

*На правах рукописи*



**Полянский Иван Сергеевич**

**Математическое моделирование  
и структурно-параметрический синтез  
адаптивных многолучевых зеркальных антенн**

Специальность 05.13.18 — Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**А в т о р е ф е р а т**  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва — 2018

**Работа выполнена** в Федеральном государственном казенном военном образовательном учреждении высшего образования Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации, г. Орёл

Научный консультант: доктор физико-математических наук,  
доцент **Мисюрин Сергей Юрьевич**

Официальные оппоненты: Заслуженный деятель науки и техники РСФСР,  
лауреат государственной премии СССР,  
заслуженный профессор МГУ,  
доктор физико-математических наук, профессор  
**Ильинский Анатолий Серафимович**  
(зав. лабораторией вычислительной электродинамики  
факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова)

Доктор физико-математических наук, доцент  
**Иванов Виктор Владимирович**  
(главный научный сотрудник Объединённого  
института ядерных исследований)

Доктор технических наук  
**Климов Константин Николаевич**  
(ведущий научный сотрудник ОКБ ОАО  
«Лианозовский электротехнический завод»)

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов»,  
г. Москва

Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 г. в «\_\_\_» час. «\_\_\_» мин. на заседании диссертационного совета Д 002.024.03, созданного на базе ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» по адресу 125047, г. Москва, Миусская пл., 4.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова по адресу: Ломоносовский проспект, д.27 и на сайте [www.keldysh.ru/council/3/](http://www.keldysh.ru/council/3/)

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2018 года.

Ученый секретарь,  
диссертационного совета,  
к.ф.-м.н.



Корнилина М.А.

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** В современных условиях бурного развития средств радиосвязи особую актуальность представляет проблема защиты каналов приема радиосигналов от преднамеренных и непреднамеренных помех. Один из основных путей ее разрешения связан с применением адаптивных антенн, которые за счет пространственно-временной обработки сигналов (ПВОС) при максимизации мощности в основном канале приема позволяют формировать глубокие провалы характеристики направленности в направлении на источники помех. Процесс работы адаптивных антенн осуществляется в условиях априорной неопределенности о большинстве параметров сигнально-помеховой обстановки (СПО) и формализуется алгоритмом обработки сигналов, который управляет антенной системой (АС) с учетом ее конструктивно-технологических особенностей.

Значительный вклад в изучение этого вопроса внесли: Антонов О. Е., Вале-ев В. Г., Ван Трис Г., Воскресенский Д. И., Кассама С., Кайлатцев Т., Кловский Д. Д., Комарович В. Ф., Литвинов О. С., Лукошкин А. П., Мелс Дж., Миллер Т. У., Монзинго Р. А., Пистолькорс А. А., Попов М. П., Сейдж Э., Сосулин Ю. Г., Стирнз С., Стратонович Р. Л., Тихонов В. И., Уидроу Б., Фалькович С. Е., Хадсон Дж., Ширман Я. Д., Щесняк С. С., Ярлыков М. С. и др. Исследования этих ученых направлены на развитие корреляционной теории ПВОС, ориентированной на решение проблемы синтеза адаптивных антенных решеток (ААР), инвариантных к СПО. Вместе с тем конструктивно-технологические и энергетические ограничения антенных решеток затрудняют практическое воплощение инвариантной к помеховым сигналам ААР.

Указанный недостаток с учетом достижений адаптивной оптики формирует предпосылки к необходимости разработки адаптивных многолучевых зеркальных антенн (АМЛЗА), при том что зависимость свойств АМЛЗА от особенностей конструкции, взаимного размещения облучающих элементов и формы деформируемого рефлектора приводит к выявлению дополнительных возможностей антенны при реализации ПВОС. Такая постановка для АМЛЗА предполагает решение проблемы синтеза оптимального нелинейного наблюдателя стохастического процесса. Эффективное решение указанной проблемы связано с разработкой и развитием математической теории АМЛЗА в частности и теории математического моделирования и синтеза зеркальных антенн в целом.

Современная математическая теория зеркальных антенн (ЗА), синтезируя методы вычислительной математики и электродинамики, получила развитие в работах Андреева В. Б., Архипова Н. С., Бахраха Л. Д., Вааза И. Л., Вуда П., Галимова Г. К., Гряника М. В., Еремина Ю. А., Зелкина Е. Г., Ильинского А. С., Классена В. И., Кинбера Б. Е., Клэррикоутса П. Дж. Б., Коростышевского Е. Н., Неганова В. А., Покраса А. М., Пистолькорса А. А., Самарского А. А., Свешникова А. Г., Сестрорецкого Б. В., Сильвестера П., Сомова А. М., Уфимцева П. Я., Фельда Я. Н., Фрадина А. З., Ямпольского В. Г. и др. В исследованиях этих ученых для математического моделирования и синтеза ЗА напрямую или опосредованно предлагается ряд аналитических и численных методов. В то же время применение численных методов (к примеру, наиболее полно реализованных в САПР Ansoft HFSS) требует значительных затрат вычислительных ресурсов, что затрудняет решение задачи синтеза за обозримый отрезок машинного времени. Аналитические методы расчета не обеспечивают

требуемого уровня адекватности. В частности, они не способны в требуемой мере учесть эффекты дифракции и переотражения. Указанные недостатки не позволяют выполнить эффективного решения задачи управления АМЛЗА.

С учетом изложенного перспективными и актуальными являются следующие направления исследования в формируемой теории АМЛЗА: 1) разработка физико-математической модели управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной; 2) разработка новых численных методов для снижения вычислительных затрат при достижении приемлемого уровня адекватности; 3) модификация существующих аналитических методов для увеличения точности оценки показателей эффективности адаптивной антенны зеркального типа при учете эффектов дифракции и переотражения. Результаты исследования позволят разрабатывать адекватные математические модели для анализа, синтеза и управления АМЛЗА при совместном решении внешней и внутренней электродинамических задач теории антенн и формировать на их основе эффективные алгоритмы управления и программные средства.

**Цель исследования** заключается в разработке методов математического моделирования, анализа, эффективного решения задач синтеза и управления адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами во взаимосвязи внешней и внутренней задач электродинамики с учетом эффектов дифракции и переотражения.

**Научная проблема.** Разработать математическую теорию адаптивных многолучевых зеркальных антенн, представленную совокупностью аналитических и численных методов математического моделирования, анализа, синтеза и управления и сформировать на основе разработанных решений проблемно-ориентированный программный комплекс.

Для достижения поставленной цели в диссертации решены следующие **научные задачи**:

1. Разработана физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной во взаимосвязи решений внешней и внутренней задач электродинамики при определении максимально возможного числа подавляемых помех.

2. Разработан барицентрический метод для численного решения скалярных и векторных волновых уравнений в ограниченной расчетной области анализа, заданной в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ .

3. Разработаны методы определения барицентрических координат для односвязной области с кусочно-линейной границей, заданной в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ .

4. Модифицирован метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей для эффективного решения обратной задачи конформного отображения многоугольника на каноническую область.

5. Разработаны методы прямого и обратного конформного отображения многогранников на каноническую область в  $\mathbb{R}^3$  с применением для описания изометрий дополненной теории кватернионного анализа в части разложения кватернион-функций в обобщенные степенные ряды.

6. Для решения задач электродинамики в неограниченной расчетной области анализа с учетом эффектов дифракции и переотражения модифицирован токовый метод расчета характеристик направленности зеркальных антенн с использованием приближений Кирхгофа–Котлера и методов физической оптики,

а также определена реализация барицентрического метода в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн.

7. Определена реализация барицентрического метода в решении задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны.

8. Модифицирован гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций.

9. Разработаны алгоритмы численного решения задач структурно-параметрического синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной.

10. Полученные результаты реализованы в виде проблемно-ориентированного программного комплекса для решения задач моделирования, анализа, синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной при последующем обосновании и тестировании эффективности предложенных решений с применением ЭВМ.

**Научная новизна** результатов работы состоит в следующем:

1. Разработана физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной при взаимоувязанном решении внешней и внутренней задач электродинамики теории антенн и сведении стохастического дифференциального уравнения состояния в смысле Ито к краевой задаче в раскрытых излучателях по распределению нормированного значения плотности потока энергии.

2. Разработаны методы определения барицентрических координат для односвязной области  $\Omega$  с кусочно-линейной границей, которые, в отличие от известных, позволяют формировать строгие решения при нахождении гармонических барицентрических координат для  $\Omega$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \vee \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ).

3. Разработан барицентрический метод анализа электромагнитного поля в частотной и временной областях для односвязной области  $\Omega$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \vee \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ) с кусочно-линейной границей, позволяющий при соизмеримых вычислительных затратах повысить точность численного решения уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в 2,6 раза в сравнении с известными методами и сформировать аппроксимирующие полиномы для решения задач синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной.

4. Разработаны метод решения обратной задачи конформного отображения многоугольника на единичный круг и методы решения прямой и обратной задач конформного отображения многогранника на каноническую область с определением простейших конформных отображений шара, верхнего полупространства, двухгранного и многогранного углов в  $\mathbb{R}^3$ , и обобщением интегральной формулы Кристоффеля–Шварца с использованием алгебры кватернионов.

5. Для формирования прямых и обратных конформных отображений многогранников и простейших конформных отображений в  $\mathbb{R}^3$  определены решения по разложению регулярных кватернион-функций в обобщенные степенные ряды.

6. Предложена модификация токового метода расчета характеристик направленности адаптивных многолучевых зеркальных антенн, которая дает возможность для различных составляющих электромагнитного поля учесть эффекты дифракции и переотражения в приближениях Кирхгофа–Котлера и ме-

тодов физической оптики, что позволило снизить среднюю относительную ошибку оценки дальнего бокового излучения в 2,38 раза в сравнении с известными аналитическими методами.

7. Сформированы решения сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн и задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны в приближении барицентрического метода, которые позволяют повысить точность вариационного решения краевой задачи в среднем в 3,32 раза в сравнении с известными при соизмеримых вычислительных затратах.

8. С целью наиболее эффективного численного решения задач глобальной оптимизации многомерных многоэкстремальных функций на основе объединения эволюционных методов, работающих в вещественных кодах, с современными методами локального поиска и статистического анализа разработан модифицированный гибридный генетический метод, который в сравнении с известными решениями позволяет сократить вычислительные затраты при решении задачи глобальной оптимизации в среднем в 1,3 раза.

**Теоретическая значимость** проведенного исследования заключается:

1) в разработке и развитии математической теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн в частности и теории математического моделирования, анализа и синтеза зеркальных антенн, их излучающих и отражающих элементов в целом при совершенствовании вариационных методов решения краевых задач математической физики – барицентрического метода.

2) разработке эффективных методов прямого и обратного конформных отображений односвязных областей с кусочно-линейной границей в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  на основе теории функции комплексного переменного и дополненной теории кватернионного анализа в части разложения кватернион-функций в обобщенные степенные ряды.

