

*На правах рукописи*

Цветкова Валерия Олеговна

**Динамическая адаптация подвижной неструктурированной сетки для  
моделирования течений газа вблизи движущихся тел произвольной  
конфигурации**

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Научный руководитель: Козубская Татьяна Константиновна,  
д.ф.-м.н., главный научный сотрудник  
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Научный консультант: Кудрявцева Людмила Николаевна,  
к.ф.-м.н., научный сотрудник  
ФИЦ ИУ РАН

Официальные оппоненты: Марчевский Илья Константинович,  
д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры  
«Прикладная математика»  
МГТУ им. Н.Э.Баумана (НИУ)  
Данилов Александр Анатольевич,  
к.ф.-м.н., старший научный сотрудник  
ИВМ РАН

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего  
образования «Московский физико-  
технический институт (национальный  
исследовательский университет)»

Защита состоится «16» ноября 2023 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета 24.1.237.01, созданного на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, расположенного по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

[https://www.keldysh.ru/council/3/D00202403/tsvetkova\\_vo\\_diss.pdf](https://www.keldysh.ru/council/3/D00202403/tsvetkova_vo_diss.pdf)

Автореферат разослан «\_\_» августа 2023 г.

Учёный секретарь диссертационного совета

к.ф.-м.н.

М.А. Корнилина

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы исследования

Понимание и предсказание турбулентных течений востребовано во многих отраслях промышленности и является объектом постоянного исследовательского интереса. Численное воспроизведение турбулентных течений играет ключевое значения как в медицине и биологии, например, в вопросах моделирования работы внутренних органов человека, так и при решении задач авиационной промышленности, например, с целью оптимизации конфигурации летательного аппарата и обеспечения его лучших аэродинамических и акустических характеристик.

Задача обтекания подвижных тел имеет исключительно важное значение для современной вычислительной аэродинамики. Особый интерес сегодня представляют задачи, где присутствуют один или несколько подвижных обтекаемых объектов, или объекты с подвижными/отделяемыми частями. Тела могут двигаться как по заранее заданным законам, так и под действием аэродинамических сил. Рассмотрение подобных задач стимулирует развитие методов моделирования и техники соответствующей работы с геометрией.

Многие подходы основаны на использовании классических сеток, согласованных с телом, то есть, где граничные вершины лежат на поверхности тела. Например, с помощью сеточной деформации можно подстраивать сетку под смещения тела. Однако, существенным недостатком подхода является ограничение в возможных видах движения. Деформация как правило используется для моделирования малых колебаний. Существует также метод Химеры, подразумевающий наличие двух или нескольких наложенных сеток. Он требует интерполяции и усложненной реализации обмена расчетных данных между сетками, а часто и алгоритмов перестроения сеток.

Метод погруженных границ позволяет моделировать обтекание тела, заданного в односвязной области. Среди алгоритмов погруженных границ, наиболее распространенным является метод штрафных функций Бринкмана<sup>1</sup>, в рамках которого обтекаемый объект моделируется внесением дополнительных источников членов в газодинамические уравнения. Источники в уравнениях определяют тело как сплошную среду со слабой проницаемостью, их величины отличны от нуля только в точках, лежащих внутри геометрического положения движущегося объекта. Таким образом, метод погруженных границ позволяет определять задачу внешнего обтекания

---

<sup>1</sup> Angot Ph., Bruneau C.-H., Fabrie P., A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. Numer. Math. 81(4) (1999) 497–520

в односвязной области.

В диссертационной работе представлена новая методика моделирования задач внешнего обтекания движущихся тел сложной формы на неструктурированных сетках в односвязных расчетных областях. Методика строится на основе сочетания метода погруженных границ с разработанной автором анизотропной адаптацией подвижной сетки, использующей гибридную явно-неявную модель описания тела. Разработанный метод обозначается аббревиатурой DMR-IBM (Dynamic Mesh Redistribution – Immersed Boundary Method). В работе данный метод тестируется на простых конфигурациях и используется при численном решении двух- и трехмерных задач внешнего обтекания подвижных тел. Для решения широкого класса задач вычислительной газовой динамики для трехмерных тел произвольной конфигурации разработанная методика оснащается дополнительной важной составляющей. Дело в том, что изотропный характер адаптации, определяемой лишь расстоянием до поверхности тела, не даёт возможности построения сильно анизотропных сеток вдоль поверхности обтекаемого тела, что, в свою очередь, приводит к необходимости использования сеток чрезмерно большой размерности даже в двумерном случае и неприемлемо большой размерности – в трехмерном. Это обстоятельство требует учета анизотропии геометрии. Для качественной реализации анизотропной адаптации для тел сложной формы в работе, помимо функции расстояния, предлагается учитывать информацию высоких порядков для входящей геометрии.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Целью диссертации является разработка и реализация методики численного моделирования течений газа вблизи подвижных тел сложной формы, характерных для авиационной промышленности.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи.

1. Разработка методики моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на неструктурированных сетках.
2. Реализация предложенных методов и вычислительных технологий в рамках программного комплекса NOISEtte.
3. Верификация и валидация разработанных алгоритмов и реализующих их программных модулей.
4. С использованием разработанной методики и программных модулей проведение расчета реальной прикладной задачи, в конфигурации которой присутствуют подвижные тела.

**Методы исследования научной проблемы.** Основным методом

исследований в диссертационной работе является метод вычислительного эксперимента. Для проведения численных экспериментов рассматривается математическая модель сжимаемого газа. Решаются уравнения Навье-Стокса или осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS). Расчеты проводятся на неструктурированных сетках в рамках вершинно-центрированного подхода с использованием метода конечных объемов. Вычислительный алгоритм строится на основе EBR (Edge-Based Reconstruction) схемы<sup>2</sup> повышенной точности. Для интегрирования по времени используется неявная схема второго порядка. Сеточная адаптация основана на вариационном подходе. Программные модули написаны на языке C++ в составе программного комплекса NOISEtte. Параллельная модель разработана на основе протокола MPI.

**Достоверность результатов** обеспечивается проведением тестирования и верификации всех составных частей алгоритма, сравнением численных результатов моделирования двух- и трехмерных задач относительно друг друга и иных достоверных подходов, а также сравнением с имеющимися экспериментальными данными.

**Научная новизна** работы заключается в разработке и программной реализации метода моделирования течений вблизи движущихся тел сложной формы на основе гибридного подхода, сочетающего метод погруженных границ и динамическую адаптацию подвижной неструктурированной сетки. В рамках исследуемой методики предложен новый алгоритм задания управления анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки, учитывающий особенности формы обтекаемого объекта. Впервые была разработана и реализована эффективная гибридная явно-неявная модель задания тела, основанная на использовании фоновых декартовых решеток и поисковых структур, включающая в себя этап предварительной подготовки и обработки геометрии и методы быстрого доступа к значениям расстояния, градиентов функции расстояния и различных параметров поверхности тела.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Методика моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на основе метода погруженных границ и адаптации подвижной неструктурированной сетки.
2. Метод анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки

---

<sup>2</sup> I. Abalakin, P. Bakhvalov, T. Kozubskaya, Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // International Journal for Numerical Methods in Fluids, 81(6) (2016) 331-356.

к поверхности тел произвольной формы.

3. Гибридная геометрическая модель задания движущегося тела на основе декартовых сеток вида восьмеричного дерева и поисковых структур.

4. Программная реализация разработанной методики моделирования течений вблизи подвижных тел и геометрической модели в виде модулей в составе программного комплекса NOISEtte.

5. Результаты верификации и валидации разработанной методики и ее программной реализации.

6. Результаты численного моделирования тонального шума изолированного винта квадрокоптера, полученные с использованием разработанной методики.

**Теоретическая значимость** работы заключается в разработке алгоритма задания управляющей метрики анизотропной адаптации подвижной сетки для использования ее в комбинации с методом погруженных границ на односвязных расчетных сетках в задачах внешнего турбулентного обтекания подвижных тел.

**Практическая значимость** работы заключается в программной реализации предложенной методики моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на неструктурированных сетках в рамках программного комплекса NOISEtte, осуществленной путем интегрирования в структуру комплекса новых модулей поэтапной обработки геометрии тела и задания анизотропного управления адаптацией сетки к поверхности тел произвольной конфигурации. Комбинация разработанных в диссертации и реализованных в программном комплексе NOISEtte сеточных технологий с методом погруженных границ позволяет проводить расчеты востребованных авиационной промышленностью задач обтекания подвижных препятствий.

**Апробация результатов.** Результаты работы были представлены на следующих научных конференциях и семинарах:

1) 9th International Young Scientist Conference in Computer Science, 5-13 сентябрь, 2020,

2) VI ECCOMAS Young Investigators Conference (YIC2021), 7-9 июля 2021,

3) Восьмая российская конференция «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике», 20-25 сентября 2021,

4) Всероссийская научная конференция «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко, 26 августа, 2022,

5) Девятая российская конференция «Вычислительный эксперимент в

аэроакустике и аэродинамике», сентябрь, 2022,

б) научный семинар 15-го отдела ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

**Личный вклад автора** состоит в разработке и программной реализации гибридной геометрической модели задания подвижного тела, построении и реализации алгоритма управления анизотропной сеточной адаптацией с учетом особенностей формы тела, проведении расчетов и анализе полученных результатов.

