



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • [Электронная библиотека](#)

[Препринты ИПМ](#) • [Препринт № 98 за 2019 г.](#)



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

[Зенюк Д.А.](#), [Малинецкий Г.Г.](#)

Одномерный брусселятор с
дробными производными по
времени

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Зенюк Д.А., Малинецкий Г.Г. Одномерный брусселятор с дробными производными по времени // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 98. 32 с. doi:[10.20948/prepr-2019-98](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-98)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-98>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. Келдыша
Российской академии наук**

Д. А. Зенюк, Г. Г. Малинецкий

**Одномерный брюсселятор с дробными
производными по времени**

Москва — 2019

УДК 517.968.7

Зенюк Д. А., Малинецкий Г. Г.

Одномерный брюсселятор с дробными производными по времени

В работе на примере абстрактной модели брюсселятора рассмотрены сценарии формирования сложных паттернов в нелинейных средах с диффузией и дифференциальными операторами нецелого порядка. С помощью стандартной техники линейного анализа получены точные выражения для критических значений параметров, при которых в системе наблюдаются неустойчивости определенного типа. Для бифуркации Хопфа и бифуркации коразмерности 2 критерии устойчивости существенно зависят от порядка дробной производной. Предсказания линейной теории подкреплены результатами численного анализа. Также дан краткий обзор текущего состояния теории дробного интегро-дифференцирования и динамических систем нецелого порядка.

Ключевые слова: дробное исчисление, системы реакция—диффузия.

Dmitry Alexeyevich Zenyuk, Georgy Gennadiyevich Malinetsky

One-dimensional Brusselator with time-fractional derivative

In the present paper possible scenarios of pattern formation in non-linear media with diffusion and differential operators of non-integer order are studied for the abstract Brusselator model. By means of the standard linear analysis exact critical values for different types of instabilities are derived. It is shown that stability criteria significantly depend on the order of the fractional derivative in case of the Hopf and C2TH bifurcations. Predictions of the linear theory are confirmed by numerical simulation. The exposition is accompanied by a concise survey of the main results in the fields of fractional calculus and dynamical systems of non-integer order.

Key words: fractional calculus, reaction—diffusion systems.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 19-01-00602А.

Оглавление

Введение	3
Дифференциальные уравнения с дробными производными	10
Линейные системы	13
Качественная теория	16
Брюсселятор с дробными производными	19
Заключение	28

Введение

Впервые вопрос о смысле производной нецелого порядка возник почти сразу же после введения самого понятия производной: в письмах к Г. Лопиталю (1695 г.) и Дж. Уоллису* (1697 г.) Г. Лейбниц дал некоторые комментарии относительно того, каким смыслом могли бы обладать дифференциалы и производные порядка $1/2$. Различные формальные подходы к проблеме дифференцирования нецелого порядка предлагались в работах Л. Эйлера (1738 г.), П.-С. Лапласа (1812 г.) и Ж. Фурье (1822 г.). В трактате С. де Лакруа (1819 г.) в качестве упражнения была рассмотрена задача о вычислении производной нецелого порядка для степенной функции; интересно, что полученное им выражение в точности совпадает с тем, которое будет получено при применении современных производных Римана—Лиувилля.

Историю собственно дробного исчисления принято отсчитывать от работ Н. Абеля (1823 и 1826 гг.), посвященных решению интегрального уравнения

$$\int_a^x \frac{u(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\alpha} = f(x), \quad x > a, \quad 0 < \alpha < 1,$$

связанного с т.н. задачей о таутохроне. Решение $u(x)$ этого уравнения, как позже оказалось, пропорционально дробной производной порядка α от функции $f(x)$. При этом следует подчеркнуть, что сам Абель не рассматривал это решение как обобщение понятия производной и получил его с помощью методов классического анализа (подробнее о решении уравнения Абеля см., например, [1]). Первая попытка полноценного изложения теории дробного интегро-дифференцирования была предпринята в серии публикаций Ж. Лиувиллем (1832–1837). Хотя некоторые результаты, полученные там, оказались не совсем строгими с современной точки зрения, именно в них были высказаны многие важные идеи и концепции. По значимости с работами Лиувилля сравнимы работы Б. Римана (1847, опубликована впервые в 1876 уже после его смерти) и Х. Холмгрена (1865). Завершенная теория интегро-дифференциального исчисления нецелого порядка была дана в работах А. В. Летникова (1874) и Н. Я. Сони́на (1872).

С начала 20 в. вплоть до 50-х гг. теория дробного исчисления продолжает развиваться уже в контексте исследований в области функционального анализа. Здесь уместно упомянуть работы Ж. Адамара (1892 г., введена новая форма обобщенного дробного интегрального оператора), Г. Харди и М. Рисса (1915 г.), Г. Вейля (1917 г., дробное интегрирование периодических функций), Г. Харди и Дж. Литтлвуда (1928 г.), М. Рисса (1936, 1938 и 1949 гг., дробное интегрирование для функции многих переменных с помощью операторов типа потенциала), А. Эрдейи и Г. Кобера (1940 г., дальнейшее обобщение

*Во многих источниках приводится фонетически менее точная транскрипция его фамилии — Валлис

интегральных и дифференциальных операторов нецелого порядка), И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова (1964 г.), М. М. Джрбашяна (1966 г., интегральные представления функций в комплексной плоскости). Заинтересованный читатель сможет найти более детальную ретроспективу исследований в области дробного исчисления и подробную библиографию в [2], а также в [1].

Отдельно остановимся на проблеме названий. В первую очередь, сам термин «дробное исчисление» (*fractional calculus*) является неточным, поскольку в современной теории порядок интегро-дифференциальных операторов может быть любым числом, в том числе и комплексным. Тем не менее, именно такое название стало общеупотребительным и зафиксировано во всех основных источниках, поэтому отказаться от него, по-видимому, уже нельзя. Кроме того, в дробном исчислении за его богатую и насыщенную историю многие конструкции и результаты были получены независимо разными авторами, а некоторые работы остались незаслуженно мало известными. Поэтому наименования самих операторов часто указываются по-разному. В настоящей работе мы будем следовать в основном монографии [1], которая остается одним из самых авторитетных источников в данной области, несмотря на то что она была издана более 20 лет назад. Нотация для интегро-дифференциальных операторов нецелого порядка также пока не унифицирована. Мы будем по большей части использовать систему обозначений, введенную в [1].

Уже начиная с упомянутых работ Абеля дробное исчисление использовалось для решения прикладных задач. Лиувилль рассматривал приложения введенных им конструкций к задачам о взаимном влиянии бесконечных прямолинейных проводников друг на друга, задаче о распределении тепла в шаре и задаче о приближенных квадратурах (цит. по [1]). Однако наиболее активно приложения дробного исчисления стали изучаться с середины 20 в. Можно выделить два направления исследований, где инструментарий теории дробного интегро-дифференцирования оказался наиболее подходящим — это механика вязкоупругих сред и аномальная диффузия. Процессы такого рода являются эридитарными (*hereditary*), т.е. в них динамика существенно зависит от предыстории процесса.

В 40-е гг. А. Н. Герасимовым, Г. Скотт-Блэром и Ю. Н. Работновым были проведены обширные исследования свойств вязкоупругих материалов, в ходе которых было продемонстрировано, что в волокнистых полимерах механическое напряжение может быть представлено в виде дробной производной Римана—Лиувилля от деформации, причем дробный показатель определяется реальными физическими свойствами этих материалов. В середине 20 в. Ф. Маинарди и М. Капуто показали, что использование дифференциальных уравнений с дробными производными для построения моделей термовязкоупругости более адекватно из физических соображений и позволяет более точно воспроизводить наблюдаемые данные. В работах Р. Бэгли и П. Торвика

(середина 80-х гг.) была подробно исследована общая линейная реологическая модель вязких жидкостей с дробными производными Римана—Лиувилля. Подробное изложение этих вопросов см. в [3].

Аппарат дробного исчисления оказался также весьма эффективен в рамках изучения процессов аномальной диффузии. Термин «аномальная» используется потому, что в этих процессах среднеквадратичные отклонения положения блуждающих частиц нелинейно зависят от времени: $\langle x^2(t) \rangle = Ct^\gamma$. Режимы с $0 < \gamma < 1$ называются субдиффузионными, с $1 < \gamma < 2$ — супердиффузионными. Иногда также рассматриваются режимы с $\gamma > 2$, которые называются супербаллистическими и соответствуют аномальному ускорению частиц вдоль траекторий. Обстоятельное перечисление реальных физических процессов, для которых характерна такая аномальная динамика, приведено в [4]. Среди примеров субдиффузии отметим, например, транспорт носителей заряда в аморфных полупроводниках, ядерно-магнитный резонанс в пористых и трубчатых средах и рептацию (тепловое движение длинных линейных макромолекул естественного или искусственного происхождения в концентрированных растворах и полимерных расплавах). Одно из возможных объяснений замедления диффузии заключается в том, что в этих системах блуждающие частицы вынуждены тратить время на обход пустот и тупиков, как бы «теряясь» в сложных внутренних переходах внутри среды. Примеры супердиффузии обычно связаны с турбулентным переносом в неравновесных средах — на сегодняшний день уже накоплено определенное количество экспериментальных материалов, подтверждающих более быстрый по сравнению с линейным рост среднеквадратичных отклонений в этих процессах (см. ссылки в [5]). В некоторых аномальных процессах суб- и супердиффузионные режимы конкурируют, перемежаясь друг с другом, что приводит к еще более сложной наблюдаемой динамике. Аномальные диффузионные процессы, в свою очередь, являются представителями более широкого класса эволюционных процессов, протекающих в системах со сложной внутренней структурой и нелокальными временными корреляциями (*long-range dependencies*), которые объединены по общим названием «странная кинетика» (*strange kinetics*) [5, 6].

