

**ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию Васильева Олега Викторовича
«Адаптивные вейвлетные коллокационные методы многомасштабного
численного моделирования задач механики жидкости и газа»,
представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.07 – вычислительная математика**

Представленная диссертационная работа посвящена применению вейвлетных методов к численному решению задач механики жидкости и газа. Следует сказать, что несмотря на огромную популярность вейвлетов в задачах обработки и сжатия сигналов и изображений, их применение при численном решении уравнений в частных производных, в частности уравнений механики сплошной среды, остается достаточно ограниченным. Данная диссертация, на мой взгляд, представляет собой большой и важный шаг по внедрению вейвлетных методов в вычислительную аэрогидродинамику.

Актуальность темы диссертации определяется тем огромным значением, которое приобрело численное моделирование в современной механике жидкости и газа. Разработка новых высокоэффективных инструментов численного моделирования дает возможность решения новых научных и прикладных задачи, возникающих в данной области, позволяет, во многих случаях, облегчить и ускорить процесс конструирования и изготовления образцов новой техники, повысить эффективность промышленного производства.

Автором диссертации детально разработан и обоснован *новый перспективный метод* решения уравнений движения жидкости и газа, основанный на применении вейвлетов второго поколения и названный им адаптивным вейвлетным коллокационным методом. С помощью метода штрафных функций данный подход распространен на случай течений в областях сложной формы. Разработаны расчетные коды для решения на адаптивной пространственно-временной сетке уравнений Эйлера и Навье-Стокса как для несжимаемой жидкости, так и для сжимаемого газа. Численно решено большое количество актуальных, имеющих важное самостоятельное научное значение, задач механики сплошной среды.

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения.

Во *введении* обосновывается актуальность темы диссертационной работы, формулируются ее цели и решаемые в работе задачи, описывается научная новизна, значимость работы, основные полученные результаты, перечисляются основные публикации по теме диссертации, дан обзор содержания ее глав.

Первая глава диссертации посвящена собственно описанию разработанного автором адаптивного вейвлетного коллокационного метода. Описаны основные свойства вейвлетов первого и второго поколений, затем изложены основные моменты численного метода: алгоритм вейвлетного порогового сжатия, адаптивное вейвлетное преобразование второго поколения, механизм сеточной адаптации, основанный на введении смежной области, процедура адаптации сетки с помощью анализа коэффициентов разложения, вычисление пространственных

производных на адаптивной сетке. Даны оценки числа операций при вычислении производных и асимптотические оценки сходимости, подтвержденные численными экспериментами. С вычислительной точки зрения существенно, что трудоемкость быстрого адаптивного вейвлетного преобразования и быстрого дифференцирования на адаптивной сетке растут линейно с числом значимых вейвлетных коэффициентов разложения.

Далее в трех разделах последовательно представлены построенные на основе адаптивного вейвлетного подхода численные алгоритмы для решения эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. При решении гиперболических уравнений для сглаживания ударных волн и контактных разрывов используется локальная искусственная вязкость, конструируемая на основе анализа коэффициентов вейвлетного разложения с помощью т. н. маркировочной функции разрывов. Эффективность сеточной адаптации и сходимость численного метода демонстрируются на примере решения тестовых задач различной размерности.

С моей точки зрения, данная глава является центральной в диссертации, а в ней изложен разработанный автором *оригинальный* и очень перспективный численный метод. Остальные главы посвящены его дальнейшему развитию и применению метода к решению конкретных задач динамики жидкости и газа.

В частности, во *второй главе* обсуждается распараллеливание адаптивного вейвлетного коллокационного метода. Подробно описывается техника асинхронного параллельного вейвлетного преобразования второго поколения, используемые при этом структуры данных типа деревьев различной размерности, адаптация сетки и вычисление производных при параллельных вычислениях, передача данных, декомпозиция расчетной области и динамическая балансировка загрузки процессоров. На примере задачи о вырождении изотропной турбулентности проверяется масштабируемость параллельного алгоритма. Демонстрируется линейное ускорение вычислений при использовании до 512 процессоров с некоторым замедлением для большего их числа (в расчетах использовалось максимум 2048 процессоров). Таким образом, во второй главе развит параллельный численный алгоритм, являющийся необходимым для решения сложных задач, требующих высокого пространственного разрешения.