**Публикации.** Материалы диссертации представлены в 10 печатных работах [1–10]: из них 9 [1–8, 10] – статьи в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и/или Web of Science, 8 [1, 3–6, 8–10] – в рекомендованных изданиях перечня ВАК.

### **Объем и структура диссертации**

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации состоит 112 страниц, включая 74 рисунка и 5 таблиц. Список литературы содержит 62 наименования.

## **Содержание работы**

**Введение** посвящено обзору существующих подходов к моделированию течений вблизи движущихся тел. В контексте использования метода погруженных границ (IBM, Immersed Boundary Method) рассматриваются различные подходы к сеточной адаптации, которые гипотетически могут повысить точность IBM расчета для высокорейнольдсовых постановок на недоразрешенных начальных сетках. Во введении представлены актуальность, научная новизна и практическая значимость работы, сформулированы цели, приведены положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** разрабатывается методика моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы на неструктурированных сетках. Описываются используемые математические модели, подходящие для рассматриваемых задач. Для математического описания обтекаемого тела представлен метод погруженных границ на основе метода штрафных функций Бринкмана. В главе рассматриваются используемые численные методы. Также обсуждается целесообразность включения сеточной адаптации в методику. Описывается концепт задания тела в односвязной расчетной области.

**Раздел 1.1** посвящен математической модели, используемой для решения рассматриваемых задач. Для расчета задач внешнего обтекания потоком газа используется система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) для вязкого сжимаемого газа, где тензор рейнольдсовых

напряжений определяется посредством гипотезы Буссинеска, а значение коэффициента эффективной или турбулентной вязкости задаётся моделью турбулентности. В данной работе в качестве замыкания используется модель турбулентности Спаларта-Аллмараса<sup>3</sup> на основе одного дифференциального уравнения.

Для записи системы уравнений RANS в виде законов сохранения вводится вектор консервативных переменных

$$\mathbf{Q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E, \rho \tilde{\nu})^T,$$

где  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность,  $E = \rho \mathbf{u}^2 / 2 + \rho \varepsilon$  – полная энергия,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия, связанная с давлением  $p$  уравнением состояния совершенного газа –  $p = \rho \varepsilon (\gamma - 1)$ ,  $\gamma = 1.4$  – показатель адиабаты. Величина  $\tilde{\nu}$  – эволюционная переменная, через которую, согласно модели Спаларта-Аллмараса, определяется коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_T$ .

Систему уравнений RANS можно записать в следующем векторном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{F}^C(\mathbf{Q}) - \mathcal{F}^D(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})) = \mathbf{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}). \quad (1)$$

В системе (1) введены составные вектора  $\mathcal{F}^C$ ,  $\mathcal{F}^D$ , каждая компонента которых  $\mathbf{F}_i^C$  и  $\mathbf{F}_i^D$  в координатном направлении  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) представляет собой вектор потока конвективного переноса и вектор потока диффузии, соответственно. Вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$  представляет собой источниковый член, описывающий влияние внешних сил, не связанных с процессами переноса искомых переменных  $\mathbf{Q}$ :

$$\mathbf{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = (0, 0, 0, P_\nu(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) - Y_\nu(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) + 0.992 \nabla \tilde{\nu} \cdot \nabla \tilde{\nu})^T. \quad (2)$$

Вид членов  $P_\nu(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$ ,  $Y_\nu(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})$ , описывающих, соответственно, генерацию и дисперсию турбулентности, приведены в статье<sup>3</sup>.

В разделе 1.2 определяется метод погруженных границ для описания тела в односвязной области. Пусть расчётная область решения системы (1) есть объединение области занятой твердым телом  $\Omega_B$  с границей  $\partial \Omega_B$  и области течения  $\Omega_f$ . На границе твердого тела  $\Omega_B$  ставится условие прилипания:

---

<sup>3</sup> P. R. Spalart, S. R. Allmaras, A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit // Aero-space Sciences Meetings. — AIAA Paper 1992-0439



$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega_B} = \mathbf{u}_B. \quad (3)$$

В настоящей работе выполнение условия (3) на границе твердого тела реализуется методом погруженных границ за счет применения метода штрафных функций Бринкмана. При использовании этого метода система дифференциальных уравнений решается во всей расчетной области  $\Omega_f(t) \cup \overline{\Omega_B(t)}$ , включая область твердого тела, граница которого погружена в область течения. Для такого описания погруженной границы модифицируется математическую модель путем добавления дополнительных источников членов в уравнения RANS, которые действуют только в области расположения обтекаемого твердого тела. Модифицированный вектор источников членов согласно методу Бринкмана выглядит следующим образом

$$\mathbf{S}^{penal}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = \left( 0, \frac{\chi}{\eta} \rho (\mathbf{u} - \mathbf{u}_B), \frac{\chi}{\eta} \rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_B), \frac{\chi}{\eta} \rho v \right), \quad (4)$$

где  $\mathbf{u}_B$  – скорость движения твердого тела, а характеристическая функция  $\chi(t)$  задаёт положение тела в каждый момент времени:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \overline{\Omega_B(t)} \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_f(t). \end{cases} \quad (5)$$

Параметр пенализации  $\eta$  определяет скорость релаксации скорости потока к скорости движущегося тела  $\mathbf{u}_B$ . В представленных задачах параметр пенализации был равен  $10^{-4}$ .

Тогда система уравнений (1) с учетом погруженных границ запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{F}^C(\mathbf{Q}) - \mathcal{F}^D(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})) = \mathcal{S}(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) + \mathbf{S}^{penal}(\mathbf{Q}) \quad (6)$$

**Раздел 1.3** посвящен описанию численных методов, используемых для решения систем (1) и (6). Численный метод основан на следующих методах. Вычислительный алгоритм строится на основе вершинно-центрированной EBR<sup>2</sup> схеме повышенной точности, достигаемой за счет использования квазиодномерной реконструкции переменных на расширенном, ориентированном вдоль сеточного ребра шаблоне. Вязкие члены аппроксимированы с помощью конечно-элементного метода с линейными базисными функциями. Для интегрирования по времени применяется неявная трёхслойная схема второго порядка. Для решения полученной нелинейной системы дискретных уравнений используется метод Ньютона для нахождения вектора неизвестных переменных на новом слое по времени в каждой точке

дискретного пространства. На каждой ньютоновской итерации соответствующая система линейных уравнений решается с помощью стабилизированного метода бисопряжённых градиентов.

**Раздел 1.4** содержит рассуждения о целесообразности использования сеточной адаптации в комбинации с ИВМ. Совместное использование адаптивной сетки и, потенциально, метода пристеночных функций позволит добиться корректного учета влияния стенки на общее решение задачи обтекания, решаемого методом погруженной границы, при оптимальном размере сетки.

В разделе 1.5 представлена идея описания «погруженного» тела в расчетной области. За основу берется функция расстояния, заданная на интерполяционных адаптивных решетках вида восьмеричного дерева. Дополнительно там могут храниться параметры поверхности, такие как главные кривизны и главные направления.

**Вторая глава** описывает принципы построения метода анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тел произвольной формы. Дается описание алгоритма сеточной адаптации на основе вариационного исчисления и приводятся особенности его численной реализации. Описывается методика задания управляющих метрик с использованием параметров поверхности для построения оптимальной анизотропной адаптации к телам с различными особенностями геометрии. В главе также рассматривается техника интерполяции на временных слоях для сеточной адаптации для повышения эффективности алгоритма.

В разделе 2.1 приводятся основные принципы используемой сеточной адаптации. Метод имеет вариационную формулировку.

Расчетная сетка рассматривается как упругий материал, который подвергается сжатию вблизи границы движущегося тела. Упругая деформация, зависящая от времени, задается  $d$ -мерным отображением  $\mathbf{x}(\xi, t): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Пусть  $\mathbf{x}^n(\xi)$  – отображение исходной сетки в сетку на момент времени  $t^n$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  задает метрический тензор, а  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$  – некоторая матрица, задающая его факторизацию  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\det \mathbf{Q} > 0$ .