Хорошо известно, что уравнения параболического типа с обычными производными играют важную роль в теории марковских процессов. Само уравнение адвекции—диффузии может быть получено с помощью предельного перехода для простой модели случайного блуждания. Оказалось, что уравнение диффузии с дробными производными также обнаруживает глубокую связь с теорией случайных процессов. Эта конструкция естественным образом возникает при рассмотрении одной схемы случайных блужданий с непрерывным временем (см., например, [7, 8]). Если предположить, что асимптотическое поведение плотностей величин скачков блуждающей частицы $w(x)$ и времен

ожидания между этими скачками $\psi(t)$ определяются соотношениями

$$\psi(t) \sim t^{-(1+\beta)}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad w(x) \sim |x|^{-(1+\alpha)}, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где $0 < \beta \leq 1$ и $0 < \alpha \leq 2$, то после некоторых преобразований может быть получено уравнение

$$\left({}_t\mathcal{D}_{0+}^\beta p\right)(t, x) = D({}_x\mathcal{D}_\theta^\alpha p)(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

Здесь $p(t, x)$ — плотность вероятности нахождения частицы в точке x в момент времени t , в левой части стоит производная Капуто (подробнее о ней далее в тексте), а в правой — дробная производная Рисса (см. [1]). В [9] было исследовано еще более общее уравнение, которое дополнительно содержало адвекционное слагаемое с обычной производной первого порядка по x и оператор Феллера (производная Рисса является его частным случаем). Было показано, что фундаментальные решения задачи Коши для такого уравнения при выполнении определенных ограничений на скалярные параметры являются плотностями распределения некоторых случайных величин. Схема случайного блуждания, кратко описанная здесь, также может быть расширена, чтобы учесть детерминированный дрейф блуждающих частиц или наличие стоков и источников [10]. В заключение отметим, что описанный формализм случайных блужданий не исчерпывает возможные подходы к физическому обоснованию уравнений диффузии с дробными производными — альтернативные методы см. в [4, 7].

Как уже было сказано выше, существует множество различных интегро-дифференциальных операторов дробного порядка, которые не эквивалентны друг другу. Ниже будут кратко описаны те конструкции, которые необходимы для дальнейшего изложения. Левосторонние дробные интегралы Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ на конечном сегменте $[a, b]$ определяются выражением

$$\left(I_{a+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau)(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t > a. \quad (1)$$

Существует также правосторонний аналог этого дробного интеграла, отличающийся положением переменного предела интегрирования и знаками слагаемых внутри интеграла. Разделение на лево- и правосторонние операторы сохраняется и для дробных производных. Основные свойства этих конструкций ничем не отличаются, и далее в тексте будут использоваться только левосторонние операторы. Если переменная, по которой производится дробное интегро-дифференцирование, имеет смысл времени, то только левосторонние операторы будут каузальными: для определения значения в момент времени t они используют лишь предысторию процесса.

Левосторонняя производная Капуто представляет собой оператор

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad \alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(t) &= f^{(n)}(t), \quad \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$, $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, $[\cdot]$ означает целую часть. Конструкция (2) определена почти всюду на $[a, b]$ для функций, принадлежащих классу $AC^n[a, b]$, состоящему из $n - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций f , причем $f^{(n-1)}$ является абсолютно непрерывной на $[a, b]$. Для функций, непрерывно дифференцируемых вплоть до n -го порядка, производные Капуто как функции верхнего предела непрерывны на $[a, b]$ и при $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполняется $(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(a) = 0$.

Термин «производная» применительно к операторам (2) объясняется тем, что при $\alpha \approx n$, $n \in \mathbb{N}$ они могут быть выражены через обычные производные. Выполняя интегрирование по частям в их определении, можно показать, что

$$(\mathcal{D}_{0+}^{n-\epsilon} f)(t) = f^{(n)}(t) + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\mathcal{D}_{0+}^{n-1+\epsilon} f)(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0) + \mathcal{O}(\epsilon),$$

где $0 < \epsilon \lll 1$.

Подобно тому как обычные операторы дифференцирования являются левыми обратными для интегралов Римана, производные Капуто являются левыми обратными для дробных интегралов Римана—Лиувилля. Пусть $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $f \in C[a, b]$. Если $\operatorname{Re} \alpha \notin \mathbb{N}$ или $\alpha \in \mathbb{N}$, то [1, 11]

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x).$$

Для $\operatorname{Re} \alpha \in \mathbb{N}$ и $\operatorname{Im} \alpha \neq 0$ справедливо

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} (I_{a+}^{\alpha+1-n} f)(x) \Big|_{x=a+0}.$$

Если $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $f \in AC^n[a, b]$, то выполняется [11]

$$(I_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

В некоторых случаях производные Капуто могут быть вычислены в явном виде. Так, например, для функций $f(t) = t^{\beta}$ при $\beta > [\alpha] = n - 1$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau = \int_0^t \frac{(\beta)_n \tau^{\beta-n}}{\Gamma(n-\alpha)(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau = \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_0^1 \xi^{\beta-n}(1-\xi)^{n-\alpha-1} d\xi = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $(\beta)_n = \beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)$. При вычислении мы использовали замену переменных $t\xi = \tau$ и известную связь между Γ - и Ψ -функциями. Если же β целое и $0 < \beta \leq [\alpha]$, то производная Капуто от f будет равна нулю, т.к. подынтегральное выражение обратится в ноль.

Удобным инструментом для работы с операторами Капуто (а также и другими операторами дробного исчисления) являются интегральные преобразования. Пусть $\alpha > 0$, $f \in C^n(\mathbb{R}_+)$, производные f вплоть до $(n-1)$ -го порядка исчезают на бесконечности и $F(q)$ — образ f под действием преобразования Лапласа. Тогда

$$(\mathcal{D}_{0+}^\alpha f)(t) \doteq q^\alpha F(q) - \sum_{k=0}^{n-1} q^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0).$$

Производные Капуто, в отличие от обычных операторов дифференцирования, не обладают в общем случае полугрупповым свойством. Пусть $f \in C^n[a, b]$, а $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ таковы, что существует $m \in \mathbb{N}$, такое что $\alpha, \beta \in [m-1, m]$. Тогда

$$\mathcal{D}_{a+}^\alpha \circ \mathcal{D}_{a+}^\beta = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta}.$$

Требование о существовании $m \in \mathbb{N}$ важно. Например, если $\alpha = 7/10 < 1 < \alpha + \beta = 7/5$ и $f(t) = t$:

$$\left(\mathcal{D}_{0+}^{7/5} f\right)(t) = 0, \quad \left(\mathcal{D}_{0+}^{7/10} f\right)(t) = \frac{t^{3/10}}{\Gamma(13/10)} = h(t), \quad \left(\mathcal{D}_{0+}^{7/10} h\right)(t) = \frac{t^{-2/5}}{\Gamma(3/5)}.$$

Первое равенство здесь следует из $f''(t) = 0$.

Вообще, производные Капуто имеют ряд свойств, существенно отличающих их от обычных производных при $\alpha \notin \mathbb{N}$. Например, неотрицательность производной Капуто при $\alpha < 1$ на некотором интервале является необходимым условием неубывания функции, поскольку подынтегральная функция в (2) будет неотрицательной, но не является достаточным. Простейший пример — функция $f(t) = t^2 - t$. Легко показать, что ее дробная производная

$$\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{2t}{2-\alpha} - 1 \right)$$

будет отрицательной на $(1/2, 1 - \alpha/2)$, хотя сама функция f там монотонно возрастает. Более того, операторы Капуто не всегда коммутируют. Для них не существует простого аналога теоремы о дифференцировании сложной функции — это обстоятельство сильно затрудняет, например, поиск автомодельных решений для дифференциальных уравнений дробного порядка. Дифференцирование произведения функций приводит к обобщенной формуле Лейбница [1], содержащей в общем случае бесконечное число слагаемых даже при $\alpha < 1$.

Как уже отмечалось выше, существует множество различных неэквивалентных определений дробных производных. Поэтому с необходимостью возникает вопрос о том, какое из них следует выбрать. Если говорить о производных по временному переменному, то операторы Капуто являются наиболее подходящими. Это связано с двумя их свойствами. Во-первых, производная Капуто от постоянной равна нулю, что позволяет определять стационарность привычным образом. Во-вторых, уравнения с производными Капуто требуют задания начальных условий в терминах обычных производных. Для дифференциальных операторов Римана—Лиувилля, например, это не так — начальные условия также должны быть выражены через дробные производные. Еще одно преимущество операторов Капуто заключается в отсутствии особенности при стремлении в (2) верхнего предела к a — производные Римана—Лиувилля в этом случае для некоторых функций могут обращаться в бесконечность.

Для дальнейшего изложения нам также понадобится функции Миттаг-Леффлера [11, 12]. Это степенные ряды вида

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (4)$$

которые представляют собой целые функции порядка $|\operatorname{Re} \alpha|^{-1}$. В некоторых частных случаях функция Миттаг-Леффлера может быть выражена через элементарные функции:

$$E_1(z) = e^z, \quad E_2(z) = \operatorname{ch} \sqrt{z}, \quad E_{1/2}(z) = e^{z^2} \operatorname{erfc}(-z).$$

Вычисление функций Миттаг-Леффлера непосредственным суммированием сопряжено с некоторыми трудностями, поэтому необходимо использование нетривиальных методов (см., например, [12–14]).

Если $0 < \alpha < 2$ и μ таково, что

$$\frac{\alpha\pi}{2} < \mu < \min\{\pi, \alpha\pi\},$$

то при $m > 1$ и $|z| \rightarrow +\infty$ справедливы следующие соотношения [11]:

$$E_{\alpha}(z) \sim \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right), \quad |\operatorname{Arg} z| \leq \mu,$$

$$E_{\alpha}(z) \sim - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right), \quad \mu \leq |\operatorname{Arg} z| \leq \pi.$$

Для случая $\alpha > 2$ асимптотические разложения также известны, но имеют более сложную форму.

Функции $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ играют ту же роль для оператора Капуто \mathcal{D}_{0+}^α , что и функции $e^{\lambda t}$ для обычного оператора дифференцирования. В этом можно убедиться, почленно выполняя дробное дифференцирование по t в определении функции Миттаг-Леффлера:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k \mathcal{D}_{0+}^\alpha t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k t^{\alpha k - \alpha} \Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + 1) \Gamma(\alpha k - \alpha + 1)} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{\lambda \lambda^s t^{\alpha s}}{\Gamma(\alpha s + 1)} = \lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

Здесь мы использовали (3) и заменили индекс суммирования, $s = k - 1$. Преобразование Лапласа от $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ имеет вид

$$\frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - \lambda}, \quad \operatorname{Re} q > 0, \quad |\lambda q^{-\alpha}| < 1. \quad (5)$$

Важным отличием от обычной экспоненты является отсутствие полугруппового свойства. Действительно, используя определение (4), можно показать, что

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) E_\alpha(\mu t^\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^{\alpha k} \sum_{m=0}^k \frac{\lambda^m \mu^{k-m}}{\Gamma(\alpha m + 1) \Gamma(\alpha(k-m) + 1)}.$$

Правая часть здесь будет совпадать с $E_\alpha((\lambda + \mu)t^\alpha)$, только если $\alpha = 1$ либо если хотя бы одно из чисел λ и μ равно нулю.