**Практическая значимость.** Разработано алгоритмическое и специальное программное обеспечение в виде проблемно-ориентированного программного комплекса для интеллектуальной поддержки при проектировании и управлении адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами. Практическую значимость определяют также конструктивные предложения по реализации полученных в исследовании теоретических результатов с учетом выполненных экспериментальных исследований с применением разработанного проблемно-ориентированного программного комплекса. Разработанный барицентрический метод использован в расчетах рационального места установки дополнительного облучателя при расширении оперативно-технических возможностей станции космической связи «Ребус-Ц» в в/ч 61608.

**Методология и методы исследования.** В диссертационной работе для решения обозначенных частных задач использованы теория системного анализа и принятия решений, теория оптимального управления, стохастические дифференциальные уравнения, классическая электродинамика и методы вычислительной электродинамики, вариационные методы решения краевых задач математической физики, теория антенн, теория функции комплексного переменного, теория кватернионного анализа, теория рядов, теория ортогональных многочленов, методы конечных элементов, численные методы поиска экстремумов, теория алгоритмов, методы цифровой обработки сигналов и корреляци-

онного анализа, методология экспериментальных исследований с применением вычислительной техники и коммерческих пакетов прикладных программ.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Физико-математическая модель управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной во взаимосвязи решений внешней и внутренней задач электродинамики.

2. Барицентрический метод в численном решении уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в ограниченной расчетной области анализа без ее разбиения на конечные элементы.

3. Методы конформных отображений замкнутых односвязных областей с кусочно-линейной границей в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ , позволяющие формировать строгие решения задач прямого и обратного конформных отображений области с кусочно-линейной границей на каноническую.

4. Методы решения задач вычислительной электродинамики в неограниченной расчетной области анализа в приложении к электродинамической теории зеркальных антенн, а также задачи управления формой отражающей поверхности адаптивной многолучевой зеркальной антенны.

5. Проблемно-ориентированный программный комплекс, разработанный для проведения вычислительных экспериментов с учетом современных технологий параллельных вычислений и реализующий комбинированное использование сформированных методов и алгоритмов решения задач моделирования, анализа, синтеза и управления адаптивной многолучевой зеркальной антенной с применением модификации гибридного генетического метода с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций.

**Соответствие работы паспорту специальности.** Диссертационное исследование направлено на разработку методов математического моделирования, численных методов и комплекса программ взаимосвязанных в формируемой математической теории адаптивных многолучевых зеркальных антенн и вносит вклад в следующие области исследований, перечисленные в паспорте специальности 05.13.18:

1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений (1-е положение, выносимое на защиту).

2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей (3-е положение, выносимое на защиту).

3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий (2-, 4-е положения, выносимые на защиту).

4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента (5-е положение, выносимое на защиту).

**Апробация и реализация результатов работы.** Полученные в рамках диссертационного исследования результаты использованы при разработке проблемно-ориентированного программного комплекса по анализу интегральных характеристик направленности зеркальных параболических антенн в ФГУП НИИР (г. Москва). Экспериментальная проверка достоверности полученных результатов осуществлялась путем математического и имитационного модели-

рования в Академии ФСО России (г. Орёл), ФГУП «НИИ «Радио» (г. Москва). Результаты апробированы и внедрены в в/ч 61608 (г. Москва).

Полученные результаты диссертационного исследования докладывались на III Международной интернет-конференции молодых ученых, аспирантов и студентов «Инновационные технологии: теория, инструменты, практика» (InnoTech 2011); VI Ежегодной международной научно-практической конференции «Перспективы развития информационных технологий» (ПТ-6), Центр развития научного сотрудничества, г. Новосибирск., 2012 г.; VII Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки», г. Москва, 25 октября 2012 г.; VI Всероссийской научно-практической конференции «Территориально распределенные системы охраны», ФГКОУ ВПО «Калининградский пограничный институт ФСБ России», г. Калининград, 2—4 апреля 2013 г.; XVIII Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Научная сессия ТУСУР — 2013», г. Томск, 15—17 мая 2013 г.; XIV Международной научно-практической конференции «Научное образование физико-математических и технических наук в XXI веке», Москва, 2015 г.; Научном семинаре «Проблемы современной математики» в НИЯУ МИФИ, г. Москва, 11 февраля 2016 г.; X Всероссийской межведомственной научной конференции «Актуальные направления развития систем охраны, специальной связи и информации для нужд органов государственной власти Российской Федерации» в Академии ФСО России, г. Орёл 2017 г.; Московском электродинамическом семинаре в ИРЭ РАН им. В. А. Котельникова 5 декабря 2017 г., г. Москва.

**Личный вклад.** Все основные результаты, выводы, положения, выносимые на защиту, информационное обеспечение, на которых основана диссертация, получены лично автором либо под его руководством. В совместных работах автору принадлежит ведущая роль в разработке общей концепции работы, ее структуры, методов и алгоритмов математического моделирования, анализа, синтеза и управления адаптивными многолучевыми зеркальными антеннами. Под научным руководством автора защищена одна диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук Бесединым И. И по специальности 05.13.18. Автор также является руководителем при подготовке диссертации на соискание ученой степени кандидата наук по специальности 05.13.18 Степановым Д. Е. Все патенты (№№ 2461929, 2547627, 2576493) выполнены в соавторстве, при этом основные идеи патентуемых технических решений принадлежали автору диссертации. Разработаны алгоритмы программ и получены свидетельства о государственной регистрации компьютерных программ в Роспатенте, зарегистрированные под №№ 2011610149, 2011610619, 2011610620, 2011610621, 2011610623, 2011615638, 2011615639, 2011616903, 2013615091, 2013616337, 2013611206, 2014619647, 2014617058, 2015619651.

**Достоверность полученных результатов** обеспечивается использованием строгих математических процедур, общеизвестных уравнений, методов и подходов, которые обоснованы в общепринятой научной литературе, апробированы и хорошо себя зарекомендовали при проведении научных исследований. Достоверность результатов подтверждается их верификацией при разнообразном тестировании, включающем сравнение с точными решениями (при их наличии) и с выходными результатами современных и широко используемых в практике производств оборонно-промышленного комплекса систем автоматизированного проектирования, а также сравнением с известными теоретическими



результатами. Достоверность полученных результатов обеспечивается адекватностью разработанных методов математического моделирования, корректностью исходных и упрощающих допущений.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 64 работы. Из них 33 статьи в рецензируемых журналах из перечня ВАК при Минобрнауки России, в том числе в журналах, входящих в системы цитирования Scopus и Web of Science (7 статей). По результатам исследования изданы 3 монографии (в соавторстве и единолично), 1 учебное пособие (в соавторстве), получено 3 патента на изобретение и 14 свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа изложена на 256 страницах машинописного текста, содержит 72 иллюстрации и 1 таблицу, состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы (278 наименований) и приложений.

## Содержание работы

**Во введении** приведено описание современного состояния проблемы, обоснованы актуальность и научная новизна работы, определены цель, задачи и методы исследования. Изложены теоретическая и практическая значимость работы, положения, выносимые на защиту, сведения об апробации работы и основных публикациях.

**В первой главе** проведен анализ ретроспективы объекта и предмета исследования, определяющий предпосылки существования научной проблемы при структуризации проблем теории и практики. Задана содержательная постановка проблемы исследования, определенная формулировкой предмодели адаптивной к условиям СПО антенной системы (рис. 1).

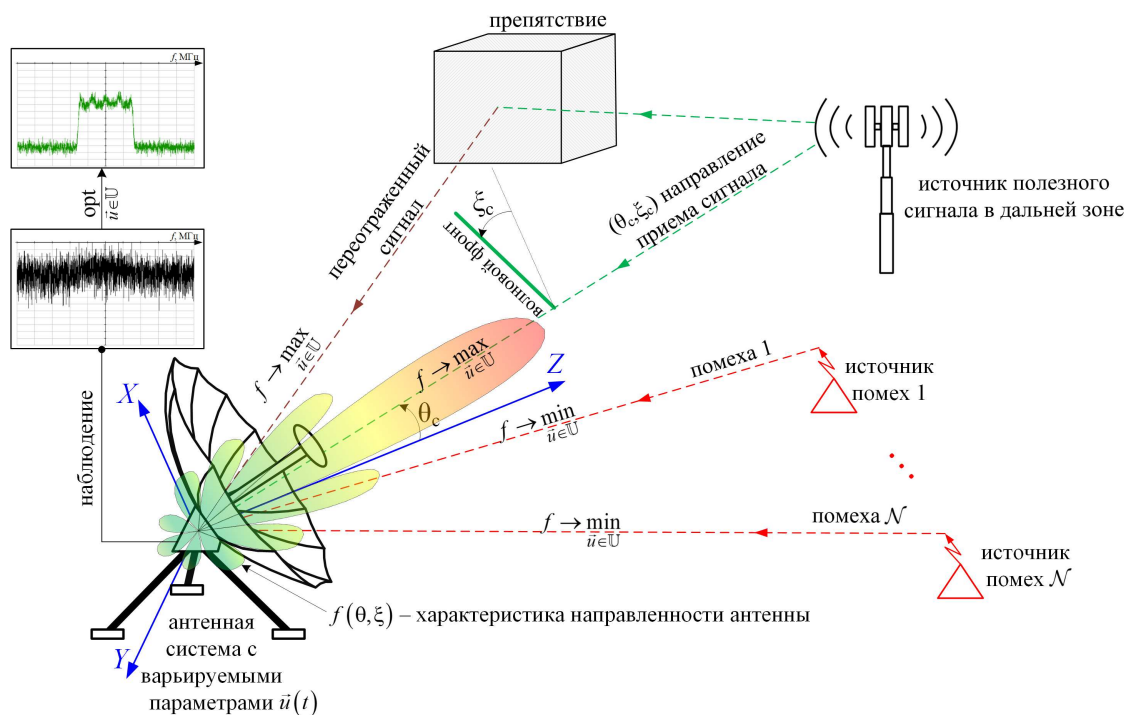


Рис. 1. Схема адаптации антенной системы к условиям сигнально-помеховой обстановки

Адаптация антенны сводится к формированию характеристики направленности с провалами (минимумами) в направлениях на источники помех и максимизации уровня полезного сигнала. Априорными сведениями является информация о направлении на источник полезного сигнала и различие в направлении прихода полезного сигнала и подавляемых помех.

Выделены основные критерии (максимум отношения правдоподобия — МОП) и показатели (отношение мощности сигнала к мощности совокупности помехи и шума  $SNR$ , коэффициент выигрыша адаптации  $K_c$  и время адаптации  $t_a$ ) эффективности управления адаптивными антеннами зеркального типа. Рассмотрены методы анализа и синтеза ЗА. На основе результатов ретроспективного анализа сформулирована концепция диссертационного исследования. Разработана физико-математическая модель управления АМЛЗА, представленной деформируемым рефлектором  $M' = 1$  и  $M$  излучателями (рис. 2).