Третья глава посвящена развитию метода, в котором адаптация производится не только по пространству, но и по времени, так что можно использовать локальный временной шаг, различный в разных зонах расчетной области. Понятно, что применение локального шага позволяет существенно повысить эффективность вычислений, но, вообще говоря, реализация такого подхода сопряжена с определенными сложностями. В диссертации метод развивается для решения параболических задач. Важным преимуществом разработанного вейвлетного метода с одновременной адаптацией расчетной сетки по пространству и по времени является возможность активного контроля глобальной ошибки пространственно-временного решения.

Эффективность и точность разработанного алгоритма пространственно-временной адаптации продемонстрирована на примере решения уравнения Бюргерса и модифицированного уравнения Бюргерса, в которых при малых значениях коэффициента вязкости образуется узкая зона высоких градиентов.

Применение адаптивного вейвлетного метода к моделированию течений сплошной среды

в расчетных областях простой формы описывается в *четвертой главе*. Рассматриваются течения как несжимаемой жидкости, так и сжимаемого газа. В качестве первого примера на основе двумерных несжимаемых уравнений Навье-Стокса, записанных в примитивных переменных, моделируется процесс слияния вихрей. При этом используются описанные в главе 1 алгоритмы решения параболических и эллиптических уравнений. Решается также задача о развитии неустойчивости Рэля-Тейлора на границе двух сжимаемых газов различной молярной массы. В процессе эволюции на деформирующейся границе раздела происходит смешение и формируются высоко локализованные мелкомасштабные структуры. Адаптивный метод показывает здесь высокую эффективность с коэффициентом сжатия, превышающим 90%.

Следующим рассматривается течение химически реагирующего газа: моделируется ламинарное взаимодействие диффузионного пламени с парой вихрей. Используется простейшая химическая модель с одной необратимой реакцией. Сетка адаптируется с учетом не только изменения консервативных переменных, но и скорости химической реакции. Коэффициент сжатия оказывается очень высоким, почти всегда превышая 90%, а в течение значительной части времени доходя до 98%.

Затем метод применяется к течениям невязкого сжимаемого газа. В этом случае необходимо, чтобы надежно, без численных осцилляций, разрешались разрывы решения. Это достигается путем введения искусственной вязкости и использования т. н. маркировочной функции разрывов. Моделируется неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, возникающая при взаимодействии ударной волны с контактной поверхностью, разделяющей два газа. В результате развивается типичная грибообразная структура, как следствие вторичной неустойчивости формируются мелкомасштабные вихревые структуры. Следует отметить отсутствие видимых осцилляций на границе раздела ударной волне, что свидетельствует о надежности сквозного счета с локализованной искусственной вязкостью.

Прямое инициирование детонации под действием локализованного энерговыделения моделируется на основе как уравнений Эйлера, так и Навье-Стокса. Показано, что хотя в уравнениях Эйлера отсутствует механизм диссипации на больших волновых числах и при увеличении разрешения возникают все более мелкие вихревые структуры, крупномасштабные газодинамические структуры при этом не меняются, и при измельчении сетки наблюдается сходимость временной зависимости суммарного тепловыделения. Таким образом, по мнению автора данный процесс вполне законно может моделироваться на основе невязких уравнений.

В двух последних примерах, рассматриваемых в четвертой главе, используется адаптация расчетной сетки как в пространстве, так и во времени. Сначала вновь решается задача о слиянии вихрей (на этот раз с помощью уравнения для завихренности и быстрого мультипольного метода для определения скорости), затем моделируется развитие двумерной турбулентности с накачкой на промежуточных масштабах. В этих задачах, естественно, большой интерес представляет то, насколько пространственно-временная адаптация позволяет сократить время счета по сравнению со случаем адаптации сетки только по пространству. Данный вопрос подробно анализируется для первой задачи, показывается что выигрыш составляет от 2 до 4 раз в зависимости от схемы интегрирования по времени. Основным результатом, полученным при моделировании двумерной турбулентности можно считать данные о зависимости числа степеней свободы течения от числа Рейнольдса.