Для дальнейшего изложения нам также понадобятся производные (в обычном смысле) от $E_\alpha(\lambda t^\alpha)$ по параметру λ :

$$\mathcal{E}_{\alpha,m}(t, \lambda) = \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} E_\alpha(\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(m+k)! \lambda^k t^{\alpha(m+k)}}{k! \Gamma(\alpha(m+k) + 1)}.$$

Дифференцируя (5) m раз и используя свойства преобразования Лапласа, получим следующее соотношение

$$t^{\alpha m} \mathcal{E}_{\alpha,m}(t, \lambda) = \frac{m! q^{\alpha-1}}{(q^\alpha - \lambda)^{m+1}}. \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения с дробными производными

Будем рассматривать задачу Коши для нелинейного дифференциального (строго говоря, это уравнение является интегро-дифференциальным, однако термин уже стал общепринятым) уравнения дробного порядка

$$(\mathcal{D}_{a+}^\alpha u)(t) = f(t, u(t)), \quad u^{(k)}(a) = u_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = [\alpha] + 1. \quad (7)$$

Аналог теоремы Пикара—Линделефа о существовании и единственности решения (7) имеет следующий вид. Пусть $\alpha > 0$, $t \in (a, b]$ и $n = [\alpha] + 1$, а функция $f(t, u)$ такова, что $(t - a)^\gamma f(t, u)$, $0 \leq \gamma \leq \alpha$, непрерывна по первому аргументу при любом фиксированном u из открытого множества $G \subset \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq K|u - v|.$$

Тогда на отрезке $[a, b]$ существует единственное решение задачи Коши (7), непрерывно дифференцируемое по крайней мере вплоть до порядка $n - 1$. Доказательство основано на эквивалентности (7) и интегрального уравнения Вольтерра второго рода [11]

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k(t-a)^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau, \quad t \geq a, \quad (8)$$

существование и единственность решений которого устанавливается с помощью теоремы о неподвижной точке. Более сложная версия этой теоремы, когда условия на u задаются в произвольной внутренней точке некоторого отрезка $[a, b]$, приведены в [11].

Из приведенного результата следует, что достаточную гладкость решения можно ожидать только для уравнений, дробный порядок которых достаточно высок. Однако такого же результата можно добиться, если наложить более строгие ограничения на правую часть уравнений [15]: если выполнены условия теоремы существования и единственности и, кроме того, f непрерывно дифференцируема по первому аргументу m раз, то $u \in C^m(a, b) \cap C^{n-1}[a, b]$. В общем случае гарантировать непрерывность производных решения в начальной точке нельзя, даже если правая часть будет аналитической на соответствующем множестве. Детальное изложение более специфических вопросов гладкости и аналитичности решений уравнений (7) можно найти в [15].

Для уравнений вида (7) справедливы [15] утверждения о непрерывной зависимости от условий (начальных данных и правых частей), хорошо известные для обыкновенных дифференциальных уравнений. Более интересно, что порядок дробного оператора также можно считать теперь изменяемым условием. Пусть $u(t)$ — решение задачи Коши (7), а $v(t)$ — решение задачи

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^\beta v\right)(t) = f(t, z(t)), \quad v^{(k)}(a) = u_k, \quad k = 0, 1 \dots m-1, \quad m = [\beta] + 1,$$

где для определенности $\beta > \alpha$. Введем обозначения $\epsilon = \beta - \alpha$ и

$$\epsilon^* = \max_{n \leq k \leq m-1} \{|u_k|\}, \quad n \neq m.$$

При $n = m$ будем считать $\epsilon^* = 0$. Тогда если ϵ и ϵ^* достаточно малы, то существует b , такое что $u(t)$ и $v(t)$ определены на отрезке $[a, b]$ и

$$\sup_{a \leq t \leq b} |u(t) - v(t)| = \mathcal{O}(\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^*).$$

Отмеченные выше утверждения, устанавливающие условия существования и единственности решений уравнений вида (7), вместе с результатом о непрерывной зависимости этого решения от начальных данных, позволяют сформулировать условия, при которых задача Коши является корректно поставленной.

В стандартной теории уравнения более высокого порядка, разрешимые относительно старшей производной, всегда могут быть сведены к нормальной системе уравнений первого порядка. В случае с уравнениями в дробных производных вида

$$(\mathcal{D}_{0+}^{\alpha_m} u)(t) = f\left(t, (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha_1} u)(t), (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha_2} u)(t), \dots, (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha_{m-1}} u)(t)\right) \quad (9)$$

подобное преобразование является более трудоемким, поскольку само понятие «нормальной системы» здесь можно интерпретировать по-разному, а на числа α_k должны быть наложены некоторые дополнительные ограничения. Например, приведение к нормальной системе, где все дробные производные имеют одинаковый показатель, меньший единицы, возможно, если все α_k соизмеримы. Развернутое изложение этого вопроса см. в [15].

Известно достаточно много подходов к приближенному решению уравнений с дробными производными. Большинство численных методов основано либо на непосредственной разностной аппроксимации интегралов типа свертки в определении дробных операторов (2) или уравнении Вольтерра (8), либо на использовании производных Грюнвальда—Летникова. Известны также приближенные полуаналитические методы, где решение строится в виде конечной суммы, каждое слагаемое которой уточняется с помощью некоторой итерационной процедуры (см. ссылки в [16]).

Мы остановимся лишь на кратком описании двух простых разностных схем. Более подробное изложение со множеством ссылок можно найти в [17]. Пусть задана сетка $t_i = i \cdot h$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Уравнение (7) эквивалентно интегральному уравнению (8), которое мы запишем в виде

$$u(t_i) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t_i)^k}{k!} u^{(k)}(0)}_{=T_{n-1}[u](t_i)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_i - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau. \quad (10)$$

Простейшую явную схему мы получим из (10), использовав правило левых

прямоугольников для интегралов:

$$U_i = T_{n-1}[u](t_i) + h^\alpha \sum_{k=0}^{i-1} b_{i-k-1}(\alpha) f_k, \quad b_j(\alpha) = \frac{(j+1)^\alpha - j^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (11)$$

Для упрощения записи мы использовали обозначения $U_i = U(t_i)$ и $f_i = f(t_i, U(t_i))$, где U — приближенное решение. Более высокий порядок точности можно получить с помощью правила трапеций, заменяя подынтегральную функцию линейным интерполяционным полиномом:

$$U_i = T_{n-1}[u](t_i) + h^\alpha \left(c_i(\alpha) f_0 + \sum_{k=1}^i a_{i-k}(\alpha) f_k \right), \quad (12)$$

$$c_j(\alpha) = \frac{(j-1)^{\alpha+1} - j^\alpha(j-\alpha-1)}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad a_0(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)},$$

$$a_j(\alpha) = \frac{(j+1)^{\alpha+1} - 2j^{\alpha+1} + (j-1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Эта схема является неявной.

Линейные системы

В этом разделе будут приведены точные решения для линейных однородных систем с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_1)(t) &= a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) + \dots + a_{1n}u_n(t), \\ &\dots \\ (\mathcal{D}_{0+}^\alpha u_n)(t) &= a_{n1}u_1(t) + a_{n2}u_2(t) + \dots + a_{nn}u_n(t), \end{aligned}$$

или, в векторном виде, $(\mathcal{D}_{0+}^\alpha \mathbf{u})(t) = A\mathbf{u}(t)$, $0 < \alpha < 1$. Будем считать, что начальные условия заданы в момент времени $t = 0$. Общие решения для них строятся по той же схеме, что и для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти решения позволят наглядно продемонстрировать основные отличия между системами дробного порядка и обычными гладкими динамическими системами.

Пусть матрица A такова, что все ее собственные числа λ_k вещественны и отличны друг от друга. В этом случае, как известно, она может быть приведена к диагональному виду D в базисе из собственных векторов \mathbf{c}_k : $D = T^{-1}AT$. Тогда, положив $\mathbf{v} = T\mathbf{u}$ и воспользовавшись линейностью оператора Капуто, получим $(\mathcal{D}_{0+}^\alpha \mathbf{v})(t) = D\mathbf{v}(t)$. Таким образом, система распалась на n неза-

висимых уравнений. Общее решение этой упрощенной системы имеет вид

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^n C_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha) \mathbf{e}_k,$$

где \mathbf{e}_k — n -мерный вектор, у которого k -я компонента равна единице, а все остальные равны нулю. Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^n C_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha) \mathbf{c}_k.$$

В случае если среди собственных чисел есть комплексные (с единичной кратностью), то используется обычная техника отделения действительной и мнимой частей и соотношение $E_\alpha(\bar{z}) = \bar{E}_\alpha(z)$, где \bar{z} означает комплексно сопряженную с z величину. В отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений, здесь уже не удастся упростить общее решение, поскольку для функций Миттаг-Леффлера не известен аналог тождества Эйлера:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^{m_1} C_k E_\alpha(\lambda_k t^\alpha) \mathbf{c}_k + \sum_{s=1}^{m_2} \left\{ Q_s \operatorname{Re} [E_\alpha(\lambda_s t^\alpha) \mathbf{c}_s] + K_s \operatorname{Im} [E_\alpha(\lambda_s t^\alpha) \mathbf{c}_s] \right\},$$

где $m_1 + m_2 = n$.

Пусть теперь J — жорданова клетка размера $s \times s$. Последнее уравнение в системе $(\mathcal{D}_{0+}^\alpha \mathbf{v})(t) = J\mathbf{v}(t)$ имеет вид $(\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_s)(t) = \lambda v_s(t)$, его решением будет $v_s(t) = C_s E_\alpha(\lambda t^\alpha)$. Предпоследнее уравнение теперь может быть записано в виде

$$(\mathcal{D}_{0+}^\alpha v_{s-1})(t) = \lambda v_{s-1}(t) + C_s E_\alpha(\lambda t^\alpha).$$

Применение преобразования Лапласа приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} q^\alpha F_{s-1}(q) - C_{s-1} q^{\alpha-1} &= \lambda F_{s-1}(q) + C_s \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - \lambda} \iff \\ F_{s-1}(q) &= C_{s-1} \frac{q^{\alpha-1}}{q^\alpha - \lambda} + C_s \frac{q^{\alpha-1}}{(q^\alpha - \lambda)^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя (6), после перехода к оригиналам получим

$$v_{s-1}(t) = C_{s-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha) + C_s t^\alpha \mathcal{E}_{\alpha,1}(t, \lambda).$$

Понятно, что при рассмотрении последующих уравнений мы после применения преобразования Лапласа будем получать выражения вида (13), правые части которых являются суммами членов вида $q^{\alpha-1}/(q^\alpha - \lambda)^m$.