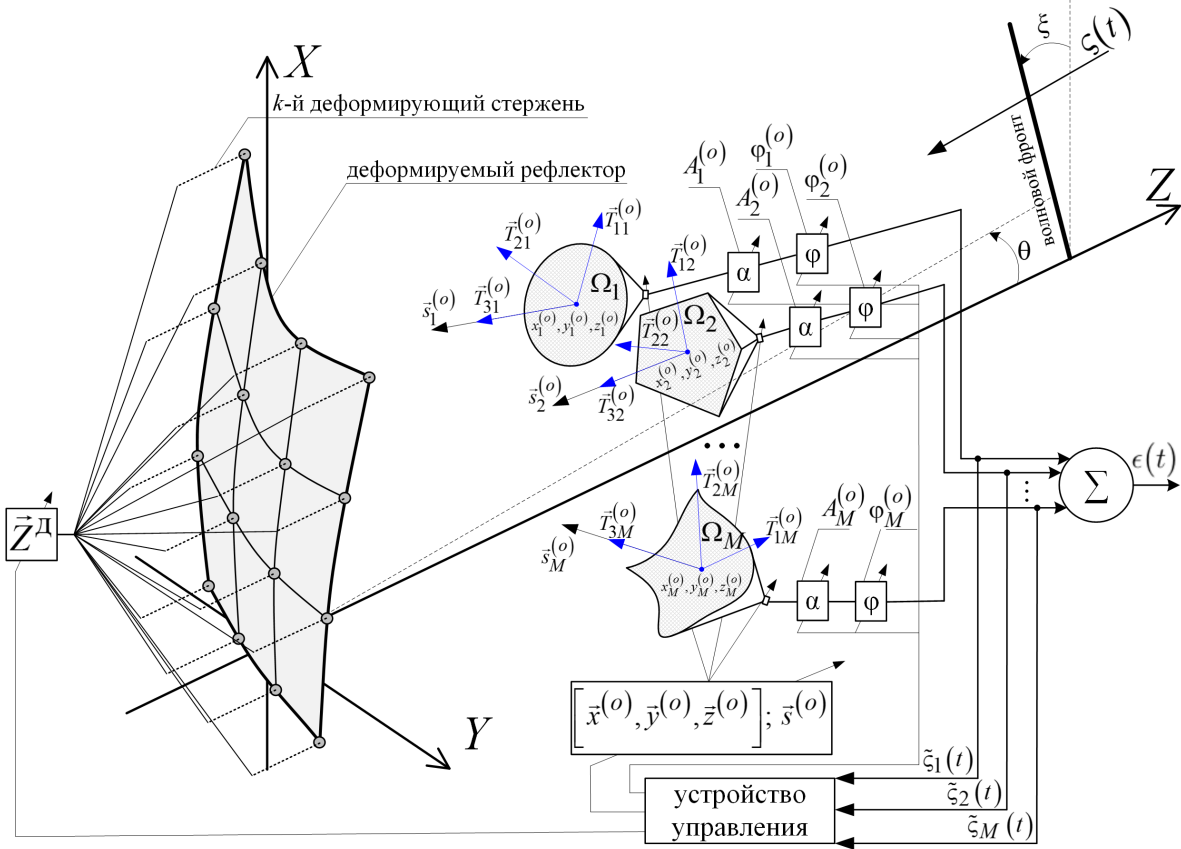


Рис. 2. Схема адаптивной многолучевой зеркальной антенны

В качестве управляемых параметров выбраны: амплитуда  $A_m^{(o)}$  и фаза  $\varphi_m^{(o)}$  тока возбуждения  $m$ -го излучателя; координаты центра раскрыва  $\Omega_m$   $m$ -го излучателя —  $x_m^{(o)}$ ,  $y_m^{(o)}$ ,  $z_m^{(o)}$ ; угол  $\nu_m^{(o)}$  поворота плоскости  $\Omega_m$  в системе координат рефлектора; орт нормали  $\vec{s}_m^{(o)}$  к плоскости  $\Omega_m$ , характеризующий ориентацию  $m$ -го излучателя; форма отражающей поверхности, формируемая  $K$ -мерной системой приводов, которые воздействуют на упругую поверхность отражателя при параметризации переменной  $Z_k^D$  положения  $k$ -го деформирующего стержня относительно оси  $OZ$ , где  $k = \overline{1, K}$ .

Вход модели — принимаемый из дальней зоны с направления  $(\theta, \xi)$  сигнал  $\zeta(t)$ , заданный электромагнитной волной  $\{\vec{E}(s)(t), \vec{H}(s)(t)\}$  с плоским фазовым фронтом. Выход модели — суммарный сигнал  $\epsilon(t) = \sum_{m=1}^M \tilde{\zeta}_m(t)$  от  $m$ -х излучающих элементов. Зафиксируем  $m \in \{\overline{1, M}\}$ . В физическом смысле  $\tilde{\zeta}_m(t)$  характеризуется ЭДС  $X_m(t) = \oint_{L_m} \vec{E}_m(t) \cdot d\vec{l}$ , которая определяется мгновенным

значением напряженности электрического поля  $\vec{E}_m(t)$ , наводимого в режиме приема на некотором замкнутом контуре  $L_m$  внутри  $m$ -го излучателя.

Для определения зависимости между  $\varsigma(t)$  и  $\vec{X}(t) = (X_m(t))_M$  рассмотрена задача дифракции внешнего поля  $\{\vec{E}(s), \vec{H}(s)\}$  с учетом следующих ограничений: 1) деформируемый рефлектор представляет собой бесконечно тонкую идеально проводящую гладкую поверхность  $S'$ ; 2)  $m$ -й облучатель представляется объемом  $V_m$ , который ограничен раскрывом  $\Omega_m$  и бесконечно тонкой идеально проводящей поверхностью  $S_m$ ; 3)  $V_m$  — однородная изотропная среда с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_m^a$  и  $\mu_m^a$ ; 4) область  $V_0$  пространства ЭМП между рефлектором и облучателями является однородной изотропной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_0^a$  и  $\mu_0^a$ . Математическая постановка задачи дифракции задана в следующем виде:

$$\nabla \times \vec{H}_{m_0} = -i\kappa_{m_0}\vec{E}_{m_0}, \quad \nabla \times \vec{E}_{m_0} = i\kappa_{m_0}\vec{H}_{m_0} \text{ в } V_{m_0}, m_0 \in \{0, \overline{1, M}\}; \quad (1a)$$

$$\vec{n}_0 \times \vec{E}_0 = 0, \quad \vec{n}_0 \cdot \vec{H}_0 = 0 \text{ на } S'; \quad (1б)$$

$$\vec{n}_m \times \vec{E}_m = 0, \quad \vec{n}_m \cdot \vec{H}_m = 0 \text{ на } S_m; \quad (1в)$$

$$\begin{cases} \vec{s}_m^{(o)} \times (\vec{E}_m - \vec{E}_m^{(o)}) = \vec{s}_m^{(o)} \times \vec{E}(s), \\ \vec{s}_m^{(o)} \times (\vec{H}_m - \vec{H}_m^{(o)}) = \vec{s}_m^{(o)} \times \vec{H}(s) \end{cases} \text{ на } \Omega_m, \quad (1г)$$

с условиями излучения на бесконечности:  $\{\vec{E}_{m_0}, \vec{H}_{m_0}\} = o(R^{-1})$ ,  $R \rightarrow \infty$  при  $\text{Im } \kappa_{m_0} > 0$ ;  $\vec{H}_0 \times \vec{e}_R - \vec{E}_0 = o(R^{-1})$ ,  $\vec{E}_0 \times \vec{e}_R + \vec{H}_0 = o(R^{-1})$ ,  $\{\vec{E}_0, \vec{H}_0\} = o(R^{-1})$ ,  $R \rightarrow \infty$  при  $\text{Im } \kappa_0 = 0$ ,  $\kappa_0 \neq 0$ ;  $\vec{E}_m \times \vec{e}_R + \sqrt{\mu_m^a/\epsilon_m^a}\vec{H}_m = o(R^{-1})$ ,  $\vec{H}_m = o(R^{-1})$ ,  $R \rightarrow \infty$  при  $\text{Im } \kappa_m = 0$ ,  $\kappa_m \neq 0$ . Здесь  $\vec{n}_0$  и  $\vec{n}_m$  — орты векторов нормалей к  $S'$  и  $S_m$ ;  $\{\vec{E}_m^{(o)}, \vec{H}_m^{(o)}\}$  — ЭМП в  $\Omega_m$ ;  $\kappa_{m_0} = \omega\sqrt{\epsilon_{m_0}^a\mu_{m_0}^a}$  — волновое число;  $\omega = 2\pi/\lambda$  — круговая частота;  $R = |\vec{r}|$ ;  $\vec{e}_R = \vec{r}/|\vec{r}|$ ;  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ .

С целью снижения вычислительных затрат принято дополнительное допущение на то, что ЭМП, приходящее в  $\Omega_m \setminus \partial\Omega_m$ , полностью передается в соответствующую фидерную линию. Это позволило декомпозировать общую задачу (1) на последовательное решение (1а), (1б), (1г) и (1а), (1в), (1г) — задач электродинамики в неограниченной и ограниченной расчетных областях при задании соответствующих функций  $P_2^{(m)} : \vec{E}(s)(t) \rightarrow \vec{E}_m^{(o)}(t)$  и  $P_1^{(m)} : \vec{E}_m^{(o)}(t) \rightarrow \vec{E}_m(t)$ .

Для заданной электродинамической постановки, рассматривая величину ЭДС с выходов  $m$ -х излучателей марковским векторным процессом  $\vec{X}(t)$ , априорные сведения о АМЛЗА определены уравнением состояния:

$$\vec{X}_t = \vec{D}^{(u)}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) + \mathbf{D}^{(s)}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) \vec{V}_t \quad (2)$$

при  $\vec{X}_{t_0} = \vec{X}_0$  и наблюдении

$$\vec{s}_t = \vec{h}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) + \vec{W}_t, \quad (3)$$

где  $\vec{X}_t \stackrel{def}{=} \vec{X}(t)$ ;  $\dot{\vec{X}}_t = (dX_m(t)/dt)_M$ ;  $\vec{\xi}_t \stackrel{def}{=} \vec{\xi}(t)$ ;  $\vec{D}^{(\mu)}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) = (D_m^{(\mu)})_M$  и  $\mathbf{D}^{(\sigma)}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t) = (D_{mm'}^{(\sigma)})_{M \times M}$  — вектор сноса и матрица диффузии;  $\vec{V}_t \stackrel{def}{=} \vec{V}(t)$  — белый гауссовский нормированный вектор-шум, наблюдаемый при помощи векторного нелинейного наблюдателя (3);  $t_0$  — начальный момент времени;  $\vec{X}_0$  — начальное распределение векторного процесса  $\vec{X}(t)$ ;  $\vec{h}(\vec{X}_t, \vec{u}_t, t)$  — нелинейная векторная функция наблюдателя, задающая выходную характеристику облучающих элементов;  $\vec{W}_t \stackrel{def}{=} \vec{W}(t)$  — гауссовский белый шум с нулевым средним и матрицей интенсивностей  $E[\vec{W}_t \vec{W}_\tau^T] = \mathbf{D}^{(W)}(t) \delta(t - \tau)$ ;  $\vec{u}_t \stackrel{def}{=} \vec{u}(t)$  — вектор управляющих воздействий.

