Чудо самоорганизованной критичности

> Цель науки о самоорганизованной критичности – внести ясность в фундаментальный вопрос о том, почему природа сложна, а не проста, как то подразумевают законы физики.
>
> *П.Бак*

Замечательная книга датского ученого, много лет работавшего в США – Пера Бака «Как работает природа: Теория самоорганизованной критичности», написанная в 1996 году, издается в России лишь в 2012 году, через 16 лет после ее выхода на английском языке. Это не соответствует ни важности обсуждаемых в ней идей, ни той роли, которую сыграла теория самоорганизованной критичности в развитии междисциплинарных подходов, ни ее месту в современном естествознании. Во время ее первого издания библиография, посвященных этой теории, приближалась к 2 тыс. работ, а ныне она выросла на порядок, перешагнув и 17-тысячный рубеж. Идеи самоорганизованной критичности сейчас широко используют в геофизике и социологии, теории прогноза землетрясений и лингвистике, в астрофизике и экономике.

Если оставить в стороне долгие издательские перипетии, связанные с получением разрешения на издание, с самим переводом, с его редактированием и невозможностью получить поддержку на выпуск этой книги от российских фондов и прочее, прочее, прочее, то всё равно получается очень долго. В чем же дело?

Яркая, талантливая, необычная книга, оказавшаяся на грани философии, физики и компьютерного моделирования, на границе между научно-популярной литературой, серьезной монографией и мемуарами, оказалась «неформатом». Что-то непривычное, резкое выделяющееся из общего ряда, трудно вместить в привычные рамки. Порой ученым неясно, на какую полочку всё это следует положить. Но главное, конечно, состоит в том, что в современной России очень трудно сформировать активное энергичное научное сообщество, способное среди прочего к переводу и изданию основополагающих работ. Отечественная наука стала субъективной: есть человек, занимающейся определенной проблемой, – есть проблема, нет человека – нет и проблемы.

Пер Бак пишет, как нелегко было опубликовать первую статью по этой тематике, сделать первые доклады. Квалифицированные, признанные, уважаемые рецензенты долго не могли понять, с чем же они имеют дело, а поэтому и не могли дать положительные отзывы.

С такой же трудностью в свое время столкнулся Дэвид Рюэль, заложивший вместе с Флорисом Такенсом математические основы теории динамического хаоса. Именно они и ввели понятие «странного аттрактора» – одной из самых ярких и волнующих идей в естествознании XX века. В журнале по гидродинамике рецензенты отвечали, что это не их тема – тут нет конкретных течений, расчетов, анализа полученных решений или обсуждения экспериментов. Математики недоумевали, почему авторы выбрали для анализа такой специальный частный случай. И это продолжалось так долго, что Д. Рюэлю пришлось создать свой журнал для публикации статьи, ставшей классической, и других работ этого направления.

Хрестоматийной является история открытия колебательной химической реакции Белоусова–Жаботинского – одной из самых интересных экспериментальных работ XX века. Все попытка опубликовать статью о замечательном явлении, которое наблюдалось без сложных приборов, а просто при сливании двух жидкостей в пробирке, в течение многих лет оказывались тщетными. Один рецензент писал, что это противоречит основам термодинамики и такого не может быть, потому что не может быть никогда.

Другой заявлял, что публиковать такое можно только после того, как появится теория (что произошло лишь через двадцать лет). При этом само явление показывалось на множестве семинаров в различных академических институтах, но и это не помогало делу. Все смотрели, удивлялись, а затем возвращались к своим делам. В конце концов, Б.П. Белоусов оставил надежду что-либо опубликовать, и только благодаря счастливой случайности через несколько лет его удалось убедить написать очень коротенькую заметку в сборник рефератов по радиационной медицине. Удивительное заметить и оценить оказывается гораздо труднее, чем привычное, рутинное, ожидаемое.

Поэтому, на наш взгляд, и книге П. Бака стоит предпослать небольшое предисловие, своеобразные «методологические заметки», очертить роль круга идей в теории самоорганизации.

Междисциплинарность и философия

Отношение большинства специалистов к философии и методологии науки прекрасно выразил выдающийся физик-теоретик Ф. Дайсон в статье «Математика в физике», написанной почти полвека назад: *«В каждом столетии имелось всего несколько физиков – в нашем веке возможно только Эйнштейн, Вейль, Бор, Бриджмен и Вигнер, которые углубились в основы знания достаточно глубоко, чтобы столкнуться с подлинно философскими трудностями. Большинство работающих ученых, и я в том числе, находят удовлетворение в словах французского математика Лебега: «Мне кажется, математикам, поскольку они математики, не следует утруждать себя философией – мнение, которое, кроме того, высказывалось многими философами».*

Мы с удовольствием готовы оставить философию таким гигантам, как Бор и Вигнер, получая сами удовлетворение от исследования природы на более поверхностном уровне»[1].

Типичный дисциплинарный взгляд начала XX века. Математики должны заниматься математикой, философы – философией. «Беда, коль пироги начнет печи сапожник, а сапоги тачать пирожник». Однако сейчас, в XXI веке, мы мыслим ровно наоборот, примерно так же, как рассуждал Ш.М. Талейран, полагавший, что война – слишком серьезное дело, чтобы доверять ее военным. Точно так же философия – слишком серьезное дело, чтобы доверять ее философам.

Прошедшее столетие поколебало «дисциплинарную» позицию, казалось бы, незыблемо стоящую на фундаменте здравого смысла. Сначала это сделала кибернетика, обязанная своим появлением энергии и энтузиазму американского математика Норберта Винера. Он определил этот *междисциплинарный* подход как *«общую теорию управления и связи в технике, в организме, в обществе»*. При этом идеи кибернетики оказали большое влияние на радиотехнику и медицину, биологию и математику, психологию и инженерные науки.

Подход оказался гораздо более общей и широкой сущностью, чем отдельные дисциплины. Более того, многие сферы исследований и научные направления возникли благодаря этому подходу и на его основе. Среди них робототехника и системное программирование, имитационное моделирование и ряд разделов дискретной математики, когнитивная психология и теория нейронных сетей, а также многое, многое другое. Идеи, образы, метафоры и модели кибернетики оказались содержательными, глубокими и плодотворными. Сложилась парадоксальная ситуация – физики, биологи, математики и психологи на конференциях по кибернетике начали, к примеру, обсуждать сущность и пути моделирования экономических процессов. И их идеи и суждения были ин-

[1] Новые проблемы физики. Сборник статей. М.:Знание, 1965, с.5.

тересными, содержательными, плодотворными и, в конечном итоге, полезными профессиональным экономистам. Оказалось, что взаимодействие «сапожников» и «пирожников» порой приводит к неожиданным и очень важным результатам.

Именно в ходе междисциплинарного диалога удается осознать, что в науке сегодня является наиболее важным и общим, очертить контуры нашего незнания, увидеть те границы, на которых, скорее всего, будет рождаться новое. И, конечно, для многих исследователей общение с коллегами из других, порой весьма далеких от их собственных, областей – это способ избежать «профессионального кретинизма». Помните, у Козьмы Пруткова: «Специалист подобен флюсу: полнота его односторонняя». Или другое расхожее определение специалиста: «Профессионал не делает мелких ошибок на пути к своей главной неудаче».

Стоит подчеркнуть еще одну важную деталь. До начала XX века общие черты и механизмы многих процессов, явлений, систем рассматривались философами. Достаточно вспомнить гегелевскую «Философию природы» и сформулированные ее автором законы диалектики «единство и борьба противоположностей», «переход количества в качество», «отрицание отрицания». Как применять эти идеи в конкретной научной деятельности, к каким сущностям они относятся в данной предметной области, как, исходя из них, строить исследовательские программы – эти и другие вопросы следовало адресовать к интуиции исследователя. Неконкретность этих законов обеспечивает их всеобщность и создает иллюзию понимания.

Иными словами, ученым предлагался набор метафор, из которых они могли выбирать наиболее близкие и подходящие, вдохновляющие их. Вернер Гейзенберг связывал идеи квантовой механики с мировоззрением Платона; на Альберта Эйнштейна большое влияние оказали идеи Маха и творчество Достоевского; Нильс Бор, формулируя принцип дополнительности, апеллировал к традиции ряда философских школ Востока. Однако все эти метафоры не становятся частью науки, они, скорее, стимулируют интуицию исследователей, чем дают ключ к пониманию.

И здесь междисциплинарные подходы во второй половине XX века делают важный шаг – они начинают говорить о весьма общих идеях и структурах на языке математических моделей. Это позволяет конкретизировать и прояснить целое пространство идей, выводя его из области интуитивных догадок в сферу рационального знания, что, в свою очередь, дает огромный импульс множеству традиционных областей и направлений науки, а также помогает создавать новые.

Еще в большей степени это относится к междисциплинарному подходу – *теории самоорганизации*, или *синергетике* (от греческого «совместное действие»).

Само появление синергетики связано с важным поворотом в научной стратегии. Пожалуй, с Нового Времени до середины XX века магистральным путем был анализ, дробление научного знания, дифференциация наук на разделы, становящиеся со временем самостоятельными дисциплинами. Идеалом ученого был человек, знающий всё ни о чем.

Отсюда понятно мировоззренческое значение междисциплинарного подхода. В самом деле, на реальность можно смотреть с двух диаметрально противоположных позиций. С первой видно возникновение и развитие нашей реальности. Исаак Ньютон сравнивал мир с гигантским часовым механизмом, который был создан и запущен богом. Чарльз Дарвин полагал, что первый набор видов сотворен Господом, а далее в свои права вступает эволюция. Это последовательный религиозный взгляд на мир.

В рамках второго подхода, который присущ науке, рождение и развитие мира в его различных частях должно объясняться внутренними причинами, не организацией, а *самоорганизацией*, которая происходит в результате взаимодействия различных сущностей.