Пусть \mathbf{c}_1 — собственный вектор квадратной матрицы B , соответствующий ее единственному собственному значению кратности s . Этот вектор порождает систему векторов $\mathbf{c}_k, k = 2, 3 \dots s$ (их называют присоединенными или обобщенными собственными), связанных соотношениями

$$B\mathbf{c}_1 = \lambda\mathbf{c}_1, \quad B\mathbf{c}_2 = \lambda\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1, \quad \dots \quad B\mathbf{c}_s = \lambda\mathbf{c}_s + \mathbf{c}_{s-1}.$$

Матрица B может быть приведена преобразованием подобия к жордановой клетке размера $s \times s$, причем столбцы матрицы подобия P являются обобщенными собственными векторами B . Тогда, положив $\mathbf{v}(t) = P\mathbf{u}(t)$, получим для системы $(\mathcal{D}_{0+}^\alpha \mathbf{u})(t) = B\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{k=1}^s C_k \sum_{j=1}^k \frac{t^{\alpha(k-j)}}{(k-j)!} \mathcal{E}_{\alpha, k-j}(t, \lambda) \mathbf{c}_k, \quad (14)$$

где для удобства записи будем считать $\mathcal{E}_{\alpha, 0}(t, \lambda) = E_\alpha(\lambda t^\alpha)$. Наконец, всякая квадратная матрица может быть приведена к нормальной жордановой форме, т.е. блочно-диагональной матрице, блоки которой являются жордановыми клетками (корням единичной кратности соответствуют вырожденные клетки размера 1×1). Поэтому общее решение однородной линейной системы, собственные числа которой являются вещественными, будет суммой конструкций типа (14), в которых нужно положить s равным кратности соответствующего собственного числа λ . В случае кратных комплексных корней в выражениях (14) также необходимо будет отделить действительную и мнимую части. Поскольку запись получающегося выражения весьма громоздка, мы не будем приводить ее здесь.

Подчеркнем еще раз, что полученные решения справедливы лишь при $0 < \alpha < 1$. Так, например, общее решение дробного осциллятора

$$(\mathcal{D}_{0+}^\alpha u)(t) + \omega^2 u = 0$$

с $1 < \alpha < 2$ имеет вид [11, 15]

$$u(t) = C_1 E_\alpha(-\omega^2 t^\alpha) + C_2 t E_{\alpha, 2}(-\omega^2 t^\alpha), \quad E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (15)$$

где $E_{\alpha, \beta}$ — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера (см. [12]). Выражение (15) позволяет сделать интересное наблюдение: хотя дробный осциллятор не содержит в явном виде слагаемого, отвечающего за диссипацию, его решение описывает затухающие негармонические колебания. Это означает, что дробную производную можно рассматривать не только как свидетельство наличия у процесса памяти, но и как источник нелинейной диссипации.

Качественная теория

Для систем уравнений с дробными производными Капуто (7), в которых правая часть не зависит явно от t , понятие точек покоя совпадает с таковым для обычных автономных динамических систем — это точки, в которых правые части обращаются в ноль. Действительно, производная Капуто равна нулю тогда и только тогда, когда она действует на постоянную функцию. Как и для стандартной теории, важнейшим вопросом является устойчивость этих точек.

Обзор результатов по устойчивости решений систем дробного порядка можно найти, например, в [18]. Здесь мы лишь кратко остановимся на основных результатах. Критерий устойчивости для линейных систем с $0 < \alpha < 1$ был впервые представлен в работе Д. Матиньона [19]. Как и в случае обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, вопрос об устойчивости сводится к спектральным свойствам матрицы A . Система асимптотически устойчива, если и только если $|\operatorname{Arg} \lambda_k| > \alpha\pi/2$ при любом k , где λ_k — собственные числа матрицы A . Система устойчива (но не асимптотически устойчива), если $|\operatorname{Arg} \lambda_k| \geq \alpha\pi/2$ и собственные значения, лежащие на границе этой области, имеют геометрическую кратность один. Если среди собственных чисел есть нулевые, то критерий устойчивости усложняется.

Важно, что характер стремления траекторий системы к устойчивым точкам покоя меняется: если для уравнений в обычных производных он является экспоненциальным, то для дробных систем он будет лишь степенным $t^{-\alpha}$, т.е. гораздо более медленным. В силу такого медленного степенного убывания применение аппарата стандартной теории устойчивости не всегда оказывается корректным. Так, было продемонстрировано (см. ссылки в [20]), что дробная система, для которой обобщенная энергия не затухает экспоненциально, может все же быть устойчива в смысле Ляпунова. Поэтому для дробных систем были предложены новые определения устойчивости, например, устойчивость по Миттаг-Леффлеру [21].

Критерии устойчивости линейных систем с различными рациональными показателями не больше единицы приведены в [18]. В [22] были предприняты попытки обоснования метода линеаризации дробных систем общего вида и обобщения теоремы Гробмана—Хартмана, но строгое доказательство пока так и не было представлено. Наиболее общий из известных на сегодняшний день критериев устойчивости был представлен в [23]. Если $f' \in C[0, +\infty)$ и $0 < \alpha < 1$, то стационарная точка нелинейной системы локально асимптотически устойчива, если $f'(0) < 0$. Критерии устойчивости для уравнений с произвольными несоизмеримыми порядками дробных производных до сих пор неизвестны. Общая теория устойчивости для систем с дробными производными пока не построена, поскольку нелокальная природа и слабо сингу-

лярное ядро этих операторов значительно усложняют анализ.

Классификация точек покоя может быть проведена точно таким же образом, как и в стандартной теории. На рис. 1 показаны фазовые траектории двумерных линейных систем, полученные с помощью точных решений из предыдущего раздела. Седла и узлы в целом мало отличаются от обычных динамических систем. Однако для случая комплексных корней ситуация значительно меняется. На рис. 1 слева хорошо видно, что фазовые траектории уже не похожи на спирали: ни одна из траекторий не делает полного оборота вокруг точки покоя. Но гораздо более важно, что траектории пересекаются и друг с другом, и сами с собой, что невозможно для обычных автономных динамических систем. Таким образом, поток, порождаемый системами типа (7), не обладает полугрупповым свойством. Можно показать, что если $\phi_t(u_0)$ — решение автономного уравнения порядка $0 < \alpha < 1$ с начальным условием $u(0) = u_0$ в момент времени $t \geq 0$, то справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} \phi_0(u_0) &= u_0, & \phi_{t+s}(u_0) &= \phi_t \circ \theta_t \circ \phi_s(u_0), \\ \theta_t \circ \phi_s(u_0) &= u_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (t+s-\tau)^{\alpha-1} f(\phi_\tau(u_0)) d\tau, & s > 0. \end{aligned}$$

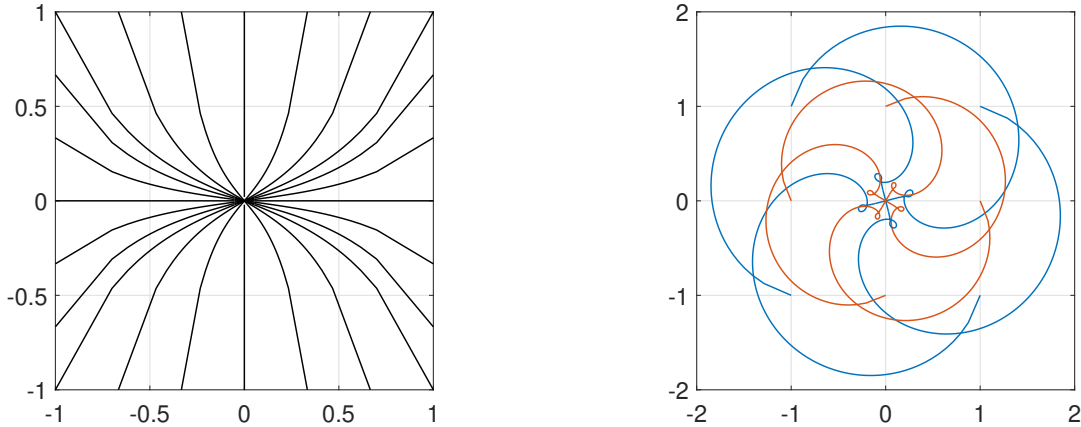


Рис. 1. Траектории линейной системы порядка $\alpha = 1/2$ с $\lambda_1 =$ и $\lambda_2 =$ (устойчивый узел, слева), а также с $\lambda = e^{\pm i\pi/3}$ (устойчивый фокус, справа)

Аттракторы систем дробного порядка, отличные от точек, могут зависеть от начальных условий. Характерный пример показан на рис. 2 слева. Это в целом не удивительно, поскольку сама конструкция оператора Капуто предполагает временную нелокальность и зависимость от предыстории процесса. При этом динамика на качественном уровне остается неизменной — обе траектории описывают финитное почти-периодическое (после непродолжительного переходного периода) движение. Примечательно, что почти-периодические решения вообще очень характерны для дробных систем. Но строго периодические решения, наоборот, встречаются здесь редко. Это может объясняться

тем, что левосторонняя дробная производная с конечным нижним пределом от периодической функции не может быть периодической функцией [20]. Также на рис. 2 (справа) показан пример, иллюстрирующий отсутствие полугруппового свойства у потока, порождаемого системой дробного порядка: хорошо видно, что если выбрать какую-нибудь точку на траектории в качестве нового начального условия, то новая траектория не будет совпадать с исходной.