Стохастическое дифференциальное уравнение (2) понимается в смысле Ито. Решение задачи управления предполагает получение для заданного момента времени  $t$  наилучшей оценки  $\hat{\vec{X}}_t$  векторного процесса  $\vec{X}_t$  по критерию МОП функции апостериорной плотности вероятности  $\rho(\vec{X}, t | \vec{\xi}_\tau, \tau \in [t_0, t])$ , удовлетворяющей уравнению Фоккера—Планка—Колмогорова.

Оценка  $\hat{\vec{X}}_t$  при согласовании решений внешней и внутренней задач электродинамики сведена к определению плотности потока энергии  $\mathcal{J}_m(x, y, t)$ , формируемого в  $\Omega_m$  в режиме приема.

**Теорема 1.** Пусть  $\vec{\xi}_t$  измеряется по правилу (3), тогда нормированное значение  $\tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t) = \mathcal{J}_m(x, y, t) / \int_{\Omega_m} \mathcal{J}_m(x, y, t) d\Omega$  плотности потока энергии  $\mathcal{J}_m(x, y, t)$  ЭМП в точке  $(x, y) \in \Omega_m$  АМЛЗА удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{J}}_m}{\partial t} = A_m \tilde{\mathcal{J}}_m + \vec{B}_m \cdot \nabla \tilde{\mathcal{J}}_m + (\nabla \mathbf{C}_m \nabla^T) \tilde{\mathcal{J}}_m. \quad (4)$$

В выражении (4)  $\tilde{\mathcal{J}}_m = \tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t)$ ;  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  — оператор набла;  $A_m = \frac{1}{2} \sum_{m'=1}^M \frac{\partial^2 G_{mm'}^{(2)}}{\partial X_m \partial X_{m'}} - \frac{\partial G_m^{(1)}}{\partial X_m}$ ;  $\vec{B}_m = b_m \left\{ \left( \frac{\partial X_m}{\partial x} \right)^{-1}, \left( \frac{\partial X_m}{\partial y} \right)^{-1} \right\}$  при  $b_m = -G_m^{(1)} + \sum_{m'=1}^M \frac{\partial G_{mm'}^{(2)}}{\partial X_{m'}}$ ;  $\mathbf{C}_m = c_m \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \right)^{-1} & \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial x \partial y} \right)^{-1} \\ \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial y \partial x} \right)^{-1} & \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial y^2} \right)^{-1} \end{pmatrix}$  при  $c_m = \left[ \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial x^2} \right)^{-1} + \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial x \partial y} \right)^{-1} + \left( \frac{\partial^2 X_m}{\partial y^2} \right)^{-1} \right]$ ;  $G_{mm'}^{(2)} = \sum_{j=1}^M D_{mj}^{(\sigma)} D_{jm'}^{(\sigma)}$ ;  $G_m^{(1)} = D_m^{(\mu)}$ .

Решение краевой задачи (4) предполагается выполнять численно с применением вариационных методов при определении аппроксимации Ритца функции  $\tilde{\mathcal{J}}_m$  соотношением  $\tilde{\mathcal{J}}_m(x, y, t) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} I_j^{(m)}(t) \alpha_j^{(m)}(x, y)$ , где  $\alpha_j^{(m)}(x, y)$  —

некоторый интерполяционный полином, учитывающий функцию формы  $m$ -го излучателя при представлении  $\Omega_m$  произвольным многоугольником из  $N_m$  вершин;  $I_j^{(m)}(t)$  — величина нормированного значения плотности потока энергии в  $j$ -х узловых точках  $\Omega_m$  в момент времени  $t$ ;  $p$  — порядок аппроксимации;  $j$  — мультииндекс из множества  $\mathbb{M}_p$ :

$$\mathbb{M}_p = \left\{ j = (j_1, j_2, \dots, j_n, \dots, j_{N_m}) : j_n \in \mathbb{Z}, j_n \geq 0, \sum_{n \in [1; N_m]} j_n = p \right\}. \quad (5)$$

С учетом принципа максимума Понтрягина для заданной аппроксимации итоговая задача управления АМЛЗА сведена к решению системы ОДУ, включающей для начального условия  $\vec{I}^{(m)}(t_0) = \vec{I}_0^{(m)}$  и  $m = \overline{1, M}$ :

$$\text{уравнение управления: } \partial H(t) / \partial \vec{u} = 0; \quad (6)$$

$$\text{уравнение состояния: } \dot{\vec{I}}^{(m)}(t) = -\partial H(t) / \partial \vec{\psi}^{(m)} = \mathbf{Q}_m \vec{I}^{(m)}(t); \quad (7)$$

$$\text{сопряженное уравнение: } \dot{\vec{\psi}}^{(m)}(t) = \partial H(t) / \partial \vec{I}^{(m)}. \quad (8)$$

В выражениях (6)–(8) приняты обозначения  $\vec{\psi}^{(m)}(t) = \left( \partial \Psi_j^{(m)}(t) / \partial t \right)_{|\mathbb{M}_p|}$ ;  $\vec{\psi}^{(m)} = \left( \Psi_j^{(m)} \right)_{|\mathbb{M}_p|}$  — вспомогательный вектор импульсов управления;  $\vec{I}^{(m)}(t) = \left( I_j^{(m)}(t) \right)_{|\mathbb{M}_p|}$ ;  $\dot{\vec{I}}^{(m)}(t) = \left( \partial I_j^{(m)}(t) / \partial t \right)_{|\mathbb{M}_p|}$ ;  $\mathbf{Q}_m = \left( Q_{jj'}^{(m)} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$  при  $Q_{jj'}^{(m)} = \int_{\Omega_m} \left\{ \left[ A_m \alpha_j^{(m)} + \vec{B}_m \cdot \nabla \alpha_j^{(m)} + \left( \nabla \mathbf{C}_m \nabla^T \right) \alpha_j^{(m)} \right] \alpha_{j'}^{(m)} \right\} d\Omega$ ;  $H(t) = H \left( \vec{I}^{(1)}, \dots, \vec{I}^{(M)}, \vec{\psi}^{(1)}, \dots, \vec{\psi}^{(M)}, \vec{u}, t \right) = \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \left( I_j^{(m)}(t) - I_{p,j}^{(m)}(\vec{u}, t) \right)^2 - \left( \vec{\psi}^{(m)}(t) \right)^T \mathbf{Q}_m(\vec{u}) \vec{I}^{(m)}(t) \right]$  — функция Гамильтона, где  $\vec{I}_p^{(m)}(\vec{u}, t) = \left( I_{p,j}^{(m)}(\vec{u}, t) \right)_{|\mathbb{M}_p|}$  — вектор распределения нормированных значений плотности потока энергии в  $j$ -х узловых точках на  $\Omega_m$  в момент времени  $t$  для заданного  $\vec{u}$ . Значения  $I_{p,j}^{(m)}(\vec{u}, t)$  для интерполяционных полиномов  $\alpha_j^{(m)}(x, y)$  при  $\tilde{\mathcal{J}}_m^p(\vec{u}, x, y, t) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} I_{p,j}^{(m)}(\vec{u}, t) \alpha_j^{(m)}(x, y)$  определены из решения задачи  $\int_{\Omega_m} \left| \tilde{\mathcal{J}}_m'(\vec{u}, x, y, t) - \tilde{\mathcal{J}}_m^p(\vec{u}, x, y, t) \right|^2 d\Omega \rightarrow \min$  соотношением

$$\vec{I}_p^{(m)}(\vec{u}, t) = \tilde{\mathbf{I}}_m^{-1} \vec{\mathcal{J}}_m(\vec{u}, t), \quad (9)$$

где  $\tilde{\mathbf{I}}_m = \left( \tilde{I}_{jj'}^{(m)} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}$  при  $\tilde{I}_{jj'}^{(m)} = \int_{\Omega_m} \alpha_j^{(m)} \alpha_{j'}^{(m)} d\Omega$ ;  $\vec{\mathcal{J}}_m(\vec{u}, t) = \left( \mathcal{J}_j^{(m)}(\vec{u}, t) \right)_{|\mathbb{M}_p|}$  при  $\mathcal{J}_j^{(m)}(\vec{u}, t) = \int_{\Omega_m} \tilde{\mathcal{J}}_m'(\vec{u}, t) \alpha_j^{(m)} d\Omega$ ;  $\tilde{\mathcal{J}}_m'(\vec{u}, t) =$

$= \tilde{\mathcal{J}}'_m(\vec{u}, x, y, t)$  и задается:

$$\tilde{\mathcal{J}}'_m(\vec{u}, x, y, t) = \frac{\left| \vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t) \times \vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t) \right|}{\int_{\Omega_m} \left| \vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t) \times \vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t) \right| d\Omega}, \quad (10)$$

при оценке  $\vec{E}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t)$  и  $\vec{H}_m^{(o)}(\vec{u}, x, y, t)$  функциями  $P_2^{(m)}$  в  $(x, y) \in \Omega_m$ .

Для полученных результатов в сравнении с теорией ААР выполнена оценка числа  $\mathcal{N}$  подавляемых АМЛЗА помеховых сигналов.

**Утверждение 1.** Пусть задана АМЛЗА, включающая  $M$  излучателей и деформируемый рефлектор с  $K$  устройствами деформации, тогда, принимая полезный сигнал  $\zeta(t)$  с направления  $(\theta, \xi)$ , АМЛЗА максимально способна подавить  $\mathcal{N} = M \cdot K - 1$  помеховых сигналов  $\tilde{\eta}_n(t)$ , которые приходят с направлений  $(\theta_n, \xi_n) \neq (\theta, \xi)$ , где  $n = \overline{1, \mathcal{N}}$ .

С учетом полученных результатов, закона необходимого разнообразия при  $K \rightarrow \infty$  сформулировано утверждение о существовании конструкции АМЛЗА, инвариантной к воздействию помех.

По результатам ретроспективного анализа и выполненной формализации проблемы определена необходимость разработки эффективных аналитических и численных методов: 1) определения функций  $P_1^{(m)} : \vec{E}_m^{(o)}(t) \rightarrow \vec{E}_m(t)$  и  $P_2^{(m)} : \vec{E}(\zeta)(t) \rightarrow \vec{E}_m^{(o)}(t)$  и интерполяционных полиномов  $\alpha_j^{(m)}(x, y)$ ; 2) параметризации отражающей поверхности рефлектора положением  $K$  деформирующих стержней.