Синергетика уже во многом изменила и нашу картину мира, и научные стратегии. Поэтому произошедшие перемены должны были «почувствовать» многие области, исследующие науку как таковую и, в частности, философия науки.

Именно это и произошло в 1990-х годах. Одной из общепринятых концепций развития научного знания является теория, предложенная американским исследователем Томасом Куном в 1950-е годы в книге «Структура научных революций». Его идея состояла в выделении двух видов развития научного знания и представлении о так называемой *парадигме*.

В последний термин он вкладывал два смысла. С одной стороны, это яркое, выдающееся достижение, меняющее стандарт научной деятельности, некоторая исходная концептуальная схема. С другой – модель постановки проблем и их решения.

В ходе разработки парадигмы генерируется и находится множество разных задач для ученых и исследователей разного уровня. Развитие парадигмы, процесс медленного эволюционного накопления знаний, уточнения деталей, Томас Кун назвал *нормальной наукой*.

Однако с течением времени, в ходе занятий нормальной наукой, у исследователей накапливается всё больше вопросов, на которые не удается получить ответы в рамках существующей парадигмы, растет число несоответствий между предсказаниями теории и результатами экспериментов и наблюдений. Происходит кризис в данной области. Выход из него связан с так называемой *научной революцией*, приводящей к рождению новой парадигмы, превосходящей старую.

Примеры парадигм – геоцентрическая система Птолемея и гелиоцентрическая система Коперника. Обе они объясняли и давали количественные предсказания для движения планет по небесному своду. Однако со временем в рамках второй парадигмы ту же задачу удалось не только решить проще, но и объяснить количественные совпадения, в рамках первой парадигмы не имевшие объяснения. Переход от одной парадигмы к другой и был содержанием «коперниковской» революции в астрономии. В целом, более ясные и простые ответы в новой парадигме на принципиальные вопросы, ставившиеся в старой – характерный признак научной революции.

Отсюда понятно, насколько важны инструменты – дифракционная решетка в XIX веке, ускоритель в XX, гигантские телескопы, выведенные за пределы атмосферы в XXI. Они позволяют увидеть новые грани реальности, дать более точные количественные данные и, главное, задать новые вопросы. Эти вопросы предшествующие поколения исследователей, скорее всего, себе не задавали, и в рамки предыдущей парадигмы ответы на них вполне могут не укладываться.

Вначале под парадигмами понимали выдающиеся общенаучные концепции, влияющие на мировоззрение – механику Ньютона или эволюционное учение Дарвина, теорию относительности или основы молекулярной биологии. Однако со временем стало ясно, что понятие «парадигмы», «нормальной науки», «научной революции» применимы и к отдельным областям науки, и к более скромным достижениям.

Однако развитие междисциплинарных подходов изменило эту ясную, общую куновскую картину. Оказалось, что революции революциям рознь.

На эти вопросы обратил внимание известный специалист по философии науки (в некоторых международных рейтингах его включают в число 5 наиболее выдающихся философов, живущих сейчас) – академик В.С. Стёпин: *«Рассматривая механизмы внутридисциплинарных научных революций, я обратил внимание на особый вид революций в науке, связанных с междисциплинарными взаимодействиями. Этот вариант не был проанализирован Т. Куном. Он осуществляется за счет «междисциплинарных трансплантаций», когда основания одной науки начинают изменять основания другой. В этих случаях научные революции не обязательно начинаются с аномалией и кризи-*

сов. Так развертывалась великая революция, приведшая к возникновению дисциплинарно организованной науки. Так возникли революционные изменения в химии под влиянием квантовой физики, в современной биологии под влиянием идей кибернетики и теории информации»[2].

Именно к такой революции и привело развитие теории самоорганизации, или синергетики. Синергетика, рассматривая открытые нелинейные далекие от равновесия системы говорит на языке математических моделей. В ее основе – успехи в развитии прикладной математики и математического моделирования. Путь от описательной стадии к классификации, к выдвижению гипотез и их проверке, к построению теорий стал, по меркам XIX и даже первой половины XX века, стремительным. На наших глазах родились математическая психология, теоретическая география, эконофизика, математическая история и многие другие направления.

Математические модели из одних областей знания удивительным образом «подошли» для других, эффекты, явления, понятия и методы анализа «как целое» переносились на другую почву и порой давали удивительные результаты. И это прекрасно показывает книга Пера Бака, в которой идеи, развившиеся при анализе коллективных явлений в физике твердого тела, дают новый взгляд и новые постановки задач в теории прогноза землетрясений и нейробиологии, в теории эволюции и географии, в описании дорожных пробок и экономике. При этом важно подчеркнуть, что мы имеем дело не с качественным пониманием, а с полуколичественным описанием (на уровне определения показателей степенных зависимостей), с числовыми характеристиками исследуемых систем.

Другое основание развития междисциплинарных подходов – широкое использование компьютеров. Именно они раздвинули рамки, в которых можно строить математические модели изучаемых процессов, явлений, систем. Развитие суперкомпьютеров стремительно отодвигает эти рамки всё дальше. Однако количественные сдвиги не сравнимы с тем качественным, революционным переходом, который уже произошел.

Одним из его результатов стала возможность исследовать *нелинейные системы*. Их отличительная черта – отсутствие принципа суперпозиции (наложения), хорошо известного из школьной физики. Вспомним закон Кулона. Чтобы найти силу, действующую на данный заряд со стороны всех остальных, надо просто найти силы, с которыми он притягивается или отталкивается от каждого заряда *по отдельности*, сложить их и получить результат.

В нелинейных системах, как правило, дело обстоит *иначе*. Принцип суперпозиции неприменим, и для каждой нелинейной системы приходится искать свои методы исследования и описания. Это путь к странному, парадоксальному, антиинтуитивному поведению, к новым трудностям и проблемам. Но с другой стороны – это и дорога к более глубокому пониманию реальности, к осознанию своих возможностей описывать и прогнозировать происходящие процессы.

И здесь можно обратить внимание на то, что классическая модель теории самоорганизованной критичности – *куча песка*, введенная П. Баком, Ч. Тангом и К. Визенфельдом, – и исследовалась, и, что еще важнее, создавалась в ходе вычислительных экспериментов. Компьютеры, говоря школьным языком, позволяют «заглянуть в ответ, не решая задачи». Конечно, со временем появляется более глубокое понимание, а с ним и более простые, точно решаемые модели, которые могут быть проанализированы с помощью карандаша и бумаги (и, заметим, обычно весьма развитого мате-

[2] Стёпин В.С. Важно, чтобы работа не прекращалась. Беседа третья. Культура и типы рациональности./ Человек. Наука. Цивилизация. К семидесятилетию академика В.С. Степина. – М: Канон +, 2004, с.67.

матического аппарата). И такой путь также типичен для междисциплинарных исследований.

Однако вернемся к научным революциям и к концепции, выдвинутой В.С. Стёпиным, к самым радикальным переменам в научной картине мира и в стратегии познания:

«Анализируя оба типа научных революций, я выделил ситуации, когда происходит радикальная перестройка всех компонентов оснований науки: ее картины мира, идеалов и норм, ее философских оснований. Обозначив такие случаи как глобальные научные революции, я связал их с изменением типа научной рациональности. Так были введены в методологический обиход представления о трех типах рациональности – классической, неклассической и постнеклассической.

Первый из них (классика) характеризуется особым пониманием идеалов объяснения и описания. Предполагается, что объективность объяснения и описания достигается только тогда, когда в цепочке деятельности «субъект – средства (операции) – изучаемый объект» объяснения сосредотачивается только на объекте и будет исключено всё, что относится к субъекту, средствам и операциям деятельности.

Второй (неклассика) эксплицирует связи между знаниями об объекте и характером средств и операций деятельности. Объяснение и описание включает принцип относительности объекта к средствам наблюдения (квантово-релятивистская физика).

Третий (постнеклассика) расширяет поле рефлексии над деятельностью, учитывает соотнесенность получаемых знаний об объекте не только с особенностью средств и операций деятельности, но и с ее ценностно-целевыми структурами. В явном виде учитывается связь между внутринаучными и вненаучными социальными целями и ценностями.

…Классическая рациональность позволяет осваивать в познании простые (малые) системы, неклассическая – сложные системы с саморегуляцией и обратными связями, постнеклассическая – исторически развивающиеся системы, в том числе и такой их вариант, как человекоразмерные системы (исторически развивающиеся системы с включенным в них человеком)»[3].

Высказанные общие идеи имеют прямое отношение и к самоорганизованной критичности, и к книге Пера Бака.

В самом деле, всем студентам, обучающимся на физических факультетах университетов, можно на лабораторных работах предоставить маятники, реостаты, радиоактивные изотопы. Работая с ними и сдавая свои задачи преподавателям, они убеждаются на своем примере в азах классической механики, электродинамики или ядерной физики.

Однако в конце XX века наука столкнулась с необходимостью всерьез исследовать и прогнозировать уникальные, саморазвивающиеся системы. В центре внимания оказались проблемы безопасности, способы избежать тех или иных угроз. Примеров здесь много – сама Вселенная, геологическая эволюция Земли, возникновение и развитие биосферы, динамика цивилизаций и культур, самого научного знания, техносферы и системы вооружений, становление и развитие языка, система международных отношений и мировая динамика.

Что объединяет все эти системы?

Масштабная инвариантность. Она проявляется в отсутствии одного выделенного масштаба, на котором развиваются изучаемые процессы. Это очень важный

[3] Стёпин В.С. Важно, чтобы работа не прекращалась. Беседа третья. Культура и типы рациональности./ Человек. Наука. Цивилизация. К семидесятилетию академика В.С.Стёпина. – М: Канон +, 2004, с.67-68.