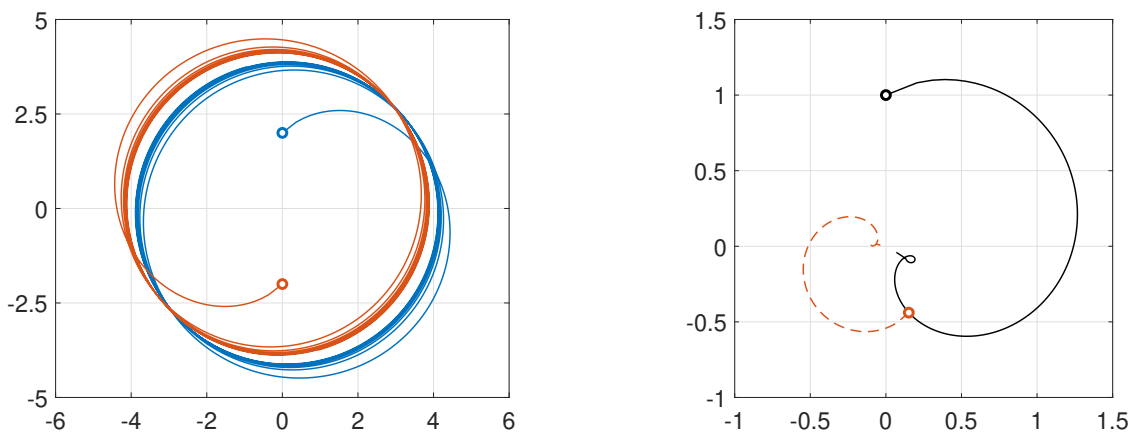


Рис. 2. Слева: траектории линейной системы порядка $\alpha = 1/2$ с $\lambda = e^{\pm i\pi/4}$ для нескольких начальных значений. Справа: нарушение полугруппового свойства в линейной системе порядка $\alpha = 1/2$ с $\lambda = e^{\pm i\pi/3}$

Имеется достаточно много данных о системах дробного порядка, являющихся обобщениями нелинейных автономных динамических систем — Лоренца, Ресслера, Лотки—Вольтерра и др. (см., например, [24]). Вполне ожидаемо, что области значений параметров, при которых в системах целого порядка наблюдаются регулярные и хаотические режимы, меняются при переходе к дробным производным. Порядок производных становится, таким образом, еще одним бифуркационным параметром. Оказалось, что существует минимальное значение эффективного порядка системы (под которым понимается сумма порядков всех производных), по достижении которого в системе вообще не могут наблюдаться хаотические режимы: диссипация, обусловленная дробными операторами, становится столь значимой, что среди допустимых решений системы остаются лишь самые простые. Например, в [25] для дробного аналога системы Лоренца с помощью численных методов было установлено, что минимальная эффективная размерность равна 2.94 в том случае, если все дробные производные системы имеют один и тот же порядок. Если лишь первое уравнение системы Лоренца содержит дробную производную с показателем $0 < \alpha < 1$, а остальные два понимаются в обычном смысле, то эффективная размерность оказалась несколько ниже — 2.91. В той же работе был поставлен весьма интересный вопрос: можно ли указать такое универ-

сальное значение эффективной размерности, при котором в любой системе дробного порядка хаос становится невозможным? Для обыкновенных систем ответ на него хорошо известен: теорема Пуанкаре—Бендиксона устанавливает, что поведение динамической системы на плоскости (или на сфере) не может быть хаотичным, т.е. предельное множество любой траектории такой системы — это либо устойчивая точка, либо предельный цикл, либо полицикл.

Брюсселятор с дробными производными

В данном разделе мы подробно рассмотрим следующую двухкомпонентную систему реакции—диффузии

$$({}_t\mathcal{D}_{0+}^\alpha u)(t, z) = \frac{D_1}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + A - (B + 1)u + u^2v, \quad (16a)$$

$$({}_t\mathcal{D}_{0+}^\alpha v)(t, z) = \frac{D_2}{L^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + Bu - u^2v. \quad (16b)$$

Здесь L — размер расчетной области, $z \in [0, 1]$ — безразмерные пространственные координаты, A, B, D_1 и D_2 — неотрицательные коэффициенты, $0 < \alpha < 1$. При $\alpha = 1$ впервые она была рассмотрена И. Пригожиным и Р. Лефевром в 1968 г. как идеализированная модель для изучения сложных кооперативных химических процессов в открытых системах и получила название «брюсселятор». Функции u и v задают концентрации двух основных продуктов реакции, коэффициенты A и B — концентрации вспомогательных веществ. Система (16) при $\alpha = 1$ достаточно подробно исследована, см., например, [26, 27]. Известно, что она может демонстрировать очень богатый набор динамических режимов, некоторые из которых показаны на рис. 3. На этих рисунках черный цвет соответствует наибольшим значениям u , а белый — наименьшим. Цветовая кодировка для каждого рисунка делалась независимо от других, так что черному цвету на разных иллюстрациях могут соответствовать разные значения концентрации. Приведенные здесь решения были получены для начальных условий, соответствующих суперпозиции равновесного решения $(A, B/A)$ и нормального белого шума магнитуды $5 \cdot 10^{-2}$. Численная схема будет пояснена далее в тексте.

Базовыми механизмами, формирующими нетривиальные решения, являются неустойчивость Хопфа, приводящая к возникновению пространственно-однородного но нестационарного паттерна (см. рис. 3а), и неустойчивость Тьюринга, при которой в системе наблюдается пространственно неоднородный и стационарный паттерн (рис. 3б). При определенном выборе параметров возникает т.н. бифуркация коразмерности 2, при которой эти два механизма конкурируют, одновременно нарушая и пространственную, и временную симметрию. В этом режиме можно наблюдать различные паттерны (см. рис. 3с

и d) с более или менее выраженной структурой. Наконец, в системе возможно формирование хаотических режимов — соответствующие примеры приведена на рис. 3e и f. Типичный (но не единственный) для систем реакции—диффузии сценарий, при котором возможно наблюдение хаоса, предполагает, что характерная диффузионная длина, которая определяется величинами $\sqrt{D_i}$, пренебрежимо мала по сравнению с размером L самой области. В этом случае система фактически распадается на множество несвязных нелинейных осцилляторов, каждый из которых «занимает» небольшую область пространства. Приведенные иллюстрации, разумеется, не исчерпывают всех типов решений, которые можно наблюдать в системе (16). Например, здесь не показаны бистабильные режимы, при которых система распадается на несколько доменов, в каждом из которых формируется базовый паттерн (Хопфа или Тьюринга). Подробнее о решениях такого типа, а также о других интересных динамических эффектах, возникающих в окрестности бифуркации коразмерности 2, см. [28].

Ряд аналитических результатов для системы (16) можно получить с помощью линейной теории. Для определенности будем рассматривать однородные граничные условия Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0,1} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0,1} = 0.$$

Следуя стандартной практике, будем считать основным бифуркационным параметром B . Для удобства также введем для отношения коэффициентов диффузии обозначение $\theta = D_1/D_2$. Легко показать, что единственным положением равновесия системы является решение $u_0 = A$, $v_0 = B/A$. Отклонения от этого пространственно однородного и стационарного решения, $\xi(t, z) = u(t, z) - u_0$, $\eta(t, z) = v(t, z) - v_0$, подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} ({}_t\mathcal{D}_{0+}^\alpha \xi)(t, z) &= \frac{D_1}{L^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + (B - 1)\xi + A^2\eta + B\xi^2/A + 2A\xi\eta + \xi^2\eta, \\ ({}_t\mathcal{D}_{0+}^\alpha \eta)(t, z) &= \frac{D_2}{L^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - B\xi - A^2\eta - B\xi^2/A - 2A\xi\eta - \xi^2\eta. \end{aligned}$$

Граничные условия остаются неизменными. Считая, что возмущения малы по абсолютной величине, мы можем отбросить нелинейные члены и решить возникающую линейную задачу в явном виде. Действительно, пусть

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{c} \cdot E_\alpha(\sigma t^\alpha) \cos \pi m z, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Легко проверить, что указанная конструкция удовлетворяет граничным условиям. После подстановки этого пробного решения в линейную систему получим, что вектор \mathbf{c} с необходимостью должен быть правым собственным

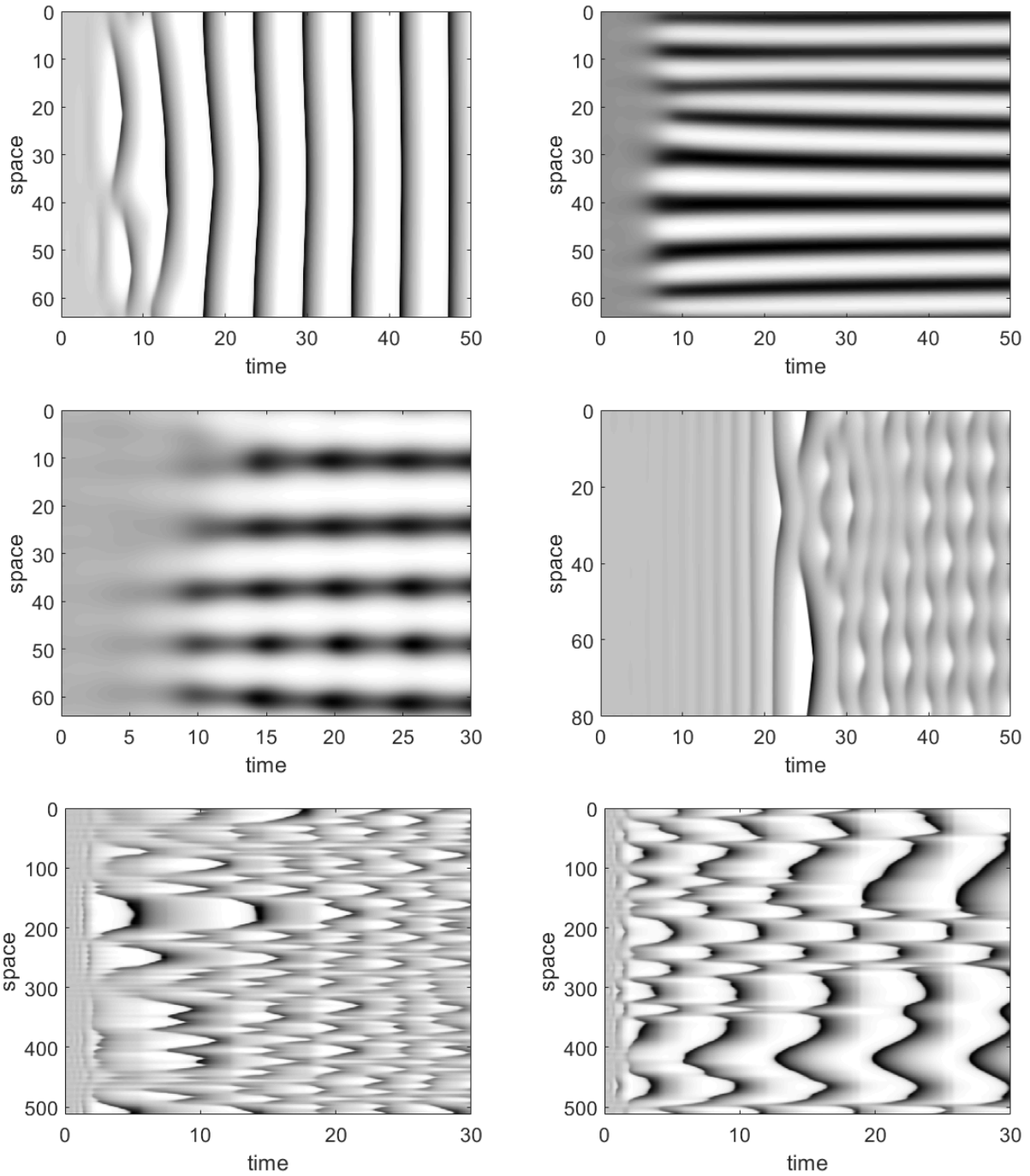


Рис. 3. Решения u системы (16) при $\alpha = 1$: $A = 2.5, B = 9, D_1 = 7, \theta = 0.7 > \theta_* = 0.4584, L = 64$ (a); $A = 2, B = 4.8, D_1 = 2, \theta = 0.2 < \theta_* = 0.382, L = 64$ (b); $A = 1.118, B = 2.75, D_1 = 2, \theta = 0.2 = \theta_* = 0.2, L = 64$ (c); $A = 3, B = 10.445, D_1 = 10, \theta = 0.5714 > \theta_* = 0.5195, L = 80$ (d); $A = 2.5, B = 8, D_1 = 4.49, \theta = 0.5039 < \theta_* = 0.4584, L = 512$ (e); $A = 2, B = 6, D_1 = 4, \theta = 0.5 < \theta_* = 0.382, L = 512$ (f). Для e использовались однородные условия Неймана, во всех остальных случаях — периодические краевые условия. Параметр θ_* вводится на стр. 24