**Вторая глава** посвящена решению (1а), (1в), (1г) (определению  $P_1^{(m)} : \vec{E}_m^{(o)}(t) \rightarrow \vec{E}_m(t)$ ) при разработке численного метода решения задач вычислительной электродинамики (уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений) в произвольной односвязной области  $\Omega$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \vee \Omega \subset \mathbb{R}^3$ ) с кусочно-линейной границей — барицентрического метода (БМ).

Основу БМ составляют решения, связанные с определением барицентрических координат (БК), которые задаются набором скалярных параметров  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ , однозначно определяющих точку аффинного пространства  $P \in \Omega$  через точечный базис  $P_1, P_2, \dots, P_N$  — вершины  $\Omega$ . Для формирования взаимно однозначного решения при сохранении свойств аффинной инвариантности  $\sum_{n=1}^N \zeta_n(P) P_n = P$ , положительной определенности  $\zeta_n \geq 0$  и равенства единице  $\sum_{n=1}^N \zeta_n = 1$  определено, что БК должны удовлетворять следующему условию.

**Теорема 2.** Для того чтобы  $N$ -мерная система координат  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$  являлась для  $\Omega$  барицентрической, необходимо, чтобы  $\zeta_n(P)$  при  $P \in \Omega$ ,  $n = \overline{1, N}$  были гармоническими.

**Следствие 1.** Любая барицентрическая координата  $\zeta_n(P)$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta \zeta_n = 0$  для  $\Omega$  при  $\zeta_n(P_{n'}) = \delta_n^{n'} = \begin{cases} 1, & n = n'; \\ 0, & n \neq n', \end{cases}$  ( $n, n' \in \{\overline{1, N}\}$ ).

С учетом решения уравнения Лапласа, полученного Пуассоном для шара, и теоремы Римана о взаимно-однозначности конформного отображения заданы методы определения гармонических БК Пуассона—Римана в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ . Для удобства математической записи решение в  $\mathbb{R}^2$  определено на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 3.** *Барицентрические координаты  $\zeta_n(P)$  для  $\Omega \subset \mathbb{C}$  с вершинами  $P_n = r_n e^{i\varphi_n}$  ( $n = \overline{1, N}$ ) при  $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$  определяются выражением*

$$\zeta_n(P) = w_n(P) / \sum_{n=1}^N w_n(P);$$

$$w_n(P) = \frac{|\overrightarrow{PP'_{n-1}}| - |\overrightarrow{PP'_n}| \cos \phi_{n-1}}{|\overrightarrow{PP'_n}| \sin \phi_{n-1}} + \frac{|\overrightarrow{PP'_{n+1}}| - |\overrightarrow{PP'_n}| \cos \phi_n}{|\overrightarrow{PP'_n}| \sin \phi_n}. \quad (11)$$

В выражении (11)  $P'_n = e^{i\varphi'_n} + \kappa$  — прообразы вершин  $P_n$  многоугольника  $\Omega$  при его конформном отображении на единичный круг  $B'_P = \{z \in \mathbb{C} : |z - \kappa| < 1\}$  с центром в  $\kappa = P - P'$ ;  $P'$  — точка, заданная конформным отображением  $P \in \Omega$  на единичный круг с центром в 0;  $\phi_n$  — угол между  $\overrightarrow{PP'_n}$  и  $\overrightarrow{PP'_{n+1}}$ .

В случае если для некоторых точек  $P \in \Omega$  в  $\mathbb{R}^2$  условие  $\arg(\overrightarrow{PP'_{n-1}}) < \arg(\overrightarrow{PP'_n}) < \arg(\overrightarrow{PP'_{n+1}})$  не выполняется, весовые функции  $w_n(P)$  БК в (11) задаются следующим образом.

**Следствие 2.** *Для  $\Omega \subset \mathbb{C}$  весовые функции  $w_n(P)$  барицентрических координат  $\zeta_n(P)$  Пуассона—Римана в точке  $P \in \Omega$  определяются соотношением*

$$w_n(P) = \tilde{D}_n(P) + \tilde{G}_n(P), \quad (12)$$

где при  $\varphi'_n \Delta = \varphi'_n - \varphi'_{n-1}$  и  $b_n = e^{i\varphi'_n}$

$$\tilde{D}_n(P) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\varphi'_{n-1} \Delta}{\varphi'_n \Delta} \tilde{C}_{n-1}(P) + \frac{\varphi'_{n+1} \Delta}{\varphi'_n \Delta} \tilde{C}_{n+1}(P) - \frac{\varphi'_{n+1} \varphi'_n \Delta + \varphi'_{n-1} \varphi'_n \Delta}{\varphi'_{n+1} \varphi'_n \Delta} \tilde{C}_n(P) \right];$$

$$\tilde{G}_n(P) = \frac{1 - |F(P)|^2}{2\pi \varphi'_{n+1} \Delta \varphi'_n \Delta} \left[ \varphi'_{n+1} \Delta \int_{\varphi'_n}^{\varphi'_{n+1}} \frac{\tau}{|1 - e^{i\tau} F(P)|^2} d\tau - \varphi'_n \Delta \int_{\varphi'_{n-1}}^{\varphi'_n} \frac{\tau}{|1 - e^{i\tau} F(P)|^2} d\tau \right];$$

$$\tilde{C}_n(P) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{|F(P)|(b_n(1+|F(P)|) - F(P)) - F(P)}{i(|F(P)|(b_n(1+|F(P)|) - F(P)) - F(P))} \right].$$

Решение в  $\mathbb{R}^3$  определено при обобщении (11) с учетом геометрического представления (см. рис. 3, а).

**Теорема 4.** *Барицентрические координаты  $\zeta_n(P)$  для  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с вершинами  $P_n$  ( $n = \overline{1, N}$ ) определяются выражением*

$$\zeta_n(P) = w_n(P) / \sum_{n=1}^N w_n(P); \quad w_n(P) = \sum_{k=1}^K \tilde{\zeta}_n^k(P) \frac{\vec{r}_n^k \vec{n}_n^k}{|P - \tilde{P}_k| |\vec{r}_n^k|}, \quad (13)$$

где  $\tilde{\zeta}_n^k(P)$  — барицентрическая координата многоугольника  $E_n^k$  относительно точки  $\tilde{P}_k$  проекции  $P \in \Omega$  на грань  $E_n^k$  в направлении вектора  $\vec{r}_n^k$  внешней нормали к сегменту  $E_n^k$ ;  $\vec{n}_n^k = \overrightarrow{P_n \tilde{P}_1^k} \times \overrightarrow{P_n \tilde{P}_N^k} / \left| \overrightarrow{P_n \tilde{P}_1^k} \times \overrightarrow{P_n \tilde{P}_N^k} \right|$  — единичная

внутренняя нормаль к  $E_n^k$ ;  $\tilde{P}_k = P - \tilde{n}_n^k \left[ (P - P_0^k) \tilde{n}_n^k \right]$  — точка проекции  $P \in \Omega$  на грань  $E_n^k$ ;  $P_0^k = \frac{1}{\tilde{N}+1} \left( P_n + \sum_{\tilde{m}=1}^{\tilde{N}} P_{\tilde{m}}^k \right)$ .

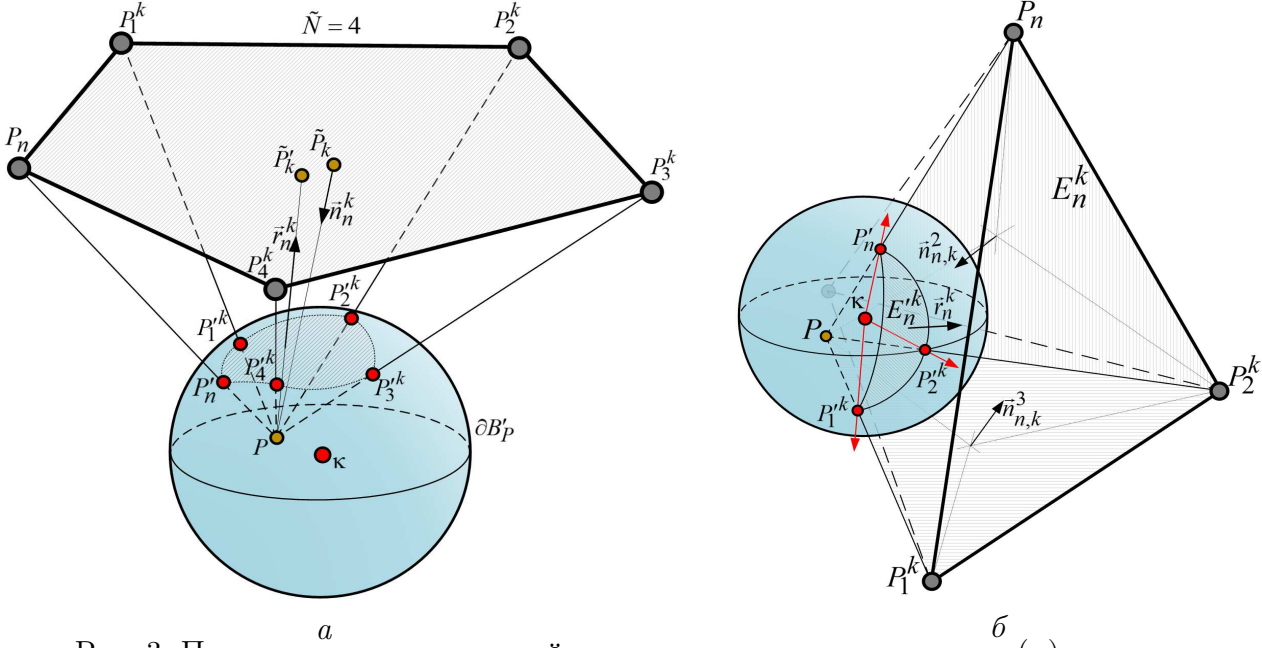


Рис. 3. Примеры проекции граней произвольного многогранника (а) и выпуклого многогранника с треугольными гранями  $\Omega$  (б) на сегмент  $E_n^k$  единичной сферы  $\partial B_p$

С целью снижения вычислительных затрат в ряде случаев для  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  выделено решение задачи по определению БК для выпуклого многогранника с треугольными гранями (см. рис. 3, б).

Для заданных методов нахождения гармонических БК Пуассона—Римана разработан БМ решения уравнений вида:

$$\text{скалярное уравнение Гельмгольца: } \nabla^2 \Phi + \varkappa^2 \Phi = 0; \quad (14)$$

$$\text{векторное уравнение Гельмгольца: } \nabla^2 \vec{A} + \varkappa^2 \vec{A} = 0; \quad (15)$$

$$\text{векторное волновое уравнение: } \nabla^2 \vec{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \vec{J}. \quad (16)$$

В дифференциальных уравнениях (14)–(16)  $\Phi$  и  $\vec{A}$  являются электродинамическими скалярным и векторным потенциалами (или вектором Герца), либо определяют продольную составляющую вектора и непосредственно вектор напряженности электрического  $\vec{E}$  или магнитного  $\vec{H}$  поля в зависимости от выбора граничных условий вида (1б)–(1г).