момент – большинство успехов физики, химии или экономики связаны с анализом объектов, в которых такой масштаб есть. Значит, можно описывать процессы, развивающиеся на нем, отвлекаясь от того, что происходит на других масштабах или уровнях организации. Однако есть системы, в которых так действовать нельзя и в идеале нужно было бы описывать очень большой интервал масштабов, на котором разворачиваются процессы.

Целостность. Она связанна с наличием у системы свойств, которых не имеют составляющие ее части. Многие масштабно-инвариантные системы обладают свойством целостности, потому что происходящие в них процессы устроены одинаково на всех масштабах. Целостность означает возможность гигантского усиления, в результате которого части системы начинают вести себя согласованным образом.

Иерархичность. Многие системы – от структурных элементов земной коры разных масштабов до фондовых рынков, на которых присутствуют компании с совершенно разными возможностями, и многие-многие другие являются иерархическими. В них каждый уровень организации может обладать своими свойствами, своим языком, своими интересами, которые определяют его взаимодействие с другими уровнями.

Необратимость. Событие, произошедшее один раз, может навсегда изменить траекторию системы, лишить нас одних возможностей и открыть другие. По мнению палеонтологов, млекопитающие получили свой шанс и блестяще им воспользовались в результате гигантского, катастрофического вымирания динозавров, произошедшего 65 миллионов лет назад. Иными словами, мы сами – результат счастливого для нас стечения обстоятельств, запомненного случайного выбора.

Уникальность. Вселенная, жизнь, биосфера, мировая экономика и многие другие крайне важные сущности даны нам в единственном экземпляре. Здесь нельзя повторить еще и еще раз опыт, изменив условия и уточнив результаты. Система не является эргодичной и не демонстрирует на траектории всех своих свойств. И вместе с тем мы должны осмысливать, прогнозировать и планировать свои действия в этом единственном мире, в котором живем, и в единственной жизни, находящейся в нашем распоряжении. Это бросает вызов многим научным дисциплинам. Осознание его масштабов и серьезности началось в конце XX века и происходит сейчас.

В попытке понять системы, обладающие перечисленными чертами, в синергетике развивается в течение последних десятилетий *парадигма сложности*. И теория самоорганизованной критичности является одной из основ этой теории. Удивительным образом она дает свой глубокий и оригинальный взгляд на многие важные проблемы.

И синергетика в целом, и теория самоорганизованной критичности в частности в той части, которая связана с социальными системами, относятся к постнеклассической науке. Именно с ней связываются надежды на понимание тех сложных систем, от которых зависит наше настоящее и будущее.

Стиль, язык, математика

Математика – это больше, чем наука, это – язык.

Н.Бор

…есть знание о мире и есть понимание мира, и они относительно самостоятельны.

И.Кант

Мы ничего не хотим знать и все хотим понимать.

А.Эйнштейн

Синергетика представляет собой междисциплинарный подход, лежащий на пересечении сфер предметного знания, философской рефлексии и математического моделирования. Синергетика говорит языком математических моделей. И если мы взглянули на теорию самоорганизованной критичности как на ключевой элемент новой парадигмы синергетики в философском контексте, то естественно посмотреть на нее и с математической стороны.

Лауреат Нобелевской премии и замечательный популяризатор науки С. Вайнберг писал, что каждая формула в книге уменьшает число ее американских читателей вдвое. Очевидно, имея в виду такое положение дел, Пер Бак исключил все формулы, какие возможно, из своей книги. Однако многие вещи проще, точнее и понятнее могут быть выражены языком математики (поэтому такой язык родился и получил широкое распространение в тех областях, где словесное описание оказывается слишком расплывчатым и нечетким или где приходится что-то измерять).

Читатели, которые думают иначе, могут с легкостью пропустить эту часть предисловия без ущерба для понимания дальнейшего. Остальным мы попробуем вкратце рассказать, какая же математика стоит за разными парадигмами синергетики.

Пер Бак отмечает, что известные нам законы природы могут быть выписаны на нескольких тетрадных листах. Однако извлечение следствий из них потребовало создания целых разделов науки и напряженных совместных усилий многих талантливых людей в течение веков. Для того чтобы пояснить и показать их действие в простейших ситуациях, были предложены различные *базовые модели*. Они играют очень важную роль, давая «понимание» многих явлений и процессов.

Само слово «понимание» в точных науках обычно означает возможность свести проблему к чему-то хорошо исследованному, простому, очевидному. Это «очевидное» является основой для интуиции, позволяющей оценивать многое без сложных расчетов, экспериментов, специальных исследований.

Именно поэтому в школьной физике уделяется такое внимание наклонным плоскостям, идеальным газам, реостатам и линзам. Они дают простые объекты, наглядные образы, показывают, как действует фундаментальные законы в простейших ситуациях, и указывают направления, в которых следует двигаться, рассматривая более сложные сущности.

Еще более важны такие объекты в «мягком моделировании», когда фундаментальные законы, определяющие динамику исследуемых систем, неизвестны. Именно поэтому в таких областях предлагают базовые модели, *отражающие типичные свойства больших классов объектов изучаемой области*.

Выдающийся математик, физик и философ Анри Пуанкаре, размышляя над путями развития научного знания, обратил внимание на то, что в некоторые моменты казавшееся простым вдруг оказывается сложным, и, напротив, при анализе сложных сущностей возникает новая простота. Или в терминах философии науки такие повороты от простого к сложному и от сложности к простоте – признаки рождения новой научной парадигмы.

С этой точки зрения, в синергетике можно выделить три парадигмы и три класса базовых математических моделей. Первая связана с исследованием диссипативных структур, вторая – с изучением динамического хаоса, третья, в развитии которой важный вклад внесли идеи Пера Бака и его коллег, – с анализом сложности. Каждая из них потребовала своего математического языка, понятий, количественных характеристик. В каждой из них задаются свои вопросы об исследуемых системах, и свой смысл вкладывается в термин «понимание».

Остановимся на этом подробнее. «Понимание», лежащее на междисциплинарном уровне, во многом связано с идеями качественного анализа *динамических систем.*

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x},t), \ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 , \ 0 \le t < \infty , \tag{1}$$

Со времен Исаака Ньютона такие модели, описывающие изменения характеристик системы $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_p(t))$ со временем t, становятся основным инструментом математического моделирования. Этот язык используется в большинстве фундаментальных теорий. На нем формулируются законы природы, в которых рассматривается динамика – изменение во времени.

Целью анализа уравнений (1) является их интегрирование – нахождение в явном или неявном виде зависимости $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$. Однако класс задач, в которых этот идеал может быть достигнут, очень невелик.

Поэтому А. Пуанкаре предложил сосредоточиться на построении *качественной теории* – исследовании установившихся режимов, или асимптотик, описывающих поведение изучаемого объекта на больших временах. Именно набор этих асимптотик в фазовом пространстве, названных *аттракторами* (от английского «to attract»), и оказался в центре внимания математиков, а позже – физиков и инженеров. Замечательным свойством множества нелинейных систем является то, что для разных начальных $\vec{x}_0$ данных траектория $\vec{x}(t)$ при $t \to \infty$ выходит на одни и те же аттракторы (вообще говоря, в системе их может быть несколько). Это громадное упрощение по сравнению с исходной, ньютоновской постановкой проблемы. Другое, не менее важное, упрощение – динамических систем вида (1) может быть много, а типов аттракторов существенно меньше (в одномерном пространстве – только особые точки, в двумерном к ним добавляются предельные циклы).

С различных начальных данных $\vec{x}_0$ (принадлежащих одной области притяжения) происходит выход на один аттрактор $\vec{S}(t)$. Поэтому «понимание» изучаемой динамической системы связано с выяснением ее аттракторов, очерчиванием их областей притяжения и анализом того, как меняется число и тип аттракторов при изменении параметров, если таковые входят в исследуемую систему (такие изменения были названы *бифуркациями*).

Базовой моделью, с которой началось развитие такого подхода, стала система двух автономных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра λ

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, y, \lambda) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x, y, \lambda) \end{cases} . \tag{2}$$

В таких системах может быть только два типа аттракторов (устойчивая особая точка и предельный цикл). В первом случае решение стремится к особой точке $\left(x^*, y^*\right)$, соответствующей стационарному, не меняющемуся со временем, режиму. Во втором – к некоторым периодическим функциям. Тем не менее, исследования таких систем оказалось достаточно, чтобы построить теорию колебаний, сыгравшую принципиальную роль в развитии радиотехники и электроники, чтобы существенно продвинуть математическое моделирование в химии и биологии.

Синергетика в своей основе связана с изучением процессов, развивающихся во времени и в пространстве. Эти процессы описываются на языке уравнений в частных производных, широкий класс которых, обычно и встречающийся в приложениях, можно записать в виде

$$\vec{u}_t = L\vec{u} + \vec{f}\left(\vec{u},\vec{r},t\right),\ \vec{u}\left(\vec{r},0\right)=\vec{u}_0\left(\vec{r}\right),\ H\vec{u}=0,\ 0\le t<\infty, \qquad (3)$$

где L – линейный или нелинейный дифференциальный оператор, содержащий производные по пространственным переменным, а H – оператор, соответствующий граничным условиям

Подобный вид имеют уравнения гидродинамики, квантовой механики, электродинамики, химической кинетики. Они описывают поля и процессы в сплошных средах (одна из наиболее плодотворных абстракций в прикладной математике). В каждой точке пространства $\vec{r}$, в момент времени t после того как заданы начальные и граничные условия, уравнение (3) должно определять все компоненты вектора $\vec{u}$ (4 числа в случае газовой динамики, 6 – в случае электродинамики).