вектором матрицы

$$\begin{pmatrix} B - 1 - m^2\pi^2 D_1/L^2 & A^2 \\ -B & -A^2 - m^2\pi^2 D_2/L^2 \end{pmatrix},$$

а σ должны удовлетворять характеристическому уравнению

$$\sigma^2 + \sigma[b(m) - a(m)] + A^2 B - a(m)b(m) = 0, \quad (17)$$

где мы использовали обозначения

$$a(m) = B - 1 - m^2\pi^2 D_1/L^2, \quad b(m) = A^2 + m^2\pi^2 D_2/L^2.$$

Корни этого уравнения в общем случае имеют вид

$$\sigma_{\pm}(m) = \frac{1}{2} \left\{ a(m) - b(m) \pm \sqrt{[b(m) + a(m)]^2 - 4A^2 B} \right\}.$$

Если оба корня действительные, то решение линейной задачи может потерять устойчивость лишь в том случае, если один из них становится больше нуля, в то время как другой остается отрицательным. Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$a(m) - b(m) < 0, \quad a(m)b(m) - A^2 B = 0.$$

Критическое значение параметра B , соответствующее этим условиям, равно

$$B_T(m) = 1 + \theta A^2 + \frac{A^2 L^2}{m^2 \pi^2 D_2} + \frac{m^2 \pi^2 D_1}{L^2}.$$

Эта зависимость является квадратичной относительно m^2 , и первая бифуркация должна произойти в окрестности минимума

$$B_T(x) = \left(1 + A\sqrt{\theta}\right)^2, \quad x^2 = \frac{AL^2}{\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}$$

критической кривой, т.е. при целом $m \neq 0$, для которого $B_T(m)$ окажется ближе всего к $B_T(x)$. Показатель α не играет здесь никакой роли, поэтому результат ничем не отличается от стандартной теории. При бифуркации Тьюринга в решении линейной системы будет доминировать член, пропорциональный $\cos \pi m z$, поскольку $E_{\alpha}(0) = 1$, что соответствует формированию стационарного пространственно-неоднородного паттерна.

Комплексно сопряженные корни возникают лишь при выполнении

$$[b(m) + a(m)]^2 - 4A^2 B < 0 \iff B^2 - 2B [A^2 + d(m)] + [A^2 - d(m)]^2 < 0.$$

Корни квадратичного относительно B полинома в правой части неравенства можно найти в явном виде, что приводит к более простому неравенству

$$|B| < \frac{1}{2} \left\{ 2 [A^2 + d(m)] \pm \sqrt{4 [A^2 + d(m)]^2 - 4 [A^2 - d(m)]^2} \right\} =$$

$$= A^2 + d(m) \pm 2A\sqrt{d(m)} = \left[A \pm \sqrt{d(m)} \right]^2, \quad d(m) = 1 + \frac{m^2\pi^2}{L^2}(D_1 - D_2).$$

Необходимым условием существования комплексных корней является неравенство $d(m) > 0$.

При $\alpha = 1$ решение линейной системы становится неустойчивым, если $a(m) - b(m) = 0$, когда корни характеристического полинома будут чисто мнимыми. Критическое значение B , при котором это происходит, равно

$$B_H(m, 1) = 1 + A^2 + \frac{m^2\pi^2}{L^2}(D_1 + D_2).$$

В случае $\alpha < 1$ потеря устойчивости впервые возникает при выполнении условия $|\text{Arg } \sigma_{\pm}(m)| = \alpha\pi/2$. Тогда критическое значение B должно быть решением нелинейного уравнения

$$\text{arctg} \frac{\sqrt{4A^2B - [b(m) + a(m)]^2}}{a(m) - b(m)} = \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (18)$$

Пусть $\gamma = \text{tg}(\alpha\pi/2)$. Тогда (18) может быть приведено к виду

$$- [B^2 - 2B(A^2 + d(m)) + (A^2 - d(m))^2] = \gamma^2 [B - B_H(m, 1)]^2. \quad (19)$$

Это уравнение может иметь несколько положительных корней $B_H(m, \alpha)$, но лишь один из них удовлетворяет условию $B_H(m, \alpha) > B_H(m, 1)$. Если это условие не будет выполнено, то $a(m) - b(m) < 0$, и тогда, очевидно, σ_{\pm} будут иметь отрицательную вещественную часть, а значит их, аргумент гарантированно будет больше $\alpha\pi/2$ и решение линейной задачи будет устойчиво. Примеры критических кривых $B_H(m, \alpha)$ показаны на рис. 4.

Если $\alpha = 1$, то первая бифуркация Хопфа всегда происходит при $m = 0$, поскольку $B_H(m, 1)$ монотонно возрастает по m . Решение линейной системы будет иметь незатухающие колебания по t , но при этом не будет зависеть от z . Если же $\alpha < 1$, то зависимость $B_H(m, \alpha)$ от m оказывается более сложной. При $\theta > 1$ критические кривые также будут напоминать ветвь параболы, направленной вверх. Если $\theta = 1$, то критические кривые по-прежнему монотонно возрастают, хотя теперь у них может меняться направление выпуклости. Наконец, при $\theta < 1$ меняется не только характер выпуклости, но и монотонность зависимости $B_H(m, \alpha)$ — формально возможна ситуация, при которой

минимум критической кривой достигается при $m \neq 0$. В этом случае решение линейной системы, теряющее устойчивость, зависело бы и от t , и от z . Такой механизм неустойчивости не может наблюдаться в стандартной системе, его появление обусловлено наличием производных нецелого порядка. Тем не менее, этот гипотетический сценарий не реализуется, потому что еще до того, как эта точка будет достигнута, уже произойдет бифуркация Тьюринга. Для удобства дальнейшего анализа будем считать, что волновое число может меняться непрерывно. Нетривиальный минимум критических кривых, если он вообще существует, не зависит от α и достигается в точке y , где критическая кривая пересекает верхнее ограничение на B , гарантирующее существование комплексных корней:

$$B_H(y, \alpha) = [A + d(y)]^2 \iff \frac{y^4 \pi^4 D_2^2}{L^4 A^2} - \frac{y^2 \pi^2}{L^2} (D_1 - D_2) - 1 = 0.$$

После несложных преобразований получим

$$\sqrt{d(y)} = \frac{A}{2} \left[\theta - 1 + \sqrt{(\theta - 1)^2 + \frac{4}{A^2}} \right].$$

Оказалось, что при любых A и $\theta < 1$ выполняется неравенство $B_H(y, \alpha) > B_T(x)$. Действительно,

$$\begin{aligned} A + \sqrt{d(y)} - 1 - A\sqrt{\theta} &= \frac{A}{2}(1 + \theta) + \sqrt{\frac{A}{2}(1 - \theta)^2 + 1} - 1 - A\sqrt{\theta} > \\ \frac{A}{2}(1 + \theta) + 1 - 1 - A\sqrt{\theta} &= \frac{A}{2} (1 + \theta - 2\sqrt{\theta}) = \frac{A}{2} (1 - \sqrt{\theta})^2 > 0. \end{aligned}$$

Бифуркация коразмерности 2 происходит в том случае, когда параметры подобаны таким образом, что при некотором $m_* \neq 0$ выполняется $B_H(0, \alpha) = B_T(m_*)$. Выражение для $B_H(0, \alpha)$ получим из (19) после несложных манипуляций:

$$B_H(0, \alpha) = 1 + A^2 + \frac{2A}{\sqrt{1 + \gamma^2}}.$$

Требование $B_H(0, \alpha) = B_T(m_*)$ задает функциональную связь между θ и A :

$$1 + A^2 + \frac{2A}{\sqrt{1 + \gamma^2}} = (1 + A\sqrt{\theta})^2 \iff A^2\theta + 2A\sqrt{\theta} + A^2 + \frac{2A}{\sqrt{1 + \gamma^2}} = 0.$$

Легко показать, что лишь один корень этого квадратичного относительно $\sqrt{\theta}$ уравнения будет положительным — он равен

$$\sqrt{\theta_*(A)} = \frac{\sqrt{1 + A^2 + 2A/\sqrt{1 + \gamma^2}} - 1}{A}.$$

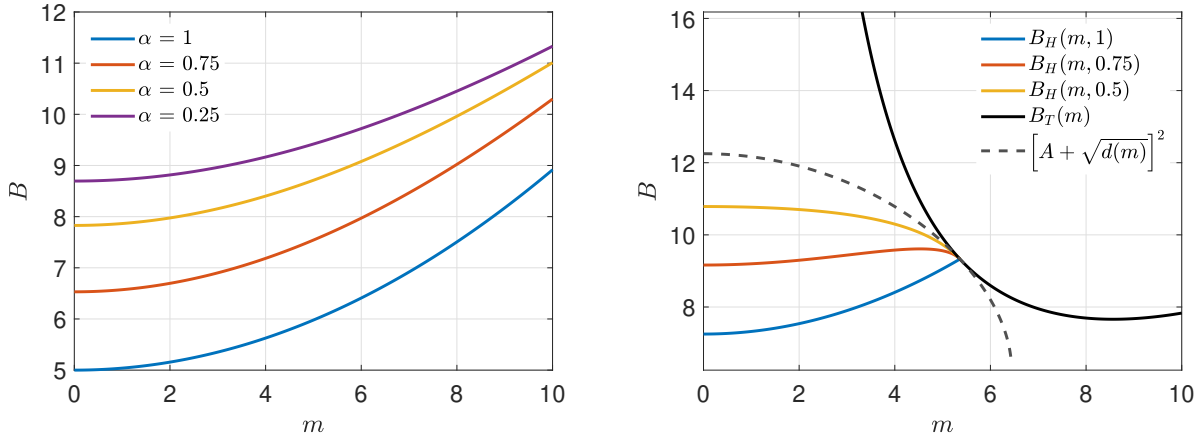


Рис. 4. Слева: зависимости $B_H(m, \alpha)$ от m при нескольких α и $A = 2, D_1 = 10, \theta = 1.6, L = 64$. Справа: зависимости $B_H(m, \alpha)$ и $B_T(m)$ от m при нескольких α и $A = 2.5, D_1 = 10, \theta = 0.5, L = 64$

Выполнение условия $\theta < \theta_*(A)$ гарантирует, что при последовательном увеличении параметра B первой всегда будет происходить бифуркация Тьюринга, в противном случае — всегда бифуркация Хопфа. Примеры зависимостей θ_* от A при некоторых α показаны на рис. 5а. Хорошо видно, что с уменьшением α эти кривые сдвигаются вверх, расширяя область значений θ , в которой можно наблюдать стационарные паттерны Тьюринга.