Для соответствующих скалярных и векторных волновых уравнений суть БМ заключается в задании следующих аппроксимаций для  $\Omega$  в  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ .

**Теорема 5.** Функция  $\Phi(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \Phi_j \alpha_j(P)$ , задающая аппроксимацию по-

рядка  $p \in \mathbb{N}$  потенциала  $\Phi$  в скалярном уравнении Гельмгольца вида (14), при

$$\alpha_j(P) = \prod_{n=1}^N R_{j_n}(P); R_{j_n}(P) = \prod_{k=0}^{j_n} \frac{1}{k} (p \zeta_n(P) - k + 1), \quad (17)$$

$$j_n > 0, R_0(P) = 1$$

является аппроксимацией Рунца.

Здесь  $\Phi_j$  — значения потенциала в  $j$ -х узловых точках.



**Теорема 6.** Функция  $\vec{A}(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} A_j \vec{\beta}_j(P)$ , задающая аппроксимацию по-

рядка  $p \in \mathbb{N}$  потенциала  $\vec{A}$  в векторных волновых уравнениях вида (15), (16) при

$$\vec{\beta}_j(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^N \hat{\alpha}_{jn}(P) \vec{\Theta}_n(P), \quad (18)$$

является аппроксимацией Рунца.

Здесь  $A_j$  — коэффициенты для  $j$ -х узловых точек;  $\hat{\alpha}_{jn}(P)$  — вспомогательный интерполяционный сдвинутый полином Сильвестра—Лагранжа относительно  $n$ -й вершины  $\Omega$ , заданный через сдвинутые полиномы Лагранжа  $\hat{R}_{jn}(P)$ :

$$\hat{\alpha}_{jn}(P) = \hat{R}_{jn}(P) \prod_{\substack{n'=1 \\ n \neq n'}}^N R_{jn'}(P); \quad (19)$$

$$R_{jn'}(P) = \begin{cases} \frac{1}{(j_n-1)!} \prod_{k=1}^{j_n-1} (p\xi_n(P) - k), & \text{if } 2 \leq j_n \leq p; \\ 1, & \text{if } j_n = 1, \end{cases}$$

$\vec{\Theta}_n(P)$  — краевые базисные векторные функции Неделека относительно  $n$ -й вершины  $\Omega$ , задаваемые через дифференциальные формы Уитни:

$$\vec{\Theta}_n(P) = [\xi_n(p) \nabla \xi_{n+1}(P) - \xi_{n+1}(P) \nabla \xi_n(P)] |P_{n+1} - P_n|. \quad (20)$$

Последующее решение уравнений (14)—(16) с учетом выбранных граничных условий (1б)—(1г) в приближении БМ производится в соответствии с методом Галёркина — подстановка соответствующих аппроксимаций в исходное дифференциальное уравнение и вычисление метрической матрицы и матрицы Дирихле при численном интегрировании по  $\Omega$  с последующим сведением к системам линейных и обыкновенных дифференциальных уравнений для соответствующих задач (14), (15) в частотной и (16) временной областях.

Сравнительная оценка БМ проведена с методом конечных элементов (МКЭ) при численном решении задачи определения распределения ЭМП в раскрывах излучателей, для которых точное решение известно (прямоугольный волновод, круглый волновод и др.). Пример распределения продольных и поперечных составляющих  $\vec{H}$  в раскрыве прямоугольного волновода, полученных МКЭ высших порядков при разбиении области анализа двумя одинаковыми треугольниками (граница треугольных элементов показана белой линией), БМ и точным решением, представлен на рисунках 4, 5.

Представленные примеры (рис. 4, 5) свидетельствуют о низкой точности МКЭ в сравнении с разработанным БМ при одинаковом порядке аппроксимации  $p$  (задает число узловых точек  $|\mathbb{M}_p|$ , что характеризует вычислительные затраты). Из полученных результатов и ряда дополнительных сравнений при анализе излучателей с разными раскрывами сделан вывод о том, что численное решение БМ повышает точность в среднем в 2,6 раза. В то же время для достижения аналогичной БМ точности решения МКЭ высших порядков требует роста вычислительных затрат в среднем в 1,73 раза.

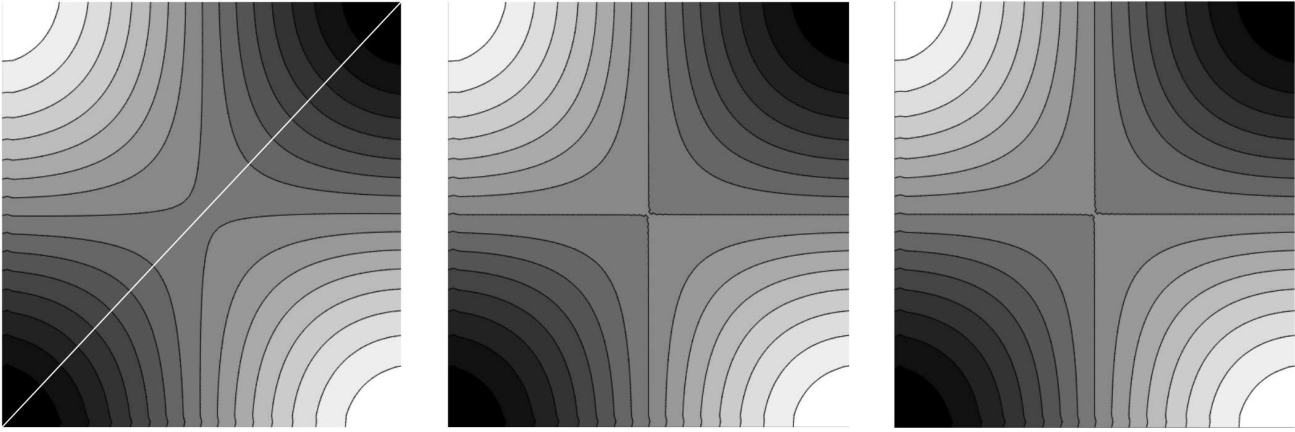


Рис. 4. Распределение продольной составляющей поля  $TE_{11}$  в раскрыве прямоугольного волновода, рассчитанное МКЭ высших порядков (а), БМ (б) при  $|M_p| = 36$  и аналитическим решением (в)

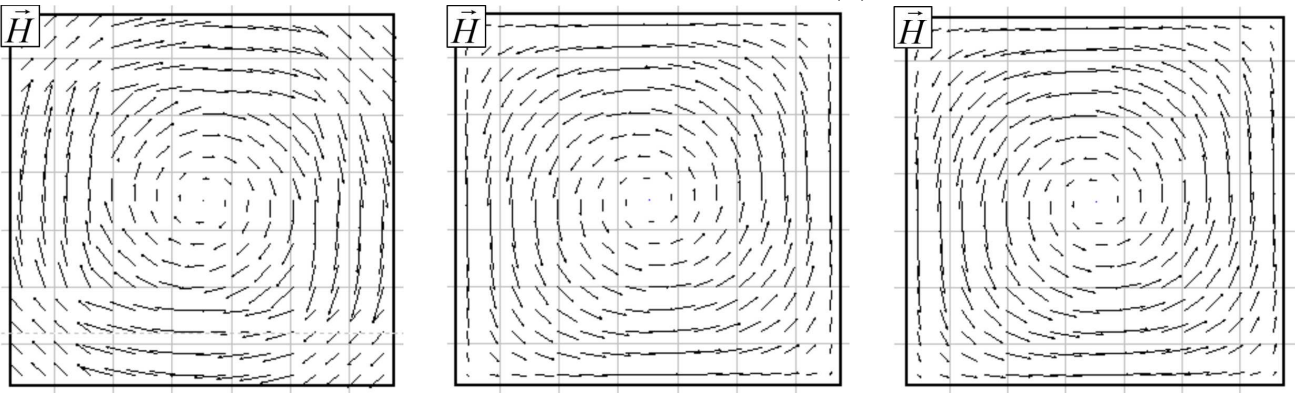


Рис. 5. Распределение тангенциальной составляющей  $\vec{H}$  поля  $TE_{11}$  в раскрыве прямоугольного волновода, рассчитанное векторным МКЭ (а), векторным БМ (б) при  $|M_p| = 25$  и аналитическим решением (в)

Определение БК в (11)–(13) БМ основано на решении задач прямого и обратного конформных отображений  $\Omega$  на каноническую область (круга в  $\mathbb{R}^2$  и шара в  $\mathbb{R}^3$ ).

**В третьей главе** на основе теории функции комплексного переменного разработан модифицированный метод последовательных конформных отображений, позволяющий выполнить строгое решение задачи обратного конформного отображения многоугольника на единичный круг. Сформированы методы прямого и обратного конформных отображений многоугольников на каноническую область, заданных в  $\mathbb{R}^3$ .

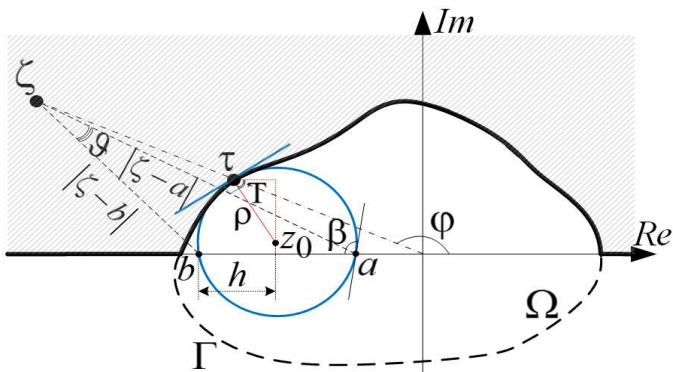


Рис. 6. Отображение  $\text{Im} \zeta > 0$  с выброшенным сегментом

Суть модифицированного метода последовательных конформных отображений  $\Omega$  на единичный круг заключается в следующем. С использованием дробно-линейного преобразования  $\zeta = i \frac{R+z}{R-z}$  точки  $z \in \Omega$  переводятся на верхнюю полуплоскость  $\text{Im} \zeta > 0$  с вырезанными круговыми луночками ( $R$  – минимальный радиус круга  $B_R$  при  $\Omega \subset B_R$ ). Затем для полученного отображения применяется последова-

тельность конформных отображений при добавлении выброшенных сегментов в  $\text{Im } \zeta > 0$  (рис. 6).

**Теорема 7.** Конформное отображение  $\text{Im } \zeta > 0$  с выброшенным сегментом, образованным пересечением полуплоскости с произвольной односвязной областью  $\Omega$  с гладкой границей  $\Gamma$ , на  $\text{Im } \zeta > 0$  при условии  $\exists a(\varphi), b(\varphi)$  для  $\forall \varphi \in [0; \pi]$  может быть осуществлено обобщенной функцией Жуковского вида  $\varpi(\zeta) = S_3(S_2(S_1(\zeta)))$  при

$$S_1(\zeta) = [\zeta - a(\varphi)] [\zeta - b(\varphi)]^{-1}; S_2(\zeta) = \zeta^{\gamma(\varphi)}; \quad (21)$$

$$S_3(\zeta) = 0, 5\gamma(\varphi) [a(\varphi) - b(\varphi)] (1 + \zeta) / (1 - \zeta) \text{ и нормировке } \varpi'(\infty) = 1,$$

где  $\varphi = \arg(\zeta)$ ;  $a(\varphi), b(\varphi)$  — точки пересечения действительной оси с соприкасающейся окружностью;  $\gamma(\varphi) = \pi / (\pi - \beta(\varphi))$ ;  $\beta(\varphi)$  — угол, образованный касательной к соприкасающейся окружности в точке ее пересечения  $a(\varphi)$  с действительной осью (рис. 6).