Деформация на момент времени  $t^{n+1}$  определяется решением вариационной задачи<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> V. Garanzha, L. Kudryavtseva, Hypoelastic Stabilization of Variation-al Algorithm for Construction of Moving Deforming Meshes // In: Evtushenko Y., Jacimovic M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds) Optimization and Applications. OPTIMA 2018. Communications in Computer and Information Science, 974 (2019) 497-511.

$$F(\mathbf{x}(\xi, t), \mathbf{x}^n(\xi)) = \int_{\Omega_\xi} W(\mathbf{Q}(\mathbf{x}^n, t) \nabla_\xi \mathbf{x}(\xi, t) \mathbf{H}(\xi)^{-1}) \det \mathbf{H} d\xi, . \quad (7)$$

где  $\mathbf{C} = \mathbf{Q} \nabla_\xi \mathbf{x}(\xi, t) \mathbf{H}^{-1}$  обозначает матрицу Якоби отображения. В функционале (7) функция  $W(\mathbf{C})$  обозначает поливыпуклый упругий потенциал (внутреннюю энергию), которая является взвешенной суммой меры искажения формы и меры искажения объема отображения:

$$W(\mathbf{C}) = (1 - \theta) \frac{\left( \frac{1}{d} \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) \right)}{\det \mathbf{C}^{2/d}} + \frac{1}{2} \theta \left( \frac{1}{\det \mathbf{C}} + \det \mathbf{C} \right). \quad (8)$$

В расчетах используется значение  $\theta = 4/5$ . Упругий потенциал достигает минимума, когда деформация изометрична, то есть, когда допустимы только поворот и параллельный перенос.

К функционалу (7) применяется стандартная конечно-элементная дискретизация. Для решения задачи оптимизации на каждом шаге по времени применяется техника градиентного спуска с предобуславливателем<sup>5</sup>, где направление минимизации определяется приближенным решением линейной системы с усеченной матрицей Гессе функционала (7), в которой отброшены члены, потенциально приводящие к потере положительной определенности. Итоговое смещение вдоль направления минимизации находится одномерным поиском.

В разделе 2.2 описан алгоритм задания управляющей метрики к телу сложной формы.

Метрический тензор  $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  может быть записан как  $\mathbf{G} = \mathbf{U} \Sigma^2 \mathbf{U}^T$ , где столбцы  $\mathbf{U}$  являются собственными векторами  $\mathbf{G}$ , а  $\Sigma^2$  – диагональная матрица с элементами на диагонали  $\sigma_i^2$ , т.е. собственными значениями  $\mathbf{G}$ . В каждой точке расчетной области можно задать локально оптимальные координаты с помощью аффинного преобразования с матрицей  $\mathbf{Q} = \Sigma \mathbf{U}^T$ . Говорят, что расчетная сетка оптимальна (изометрична), если после применения данного аффинного преобразования к ячейкам полученной сетки, получается начальная сетка, или

$$\mathbf{Q} \nabla_\xi \mathbf{x} \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{V},$$

где  $\mathbf{V}$  – произвольная ортогональная матрица.

---

<sup>5</sup> I.E. Kaporin, O.Yu. Milyukova, MPI+OpenMP implementation of the BiCGStab method with explicit preconditioning for the numerical solution of sparse linear systems // Numerical methods and programming, 20 (2019) 516-527

Метрика адаптации  $\mathbf{G}$  требует задания нормального и тангенциального направлений в каждой точке  $\mathbf{p}$  (столбцы матрицы  $\mathbf{U}$ ), которые, в свою очередь, определяются изоповерхностью функции  $u(\mathbf{x}, t)$ , проходящей через  $\mathbf{p}$ , а также коэффициентов растяжения  $\sigma_i$  вдоль этих направлений. Чем больше значение  $\sigma_i$ , тем меньше размер ячейки в направлении столбца  $u_i$ . Функция  $\sigma_1 = \sigma_{normal}(\mathbf{x}, t)$  определяет растяжение сетки вдоль направления нормального к телу, а  $\sigma_2 = \sigma_{tangential}(\mathbf{x}, t)$  ( $\sigma_{2,3}$  в 3D) определяет пространственное распределение анизотропии.

Параметр  $\sigma_1$ , отвечающий за сжатие в нормальном направлении, где  $d$  – значение функции расстояния без знака до границы тела, нормированное на  $L$  – величину по нормали адаптивной зоны, задается как:

$$\sigma_1(d) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{c_e}{h}(d - \delta)}, & d \in [\delta, D] \\ A, & 0 \leq d \leq \delta \\ \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{c_e}{h}(D - d)}, & 1 \geq d \geq D \end{cases}$$

Здесь  $D$  – толщина переходного участка пограничного слоя,  $\delta$  – размер области по нормали, где сохраняется максимальное сгущение,  $A$  – максимальная степень сжатия по нормали,  $c_e$  – относительное приращение толщины двух соседних ячеек.

При задании сжатия в тангенциальном направлении требуется учет как кривизны границы тела, так и расстояния до медиальной оси. В работе выведен следующий алгоритм задания управления в тангенциальном направлении.

Для задания параметра  $\sigma_2$  рассматривается следующая функция для произвольного  $R$  и ее корректировка:

$$\tilde{\sigma}_2(d, R) = \frac{\frac{R}{L} + \xi(d)}{\frac{R}{L} + d}; \quad \sigma_2(d, R) = \begin{cases} \frac{\frac{R}{L} + \xi}{\frac{R}{L} + d}, & d \geq d_{\max} \\ \tilde{\sigma}_2(d_{\max}), & d < d_{\max} \end{cases}, \quad (9)$$

где  $L$  – размер по нормали адаптивной зоны, то есть области, где узлы подвижны, а  $d_{\max}$  такое, что  $\tilde{\sigma}_2(d_{\max}) = \max \tilde{\sigma}_2(d, R)$ . В качестве  $R$  подставляются значения радиуса кривизны и расстояния до медиальных осей.

Максимум из полученных значений принимается как итоговое значение  $\sigma_2$ .

В трехмерной постановке добавляется параметр  $\sigma_3$ . Тогда построение  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  происходит аналогично, используя для задания  $R$  значения главных кривизн.

**Раздел 2.3** предлагает алгоритм интерполяции решения сеточной адаптации на временных слоях для повышения эффективности подхода.

Предположим, что метрика  $\mathbf{G}(\mathbf{x}, t)$  задана функцией расстояния со знаком  $d(\mathbf{x}, t)$ . Граничная поверхность тела на момент времени  $t$  задана как нулевая изоповерхность  $d$  в момент времени  $t = t_n$ . Пусть  $\mathbf{p}_n$  – направление деформации такое, что смещение  $\mathbf{x}(t_n) + s\mathbf{p}_n$  сохраняет сетку невырожденной для всех  $0 < s < 1$ . Значение  $s=1$  соответствует большому шагу по времени  $\Delta T_n$ , такому что  $\mathbf{x}(t_n + \Delta T_n) = \mathbf{x}(t_n) + \mathbf{p}_n$ . Тогда для всех моментов времени  $t_{k+1} \leq t_n + \Delta T_n$ , для всех  $k = n, n+1, n+2, \dots$  можно вычислить

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + \frac{\Delta t_k}{\Delta T_n} \mathbf{p}_n.$$

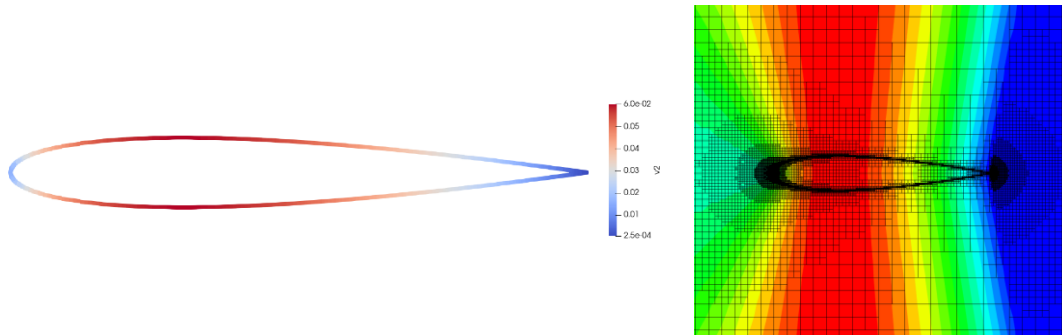
Шаг по времени  $\Delta T_n$  обычно не превышает времени, требуемого на смещении на два минимальных сеточных размера. В разделе формулируются критерии, учитывающие скорость движения тела, которые могут сигнализировать, что сетка меняется слишком быстро для успешного применения интерполяции.

В **третьей главе** вводится понятие гибридной геометрической модели тела. Модель позволяет задавать тело в односвязной области и удовлетворяет потребности адаптации по входным данным, связанным с формой тела. Описываются сеточные структуры, в том числе поисковые деревья, лежащие в основе модели и формирующие ее гибридную особенность, когда тело может быть задано явно и/или неявно. В главе приводятся детали этапов подготовки и обработки геометрии.

**Раздел 3.1** формулирует задачи геометрической модели тела. В первую очередь, требуется быстрый поиск функции расстояния со знаком и ее градиентов в любой точке расчетной области, а также доступ к некоторым параметрам, рассчитанным на поверхности тела.

В **разделе 3.2** описывается, как, используя фоновую декартову сетку структуры восьмеричного дерева, хранить требуемые геометрические параметры тела. Все эти параметры заданы в виде полей величин, определенных во всей расчетной области, и хранятся в вершинах восьмеричного дерева (рис. 1). Поверхностные параметры экстраполируются в вершины фоновой сетки.