Очевидно, модели вида (3) гораздо сложнее моделей вида (1), поэтому вновь возникает вопрос об упрощении этой модели, о ее качественном анализе. Один из выдающихся физиков-теоретиков XX века Ричард Фейнман полагал, что будущая эра пробуждения человеческого разума будет связана с качественным пониманием таких моделей, на которое мы пока не способны. По его мысли, качественное понимание здесь даст ясное представление о типе решения уравнения и связанных с этим физических эффектах без непосредственного решения, позволит открывать новые явления.

Численное решение фундаментальных уравнений дает много – во множестве случаев полезно «заглянуть в ответ», даваемый компьютером, прежде чем искать другие решения (если они после этого окажутся нужны). Компьютерный анализ многократно увеличил возможности исследователей. Однако и здесь есть свои серьезные проблемы. Компьютеры имеют дело с конечным набором дискретных величин. Решение дискретного аналога уравнения (3) лежит в конечномерном пространстве, исходного уравнения – в бесконечномерном. Это совершенно разные объекты, и приходится выбирать, какие свойства непрерывных уравнений должны отражать их дискретные аналоги.

Обычно студентам факультетов прикладной математики на первых лекциях объясняют, что целью вычислений являются не числа, а понимание. Но одних вычислений для понимания, как правило, недостаточно. Как же упрощать исходные уравнения, чтобы в каких-то конкретных случаях добиться этого понимания, найти опорные точки и далее, глядя на эти вехи, продолжить путь?

Классический способ, по которому исследователи идут с начала XIX века, состоит в том, чтобы рассматривать те случаи, ситуации, приближения, когда эти уравнения линейны. До сих пор студентов-физиков и математиков в основном этому и учат. Один из преподавателей назвал университетский курс математической физики «повестью о трех уравнениях» (колебаний струны $u_{tt} - u_{xx} = 0$, теплопроводности $u_t = u_{xx}$ и Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$).

Если нелинейность принципиальна, то можно действовать так же, как с уравнением (2), – изучать аттракторы, ориентируясь на хорошо изученные и понятые частные случаи. Один из них – уравнения реакция–диффузия, введенные в рассмотрение в 1950-х годах выдающимся математиком Аланом Тьюрингом

$$\begin{array}{l} u_t = D_1 u_{xx} + f(u,v,\lambda),\ u(x,0) = u_0(x) \\ v_t = D_2 v_{xx} + g(u,v,\lambda),\ v(x,0) = v_0(x) \\ 0 \le t < \infty,\ 0 \le x \le l,\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = \nu_x(0,t) = \nu_x(l,t) = 0 \end{array} . \tag{4}$$

Эти уравнения возникают в огромном количестве задач от биологии до физики твердого тела, от химической кинетики до истории, от социологии до медицины. Во множестве случаев аттракторами системы (4) являются пространственно-неоднородные стационарные $(u_t = v_t = 0)$ решения. Их назвали *стационарными диссипативными структурами*, чтобы подчеркнуть роль диссипативных процессов (диффузии, вязкости, теплопроводности) в возникновении упорядоченности в таких системах. Аттракторами в таких уравнениях могут быть также периодические решения (описывающие *автоволновые процессы*) и хаотические установившиеся режимы (так называемый *диффузионный хаос*).

Радикальное упрощение достигается, если удается от нескольких переменных (например, x и t) перейти к одной (ξ). Простейший пример дает бегущая волна

$$u(x,t) = u(\xi),\ \xi = x - ct .$$

В некоторых случаях она также является аттрактором исследуемой системы. Иными словами, здесь упрощение достигается тем, что мы рассматриваем не весь набор возможных решений при различных данных $u_0(x)$ и $v_0(x)$, а асимптотику, на которую решение может выходить с разных начальных данных.

Другой вариант можно проиллюстрировать на классической модели тепловых структур, которая в течение многих лет детально исследовалась в ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, в научной школе С.П.Курдюмова[4]

$$\begin{array}{l} u_t = (u^\sigma u_x)_x + u^\beta,\ \beta > 1,\ \sigma > 0 \\ u(x,0) = u_0(x),\ t > 0,\ -\infty < x < \infty \end{array}, \tag{5}$$

Оказалось, что в уравнении (5) асимптотика определяется *автомодельными* (сохраняющими свою форму со временем) решениями вида

$$u(x,t) = g(t) \cdot f(\xi),\ \xi = x/\varphi(t), \tag{6}$$

где $g(t)$ характеризует рост амплитуды решения, $\varphi(t)$ – изменение его полуширины, а $f(\xi)$ – форму. Оказалось, что это решение растет в так называемом *режиме с обострением* – возрастает до бесконечности за конечное время t_f. Такие решения, описывающие упорядоченность в системах с сильной положительной обратной связью (цепные реакции, взрывы, начало освоения новой экологической ниши и т.д.), могут быть про-

[4] Режимы с обострением: Эволюция идеи/ Сборник статей/ Под ред. Г.Г.Малинецкого/ 2-е изд. испр. и доп. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.

странственно-локализованными при $0 < t < t_f$. В этом случае их называют *нестационарными диссипативными структурами*.

Как убедиться, например, что происходит выход на такое решение?

Отнормируем полученное численное решение $u(x,t)$ на его максимум

$$T(t) = \max_x u(x,t)$$

и сравним графики функций $f\left(x/\varphi\left(g^{-1}(T)\right)\right)$ и $u(x,t)/T(t)$. Если расстояние между этими функциями стремиться к нулю, то это и будет означать, что произошел выход на автомодельное решение вида (6).

Наконец, в 1990-х годах появился третий способ упрощать модели вида (3) (наряду с линеаризацией и нахождением автомодельных решений). Оказалось, что при $t \to \infty$ динамика решения $\vec{u}(x,t)$ определяется конечномерной динамической системой и алгебраическими соотношениями

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{g}(\vec{y}),\ \ \vec{y} = \left(y_1, y_2, \dots y_p\right),\ \ \vec{u}(\vec{r},t) = \vec{F}(\vec{y}).$$

В начале развития синергетики это утверждение формулировалось как *выделение параметров порядка в ходе самоорганизации*, понималось на физическом уровне строгости и обосновывалось с помощью асимптотических методов. В 1990-х годах для ряда интересных нелинейных уравнений оно было доказано в *теории инерциальных многообразий*.

Это очень важно и, вероятно, со временем будет иметь большие следствия, например, для численного анализа. В самом деле, нам не надо анализировать набор нескольких чисел в каждой точке пространства, а можно ограничиться изучением нескольких функций, зависящих только от временн*о*й переменной. Это огромное упрощение! Но для того, чтобы им воспользоваться, надо научиться определять функции $\vec{g}$ и $\vec{F}$.

Другими словами, в ходе развития этой парадигмы синергетики, выяснилось, что сложные системы, описывающие процессы в нелинейных средах, можно понять на гораздо более простом языке аттракторов, автомодельных решений, конечномерных динамических систем (по сравнению с гораздо более сложным традиционным языком уравнений в частных производных). Сложный объект оказался гораздо проще, чем представлялось вначале.

В ходе развития второй парадигмы – теории динамического хаоса – произошел иной поворот – классические, казалось бы, давно и хорошо изученные объекты и модели, предстали как гораздо более сложные и парадоксальные сущности, чем о них думали раньше.

Исаак Ньютон прекрасно сознавал важность изучения динамических систем. В те времена в силу отсутствия научных журналов и в целях закрепления приоритета исследователи шифровали краткую формулировку своего результата в виде анаграммы и рассылали коллегам, чтобы после того, как кто-то придет к тем же выводам, доказывать свой приоритет. Единственный результат, который И. Ньютон решил зашифровать: *«Полезно изучать дифференциальные уравнения»*.

И действительно – эти уравнения, досконально исследовавшиеся в течение последних 300 лет, являются основным инструментом для прогноза динамики, изменений, развития систем различной природы. Последователь И. Ньютона, Пьер Симон Лаплас, живший 200 лет назад, в наполеоновскую эпоху, считал, что с помощью этого инструмента можно как угодно далеко заглянуть и в будущее, и в прошлое.

При этом П.С. Лаплас неявно подразумевал, что подобные системы обладают свойством *устойчивости по отношению к начальным данным и параметрам*. Рассмотрим два решения исходных уравнений, начинающихся в очень близких начальных точках – $\vec{x}'(t)$ и $\vec{x}''(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}'}{dt} &= \vec{f}(\vec{x}'),\ \vec{x}'(0)=\vec{x}'_0 \\ \frac{d\vec{x}''}{dt} &= \vec{f}(\vec{x}''),\ \vec{x}''(\vec{0})=\vec{x}''_0 \end{aligned}.$$

Пусть $d(t)=\left\|\vec{x}'(t)-\vec{x}''(t)\right\|$, $d(0)=\varepsilon$. Величина ε характеризует ту точность, с которой измерено начальное состояние системы.

Для двух бесконечно близких траекторий характерна экспоненциальная зависимость величины $d(t)$ от времени

$$d(t)\approx \varepsilon \exp(\lambda t),$$

где λ называется ляпуновским показателем.

Если $\lambda \le 0$, то система устойчива, и есть все возможности для прогноза. Пусть, например, $\vec{x}''(t)$ – результат наблюдения близкой к $\vec{x}'(t)$ траектории или математического моделирования. Тогда $d(t)$ показывает погрешность, с которой мы сможем судить о траектории исходной системы $\vec{x}'(t)$, зная $\vec{x}''(t)$. Вероятно, именно такую ситуацию и имел в виду П.С. Лаплас.

Если же $\lambda > 0$, дело обстоит совершенно иначе – судить об $\vec{x}'(t)$ можно, зная $\vec{x}''(t)$, лишь до тех пор, пока $t << T \equiv 1/\lambda$. Иными словами, существует *горизонт прогноза* T. Но насколько общей и типичной является такая ситуация?