Соприкасающаяся окружность формируется границей выброшенного из полуплоскости сегмента односвязной области в окрестности точки  $\tau \in \Gamma$  при  $\arg(\zeta) = \arg(\tau) = \varphi$ .

Для описания изометрий в  $\mathbb{R}^3$  при решении задач конформного отображения с учетом известного обобщения условий Коши—Римана в теории кватернионов использована  $\mathbb{H}$  алгебра (кватернион  $q \in \mathbb{H}$ , где  $q = q_0 + i_1q_1 + i_2q_2 + i_3q_3$ ;  $i_1, i_2, i_3$  — мнимые единицы). С целью формирования аналогичных теории функции комплексного переменного решений по определению конформных отображений в  $\mathbb{H}$  заданы следующие методы для регулярной кватернион-функции: аналитического продолжения, разложения в обобщенные ряды Тейлора и Лорана, определения вычета, разложения мероморфной кватернион-функции. Односвязная область  $\Omega \subset \mathbb{H}$  с кусочно-линейной границей определена следующим образом.

Многогранник  $\Omega$  построен в  $\text{Im } \mathbb{H}$  с геометрическим центром в начале координат и задан последовательностью из  $N$  неповторяющихся точек (вершин)  $P_1, P_2, \dots, P_N \in \text{Im } \mathbb{H}$ ;  $M$  ребер  $e_1, e_2, \dots, e_M$ , каждое  $m$ -е ( $m = \overline{1, M}$ ) из которых представлено парой вершин  $e_m = \{P_n, P_{n'}\}$  ( $n, n' \in \{1, N\}; n \neq n'$ );  $K$  граней  $E_1, E_2, \dots, E_K$ , каждая  $k$ -я ( $k = \overline{1, K}$ ) из которых задана множеством ребер  $E_k = \{e_{m_1}^k, e_{m_2}^k, \dots, e_{m_k}^k\}$  ( $e_l^k \in \{e_1, \dots, e_M\}, k = \overline{1, K}, l = \overline{1, m_k}; e_l^k \neq e_{l'}^k, k = \overline{1, K}, l \neq l' \in \{1, m_k\}$ ) таких, что соседняя пара  $(e_l^k, e_{l+1}^k)$ ,  $l = \overline{1, m_k - 1}$  и пара  $(e_{m_k}^k, e_1^k)$  содержат общую вершину. Обозначим через  $\mathfrak{B}_n$   $n$ -й многогранный угол, определенный для  $\Omega$  набором ребер  $\{P_n, P_{n_1}\}, \{P_n, P_{n_2}\}, \dots, \{P_n, P_{n_T}\}$ , содержащих вершину  $P_n$  ( $n_1, n_2, \dots, n_T \in \{1, N\}; n_t \neq n_{t'}; \forall t, t' = \overline{1, T}$ ). Через  $\gamma_m$  ( $m = \overline{1, M}$ ) обозначим  $m$ -й двухгранный угол  $\Omega$ , заданный парой граней  $E_{k_1}^m, E_{k_2}^m \in \{E_1, E_2, \dots, E_K\}$  с общим ребром  $e_m$ .

С учетом введенных обозначений, разработанных методов разложения кватернион-функций в степенные ряды и теоремы Лиувилля найдены прямое и обратное простейшие конформные отображения: шара  $B_R$  на верхнее полупространство  $\text{Im } \mathbb{H}^+ = \{(q_1, q_2, q_3); q_3 > 0\}$ ;  $\text{Im } \mathbb{H}^+$  с выброшенным сегментом шара на  $\gamma_m$ ;  $\gamma_m$  на  $\text{Im } \mathbb{H}^+$ ;  $\mathfrak{B}_n$  на  $\text{Im } \mathbb{H}^+$ .

Полученные результаты позволили перейти к непосредственному решению задач прямого и обратного конформных отображений  $\Omega \subset \mathbb{H}$  (рис. 7).

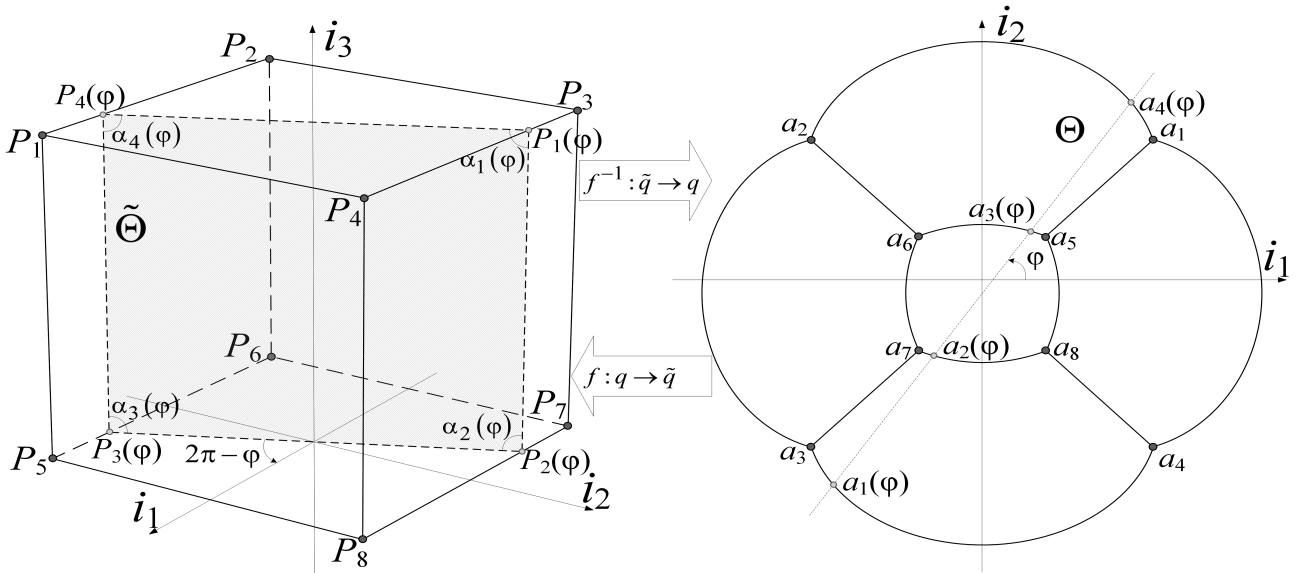


Рис. 7. Пример прямого и обратного конформных отображений куба

**Теорема 8.** Если функция  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  реализует конформное отображение  $\text{Im } \mathbb{H}^+$  на внутренность ограниченного многогранника  $\Omega$  при известных ребрах  $\tilde{e}_m$  плоскости  $i_1 i_2$  в  $\text{Im } \mathbb{H}^+$ , соответствующих ребрам  $e_m$  этого многогранника, то  $f(q)$  для  $q = R[(i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \sin \theta + i_3 \cos \theta]$  представляется соотношением

$$f(q) = \left| \tilde{\xi} \right| \left[ (i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \cos \tilde{\theta} + i_3 \sin \tilde{\theta} \right], \quad \tilde{\theta} = \arg(\tilde{\xi}),$$

$$\tilde{\xi} = C_0 \int_0^{R \cdot e^{i(0,5\pi - \theta)}} \left[ \prod_{n=1}^{N(\varphi)} (1 - a_n(\varphi)) \alpha_n(\varphi) / \pi - 1 \right] d\tau + C_1, \quad (22)$$

где  $C_0, C_1$  — некоторые комплексные постоянные.

В выражении (22)  $N(\varphi)$  — число точек  $a_n(\varphi)$  пересечения  $\tilde{e}_m$  с секущей плоскостью  $\Theta$ , полученной путем поворота от  $i_1 i_3$  на угол  $\varphi$ ;  $a_n(\varphi)$  — точки действительной оси ( $-\infty < a_1(\varphi) < \dots < a_{N(\varphi)}(\varphi) < \infty$ ) комплексной плоскости  $\Theta$ , соответствующие вершинам  $P_n(\varphi)$  многоугольника  $\Delta(\varphi)$ , образованного сечением  $\Omega$  плоскостью  $\tilde{\Theta}$  (см. рис. 7);  $\alpha_n(\varphi)$  — внутренние углы  $\Delta(\varphi)$  при  $P_n(\varphi)$ , равные по величине соответствующим двухгранным углам  $\Omega$ .

Решение обратной задачи выполнено по аналогии с  $\mathbb{R}^2$  (см. рис. 6) следующим образом. Используя дробно-линейное преобразование  $\zeta = g'_1(q/R)$  ( $R$  — минимальный радиус сферы, содержащей в себе все вершины  $P_j$  многогранника  $\Omega$ ;  $g'_1(q) = (i_1 q - i_2)^{-1} (i_2 q - i_1)$  — функция обратного конформного отображения  $\text{Im } \mathbb{H}^+$  на единичный шар), отобразим внутренность  $\Omega$  на  $\text{Im } \mathbb{H}^+$  с выброшенными сегментами шара. Для последующего отображения полученной области на  $\text{Im } \mathbb{H}^+$  применим последовательность отображений, сводящихся к следующей модельной задаче.

**Теорема 9.** Конформное отображение  $\text{Im } \mathbb{H}^+$  с выброшенной областью, образованной пересечением полупространства с произвольной односвязной областью с гладкой поверхностью  $\Gamma$ , на  $\text{Im } \mathbb{H}^+$  осуществляется для  $q = R[(i_1 \times$

$\times \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \sin \theta + i_3 \cos \theta]$  функцией

$$\varpi(q) = (a - b) \gamma \left| \tilde{\xi} \right| \left[ (i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi) \cos \tilde{\theta} + i_3 \sin \tilde{\theta} \right] \quad (23)$$

с нормировкой  $\varpi(\infty) = \infty$ ;  $\varpi'(\infty) = 1$ ,

где  $\tilde{\theta} = \arg(\tilde{\xi})$ ;  $\tilde{\xi} = S_3(S_2(S_1(R \cdot e^{i(0,5\pi-\theta)})))$ ;  $S_1(\xi) = [\xi - a(\theta)]/[\xi - b(\theta)]$ ;  $S_2(\xi) = \xi^{\gamma(\theta)}$ ;  $S_3(\xi) = (1 + \xi)/(1 - \xi)$ .