В *пятой главе* излагается подход, позволяющий распространить адаптивный вейвлетный метод на случай течений в областях сложной формы. Это делается с помощью метода погруженных границ, используя метод штрафных функций Бринкмана, в котором твердые тела рассматриваются как пористые но малопроницаемые, для чего в уравнения Навье-Стокса вводится специальный член, умноженный на штрафную функцию, большую по величине внутри тела и равную нулю внутри него. Такой подход позволяет свести задачу о течении в области сложной формы к задаче, решаемой на декартовой сетке в прямоугольной расчетной области, включающей исходную. В диссертации подобная техника применена в контексте адаптивного вейвлетного метода, ее работоспособность продемонстрирована на примере задачи обтекания несжимаемой жидкостью покоящегося и движущегося цилиндра, решение получено в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Автором предложено обобщение метода штрафных функций на течения сжимаемого газа, в котором штрафная область ведет себя как среда с большим акустическим импедансом. Дан подробный анализ амплитудных и фазовых ошибок, возникающих из-за частичного проникновения акустических волн в эту среду, проведены соответствующие тестовые расчеты, в частности рассеяния акустической волны на цилиндре.

Для устранения ограничений метода штрафных функций на тип налагаемых граничных условий и исключения неправильного отражения ударных волн от поверхности твердых тел автором разработан метод характеристических штрафных функций, основанный на гиперболических дифференциальных штрафных функциях, получены оценки его сходимости, предложены его формулировки для уравнений Эйлера и Навье-Стокса, в том числе для задач, включающих движущиеся и деформируемые тела. Проведены тестовые расчеты для отражения ударной волны и сверхзвукового обтекания клина.

В последней *шестой главе* собраны примеры моделирования течений в областях сложной формы, выполненного с помощью адаптивного вейвлетного коллокационного метода и метода штрафных функций. Они включают течения как несжимаемой жидкости, так и сжимаемого газа. В широком диапазоне чисел Рейнольдса выполнен расчет двумерного обтекания вязкой несжимаемой жидкостью периодического массива круговых цилиндров. Трехмерное обтекание квадратного цилиндра проведено как при разрешении, когда его можно рассматривать как прямое численное моделирование, так и в рамках метода крупных вихрей. При использовании метода крупных вихрей выделение крупномасштабных движений производится не с помощью обычной процедуры пространственной фильтрации, а путем отслеживания энергосодержащих вихревых структур на сетке, динамически адаптируемой на основе вейвлетного разложения. Подсеточная модель также основана на вейвлетном фильтровании. При решении данной задачи применяется обобщение адаптивного вейвлетного коллокационного метода, допускающее неоднородный (варьируемый в пространстве и времени) вейвлетный порог. Результаты проведенных расчетов находятся в соответствии с экспериментальными данными и данными других численных работ.

Расчеты течений сжимаемого газа включают дозвуковое обтекание покоящегося и движущегося цилиндров, невязкое сверхзвуковое обтекание покоящихся и движущихся тупых тел. Продемонстрировано надежное разрешение газодинамических разрывов, выполнение условия галилеевой инвариантности получаемых численных решений.

В *заключении* сформулированы основные результаты диссертации, перечислены перспективные направления дальнейшего развития данной тематики.

Оценивая диссертационную работу в целом, нужно прежде всего отметить ее актуальность и высокий научный уровень. Полученные в диссертационной работе О.В. Васильева результаты открывают новые возможности для моделирования сложных многомасштабных течений жидкостей и газов. Фактически развит целый принципиально новый класс численных методов динамики сплошной среды. Несомненна возможность использования полученных результатов при разработке перспективных авиационных и космических технологий. Можно надеяться, что основанные на вейвлетах методы в будущем будут находить все большее и большее применение при численном решении не только уравнений Эйлера и Навье-Стокса, но и других уравнений в частных производных, используемых в вычислительной физике.

При чтении диссертации у меня возникли следующие вопросы и замечания.

1. Было бы интересно выполнить сравнение разработанного метода с другими высокоточными современными численными методами, такими, например, как псевдоспектральные методы при моделировании дозвуковых течений и WENO схемы — при расчете сверхзвуковых. Я понимаю, что невозможно требовать от автора наряду с разработкой кода, основанного на собственном методе, еще и реализации, специально для целей сравнения, других численных алгоритмов. Тем не менее, вопрос о том, насколько большую точность при одинаковых временных затратах можно получить или насколько быстрее можно решить задачу при одинаковой точности, если использовать данный метод, напрашивается.
2. Метод пространственно-временной адаптации развит в диссертации для параболических уравнений. Насколько возможно его распространение на гиперболические, учитывая, что для них определяющую роль играет консервативность численной схемы и, следовательно, при использовании локального временного шага необходимо обеспечить согласование численных потоков и выполнение законов сохранения?
3. В численном методе решения гиперболических уравнений (п. 1.6) используется скалярная искусственная вязкость, пропорциональная максимальному по модулю собственному значению матрицы Якоби. Такой подход обычно приводит к излишней диссипации компонент решения, соответствующих энтропийной и вихревой модам. По приведенным в диссертации тестам (задача об ударной трубе) трудно сделать заключение, насколько серьезной может быть данная проблема; для этого требуется решить немного другие тестовые задачи, такие как, например, задача Шу и Ошера (Shu-Osher problem) о взаимодействии ударной волны с синусоидальным возмущением плотности.