Работы Э. Лоренца, Д. Рюэля, Ф. Такенса, их коллег, выполненные в 1960-70-х годах, показали, что именно системы с конечным горизонтом прогноза, описывающие динамический хаос, являются, скорее, правилом, чем исключением.

Их аттракторы часто представляют собой сложные геометрические объекты, обладающие масштабной инвариантностью (фракталы). Их части в фазовом пространстве подобны целому, в чем можно убедиться при соответствующем масштабировании. Как же количественно характеризовать такие объекты? И что означает «понимание» таких систем?

Работы французского математика Бенуа Мандельброта показали, что фракталы являются широко распространенными объектами в самых разных областях – от географии и астрофизики до физиологии и психологии восприятия.

Количественные характеристики подобных сущностей были введены известным математиком Ф. Хаусдорфом еще в начале XX века. К концу столетия таких «фрактальных размерностей» стало очень много. Однако для большинства фракталов вполне достаточно *размерности подобия* d_s, определяемой очень просто – изучаемое множество покрывают одинаковыми шарами диаметра ε, затем подсчитывают минимальное число шаров, необходимых для этого – $N(\varepsilon)$. Для единичного отрезка $N(\varepsilon)=\varepsilon^{-1}$, для квадрата с единичной стороной $N(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}$, а для куба с единичным ребром $N(\varepsilon)=\varepsilon^{-3}$.

Именно показатель степени в зависимости N от $1/\varepsilon$ и можно рассматривать в качестве размерности. Далее осуществляется предельный переход

$$d_s = -\lim_{\varepsilon\to 0}\log_\varepsilon N(\varepsilon). \tag{7}$$

Размерность подобия классических фракталов – Канторова множества, острова Коха, ковра Серпинского нетрудно посчитать с помощью формулы (7). Однако для численного анализа сложных фракталов приходится вводить другие характеристики.

Вторая ключевая величина – *размерность вложения* связана с попыткой разобраться, сколько существенных переменных (параметров порядка) определяют динамику изучаемых процессов. Если решение уравнения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}),\ \ \vec{x} = (x_1, x_2 \ldots x_N)$$

при $t \to \infty$ можно представить как $\vec{x} = G(\vec{y}, \vec{z})$, где

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{g}(\vec{y}),\ \ \vec{y} = (y_1, y_2 \ldots y_p) \\ &\ \ \vec{z} = \vec{h}(\vec{y}),\ \ \vec{z} = (z_1, z_2 \ldots z_{N-p}) \end{aligned}, \tag{8}$$

то величину p в формуле (8) называют размерностью вложения. Она показывает размерность того фазового пространства, в которое можно «вложить» исследуемый аттрактор. По этой величине можно судить о том, насколько сложен объект, с которым мы имеем дело.

Ляпуновский показатель – одна из ключевых характеристик систем с динамическим хаосом – имеет и прямое отношение к мониторингу. Он показывает, как часто надо измерять состояние системы, чтобы адекватно судить о ее поведении.

Хаотические аттракторы оказались весьма сложным объектом, который достаточно трудно и представить, и охарактеризовать. Хаотические аттракторы уже в трехмерном пространстве выглядят весьма причудливо. Однако понимание того, как они возникают, какие последовательности бифуркаций ведут к хаосу, оказалось связано с очень простыми по виду моделями, – одномерными и двумерными отображениями, зависящими от параметра:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n, \mu). \tag{9}$$

Одномерные линейные отображения такого типа приводят к известным со времени Античности арифметической и геометрической прогрессии. Двумерное линейное отображение

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

порождает последовательность чисел Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…) – видимо, первую математическую модель динамики. Простейшие нелинейные модели вида (9) (например, логистическое отображение $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$) могут обладать удивительно сложными и интересными свойствами. Их изучение оказалось в центре внимания прикладной математики в конце XX века.

Оказалось, что для этой парадигмы синергетики именно язык отображений является наиболее удобным и содержательным.

Развитие теории динамического хаоса очень существенно повлияло на многие научные дисциплины – математику, физику, отчасти химию, экономику, биологию. Оно изменило взгляд на мир, очертив пределы наших возможностей в сфере прогноза, а, следовательно, и управления. Несмотря на множество открытых вопросов этой области идеи и модели теории динамического хаоса уже нашли приложения в медицинской диагностике, защите информации, телекоммуникациях, в системах мониторинга, в стратегическом планировании.

Здесь видимая простота обернулась большой сложностью, однако развитие этой парадигмы синергетики привело к революции в области прогноза – одной из важнейших сфер деятельности.

И, наконец, третья парадигма синергетики, связанная с теорией самоорганизованной критичности, которая самым активным образом развивается сейчас, – вновь поворот от сложности к простоте, свой стиль, математика и язык.

Прошедшее столетие по праву можно назвать не только веком атома или космоса, но и веком системного анализа. В XIX веке в центре внимания ученых были отдельные объекты, инженеров – конкретные образцы технических устройств. Во второй половине XX века стало понятно, что во множестве случаев принципиальную роль играют связи между объектами, целое, а не его части.

Это изменение приоритетов и привело в 1970-х годах к рождению синергетики. Инженерам и руководителям тоже стало ясно, что сплошь и рядом основные усилия должны вкладываться не в отдельные объекты и технологии, а в системы. Идет ли речь о развитии городов, вооружений, инфраструктурах, телекоммуникациях или инновациях, именно система может придать каждому из элементов новый смысл и кардинально повысить эффективность и надежность каждого из элементов.

Первый очевидный количественный вопрос относительно системы состоит в сравнительном анализе размеров ее элементов. И уже на этом этапе возникает много проблем.

Плотность вероятности $u(x)$ для величин, характеризующих огромное множество систем, описывается распределением Гаусса

$$u(x) \sim e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \tag{10}$$

где m – математическое ожидание, σ^2 – дисперсия рассматриваемой величины. Область применения этого закона очень велика. Например, физические и иные характеристики людей, как утверждают психологи и физиологи, распределены именно по Гауссу.

Принципиальной особенностью распределения (10) является очень быстрое убывание плотности по мере удаления x от m. Так, на расстоянии менее 3σ от математического ожидания оказываются 99,7% всех событий, а на 5σ и более от него отклоняется менее 1 события на миллион. Таким образом, можно пренебречь вероятностью крупных, но чрезвычайно редких событий, или, как говорят, можно «отрезать» хвост распределения.

Однако оказалось, что во множестве важных и интересных случаев для величины элементов, составляющих систему, имеет место совсем другие – *степенные распределения*

$$u(x) \sim x^{-\tau}. \tag{11}$$

Их отличительная особенность – *отсутствие характерного размера*. Именно они типичны для таких масштабно-инвариантных множеств как фракталы. Безнаказанно отрезать хвост распределения (11) нельзя, поскольку из-за медленного убывания плотности крупные события оказываются недостаточно редки, чтобы их вероятностью можно было пренебречь. Непренебрежимо малая вероятность чрезвычайно крупных событий обуславливается бесконечностью моментов величины x достаточно высокого порядка ($\tau-1$ и выше). Важнейшими из них являются первый и второй моменты.

При $\tau \le 3$ для распределения (11) бесконечна дисперсия, т.е. не имеет смысла пытаться характеризовать отклонение значений случайной величины от ее математического ожидания. А при $\tau \le 2$ бесконечным становится и само математическое ожидание. В этом случае сумма значений случайной величины в некоторой выборке оказывается сравнима с наибольшим из них. В результате обе характеристики быстро и неограниченно увеличиваются по мере роста объема выборки, что дает характерный пример антиинтуитивного поведения масштабно-инвариантных систем.

Степенные распределения требуют выборок очень большого объема для построения эмпирических аналогов плотности вероятности с удовлетворительным качеством. Такие выборки доступны, как правило, только при компьютерном эксперименте, но не при наблюдении за реальными системами. Поэтому для обработки данных наблюдений обычно используют *зависимости ранг–размер*, которые в случае распределения (11) также имеют степенной вид

$$x(r) \sim r^{-\gamma}, \ \text{где} \ \gamma(\tau-1)=1.$$

Под *рангом* r выборочного значения понимается его номер в выборке, упорядоченной по убыванию величины. При этом нумерация начинается с некоторой величины r_0 (выступает как удобный подгоночный параметр), называемой величиной *рангового искажения* и учитывающей возможное нестепенное поведение плотности при очень больших x.

После работ Б. Мандельброта стало очевидно, что наш мир полон фракталов и систем, для которых характерны степенные распределения, однако оставалось неясно, откуда берутся такие структуры во множестве случаев. Примеры систем, для которых характерны степенные законы, показывает рис. 1 и рис. 2. Но каков механизм возникновения таких систем?

Справедливости ради, следует отметить, что для многих физических систем выявлялись неустойчивости, которые приводили к таким геометрическим объектам: модель пробоя диэлектриков или агрегация, ограниченная диффузией. Типичная схема для последнего класса моделей состояла в том, что малые частицы вещества блуждают в пространстве и далее прилипают к поверхности с вероятностью, зависящей от ее локальных свойств. Однако, такие механизмы работают лишь при определенных значениях параметров системы, достижение которых обыкновенно происходит в результате их непрерывного монотонного изменения. Т.е. в той области значений параметров, где наблюдается интересное поведение, система проводит весьма незначительную долю времени. Альтернативной является искусственная подстройка параметров, однако она не имеет места в ситуации общего положения, т.к. возможна лишь в лаборатории, но не в природе.

Итак, было понято, что для формирования таких масштабно-инвариантных объектов существенен и элемент случайности (прилипание частиц к поверхности, вероятностное распределение ресурса и т.д.), и элемент закономерной динамики, «накопления» результатов случайных воздействий. И фрактальная структура, степенное распределение размеров объектов, с этих позиций, являются результатом достаточно длительной эволюции.