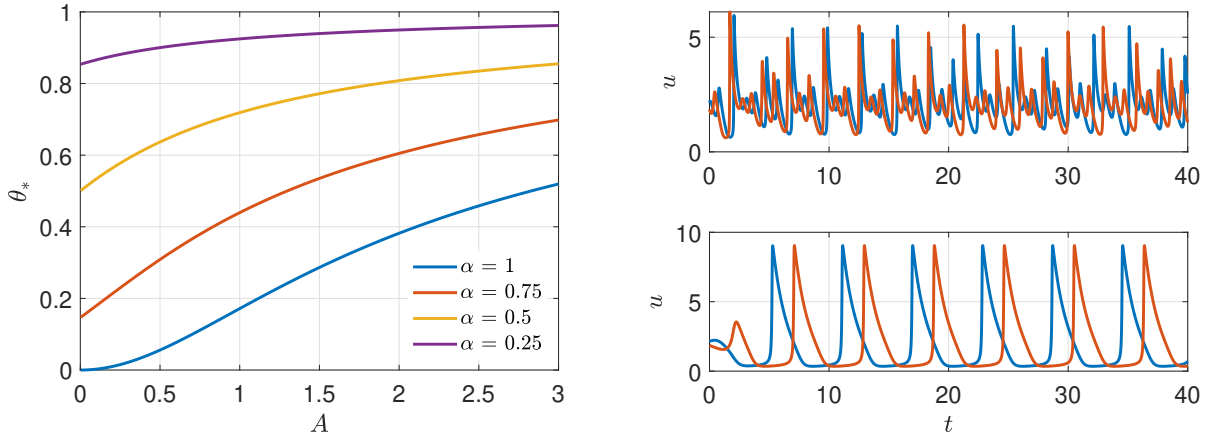


Рис. 5. Слева: зависимости критического отношения коэффициентов диффузии θ_* от A при нескольких α . Справа: сравнение решений $u(t)$ системы (16) без диффузии для $\alpha = 0.75$ (сверху) и $\alpha = 1$ (снизу) с различными близкими начальными условиями, $A = 2, B = 7$

Поведение системы в линейном приближении зависит от выбора краевых условий. Мы подробно рассмотрели модель с отсутствием потоков на границах. Можно также рассматривать неоднородные условия Дирихле

$$u(t, 0) = u(t, 1) = A, \quad v(t, 0) = v(t, 1) = B/A,$$

и периодические условия

$$u(t, 0) = u(t, 1), \quad v(t, 0) = v(t, 1).$$

В первом случае в пробном решении пространственная часть задается функцией $\sin \pi m z$, где $m \in \mathbb{N}$. Для периодических условий собственные функции оператора ∂_z^2 будут иметь вид $e^{2\pi i m z}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Приведенные выше выражения для критических значений $B_H(m, \alpha)$ и $B_T(m)$ остаются справедливыми с той лишь разницей, что для периодических условий m нужно заменить на $2m$. Следует, однако, подчеркнуть, что граничные условия могут оказывать существенное влияние на формирование нетривиальных паттернов в системе. Так, условия Дирихле могут подавлять формирование периодических по времени режимов: если параметры выбраны так, что

$$D_2 - D_1 > \frac{L^2}{\pi^2},$$

то условие $d(m) > 0$ не может быть выполнено ни при каком $m \in \mathbb{N}$, и собственные числа σ_{\pm} не могут быть комплексными.

Результаты линейного анализа интересно сравнить с решениями, полученными непосредственным численным моделированием. Для этого мы сначала выполнили переход к системе связанных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} \mathbf{U})(t) &= \frac{D_1}{L^2} M \mathbf{U} + A - (B + 1) \mathbf{U} + \mathbf{U} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{V}, \\ (\mathcal{D}_{0+}^{\alpha} \mathbf{V})(t) &= \frac{D_2}{L^2} M \mathbf{V} + B \mathbf{U} - \mathbf{U} \circ \mathbf{U} \circ \mathbf{V}, \\ \mathbf{U} &= (U_1, U_2, \dots, U_{N_z})^{\top}, \quad \mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_{N_z})^{\top}. \end{aligned}$$

Здесь $U_i = u(t, z_i)$, $V_i = v(t, z_i)$, $z_i = i/N_z$, $i = 0, 1, \dots, N_z$, $\mathbf{U} \circ \mathbf{V}$ обозначает покомпонентное умножение* векторов одинаковой формы, а M — квадратная матрица, ненулевые элементы которой определяют разностную аппроксимацию дифференциального оператора ∂_z^2 . Во внутренних точках использовалась стандартная трехточечная схема, аппроксимация в граничных точках зависит от выбранных краевых условий.

При $\alpha = 1$ полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась стандартным методом Рунге—Кутты 4-го порядка точности с автоматическим выбором шага. Тестовые расчеты показали, что использование явных схем для нелинейных уравнений нецелого порядка вынуждает использовать очень маленький шаг разбиения по t , поэтому при мы использовали неявную схему (12). Системы нелинейных алгебраических уравнений

* Оно называется произведением Адамара, или, в некоторых источниках, произведением Шура

на каждой итерации решались методом Ньютона—Рафсона с начальным приближением, равным значениям \mathbf{U} и \mathbf{V} с предыдущего временного слоя. Все приведенные в этом разделе численные решения были получены при $N_z = 2^9$, количество шагов по времени в неявной схеме равно $N_t = 2000$.

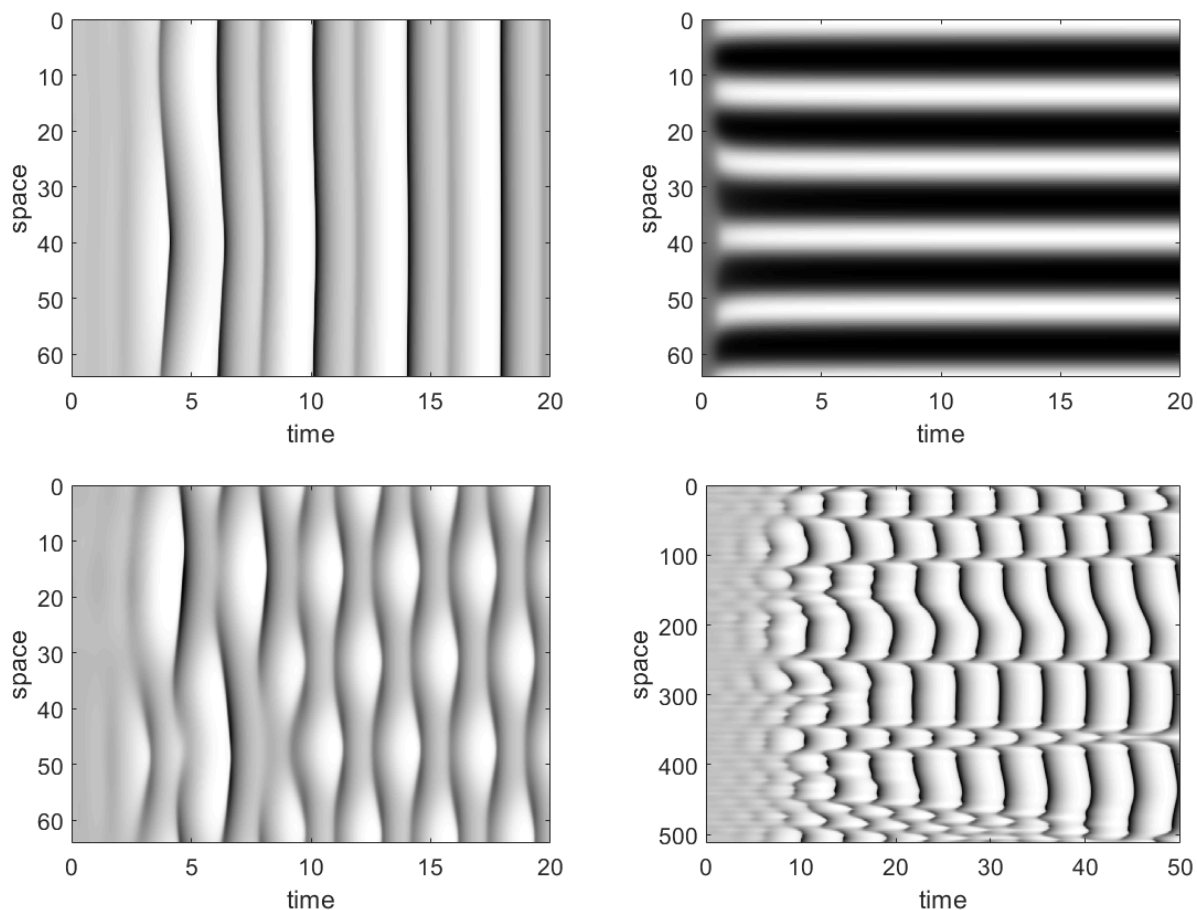


Рис. 6. Решения u системы (16) с периодическими краевыми условиями: $\alpha = 0.8, A = 2, B = 7, D_1 = 10, \theta = 2 > \theta_* = 0.5604, L = 64$ (a); $\alpha = 0.5, A = 2, B = 7, D_1 = 5, \theta = 0.6024 < \theta_* = 0.8081, L = 64$ (b); $\alpha = 0.8, A = 2, B = 7, D_1 = 10, \theta = 0.65 > \theta_* = 0.5604, L = 64$ (c); $\alpha = 0.98, A = 2, B = 6, D_1 = 4, \theta = 2 > \theta_* = 0.3994, L = 512$ (d)

Наиболее заметным отличием от стандартной системы является возможность возникновения хаотических режимов. Уже при $\alpha = 0.97$ ни один из опробованных наборов параметров не позволил наблюдать решения, похожие на изображенные на рис. 3e и f. Малость коэффициентов диффузии по-прежнему приводит к очень слабому согласованию эволюции отдельных пространственных областей, но соответствующие им осцилляторы уже нельзя считать независимыми. На рис. 5b в качестве примера показано, как меняются решения брюсселятора без диффузии при уменьшении α . При $D_i = 0$ в системе существует предельный цикл для любого $\alpha \leq 1$: суперкритическая

бифуркация Хопфа происходит при $B = B_H(0, \alpha)$, когда комплексно сопряженные корни характеристического уравнения пересекают границу области устойчивости. Однако, как видно на рисунке, при $\alpha < 1$ малое изменение начального состояния (которое, напомним, равно сумме стационарного однородного решения и белого шума) приводит к весьма сильной синхронизации решений, которая не наблюдается в обычной системе. По-видимому, это связано с эффектом памяти: предыстория, которая вносит значительный вклад в динамику, у систем дробного порядка с близкими начальными условиями будет также почти одинаковой. Кроме того, даже слабое диффузионное связывание в этом случае также будет учтено в предыстории, что может выступать в роли дополнительного механизма синхронизации. Поэтому эволюция локальных осцилляторов будет гораздо более согласованной, чем при $\alpha = 1$.