**Раздел 3.3** раскрывает гибридный характер используемой геометрической модели. Вблизи тела расстояние и другие параметры рассчитываются точно, используя поисковое k-d дерево, в остальной же области расчет идет приближенно, используя интерполяцию в ячейках фоновой сетки.



**Рисунок 1.** Распределение значений радиуса кривизны для профиля NASA0016 и соответствующее распределение на восьмеричном дереве

В **разделе 3.4** описываются этапы предварительной подготовки геометрической модели тела перед началом расчета. На основе подробной триангуляции поверхности вычисляются приближенные главные кривизны и главные направления. Находятся медиальные оси и расстояния до них. Строятся структуры: k-d дерево и фоновая сетка структуры восьмидерева. Для всех вершин фоновой сетки вычисляются экстраполированные значения параметров поверхности.

**Раздел 3.5** посвящен алгоритмам вычисления параметров поверхности. В каждой вершине триангулированной поверхности приближенно вычисляется соприкасающийся параболоид при помощи нелинейного метода наименьших квадратов и подгонки локальной системы координат. На основе параболоида<sup>6</sup> вычисляются приближенные главные кривизны и главные направления. Медиальные оси находятся по алгоритму PowerCrust<sup>7</sup>. Таким образом, в каждой вершине триангуляции оказываются известны главные направления кривизн, радиусы кривизны, расстояние до медиальных осей.

**Раздел 3.6** раскрывает технику интерполяции векторов. Поскольку восьмеричное дерево хранит не только скалярные величины, но и векторные, остро стоит вопрос корректной интерполяции. В частности, пары векторов, соответствующих главным направлениям кривизн, должны сохранять ортогональность. Эту проблему удастся избежать путем перехода к

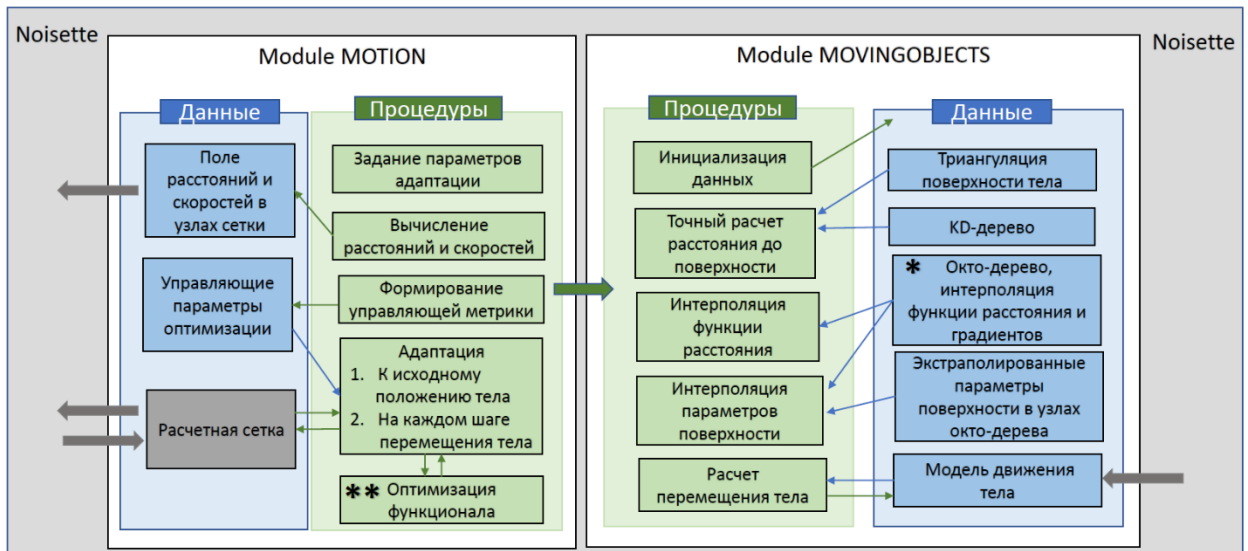
<sup>6</sup> Garimella R., Swartz B. Curvature Estimation for Unstructured Triangulations of Surfaces // Technical Report LA-UR-03-8240, Los Alamos National Lab, 2003

<sup>7</sup> Nina Amenta, Sunghee Choi, Ravi Krishna Kolluri, The power crust, unions of balls, and the medial axis transform // Computational Geometry, Vol. 19, Iss. 2–3, 2001, pp. 127-153

интерполяции непосредственно метрического тензора. В каждой вершине восьмеричного фонового дерева формируется управляющий метрический тензор. Для интерполяции в вершинах расчетной сетки используется линейная интерполяция матриц в логарифмическом пространстве<sup>8</sup>.

**Четвертая глава** посвящена программной реализации модулей, связанных с построением алгоритма адаптации. Приводится схема взаимодействия модулей внутри программного комплекса NOISEtte и с внешними библиотеками. Описывается программная реализация этапа подготовки геометрии, описанного в главе 3.

**Раздел 4.1** содержит схему взаимодействия программных модулей адаптации с комплекса NOISEtte (рис. 2). Комплекс предназначен для решения задач аэродинамики и аэроакустики и имеет модульную структуру. NOISEtte имеет интерфейс для использования различных алгоритмов деформации сетки без изменения топологии. В случае, когда узлы сетки не стационарны, после сдвига необходим перерасчет контрольных объемов, нормалей к контрольным поверхностям, проверка качества сетки, расчет скоростей сеточных узлов и коррекция шага по времени с учетом этой скорости. Таким образом, работа алгоритма сеточной адаптации или деформации изолирована от работы основного кода и вносит изменения только в сетку, а интерфейс производит перерасчеты для корректной работы расчетного кода.



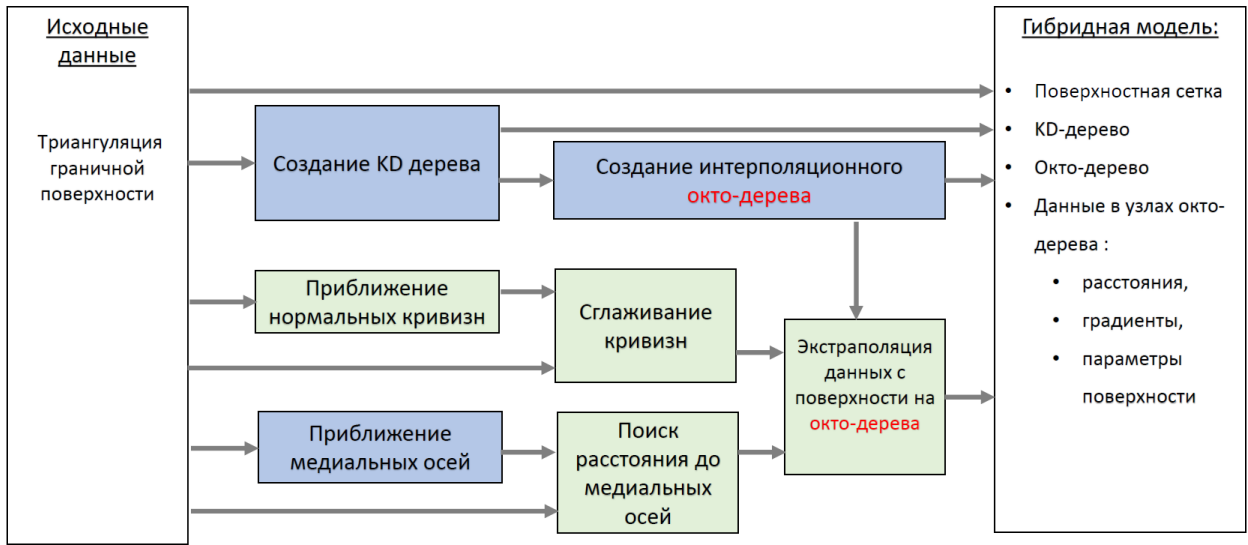
**Рисунок 2.** Схема взаимодействия модулей и внешнего кода

Для модуля адаптации приводится управление со стороны пользователя.

**Раздел 4.2** рассматривает модуль предварительной подготовки геометрии. Модуль состоит из набора утилит, которые путем поэтапного

<sup>8</sup> Frazza, L., 3D anisotropic mesh adaptation for Reynolds Averaged Navier-Stokes simulations // Modeling and Simulation. Sorbonne Université, thesis (2018)

применения ко входным данным, создают набор поисковых структур и данных, которые формируют гибридную геометрическую модель. На стороне расчетного кода добавлен интерфейс для чтения и использования геометрической модели. В качестве исходных данных в трехмерном случае принимается подробная триангуляция поверхности тела, то есть набор вершин и треугольников, составленных из этих вершин. В двумерной постановке аналогично принимается набор сегментов контура. Схема подготовки геометрии приведена на рисунке 3. Подробно рассматриваются все ее этапы.



**Рисунок 3.** Схема обработки геометрии и формирования геометрической модели

**Раздел 4.3** раскрывает особенности параллельной реализации. Все модули и утилиты, отвечающие за подготовку геометрии, вызываются один раз для каждого тела и работают в последовательном режиме. Модуль адаптации следует параллельной модели на основе протокола MPI.