Есть и другая возможность, связанная с ростом городов, развитием крупнейших компаний, распространением компьютерных вирусов. Этот класс моделей можно назвать моделями *конкуренции за ресурс*, а неустойчивость охарактеризовать поговоркой «на деньгу деньга бежит». Типичная схема здесь такова: есть общий прирост ресурса, который делится между существующими объектами пропорционально их размерам (либо – с малой вероятностью – порождает новые объекты, далее включающиеся в борьбу за ресурс). При этом задача перестает быть локальной – каждому объекту должна быть доступна информация о состоянии целого, чтобы исчислить свою долю ресурса, зато математическая модель при оказывается линейной и достаточно простой[5].

Описанные механизмы возникновения масштабно-инвариантных свойств предполагают либо искусственную подстройку параметров системы, либо её изначальную целостность, природа которой при этом остается вынесенной за скобки рассмотрения. Поэтому как бы ни были эти механизмы интересны с математической точки зрения, они не могут полностью удовлетворить физика, которому хотелось бы понимать, кто и каким образом подстраивает параметры системы, как она приобретает целостные свойства.

И здесь концепция самоорганизованной критичности оказалась удивительно удачной и своевременной. Ее можно сравнить с той частью, наличие которой и позволило начать складывать «пазл» большой части того, что связано со сложностью.

В рамках этой теории имеет место целостное, масштабно-инвариантное поведение, при котором одни и те же правила определяют динамику системы, как на очень малых, так и на очень больших масштабах.

На каком же языке говорить о таких системах? Моделирование возникновения фракталов является очень «неудобной» задачей для описания в рамках дифференциальных уравнений, которые не позволяют учитывать шумовую компоненту, существенную для этих процессов. Кроме того, множество фракталов не описывается дифференцируемыми функциями.

Поэтому и схема описания, и сам язык в этой парадигме принципиально отличается от того, что использовалось в синергетике раньше. *Модель кучи песка* – базовая модель теории самоорганизованной критичности, которой и посвящена почти вся эта книга – сформулирована на языке *клеточных автоматов*. Так называют системы, описывающие развитие процессов во времени и пространстве. В отличие от уравнений в частных производных, здесь дискретными являются и пространственные, и временные координаты. Кроме того, состояние каждой ячейки-клетки характеризуется числом из дискретного набора.

С одной стороны, многие специалисты по прикладной математике относятся к подобным моделям с предубеждением, как к «испорченным разностным схемам» (которые традиционно используются для численного анализа уравнений в частных производных). С другой стороны, со времени работ Дж. Неймана и Н. Винера в 1940-х и Дж. Конвея в 1970-х годах стало ясно, что этот язык очень удобен для моделирования многих сложных явлений (от самовоспроизводства, до эволюции и сердечных аритмий). Идеальным он оказался и для описания критический явлений. Коль скоро масштабно-инвариантные системы устроены одинаково на всех уровнях организации, не имеет принципиального значения, как их описывать на самом нижнем уровне. И уме-

---

[5] *Подлазов А.В.* Закон Ципфа и модели конкурентного роста// Нелинейность в современном естествознании/ Ред. Г.Г.Малинецкий/ Синергетика: от прошлого к будущему. – М.: Либроком, 2009. С.229-256.

стно выбирать описание максимально простое и удобное для компьютерной реализации.

Модель кучи песка, с которой началась теория самоорганизованной критичности, формулируется как двумерный клеточный автомат. Имеется решетка размерами $L \times L$, в ячейках которой может находиться некоторый дискретный ресурс, по традиции именуемый песчинками. Ячейки, содержащие 1, 2, 3 и 4 песчинки, считаются устойчивыми, а более 4 – неустойчивыми. Неустойчивые ячейки опрокидываются, передавая 4 песчинки своим соседкам – ячейкам, имеющим с ними общую сторону (в случае ячеек, находящихся на краю решетки, происходит потеря песчинок, переданных за край). Вариант модели кучи песка, предложенный П.Баком, Ч.Тангом и К.Визенфельдом (БТВ), рассматриваемый в книге, предполагает строго детерминированную передачу песчинок – по одной каждой соседке. Однако имеется и стохастический вариант модели, предложенный С. Манна, в котором каждая передаваемая песчинка выбирает соседку случайным образом.

Передача песчинок в другие ячейки может нарушать их устойчивость и вызывать цепную реакцию опрокидываний. До тех пор, пока в системе имеются неустойчивые ячейки, говорят, что идет *лавина*. Когда она завершается, случайным образом выбирается ячейка и в нее добавляется песчинка, которая инициирует новую лавину. Интерес представляют общие, интегральные характеристики всего процесса «лавины» – например, размер лавины N (полное число опрокидываний) или «площадь» S (число клеток, хотя бы раз опрокинувшихся) и т.д. В результате наблюдения за большим числом лавин накапливается статистика, по которой строится функция распределения их характеристик. Независимо от начальной конфигурации системы через некоторое время она самоорганизуется в критическое состояние, где эти распределения имеют степенной вид (11). Это свойство не зависит от деталей правил, которые определяют динамику системы. Однако от них может зависеть показатель степени τ, определение которого и является результатом серии компьютерных экспериментов и теоретического анализа.

Что в этом случае представляет собой «понимание» построенной модели? Ровно то же, что и в теоретической физике. Эксперимент дает нам набор данных, по которым мы определяем наиболее важные характеристики системы. Теория, которая, опираясь на первые принципы или другие модели, дает нам те же числа без проведения эксперимента, и есть подтверждение того, что мы понимаем исследуемые процессы.

Впрочем, при исследовании масштабно-инвариантных систем есть еще один круг вопросов и уровень понимания. Масштабная инвариантность означает отсутствие у происходящих в системе процессов и явлений собственных характерных размеров. Однако конечность размеров самой системы все-таки накладывает ограничения на применимость формулы (11). Происходит отклонение плотности распределения от нее, связанное с тем, что система конечного размера не может порождать сколь угодно больших событий. Поэтому важным является сопоставление результатов, полученных в областях разных размеров L.

Рассматривая первую парадигму, мы обсуждали процедуру автомодельной обработки, позволяющую, растягивая соответствующим образом саму функцию и пространственную координаты, выяснять, происходит ли выход на автомодельное решение. Аналогичный подход существует и для конечно-размерного анализа масштабно-инвариантных систем. Он основан на представлении величины события x и его вероятности $u(x)$ в виде

$$\begin{aligned} x &= aL^{\nu} \\ u(x) &= 1/bL^{\beta} \end{aligned} . \tag{12}$$

Классический вариант подхода называется методом *конечно-размерного скейлинга*, который конспективно описывается и несколько раз используется в книге П. Бака, и основывается на предположении, что при варьировании размера события *скейлинговые показатели* ν и β остаются постоянными. При этом возникает функциональная связь между коэффициентами

$$b^{-1} = f(a), \tag{13}$$

единая для систем разного размера. Поэтому при правильном подборе скейлинговых показателей зависимости $L^{\beta}u(x)$ от $xL^{-\nu}$, полученные при различных L, совмещаются. Если плотность имеет вид (11) при $x << L^{\nu}$, то и $f(a) \sim a^{-\tau}$ при $a << 1$, а кроме того, выполняется скейлинговое соотношение

$$\beta = \nu\tau, \tag{14}$$

обеспечивающее нечувствительность степенного участка плотности к размеру системы. Рис. 3 демонстрирует типичный вид конечно-размерного скейлинга на примере результатов компьютерного исследования модели Манна.

Возможны специальные ситуации, когда возникновение степенной статистики имеет пороговый характер, в результате чего формула (13) описывает лишь некоторую малую долю событий $L^{-\omega}$. В этом случае соотношение (14) принимает вид

$$\beta + \omega = \nu\tau .$$

Именно так обстоят дела с игрой «Жизнь», рассматриваемой в главе 6.

Вместе с тем, существуют модели, для которых предположение о постоянстве скейлинговых показателей неверно и метод конечно-размерного скейлинга оказывается неприменим. Такова, в частности, модель БТВ – первая модель теории самоорганизованной критичности, – конечно-размерный скейлинг для которой представлен на рис. 4. Легко видеть, что результаты весьма далеки от образца, задаваемого рис. 3.

Для описания крупных событий в модели БТВ возможен альтернативный подход, который можно назвать *конечно-размерным приведением*. Он основывается на предположении о постоянстве коэффициентов a и b в формуле (12) при варьировании размера события. При этом возникает функциональная связь есть между показателями:

$$-\beta = f(\nu), \tag{15}$$

означающая совмещение зависимостей $\log_L u(x) \cdot b$ от $\log_L x/a$, полученных при различных L. Вариант этого метода был впервые предложен сотрудником Международного института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН А.Б. Шаповалом. На рис. 5 можно видеть его в действии.

Обратим внимание на разное отношение трех парадигм синергетики к главной задаче науки – прогнозу. В первом случае речь шла о свойствах аттракторов при конкретных начальных данных, то есть об установившихся режимах на больших характерных временах. Во втором рассматриваются хаотические аттракторы, динамику которых мы можем предсказывать на временах, не превышающих горизонт прогноза, а дальше приходится обращаться к статистике. В парадигме сложности речь идет о свойствах ансамбля систем или большой выборки, и степень неопределенности в каждом конкретном случае становится еще выше.

Однако во многих случаях и такое понимание, и связанное с ним знание представляются крайне важными.

Волшебная палочка критичности

И чем случайней, тем вернее
Слагаются стихи навзрыд.

Б. Пастернак

Направление, начатое работами П. Бака и его коллег, оказалось именно тем, что создает парадигму. Вероятно, оно является примером постнеклассической теории, приводящей к «научным революциям второго рода», о которых речь шла выше.