Интересно было бы также понять, какой порядок сходимости демонстрирует данный метод для течений, включающих газодинамические разрывы. Широко распространено мнение, что в случае систем уравнений, когда имеются характеристики, пересекающие

ударную волну, все схемы сквозного счета сходятся с первым порядком, независимо от их точности на гладких решениях. Удастся ли обойти эту трудность с помощью адаптивного вейвлетного метода (см. рис. 1.40, где говорится о схеме 2-го, 4-го, 6-го порядка)?

4. При решении уравнений для многокомпонентного газа динамическая вязкость и обратная молярная масса смеси определяются как средневзвешенные по массе значения этих величин для отдельных химических компонент. Если для молярной массы такое определение является естественным и следует из закона Дальтона, то для вязкости это, строго говоря, является неверным. Обычный подход основан на использовании правила Уилки (Wilke).
5. В отдельных случаях используется непонятная мне терминология. Так, в п. 1.6.3, говоря о двух тестовых задачах, автор называет их задачами о формировании слабой и сильной ударных волн. Первая из них — это классическая задача Сода (Sod) об ударной трубе. Ударная волна в ней не формируется, а возникает сразу в момент распада разрыва и далее распространяется неизменной. Вторая — тоже задача об ударной трубе, только с другими параметрами. Глядя на графики, трудно понять, почему автор называет ее задачей о сильной ударной волне, скорее уж тут уместно говорить о сильной волне разрежения.

В п. 5.5.4 приведены результаты расчетов «докритического и сверхкритического сверхзвукового обтекания клина». «Докритическим обтеканием» здесь именуется стационарное обтекание клина с присоединенной ударной волной. Естественно ожидать, что «сверхкритическое обтекание» — это стационарное обтекание с отошедшей головной ударной волной. Вместо этого показано решение совсем другой задачи — нестационарное течение, возникающее при нерегулярном (маховском) отражении от клина движущейся ударной волны.

В п. 4.4.1 говорится о быстром «многопольном» методе. Устоявшимся термином является «мультипольный».

Высказанные замечания ни в коей мере не снижают моей высокой оценки диссертации. О.В. Васильев при ее выполнении показал себя высококвалифицированным специалистом в области вычислительной математики, им получены результаты мирового уровня. Представленная диссертация, как уже отмечено в отзыве выше, обладает несомненной *научной новизной* и *актуальностью*. *Достоверность* полученных научных результатов обеспечивается теоретическими оценками точности и сходимости используемых алгоритмов, тщательной верификацией и тестированием расчетных кодов, возможностью контроля точности вейвлетного разложения, сравнением результатов расчетов с данными других авторов и экспериментальными измерениями. Диссертация прекрасно апробирована, ее основные результаты опубликованы в большом числе статей в ведущих международных журналах. Диссертация хорошо написана, в ней практически отсутствуют даже почти неизбежные в работах такого объема опiski и опечатки. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание. Считаю, что представленная работа полностью удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым действующим Положением о порядке присуждения ученых степеней, к

диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических работ по специальности 01.01.07 – вычислительная математика, а ее автор, Олег Викторович Васильев, безусловно заслуживает присуждения искомой ученой степени.

Официальный оппонент,
д.ф.-м.н., с. н. с. ИТПМ СО РАН
21 мая 2021 г.

Кудрявцев
Алексей Николаевич

Кудрявцев Алексей Николаевич
доктор физико-математических наук, специальность ВАК 01.02.05 –
механика жидкости, газа и плазмы, старший научный сотрудник Лаборатории
вычислительной аэродинамики Федерального государственного бюджетного
учреждения науки Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН. Сайт: www.itam.nsc.ru
Адрес: 630090, Российская федерация, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1
Рабочий телефон: +7 (383) 354-30-44
Электронный адрес: alex@itam.nsc.ru
Личная страница: <http://www.itam.nsc.ru/users/alex>