В **разделе 4.4** приводятся результаты исследования эффективности использования представленной методики моделирования течений вблизи подвижных тел. Сравнение показало, что затраты ресурсов для представленного метода в 8,7 раз выше, чем у классического подхода, использующего согласованные с границей сетки, подхода на сетках одинакового размера с тем же шагом по времени. В первую очередь, полученная низкая эффективность связана с неоптимальностью распараллеливания солвера адаптации в текущей версии кода. Однако, для ряда практически значимых задач вместо вызова метода адаптации допустимо использование лишь интерполяции параметров адаптации в течение нескольких шагов по времени, что существенно снижает затраты. Для отдельных задач демонстрируется снижение доли времени работы адаптации относительно всего шага по времени с 85% до 20-40%.



В пятой главе приводятся результаты тестовых расчетов. В частности, рассматриваются результаты работы метода анизотропной адаптации применительно к телам сложной формы. Дается анализ сравнения результатов расчетов модельных задач об обтекании колеблющегося цилиндра в двумерной постановке и, аналогично, сферы, движущихся под воздействием внешней гармонической силы, выполненных с помощью представленной методики и с использованием классических подходов. Представлено также сравнение с имеющимися экспериментальными данными.

В разделах 5.1 и 5.2 рассматриваются задачи обтекания двумерного цилиндра и трехмерной сферы, движущихся под действием внешней гармонической силы.

Цилиндр совершает вынужденные колебания по закону  $x_c(t) = -A \sin(2\pi ft)$ , где  $A$  – амплитуда колебаний, а  $f$  – частота. Для сравнения с экспериментальными данными числа Рейнольдса и Келегана-Карпентера выбираются как  $Re = U_{\max} \frac{D}{\nu} = 100$ ,  $KC = \frac{1}{f} \frac{U_{\max}}{D} = 5$  соответственно.

Расчеты проводились на подробной сетке (200 тыс. узлов) без адаптации и на грубой (20 тыс. узлов) с адаптацией. Параметры адаптации задавались таким образом, чтобы ячейки, лежащие на границе цилиндра, были примерно одного размера с ячейками подробной сетки. Сравнение продольной и поперечной компонент скорости в сечениях вблизи цилиндра показывает хорошее согласование результатов расчёта с экспериментальными данными.

Сфера диаметром  $D=1$  совершает колебания по закону  $y = A \sin(2\pi ft)$ , где  $A=0.2$ , а  $f=0.15$  в вязкой сжимаемой жидкости. Число Рейнольдса, посчитанное по максимальной скорости  $U_{\max} = 2\pi fA$  и диаметру цилиндра, равно  $Re=318.3$ . Число Маха набегающего потока  $M=0.05$ .

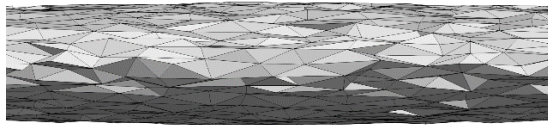
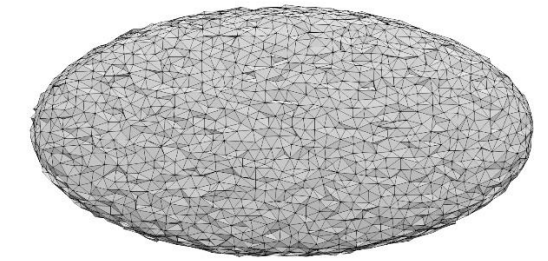
В качестве референсного решения в трехмерной постановке выступали результаты расчета на согласованной с границей сетке, где колебания моделировались с использованием переменного набегающего потока. Согласованная с границей сетка имела размер 350 тыс. узлов, адаптированная сетка – 1 миллион узлов. Сопоставление двух методик расчета проводилось путем сравнения компонент скорости в сечениях вблизи тела.

Разделы 5.3 и 5.4 приводят результаты тестирования метода анизотропной адаптации на телах сложной формы.

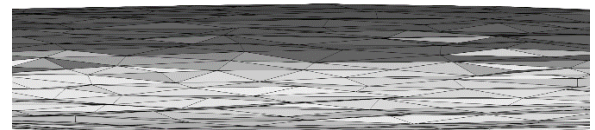
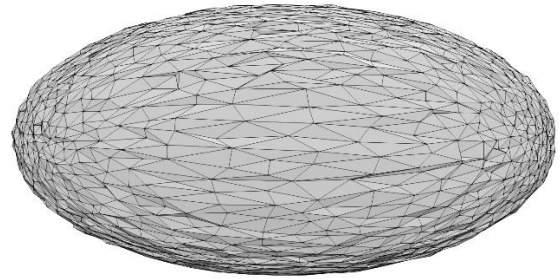
Рассматривается эллипсоид с полуосями  $a=0.5$ ,  $b=0.25$ ,  $c=0.075$ . На рис. 4(а) показаны поверхности, составленные из граней адаптивной сетки, на которых значение функции расстояния минимально. Метод, основанный на использовании кривизны, обеспечивает эффективное разрешение острых

кромки эллипсоида, как показано на рисунке 4(б).

(a)

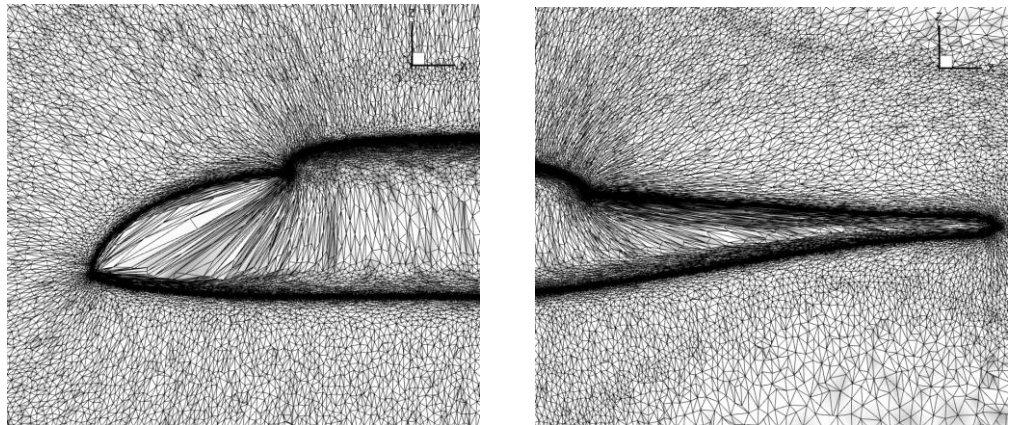


(б)



**Рисунок 4.** “Поверхностная сетка” эллипсоида, полученная адаптацией без учета кривизны (а) и с учетом кривизны (б)

В разделе 5.4 описывается, как строится анизотропно адаптированная сетка вокруг поверхности фюзеляжа. Метод стартует с равномерной тетраэдральной сетки размером 4.4 миллиона узлов. Удаётся достичь сгущения в нормальном направлении в 60 раз относительно начальной сетки (Рис. 5). Приводятся этапы построения геометрической модели.



**Рисунок 5.** Фрагменты расчетной сетки, адаптированной к форме фюзеляжа.

**Шестая глава** содержит основные численные результаты по моделированию тонального шума изолированного винта квадрокоптера. Задача разделена на несколько этапов. Сначала рассматривается двумерная постановка, где тестируются возможности сеточной адаптации отслеживать особенности формы такого сложного объекта, которым является винт квадрокоптера, а также метод моделирования в целом. Для трехмерной постановки представлены численные результаты по тональной акустике и

аэродинамическим силам. Сравнение проводится с аналогичными результатами, полученными с использованием неинерциальной системы отсчёта на классической сетке, где граница согласована с телом.

В разделе 6.1 приводятся постановки основной и вспомогательных задач.

*Задача 1.* Винт радиуса<sup>9</sup>  $R=0.127\text{ м}$  и с центральным телом радиуса  $r=0.0127\text{ м}$  вращается со скоростью 4000 об/мин. В численной постановке размер винта нормирован на размер максимальной хорды лопасти  $b=0.0287\text{ м}$ . Число Рейнольдса, рассчитанное по скорости конца лопасти и максимальному размеру хорды, составляет  $Re = \rho_0 V_{tip} b / \mu_0 \approx 1.0135 \times 10^5$ , где параметры  $\rho_0 = 1.204 \text{ кг} / \text{м}^3$  и  $\mu_0 = 1.815 \times 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$  определены для температуры  $20^\circ\text{C}$ .

Число Маха  $M = U_{\max} / \sqrt{\frac{\gamma \mathcal{R} T_0}{\mathcal{M}}} \approx 0.156$ , где  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\mathcal{R}$  – универсальная газовая постоянная,  $\mathcal{M}$  – молярная масса газа.