В самом деле, концепция самоорганизованной критичности является, вероятно, единственной естественнонаучной теорией, которая предметно, на уровне моделей и алгоритмов обработки данных, рассматривает уникальные необратимо развивающиеся системы. Отличительная черта таких объектов – память, способность запоминать сделанный случайный выбор. Сама фрактальная структура или соотношение объектов в системе, описываемое степенным распределением, является результатом, «записью», своеобразной «летописью» пройденного пути. Это позволяет с единых системных позиций объяснить множество степенных законов, которые открывались в свое время во множестве областей от геологии и астрофизики до географии, палеонтологии, лингвистики, экономики, и для каждого из которых предлагались свои «дисциплинарные» объяснения.

Взмах «волшебной палочки» теории самоорганизованной критичности осветил всё это многообразие и позволил увидеть внутреннее единство. Конечно, это не «отменяет» множества конкретных исследований по выяснению механизмов самоорганизации и анализу неустойчивостей, характерных для разных областей. Она упрощает эту работу – теория дает путеводную нить и набор базовых моделей, которые помогают понять происходящее и предлагают инструменты для его описания.

Теория самоорганизованной критичности дала объяснение явлению *прерывистого равновесия*, которое наблюдается в процессе биологической эволюции, функционировании социальных и технических систем. Типичным оказывается ситуация, когда в течение очень большого времени ничего заметного не происходит, а затем стремительные изменения кардинально меняют облик системы, наступает время революций, что, разумеется, не отменяет множества мелких событий, которых мы просто не замечаем.

Само появление этой парадигмы очень важно для синергетики. В самом деле, объяснение возникновения различных структур, иных типов упорядоченности и хаоса, было связано с прохождением точки той или иной бифуркации (то есть с изменением числа и/или устойчивости решений определенного типа при вариации параметра).

Ряд успешных и не очень попыток применить эти подходы к экономике, техносфере, биоценозам, другим сложным системам создают ощущение, что мы оказываемся в точках бифуркации, в ситуации выбора, значительно чаще, чем должны были бы. Получается, что мы как бы вновь и вновь стремимся к этим точкам. И теория самоорганизованной критичности объясняет и показывает, *почему и как это происходит*. Самоорганизация при этом выступает совершенно в новой роли. Если в системах, которые описывались в рамках первой парадигмы, она обеспечивала возникновение упорядоченности, если в рамках второй могла приводить к упрощению системы и выделению из множества степеней свободы главных, то здесь в результате самоорганизации система вновь и вновь оказывается в критической точке, в которой возможны катастрофические лавины любых масштабов (ограниченные только размерами системы).

Это меняет взгляд и естественных, и гуманитарных наук на многие явления. Например, такая динамика объясняет «парадокс Ахиллеса». Желая сделать своего сына неуязвимым, нимфа Фетида опустила его в воды Стикса, но при этом держала за пятку, которая осталась единственным незащищенным местом. Именно в это место и был направлен роковой удар. И в социальных системах, и в биологических объектах, и в нашей психике есть окна уязвимости, чрезвычайно чувствительные к малым, но точным воздействиям. Почему же так происходит? Почему природа наделила каждую из таких систем своей «ахиллесовой пятой»?

Ответ, который дает Пер Бак в этой книге, представляется, с одной стороны, парадоксальным, а с другой – очевидным. Со времени развития первого междисциплинарного подхода – кибернетики – стала понятна роль обратной связи в управляемой системе. Чтобы достичь желаемой цели, системам управления нужно измерить выходной сигнал, сравнить с желаемым, усилить полученную разность и подать на вход. И если речь идет о технических объектах, в которых выходной сигнал достаточно прост, то можно рассчитать коэффициент усиления, и найти оптимальное значение, при котором техническая система наилучшим образом справляется с задачей.

Если же речь идет о социальных или биологических объектах, наконец, о нашем мозге, то вся простота теряется. Мир предлагает нам огромный набор сигналов, некоторые из которых крайне важны – они говорят о возможных угрозах и опасностях. Если усиливать все сигналы, то возникает шум, в котором невозможно будет выделить существенное. Если коэффициент усиления мал, то объект не сможет отреагировать быстро и адекватно и избежать опасности.

Иными словами, почти всегда коэффициент усиления должен быть мал, а в некоторых случаях очень велик. Когда мал и когда велик, зависит от особенностей системы, ее предыстории, памяти (например, инстинкты, рефлексы, результаты обучения). И в этом плане самоорганизованно-критическое состояние, которое в книге рассматривается в качестве одного из механизмов деятельности мозга и многих других систем, направленных на достижение каких-либо целей и подвергающихся опасностям, представляется идеальным.

Иными словами, должны быть «резонансные воздействия», вызывающие очень сильную реакцию. Иначе система не сможет отрабатывать существенные изменения в окружающей среде. Обратная сторона этой медали – парадокс Ахиллеса – риск того, что реакция на слабые воздействия окажется слишком сильной и разрушительной для системы.

Конечно, пока это метафора, применение которой к конкретным объектам требует исследований и серьезного обоснования. Однако такова судьба многих базовых моделей. Зачастую они воспринимались как гипотезы и метафоры (здесь можно вспомнить модели типа реакция–диффузия, предложенные первоначально Аланом Тьюрингом, чтобы объяснить закономерности расположения листьев на стебле). Однако будущее показывало их плодотворность, позволяло вначале внести дополнительные уточнения, а затем добиться и количественного соответствия с результатами наблюдений или экспериментами. Весьма возможно, что такая же судьба ждет большинство построенных моделей теории самоорганизованной критичности.

От понимания к знанию. Прогнозирование катастроф

> Пренебрегающие изучением прошлого обречены на повторение его ошибок. Изучающие прошлое найдут другие способы ошибаться.
>
> *Закон уроков истории по Вельори*

Важнейшей задачей науки была, является, и, вероятно, будет являться прогноз бедствий, аварий, кризисов и катастроф. В теории самоорганизованной критичности сплошь и рядом речь заходит о крупных и сверхкрупных событиях. В каком отношении все эти абстракции находятся к реальным бедам, с которыми сталкиваются люди? Может ли обсуждаемая теория после определенного развития стать инструментом управления рисками различной природы?

При обсуждении этих вопросов в книге Пер Бак занимает пессимистическую позицию. По его мысли, сколько-нибудь длительный прогноз динамики кучи песка и других подобных систем невозможен (так же как в случае среднесрочного прогноза погоды), и даже если мы можем изменить состояние одной клетки в модели и предотвратить ближайшую лавину, то далее, через некоторое время, лавина вновь произойдет в системе. И возможно, она скажется еще более масштабной, чем первая. Вообще говоря, при таком подходе неявным образом подразумевается, что мы предотвращаем лавину, убрав лишние песчинки в другие ячейки. Это повышает наклон кучи и готовит лавину еще большего масштаба. Однако мы можем вполне успешно предотвращать большие лавины, не блокируя их развития, а своевременно спуская маленькие. Разумеется, для этого нужно хорошо понимать особенности функционирования системы. По мысли П. Бака, заниматься мониторингом, планированием и предупреждением катастрофических событий в подобных системах особого смысла нет. Иначе говоря, между тем важным и глубоким пониманием, которое дает теория самоорганизованной критичности, и знаниями, которые необходимы для практических действий, лежит непреодолимая пропасть.

Однако, на наш взгляд, последующее за изданием книги Пера Бака время, развитие синергетики в целом и теории самоорганизованной критичности в частности дают определенные поводы для оптимизма. Обратим внимание на них.

Анализ статистики крупнейших стихийных бедствий XX века показал, что и для экономического ущерба, и для числа погибших имеют место степенные законы (см. рис. 6 и рис. 7). Однако для разных бедствий они различны. Если показатель степени $\tau > 2$, то наибольший вклад в общие потери дают аварии и небольшие события. И тогда основные усилия должны быть направлены на уменьшение их числа и масштаба.

Однако если $\tau < 2$, то главные потери связаны с катастрофами, огромными по масштабу событиями. Стратегия при этом должна быть совсем другой. В таких системах ущерб от одного крупнейшего за время наблюдений события может быть сравним или даже превысить ущерб от всех событий подобного типа за всё время наблюдений.

Так, например, обстоит дело с авариями на объектах атомной энергетики. Чернобыльская авария пока «стоит» больше, чем все аварии в данной сфере вместе взятые. И основные усилия должны быть вложены в то, чтобы не допустить подобных сценариев. Анализ аварии в Чернобыле и на станции Фукусима-1 показывает, что все возможности для этого были. И меры по предупреждению подобных катастроф обошлись бы в 100 и более раз дешевле, чем затраты на ликвидацию и смягчение последствий уже произошедших бед. При этом особую опасность представляют «синергетические аварии», при которых нестабильность в одной сфере (например, природной) многократно усиливается и приводит к катастрофе в другой (например, в техногенной, как в случае Фукусимы).

Модели самоорганизованной критичности в своем большинстве имеют дело с абстрактными сущностями и их построение и исследование, скорее, может трактоваться как создание языка, нежели, как описание реальных систем. Однако уже сейчас делаются попытки говорить на этом языке о сейсмической активности, о солнечных вспышках, строить математические модели, опирающиеся на геофизическую информацию.

Междисциплинарность обсуждаемой Пером Баком теории привела к тому, что ее весьма активно начали развивать и использовать в контексте социоэкономики, чтобы выявить причины биржевых крахов, проследить механизмы их возникновения и выделить предвестники, предшествующие подобным событиям.

Важный вопрос касается предсказуемости поведения таких сложных систем как земная кора, фондовый рынок, биосфера и другие подобные объекты. Еще 30 лет назад многие крупные ученые считали задачу прогноза землетрясений неразрешимой, а то и вовсе лежащей вне научного поля. Последующие десятилетия изменили этот взгляд. Сейчас можно сказать, что для землетрясений магнитуды 8 удается получить достаточно надежный среднесрочный прогноз[6]. Впрочем, заметим, что предсказываются только очень крупные события, для которых система оказывается мала.