Заключение

Аномальная диффузия, наряду с реологией вязких сред, на сегодняшний день является наиболее строго обоснованным примером применения аппарата дифференциальных операторов нецелого порядка к описанию реальных физических процессов. В стандартных моделях реакции—диффузии формирование сложных пространственно-временных паттернов и возникновение диффузионного хаоса достаточно хорошо изучены и теоретически, и с помощью численного анализа. Для моделей с дробными производными понимание управляющих ими динамических механизмов пока не достигло такого уровня полноты. Поэтому исследования в этой области по-прежнему весьма актуальны.

Применение стандартных методов линейного анализа к брюсселятору — одной из наиболее известных двухкомпонентных моделей — позволило выявить ряд характерных особенностей, связанных с введением дробных производных по временному переменному. Формирование стационарных неоднородных паттернов Тьюринга вполне ожидаемо не отличается от стандартной модели с обычными производными. Критические кривые для параметра B в случае бифуркации Хопфа, напротив, демонстрируют существенную зависимость от α . Более того, при $\alpha < 1$ становится возможным еще один механизм потери устойчивости, когда корни характеристического уравнения пересекают границу области устойчивости при $m \neq 0$ — решение соответствующей линейной задачи будет одновременно зависеть от t и z . И хотя в рассмотренном в настоящей работе случае этот механизм не действует, сама его возможность является отличительным свойством дробных систем. Возможно, этот эффект удастся продемонстрировать при $1 < \alpha < 2$ или при рассмотрении модели с другой химической кинетикой.

Критическое значение отношения диффузионных коэффициентов, опре-

деляющее, бифуркация какого рода будет первой при последовательном увеличении B , также зависит от показателя α . Уменьшение α при фиксированном A делает наблюдение паттернов Тьюринга более «простым». Аналогичное наблюдение для несколько отличающейся модели, в которой дробный оператор действовал только на диффузионное слагаемое, было получено в [29].

Наиболее заметным отличием от стандартной модели является сильное подавление хаотических режимов, возникающих при слабом диффузионном связывании, когда коэффициенты D_i малы по сравнению с L^2 . Эридитарные эффекты, связанные с использованием дробных производных с показателем, который не слишком близок к единице, приводят к достаточно сильной синхронизации. Формирующийся в результате паттерн обладает более выраженной структурой и похож на те, что возникают с стандартной системе в окрестности бифуркации коразмерности 2.

Мощным теоретическим инструментом исследования систем реакции—диффузии являются амплитудные уравнения. Они описывают медленную пространственно-временную модуляцию решения, возникающего при слабом нелинейном возмущении стационарного однородного состояния в окрестности точки бифуркации. В работах [31–33] были рассмотрены формальные процедуры получения этих уравнений для систем с дробной производной Рисса по пространственному переменному для всех трех бифуркаций — Тьюринга, Хопфа и коразмерности 2. Однако авторам не удалось найти работы, где бы обсуждались способы получения амплитудных уравнений для моделей типа (16). Случай бифуркаций Тьюринга, по-видимому, ничем не отличается от стандартных моделей: заменив лишь определение медленного времени на $T = \epsilon^{2/\alpha}t$ и формально повторив построения [30], можно получить вещественное уравнение Гинзбурга—Ландау, в котором обычная производная по временному переменному будет заменена оператором Капуто. Однако уже для бифуркации Хопфа ситуация заметно меняется, поскольку решения возникающих линейных задач будут содержать функции Миттаг-Леффлера. Затруднения связаны с тем, что для этих функций не выполняется полугрупповое свойство. Если

$$\mathbf{u}_1(t, z) = \mathbf{c} \cdot w(T, X)E_\alpha(\sigma t^\alpha) + \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{w}(T, X)E_\alpha(\bar{\sigma} t^\alpha),$$

где \mathbf{c} — вектор с двумя компонентами, то квадратичная форма $\mathbf{u}_1^\top M \mathbf{u}_1$, где M — некоторая постоянная матрица размера 2×2 , будет иметь вид

$$K_+ w^2 E_\alpha^2(\sigma t^\alpha) + K_0 |w|^2 E_\alpha(\sigma t^\alpha) E_\alpha(\bar{\sigma} t^\alpha) + K_- \bar{w}^2 E_\alpha^2(\bar{\sigma} t^\alpha).$$

Здесь K_\pm и K_0 — числовые коэффициенты. Задача

$$({}_t D_{0+}^\alpha \mathbf{u}_2)(t, z) - \begin{pmatrix} B - 1 - D_1/L^2 \partial_z^2 & A^2 \\ -B & -A^2 - D_2/L^2 \partial_z^2 \end{pmatrix} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1^\top M \mathbf{u}_1,$$

возникающая в процессе вывода амплитудного уравнения, будет по-прежнему линейной относительно \mathbf{u}_2 , однако записать ее общее решение будет весьма сложно, поскольку $E_\alpha^2(\sigma t^\alpha) \neq E_\alpha(2\sigma t^\alpha)$ и $E_\alpha(\sigma t^\alpha)E_\alpha(\bar{\sigma} t^\alpha) \neq \text{const}$.

Список литературы

- [1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мирск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [2] Ross B. The development of fractional calculus 1695–1900 // *Historia Mathematica*. 1997. Vol. 4, no. 1. p. 75–89.
- [3] Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*. London: Imperial College Press, 2010. 347 p.
- [4] Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // *Journal of Physics A*. 2004. Vol. 37, no. 31. p. R161
- [5] Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // *УФН*. 2004. Т. 174, №8. с. 809–852.
- [6] Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Klafter J. Strange kinetics // *Nature*. 1993. Vol. 363, no. 6424. p. 13–37.
- [7] Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Physics reports*. 2000. Vol. 339, no. 1. P. 1–77.
- [8] Gorenflo R., Mainardi F. Probability distributions and continuous time random walk // *Processes with long range correlations* / Ed. by G. Rangarajan, M. Ding. Berlin: Springer, 2003. p. 148–166.
- [9] Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2001. Vol. 4, no. 2. p. 153–192.
- [10] Langlands T. A. M., Henry B. I., Wearne S. L. Turing pattern formation with fractional diffusion and fractional reactions // *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2007. Vol. 19, no. 6. p. 065115.

- [11] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 541 p.
- [12] Mittag-Leffler functions, related topics and applications / Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V. Berlin: Springer, 2014. 441 p.
- [13] Seybold H., Hilfer R. Numerical algorithm for calculating the generalized Mittag-Leffler function // SIAM Journal of Numerical Analysis. 2008. Vol. 47, no. 1. p. 69–88.
- [14] Garrappa R. Numerical evaluation of two and three parameter Mittag-Leffler functions // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2015. Vol. 53, no. 3. p. 1350–1369.
- [15] Diethelm K. The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2004. 247 p.
- [16] Бутковский А. Г., Постнов С. С., Постнова Е. А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. 2013. №4. с. 3–42.
- [17] Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial // Mathematics. 2018. Vol. 6. no. 2. p. 16.
- [18] Li C. P., Zhang F. R. A survey on the stability of fractional differential equations // The European Physical Journal Special Topics. 2011. Vol. 193, no. 1. p. 27–47.
- [19] Matignon D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing // Computational engineering in systems applications. 1996. Vol. 2. p. 963–968.
- [20] Бутковский А. Г., Постнов С. С., Постнова Е. А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. 2013. №5. с. 3–34.
- [21] Li Y., Chen Y. Q., Podlubny I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems // Automatica. 2009. Vol. 45, no. 8. p. 1965–1969.
- [22] Li C., Ma Y. Fractional dynamical system and its linearization theorem // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 71, no. 4. p. 621–633.

- [23] Deng W. Smoothness and stability of the solutions for nonlinear fractional differential equations // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2010. Vol. 72, no. 3-4. p. 1768–1777.
- [24] Fractional order systems. Modeling and control applications / R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petráš. New Jersey: World Scientific. 2010. 178 p.
- [25] Grigorenko I., Grigorenko E. Chaotic dynamics of the fractional Lorenz system // *Physical review letters*. 2003. Vol. 91, no. 3. p. 034101.
- [26] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
- [27] De Wit A. Spatial patterns and spatiotemporal dynamics in chemical systems // *Advances in Chemical Physics*. 1999. Vol. 109. p. 435–514.
- [28] De Wit A. et al. Spatiotemporal dynamics near a codimension-two point // *Physical Review E*. 1996. Vol. 54, no. 1. p. 261.
- [29] Henry B. I., Langlands T. A. M., Wearne S. L. Turing pattern formation in fractional activator-inhibitor systems // *Physical Review E*. 2005. Vol. 72, no. 2. p. 026101.
- [30] Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems: Reductive perturbation approach // *Progress of Theoretical Physics*. 1975. Vol. 54, no. 3. p. 687–699.
- [31] Nec Y., Nepomnyashchy A. A., Golovin A. A. Oscillatory instability in superdiffusive reaction-diffusion systems: Fractional amplitude and phase diffusion equations // *EPL*. 2008. Vol. 82, no. 5. p. 58003.
- [32] Golovin A. A., Matkowsky B. J., Volpert V. A. Turing pattern formation in the Brusselator model with superdiffusion // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2008. Vol. 69, no. 1. p. 251–272.
- [33] Tzou J. C., Matkowsky B. J., Volpert V. A. Interaction of Turing and Hopf modes in the superdiffusive Brusselator model // *Applied Mathematics Letters*. 2009. Vol. 22, no. 9. p. 1432–1437.