*Задача 2.* Двумерный винт формы проекции трехмерного винта на плоскость совершает 3000 об/мин во внешнем потоке  $U_0 = 10 \text{ м/с}$ . После нормировки  $Re = 1.341 \cdot 10^6$ . В данной задаче можно выделить два числа Маха, рассчитанные по

скорости внешнего потока  $M_0 = U_0 / \sqrt{\frac{\gamma \mathcal{R} T_0}{\mathcal{M}}}$  и по концевой скорости лопасти

$M_{BL} = U_{BL} / \sqrt{\frac{\gamma \mathcal{R} T_0}{\mathcal{M}}}$ , что соответствует величинам  $M_{BL} = 0.23$  и  $M_0 = 0.029$ .

*Задача 3.* Двумерный винт неподвижен, фиксирован положении  $45^\circ$  градусов, обдувается внешним потоком с числом Маха равным  $M = M_{BL}$ .

*Задача 4.* Двумерный винт неподвижен, фиксирован положении  $45^\circ$  градусов, обдувается внешним потоком с числом Маха равным  $M = M_0$ .

*Задача 5.* Винт вращается в вязкой среде без внешнего обтекания ( $M = 0$ ).

Как для моделирования трехмерной задачи, так и для двумерной постановки решается система уравнений RANS с замыканием SA. В качестве контрольных данных для верификации полученного численного решения используются результаты решения этой же задачи, но на сетке, согласованной с поверхностью тела. В последнем случае в качестве математической модели применяется система уравнений RANS, записанная в неинерциальной вращающейся системе координат. При визуализации результатов

---

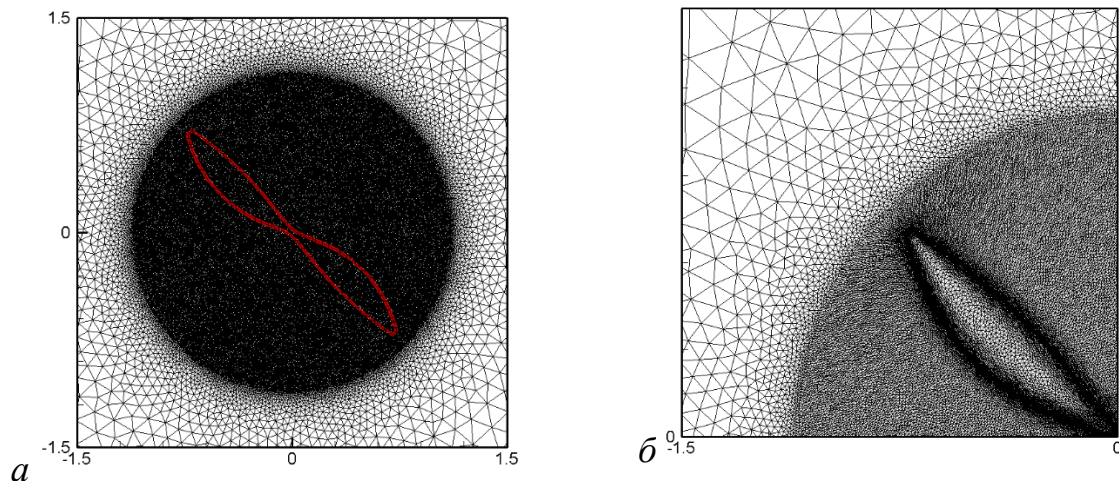
<sup>9</sup>Brandt, B.: Small-scale propeller performance at low speed // Master thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2005

используются обозначения IBM (Immersed Boundary Method) и BFM (Body Fitted Method) для методик на основе погруженных граничных условий и для согласованной с границей сетки соответственно.

**Разделы 6.2.1 и 6.2.2** приводят результаты численного моделирования для двумерных постановок задач о винте.

Начальная сетка задается в области в виде круга радиуса  $1000\tilde{R}$ . Ось вращения винта совпадает с центром координат. Большая часть вершин сосредоточена в круге радиуса  $1.1R$ . Предполагается, что за пределами круга радиуса  $1.1R$  сетка в процессе расчета остается неподвижной даже при реализации вращения винта.

Рассматривается обтекание неподвижного винта для нескольких значений скорости набегающего потока, определяемых числами Маха  $M=0.23$  и  $M=0.029$ . Поток набегаёт слева параллельно оси  $OX$ , винт установлен под углом  $-45^\circ$  к этой оси, как показано на рисунке 7.



**Рисунок 7.** Фрагменты расчетной сетки вблизи винта: *a* – исходная равномерная сетка, *б* – адаптированная сетка

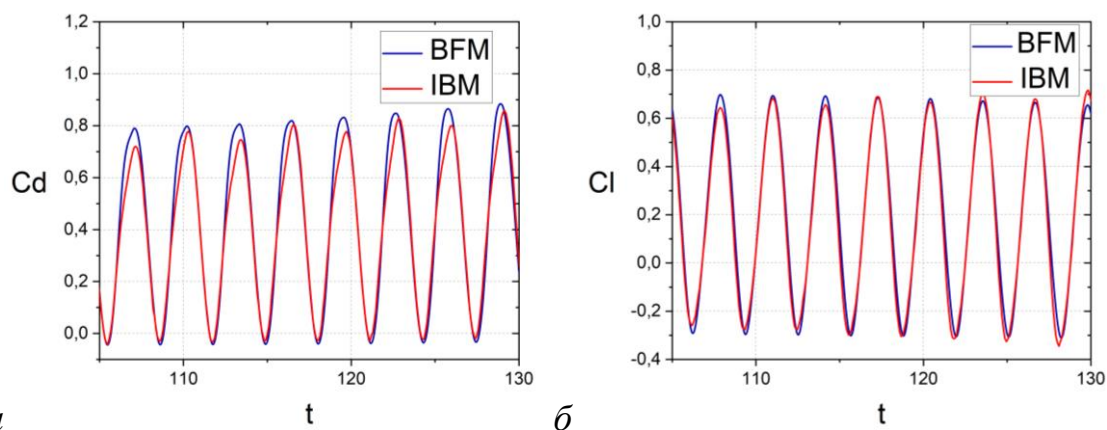
**Раздел 6.2.2** приводит результаты численного моделирования для всех двумерных постановок. Сопоставление результатов проводится путем сравнения интегральных характеристик и значений физических величин в контрольных точках вблизи винта. В частности, как видно из графиков на рисунке 8, значения интегральных характеристик для постановки вращающегося винта во внешнем потоке хорошо согласуются с данными BFM расчета.

**Раздел 6.3.1** представляет этапы подготовки сеточной адаптации к форме трехмерного винта.

Расчетная сетка для BFM подхода построена в цилиндре радиуса  $10R$  и высотой  $30R$ , где  $R$  – радиус винта. Внутри этой области винт помещен в плоский цилиндр, в котором реализуется вращение. Сетка вблизи границы

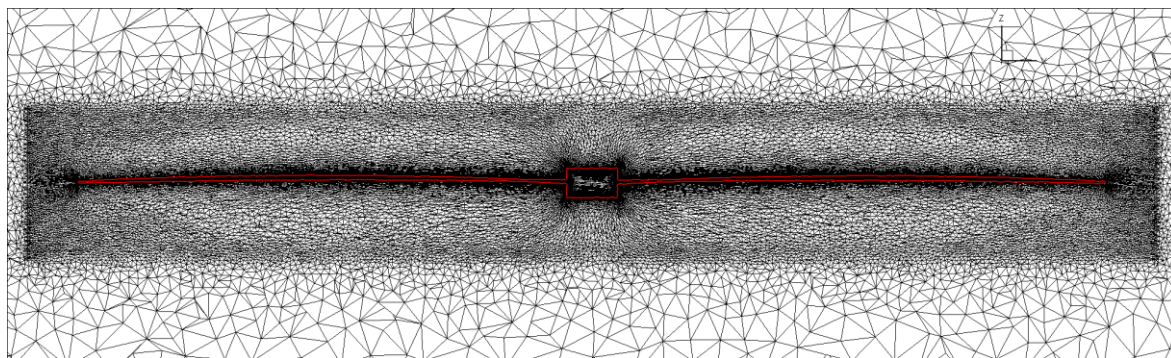


тела сформирована призматическими элементами для разрешения пограничного слоя. Высота элементов на границе тела выбирается таким образом, чтобы выполнилось условие для безразмерного расстояния до стенки  $y^+ < 1$  при численном расчете.