Иногда теория обосновывает и позволяет построить новые алгоритмы. Но не менее интересна и важна другая ситуация – обоснование и понимание на более глубоком уровне с помощью теоретических построений тех методик, которые уже успешно используются на практике. И это тоже одно из направлений исследований.

Один из хорошо зарекомендовавших себя алгоритмов прогноза землетрясений по временным рядам наблюдений основан на простом признаке – изменении статистики малых событий, их группировке перед землетрясением. Эти алгоритмы были разработаны в Международном институте теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН под руководством академика В.И. Кейлис-Борока.

Исследования А.Б. Шаповала показали, что по тому же признаку (в одних случаях по «затишью перед бурей», в других по активизации) можно предвидеть крупные события в ставших классическими моделях теории самоорганизованной критичности.

Реальные алгоритмы прогноза землетрясений и «игрушечные модели» сближает еще одна важная общая черта – чередование периодов хорошей и плохой предсказуемости катастрофических явлений. Возможно, то, что рассматривали в качестве недостатка алгоритма, оказалось отражением глубоких общих свойств многих сложных систем.

Влияние идей в научном сообществе удивительным образом напоминают динамику кучи песка. Большинство работ остается незамеченными и непрочитанными. Другие просматривают и оценивают несколько коллег автора, третьи становятся «широко известными узкому кругу специалистов», работающих в этой области, однако некоторые вызывают гигантские лавины, попадая на страницы учебников и кардинально меняя весь «научный ландшафт».

Порой, так же как в модели кучи песка, лавина вызывает новую вспышку активности в уже пройденных клетках. Есть работы, которые переосмысливаются, переоткрываются, прочитываются по-новому, спустя довольно большой срок после того как были выполнены. Иногда оказывается, что они опередили свое время и дают следующему поколению больше, чем современникам.

Мы живем в сложном мире и надеемся, что и парадигму сложности, и теорию самоорганизованной критичности ждет такая счастливая судьба. И замечательная книга Пера Бака этому поможет.

Рисунки

[6] *Владимиров В.А., Воробьев Ю.Л., Малинецкий Г.Г., Подлазов А.В.,* и др. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика/ Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения. – М.: Наука, 2000. – 432 с.

Рис. 1. Число жителей населенных пунктов России

При $r_0 = 15$ и $\tau = 1{,}88$ описывается свыше 42 тыс. объектов при выпадающих столицах.

По данным переписи населения 2002 г.

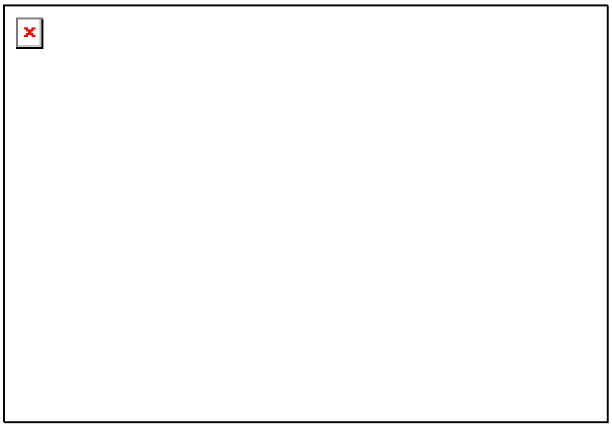

Рис. 2. Рыночная стоимость крупнейших компаний мира, $ млрд

При $r_0 = 28$ и $\tau = 2{,}05$ описывается 871 компания при трёх выпавших.

По данным рейтинга Global-2000 журнала «Forbes» за 2006 год.

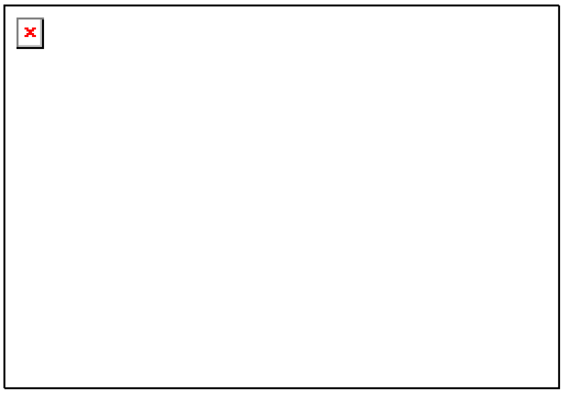

Рис. 3. Распределение лавин по размеру для модели Манна

После домножения координат на соответствующие степени размера системы графики, полученные для его различных значений, совмещаются. Здесь $\nu = 11/4$, $\beta = 7/2$, $\tau = \beta/\nu = 14/11$.

На врезке показана компенсация степенного участка плотности, который после домножения на соответствующую степень аргумента становится горизонтальной линией, а «горбики» лежат на одном уровне.

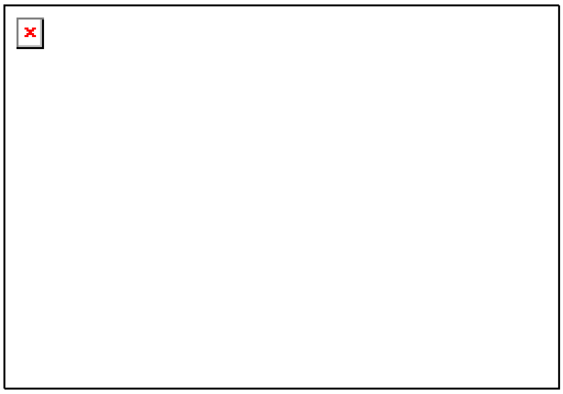

Рис. 4. Распределение лавин по размеру для модели БТВ

После домножения координат на степени размера решетки совмещение графиков происходит лишь в определенной части диапазона значений, а далее – графики расходятся. Точные показатели для этой модели неизвестны; здесь использованы значения $\nu = 2$, $\beta \approx 2{,}42$, $\tau \approx 1{,}21$.

После компенсации степенной части плотности (на врезке) получающиеся графики лишь тяготеют к горизонтали, хотя «горбики» лежат на одном уровне.

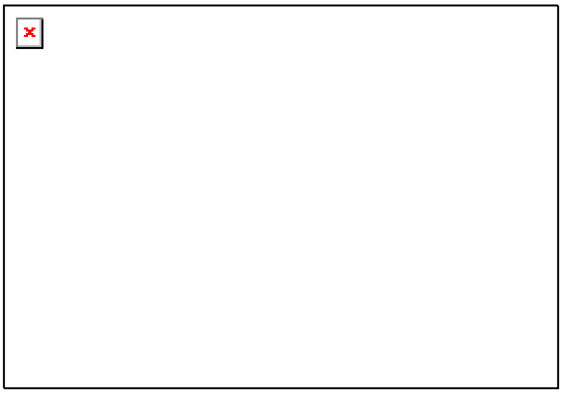

Рис. 5. Пример конечно-размерного приведения для модели БТВ

Здесь ситуация обратная к конечно-размерному скейлингу. В правой части графики совпадают, а в левой расходятся. Однако с ростом размера системы их расхождение уменьшается.

На врезке увеличен участок графика, обведенный рамочкой.

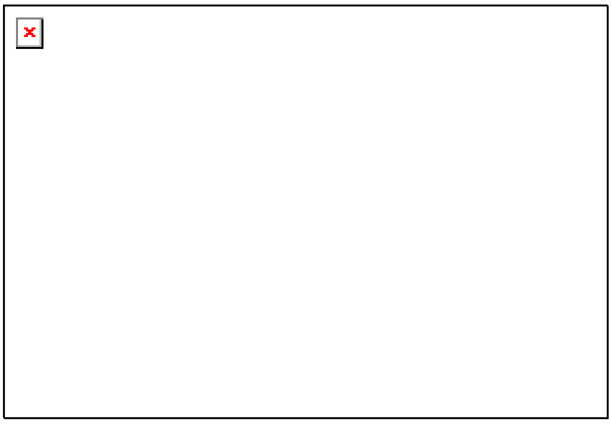

Рис. 6. Ущерб от природных катастроф

Данные за 1900-2007 гг. приведены в миллионных долях от валового мирового продукта на соответствующую дату. При $\tau = 1{,}96$ и $r_0 = 4{,}2$ описывается 279 крупнейших катастроф.

Источник: EM-DAT: The OFDA/CRED International Disaster Database – www.emdat.be

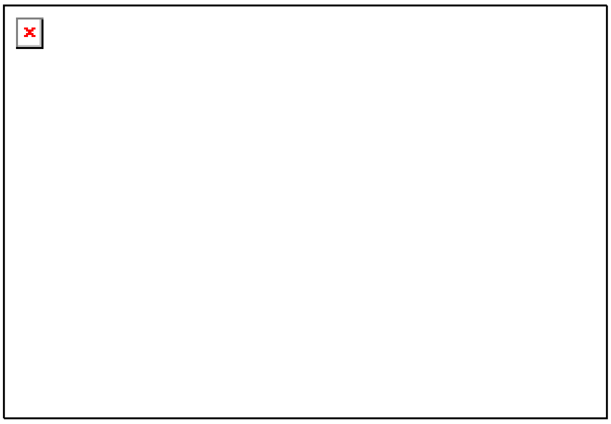

Рис. 7. Погибшие в результате техногенных катастроф

Данные за 1900-2007 гг. приведены в миллионных долях от мирового населения на соответствующую дату. При $\tau = 2{,}09$ и $r_0 = 4{,}9$ описывается 4 тыс. крупнейших катастроф.

Источник: EM-DAT: The OFDA/CRED International Disaster Database – www.emdat.be