.

Оценка из теоремы 8 почти точна. Можно построить бесконечную серию примеров плоских графов, у которых почти все грани — 6-угольники (точнее, придется добавить 12 граней 5-угольников). В пятиугольниках нужно провести все диагонали, а в каждом шестиугольнике — провести все диагонали, кроме одной из главных. Таким образом, получится серия 3-планарных графов F_n на n вершинах (для бесконечной последовательности натуральных n) с

$$e(F_n) = 5.5n - 15.$$

При больших k стоит упомянуть еще один результат Паха и Тота [3]. Эта теорема, доказанная вероятностным методом, конечно же, не дает точной оценки.

Теорема 9 (J. Pach, G. Toth, 1997). Пусть $k \geq 4$, а G — k -планарный граф без петель и кратных ребер. Тогда $e(G) < \sqrt{16,875k} \cdot v(G)$.

Несколько слов о верхней оценке на количество ребер двудольного 1-планарного графа. Из формулы Эйлера мы знаем, что для двудольного планарного графа G выполнено $e(G) \leq 2v(G) - 4$. Любопытно сравнить эту классическую оценку с результатом из [7].

Теорема 10 (Д. В. Карпов, 2019). Пусть G — двудольный 1-планарный граф на $v \geq 4$ вершинах. Тогда $e(G) \leq 3v - 9$ при нечетном n и $n = 6$;
 $e(G) \leq 3v - 8$ при четном $n \neq 6$.

Обе оценки из теоремы 10 точны для всех n , для которых они имеют смысл.

О хроматическом числе k -планарных графов. Напомним, что *хроматическое число* графа G (обозначается $\chi(G) \leq 7$) — это наименьшее количество цветов в правильной раскраске его вершин.

Оценка хроматического числа 1-планарных графов. В 1965 году Рингель [1] доказал, что любой 1-планарный граф можно правильно раскрасить в 7 цветов и предположил, что для этого достаточно 6 цветов.

Теорема 11 (G. Ringel, 1965). Для любого 1-планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 7$.

Гипотеза (G. Ringel, 1965). Для любого 1-планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 6$.

Гипотезу Рингеля в 1984 году доказал Бородин [6].

Теорема 12 (О. В. Бородин, 1984). Для любого 1-планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 6$.

Так как полный граф на 6 вершинах K_6 — это 1-планарный граф, оценка из теоремы 12 точна.

Вместо теоремы 12 Бородин доказал эквивалентную ей. Нам понадобится понятие 4-правильной раскраски плоского графа.

Определение. Пусть H — плоский граф. Тогда $\chi_4(H)$ — минимальное количество цветов в правильной раскраске графа H , в которой все вершины каждой грани-четырёхугольника покрашены в разные цвета. Такую раскраску назовем 4-правильной.

Теорема 13 (О. В. Бородин, 1984). *Для любого плоского графа G выполнено $\chi_4(G) \leq 6$.*

Докажем что теоремы 12 и 13 эквивалентны.

Теорема 12 $\Rightarrow$ Теорема 13. Рассмотрим планарный граф G . Проведем в каждой грани-четырёхугольнике графа G две диагонали, получим 1-планарный граф G' , который имеет правильную раскраску в 4 цвета по теореме 12.

Теорема 13 $\Rightarrow$ Теорема 12. Рассмотрим 1-планарный граф G' . По теореме 2 он имеет надграф H' , в котором каждая пара пересекающихся ребер является диагоналями грани-четырёхугольника. Тогда правильная раскраска H' — это 4-правильная раскраска плоского графа H , состоящего из простых ребер графа H' . Для такой раскраски достаточно 6 цветов по теореме 13.

В 1969 году Оре и Пламмер [2] исследовали k -правильную раскраску плоских графов.

Определение. Пусть H — плоский граф. Тогда $\chi_k(H)$ — минимальное количество цветов в правильной раскраске графа H , в которой все вершины каждой грани размера не более k — разного цвета. Такую раскраску назовем k -правильной.

Теорема 14 (О. Ore, M. Plummer, 1969). *Верны неравенства*

$$\left\lceil \frac{3k}{2} \right\rceil \leq \max_{G\text{-планарный граф}} \chi_k(G) \leq 2k - 1.$$

В теореме 13 Бородин показал, что для 4-правильных раскрасок верной является нижняя граница из теоремы 14. Выскажем предположение, что это верно и для 5-правильных раскрасок плоских графов.

Гипотеза. *Для любого плоского графа G выполнено $\chi_5(G) \leq 8$.*

Если $\chi(G') \leq t$ для любого 2-планарного графа G' , то $\chi_5(G) \leq t$ для любого плоского графа G . Однако, обратная импликация как минимум неочевидна (а может быть, и неверна).

Из оценки на число ребер 2-планарного графа (теореме 7) следует, что любой 2-планарный граф имеет среднюю степень менее 10, и поэтому хроматическое число не более 10. В 2021 году было доказано [9], что любой 2-планарный граф имеет хроматическое число не более 9.

Теорема 15 (Д. В. Карпов, 2021.). *Для любого 2-планарного графа G выполнено $\chi(G) \leq 9$.*

Еще об изображении 1-планарных графов. В 2014 году Акерман [5] доказал следующий результат.

Теорема 16 (Е. Ackerman, 2014). Пусть $\mathcal{G}$ — изображение 1-планарного графа (петель нет, самопересечений ребер нет, два пересекающихся ребра пересекаются один раз крест-накрест и не имеют общего конца). Тогда $\mathcal{G}$ можно представить в виде объединения плоского графа и плоского леса (то есть леса, изображенного без пересечений ребер в этом конкретном изображении).

Эта теорема имеет несколько несложных доказательств. В то же время, ее аналог для 2-планарных графов не доказан.

Гипотеза. Пусть $\mathcal{G}$ — изображение 2-планарного графа. Тогда $\mathcal{G}$ можно представить в виде объединения плоского графа и двух плоских лесов.

Список литературы

1. Ringel. G. Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. — 1965. — Bd. 29. — S. 107–117.
2. Ore O., Plummer. M. Cyclic colrings of planar graphs // Recent Progress in Combinatorics, (Proc. Third Waterloo Conf. Combin., May 1968). — Academic Press, 1969.
3. Pach J., Tóth. G. Graphs drawn with few crossing per edge // Combinatorica. — 1997. — 17, no. 3. — P. 427–439.
4. Pach J., Tóth. G. Improving the Crossing Lemma by Finding More Crossings in Sparse Graphs // Discrete and Computational Geometry. — 2006. — 36. — P. 527–552.
5. Ackerman E. A note on 1-planar graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2014. — Vol. 175. — P. 104–108.
6. Бородин О.В. Решение задачи Рингеля о вершинно-граневой раскраске плоских графов и о раскраске 1-планарных графов // Методы дискретного анализа в изучении реализаций логических функций. — 1984. — Вып. 41. — С. 12–26.
7. Карпов Д.В. Верхняя оценка количества рёбер в двудольном почти планарном графе // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2012. — Т. 406 — С. 12–30.
8. Карпов Д.В. Об изображении 2-планарного графа на плоскости // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2019. — Т. 488. — С. 49–65. — <http://www.pdmi.ras.ru/zns1/2019/v488/abs049.html>
9. Karpov. D. V. An upper bound on the chromatic number of 2-planar graphs // Discussiones Mathematicae Graph Theory, in press.

DOI: 10.20948/dms-2022-5