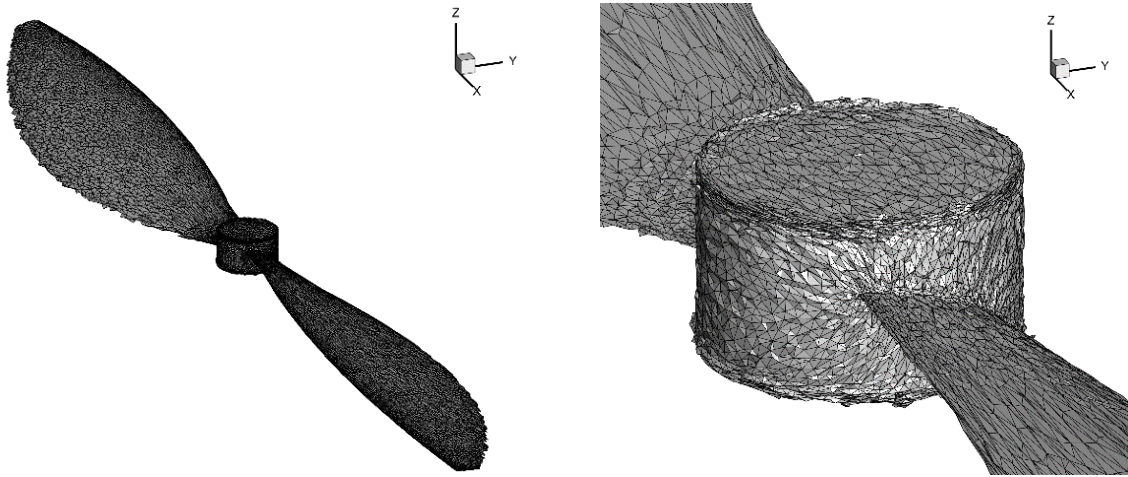
**Рисунок 8.** Зависимость от времени коэффициента сопротивления (а) и подъемной силы (б) вращающегося винта в набегающем потоке

Работа метода адаптации локализована в области формы «шайбы», т.е. цилиндра конечной высоты, куда помещен винт. Вершины на границе «шайбы» фиксированы. Для того, чтобы достичь существенного сгущения по всей поверхности винта и обеспечить плавный переход сеточного размера через фиксированную границу, начальная сетка задана с деформацией. Вершины в «шайбе» перераспределены таким образом, чтобы создать большую концентрацию в зонах, где при вращении могут находиться наиболее сложные участки геометрии, т.е. в центральной области рядом с центральным телом и кольцевой области, где проходит конец лопасти. В результате адаптации сетки к форме винта удастся достичь сгущения в 10 раз в нормальном направлении и разрешить особенности геометрии (рис. 9 и 10). Размер сеточных элементов вблизи границы соответствует безразмерному расстоянию до стенки  $y^+ \sim 100$ , то есть логарифмическому подслою.



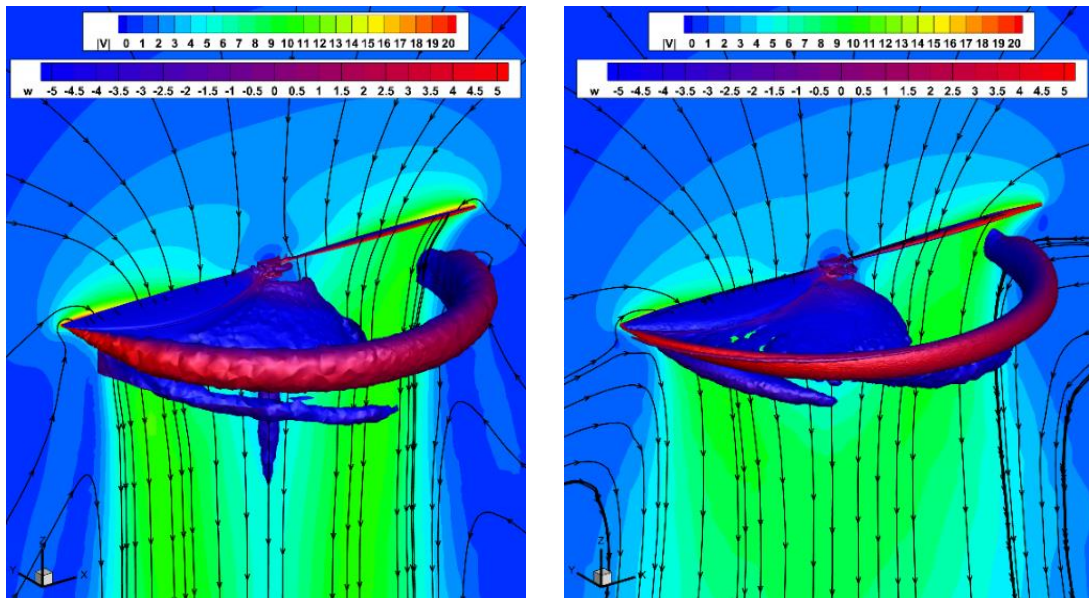
**Рисунок 9.** Сечение в плоскости XZ адаптивной сетки вблизи винта

В разделе 6.3.2 представлены основные результаты численного моделирования. Картины течения, полученные с использованием двух подходов (BFM и DMR-IBM), хорошо согласуются между собой (рис. 11).



**Рисунок 10.** Форма пропеллера в рамках DMR-IBM подхода (отображены элементы сетки, у которых всех вершины лежат внутри тела)

Для расчетов BFM и DMR-IBM методами полученные коэффициенты тяги  $c_t$  и давления  $c_p$  сравниваются с экспериментальными данными<sup>10</sup>.



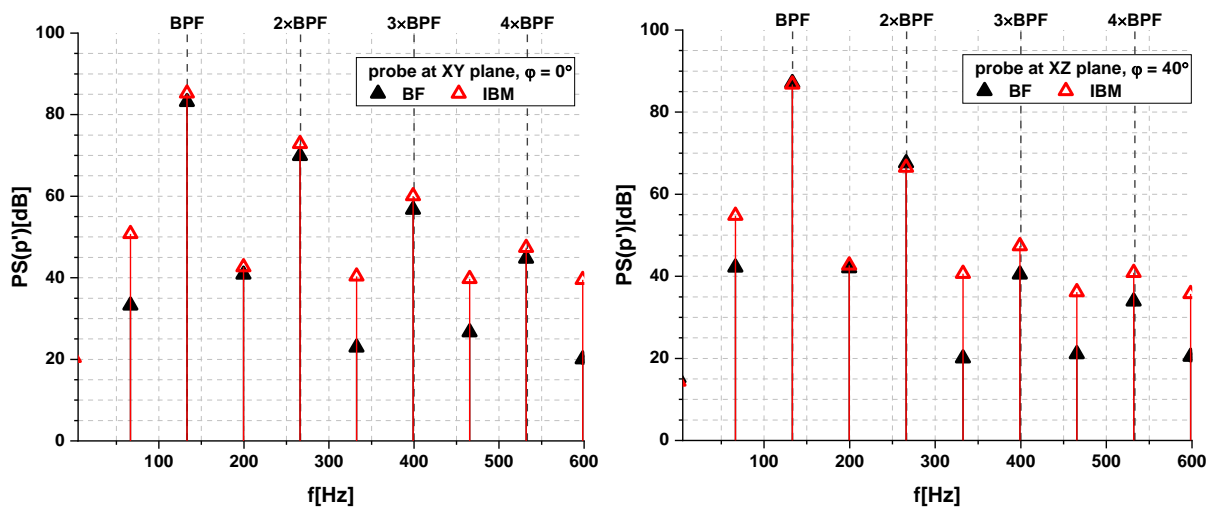
**Рисунок 11.** Поле течения: модуль скорости, линии тока в сечении ZX и изоповерхности Q-критерия для BFM (слева) и DRM-IBM (справа).

Рисунок 12 показывает спектр пульсаций давления в двух контрольных точках – одна в плоскости XY с азимутальным углом  $0^\circ$  и в плоскости XZ с

<sup>10</sup> Brandt, J.B., Selig, M.S.: Propeller performance data at low Reynolds numbers // AIAA Paper 2011-1255 (2011)

азимутальным углом  $40^\circ$ . Представленные спектры построены с частотой дискретизации 6.65 Гц.

Как и ожидалось, максимум в спектре для обоих подходов достигается на частоте следования лопастей и кратных ей гармониках. Разница между результатами BF и DMR-IBM подходов для амплитуды частоты следования лопастей составляет примерно 2.1 дБ для первой контрольной точки и 1 дБ для второй. Можно заметить, что амплитуды гармоник кратных частоте следования лопастей, полученные методом DMR-IBM, особенно близки к результату BF подхода.



**Рисунок 12.** Спектр пульсаций давления в контрольной точке в плоскости XY с азимутальным углом  $0^\circ$  (слева) и в плоскости XZ с азимутальным углом  $40^\circ$  (справа)

На рисунках 13 и 14 представлены диаграммы направленности акустического излучения на частоте следования лопастей для плоскостей XY и XZ на расстояниях  $2R$  и  $3R$ . Можно заметить, что в плоскости вращения максимальная разница между исследуемыми подходами меньше 2.9 дБ для  $2R$  и 2.2 дБ для  $3R$ .

Также приводятся результаты демонстрационных расчетов турбулентного течения вблизи квадрокоптера в максимально полной постановке, а именно с использованием четырехвинтовой компоновки в присутствии модельного фюзеляжа.

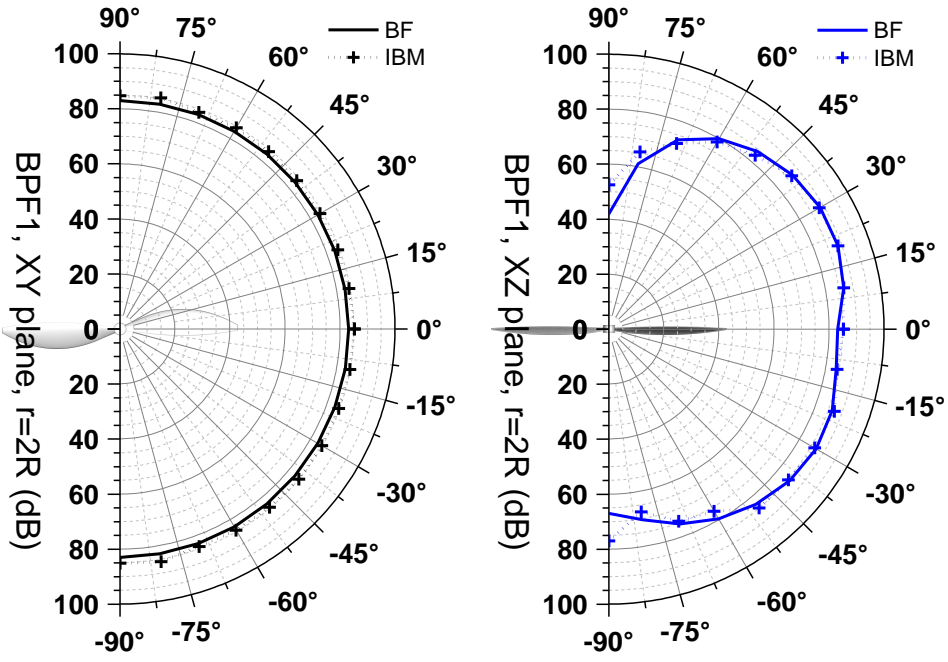


Рисунок 13. Диаграмма направленности для точек на расстоянии  $2R$

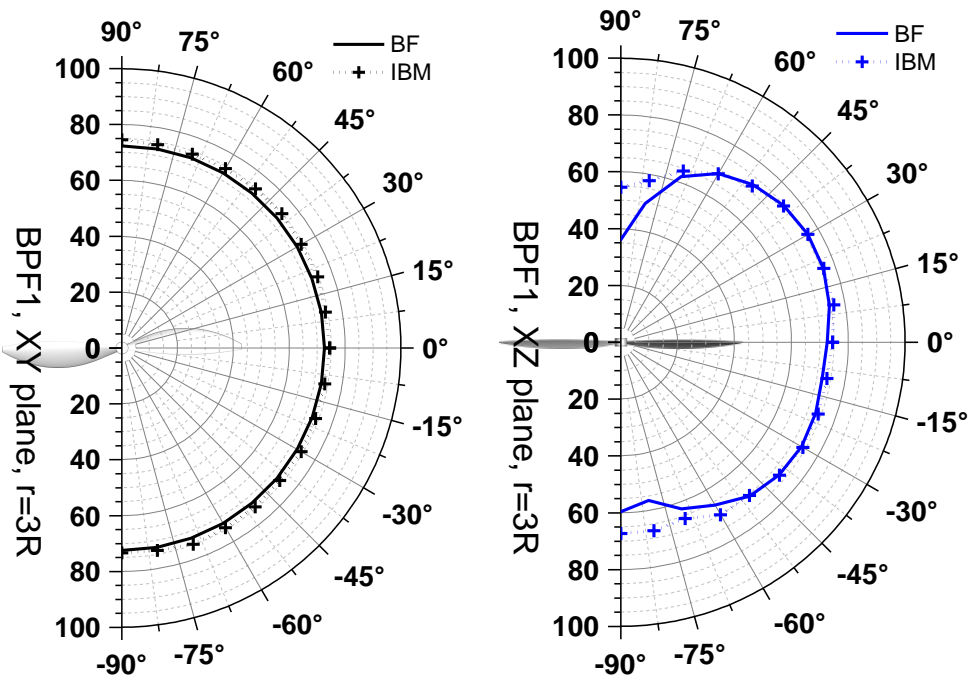


Рисунок 14. Диаграмма направленности для точек на расстоянии  $3R$ .



В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертационной работы.

1. Разработана новая **методика моделирования аэродинамики подвижных тел сложной формы** на неструктурированных сетках. Подход основан на использовании метода погруженных границ, позволяющего определять задачу внешнего обтекания в односвязной области. Сгущение неструктурированной сетки к поверхности тела осуществляется путем ее динамической адаптации без изменения исходной топологии.
2. Разработан метод **анизотропной адаптации подвижной неструктурированной сетки к поверхности тел произвольной формы**. Управляющая метрика строится как функция геометрической модели тела. Она обеспечивает сеточное сгущение в нормальном направлении к поверхности, а в тангенциальном направлении сгущает сетку лишь по мере необходимости.
3. Предложена **гибридная геометрическая модель тела**, обеспечивающая корректную работу алгоритма адаптации подвижной неструктурированной сетки к его поверхности. Гибридный способ задания положения тела и его геометрической конфигурации основан на использовании декартовой сетки структуры восьмеричного дерева как носителя геометрии с возможностью точного расчета расстояния вблизи поверхности.
4. В рамках исследовательского программного комплекса NOISEtte создан **программный модуль**, реализующий разработанную методику и обеспечивающий расчеты на высокопроизводительных вычислительных системах с распределенной памятью. Получено свидетельство на РИД. Проведена **верификация** на модельных задачах в двумерной и трехмерной постановках и **валидация** с использованием экспериментальных данных.
5. Численное моделирование **тонального шума изолированного винта квадрокоптера** продемонстрировало работоспособность разработанной методики при решении задач турбулентного обтекания движущихся объектов произвольной геометрии.

## Публикации автора по теме диссертации

1. И.В. Абалакин, А.П. Дубень, В.О. Цветкова, Эффективная методика задания граничных условий на твердых стенках для расчета сложных турбулентных течений, Матем. моделирование, 32:11, 2020; Math. Models Comput. Simul., 2021, 13(4), 591–603
2. V. Tsvetkova, T. Kozubskaya, L. Kudryavtseva, N. Zhdanova. On mesh adaptation for supercomputer simulation of flows around solid bodies defined by immersed boundary method, Procedia Computer Science, 2020, 178, p. 404-413
3. П. В. Родионов, А. П. Дубень, Т. К. Козубская, В. О. Цветкова. EBR схемы с криволинейными реконструкциями переменных вблизи обтекаемых тел, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2020; Comput. Math. Math. Phys., 2021, 61(1) 3-19
4. С. М. Босняков, А. В. Волков, А. П. Дубень, В. И. Запрягаев, Т. К. Козубская, С. В. Михайлов, А. И. Трошин, В. О. Цветкова, Сравнение двух вихререзающих методик повышенной точности на неструктурированных сетках применительно к моделированию струйного течения из двухконтурного сопла, Матем. моделирование, 31:10 (2019), 130–144; Math. Models Comput. Simul., 12:3 (2020), 368–377
5. В. Г. Бобков, В. О. Вершков, Т. К. Козубская, В. О. Цветкова, Методика деформации неструктурированных сеток в задачах определения аэродинамических характеристик тел при малых перемещениях, Матем. моделирование, 33:3 (2021), 109–132; Math. Models Comput. Simul., 2021, 13(6), 986–1001
6. В. О. Цветкова, И. В. Абалакин, В. Г. Бобков, Н. С. Жданова, Т. К. Козубская, Л. Н. Кудрявцева, Моделирование обтекания винта, заданного методом погруженных границ, на адаптивной неструктурированной сетке, Матем. моделирование, 33:8 (2021), 59–82; Math. Models Comput. Simul., 2022, 14(2), 224–240
7. T. Kozubskaya, L. Kudryavtseva and V. Tsvetkova, Unstructured Mesh Adaptation for Moving Bodies in Immersed Boundary Methods, in: WCCM-ECCOMAS2020. URL [https://www.scipedia.com/public/Kozubskaya\\_et\\_al\\_2021a](https://www.scipedia.com/public/Kozubskaya_et_al_2021a)
8. Т. К. Козубская, Л. Н. Кудрявцева, В. О. Цветкова, Анизотропная адаптация подвижной неструктурированной сетки к телам сложной формы, заданным интерполяционным 8-деревом, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 62:10 (2022) 1620–1631; Comput. Math. Math. Phys., 2022, 62(10), pp. 1590–1601
9. Цветкова В.О., Численное моделирование турбулентного обтекания неподвижного винта дрона с использованием метода погруженных границ, Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 56, 2022
10. Bobkov, V. G., Kozubskaya, T. K., Kudryavtseva, L. N., Tsvetkova, V. O. (2022). Hybrid Dynamic Mesh Redistribution – Immersed Boundary Method for Acoustic Simulation of Flow Around a Propeller. Supercomputing Frontiers and Innovations, 9(4), 69–84

*Цветкова Валерия Олеговна*

Динамическая адаптация подвижной неструктурированной сетки для моделирования течений газа вблизи движущихся тел произвольной конфигурации

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать 18.07.2023. Заказ № А-7

Формат 60x90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 125047, Москва, Миусская пл., 4