В выражении (23)  $a(\theta)$ ,  $b(\theta)$  — точки пересечения с действительной осью комплексной плоскости  $\Theta$  (см. рис. 7) с соприкасающейся с границей выброшенной из полуплоскости сегмента односвязной области окружностью в окрестности точки  $\tau \in \Theta$ , где  $\arg(\tau) = 0,5\pi - \theta$ ;  $\gamma(\theta) = \pi/[\pi - \beta(\theta)]$ ;  $\beta(\theta)$  — угол, образованный соприкасающейся окружностью в  $a(\theta)$  (рис. 8).

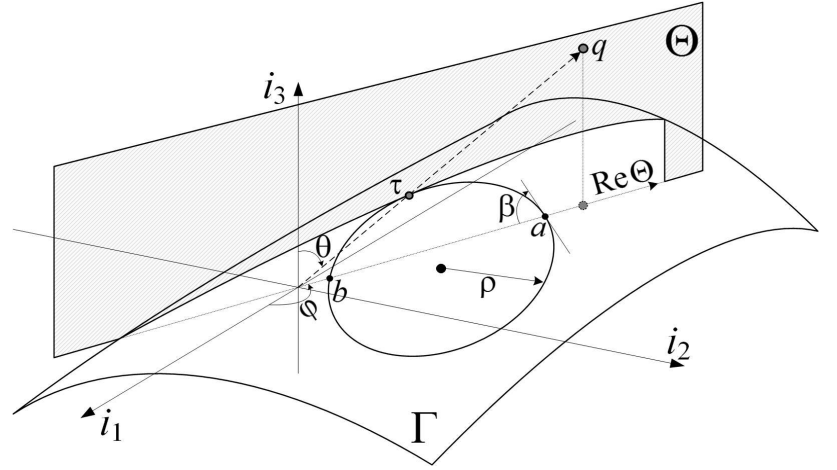


Рис. 8. Пример конформного отображения  $\text{Im}\mathbb{H}^+$  с выброшенной областью с гладкой поверхностью  $\Gamma$

Полученные в третьей главе результаты составляют совокупность методов, необходимых для решения задач конформного отображения  $\Omega$  в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$  при определении БК Пуассона—Римана.

**Четвертая глава** посвящена математическому моделированию АМЛЗА (решению (1а), (1б), (1г) — формирование  $P_2^{(m)}$ :  $\vec{E}^{(s)}(t) \rightarrow \vec{E}_m^{(o)}(t)$ ), в ходе которого определены: модификация токового метода расчета характеристик направленности в приближениях Кирхгофа—Котлера и методов физической оптики, БМ в решении сингулярных интегральных уравнений (СИУ) электродинамической теории АМЛЗА, БМ в задаче управления формой отражающей поверхности АМЛЗА.

Модифицированный токовый метод является развитием известных аналитических методов решения электродинамических задач теории ЗА (апертурного, токового и токового с учетом геометрической теории дифракции (ГТД)) в направлении учета эффектов дифракции и переотражения. Выходные данные — значения напряженностей электрического  $\vec{E}_Q$  и магнитного  $\vec{H}_Q$  полей в произвольной точке наблюдения  $Q$ . Входными данными являются геометрия АС,  $\lambda$  — длина волны, положение  $Q$ ,  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  — электрические и магнитные параметры среды. Допущения метода: 1) тангенциальные составляющие ЭМП при отражении от поверхности рефлектора неизменны; 2) плотность поверхностного тока, индуцируемого рефлектором, определяется суперпозицией токов равномерной и неравномерной частями поверхности отражателя; 3) радиус кривизны поверхности отражателя велик в сравнении с  $\lambda$ , а дифракционное поле формируется кромкой рефлектора.

В разработанной модификации токового метода оценка напряженности поля АМЛЗА в  $Q$  задается суммой:

$$\vec{E}_Q = \sum_{m=1}^M \left[ \vec{E}_{m,Q}^{(0)} + \vec{E}_{m,Q}^{(1)} + \vec{E}'_{m,Q} \right], \quad (24)$$

где  $\vec{E}_{m,Q}^{(0)}$  и  $\vec{E}_{m,Q}^{(1)}$  — напряженности электрических полей, создаваемых равномерной и неравномерной частями токов отражающей поверхности от  $m$ -го излучателя;  $\vec{E}'_{m,Q}$  — напряженность электрического поля, реализуемого  $m$ -м излучателем в направлении на  $Q$  с учетом эффектов переотражения. Модификация заключается в учете в выражении (24) при оценке  $\vec{E}_Q$  параметров  $\vec{E}_{m,Q}^{(1)}$ ,  $\vec{E}'_{m,Q}$  и правил их определения. Напряженность  $\vec{E}_{m,Q}^{(1)}$  задается соотношением

$$\vec{E}_{m,Q}^{(1)} = \iint_S \left[ -\vec{n}_0 \vec{E}_{m,S} \nabla \Psi - i\omega \epsilon_a \vec{n}_0 \times \vec{H}_{m,S} \nabla (\nabla \Psi) \right] dS, \quad (25)$$

где  $\vec{n}_0$  — орт вектора нормали в точке интегрирования на поверхности  $S$  рефлектора;  $\vec{E}_{m,S}$  и  $\vec{H}_{m,S}$  векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно на  $S$ , формируемые  $m$ -м излучателем с учетом эффектов переотражения;  $\Psi = \frac{e^{-i\kappa R}}{4\pi R}$  — функция Грина (фазовая функция источника);  $R$  — расстояние от  $Q$  до текущей точки на  $S$ ;  $\nabla \Psi$  и  $\nabla (\nabla \Psi)$  определяют соответственно вектор градиента и матрицу Гессе  $\mathbf{J}$  функции  $\Psi$ .

Эффекты переотражения для излучателей учитываются при решении следующих модельных задач.

**Теорема 10.** *Если антенная система содержит один рефлектор и излучатель, то в приближении Кирхгофа–Котлера  $\vec{E}'_{1,Q}$  с учетом эффектов переотражения определяется соотношением*

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{1,Q} = \iint_{\Omega} \left[ -i\omega \mu_a \Psi \vec{s}_0 \times \left( \vec{H}_{\text{и}} + h \sum_{n=1}^N \vec{H}_3^{(n)} \right) + \vec{s}_0 \times \left( \vec{E}_{\text{и}} - \right. \right. \\ \left. \left. - h \sum_{n=1}^N \vec{E}_3^{(n)} \right) \times \nabla \Psi + \vec{s}_0 \left( \vec{E}_{\text{и}} - h \sum_{n=1}^N \vec{E}_3^{(n)} \right) \nabla \Psi \right] d\Omega, \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (26)$$

В выражении (26)  $\vec{s}_0$  — орт вектора нормали к плоскости  $\Omega$  раскрыва излучателя;  $\bar{\Psi} = \frac{e^{i\kappa R}}{4\pi R}$  — фазовая функция источника на прием для  $Q$ ;  $h = e^{2i\kappa R}$ ;  $\vec{E}_{\text{и}}$ ,  $\vec{H}_{\text{и}}$  — распределение ЭМП в  $\Omega$ ;  $\vec{E}_3^{(n)}$ ,  $\vec{H}_3^{(n)}$  — переотраженное от рефлектора ЭМП на  $n$ -м акте:

$$\begin{aligned} \vec{E}_3^{(n)} = \iint_S \left[ -i\omega \mu_a \bar{\Psi}' \vec{n}_0 \times \vec{H}_0^{(n-1)} + 2\vec{n}_0 \vec{E}_0^{(n-1)} \nabla \bar{\Psi}' + \right. \\ \left. + i\omega \epsilon_a \vec{n}_0 \times \vec{H}_0^{(n-1)} \nabla (\nabla \bar{\Psi}') \right] dS; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\vec{H}_3^{(n)} = \iint_S \left[ \vec{n}_0 \times \vec{H}_0^{(n-1)} \times \nabla \bar{\Psi}' \right] dS,$$

где  $\vec{E}_0^{(n-1)}$ ,  $\vec{H}_0^{(n-1)}$  — ЭМП, формируемое излучателем на отражающей поверхности рефлектора с учетом  $n - 1$  актов переотражения.

**Теорема 11.** *Если антенная система содержит два излучателя, то в приближении Кирхгофа—Котлера  $\vec{E}'_{1,Q}^{(o)}$  с учетом эффектов переотражения определяется соотношением*

$$\vec{E}'_{1,Q}^{(o)} = \iint_{\Omega_1} \left[ -i\omega\mu_a\Psi\vec{s}_1^{(o)} \times \left( \vec{H}_{1,и} + h \sum_{n=1}^N \vec{H}_{2,o}^{(n)} \right) + \vec{s}_1^{(o)} \times \left( \vec{E}_{1,и} - h \sum_{n=1}^N \vec{E}_{2,o}^{(n)} \right) \times \nabla\Psi + \vec{s}_1^{(o)} \left( \vec{E}_{1,и} - h \sum_{n=1}^N \vec{E}_{2,o}^{(n)} \right) \nabla\Psi \right] d\Omega, \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (28)$$

В выражении (28)  $\vec{E}_{1,и}$ ,  $\vec{H}_{1,и}$  — задают распределение ЭМП в раскрыве первого излучателя  $\Omega_1$ ;  $\vec{E}_{2,o}^{(n)}$ ,  $\vec{H}_{2,o}^{(n)}$  — ЭМП, формируемое вторым излучателем в  $\Omega_1$  с учетом  $n$  актов переотражения:

$$\vec{E}_{2,o}^{(n)} = \iint_{\Omega_2} \left[ -i\omega\varepsilon_a\Psi'\vec{s}_2^{(o)} \times \left( \vec{H}_{2,и} + h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_{1,o}^{(n')} \right) + \vec{s}_2^{(o)} \times \left( \vec{E}_{2,и} - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_{1,o}^{(n')} \right) \times \nabla\Psi' + \vec{s}_2^{(o)} \left( \vec{E}_{2,и} - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_{1,o}^{(n')} \right) \nabla\Psi' \right] d\Omega; \quad (29)$$

$$\vec{H}_{2,o}^{(n)} = \iint_{\Omega_2} \left[ i\omega\varepsilon_a\Psi'\vec{s}_2^{(o)} \times \left( \vec{E}_{2,и} + h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{E}_{1,o}^{(n')} \right) + \vec{s}_2^{(o)} \times \left( \vec{H}_{2,и} - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_{1,o}^{(n')} \right) \times \nabla\Psi' + \vec{s}_2^{(o)} \left( \vec{H}_{2,и} - h \sum_{n'=1}^{n-1} \vec{H}_{1,o}^{(n')} \right) \nabla\Psi' \right] d\Omega; \quad (30)$$

$\Psi'$  и  $\bar{\Psi}'$  — фазовые функции источника на передачу и прием для некоторой точки на раскрыве  $\Omega_2$  второго излучателя;  $\vec{E}_{1,o}^{(n)}$ ,  $\vec{H}_{1,o}^{(n)}$  — ЭМП, формируемое первым излучателем в  $\Omega_2$  с учетом  $n - 1$  актов переотражения.

Для заданных решений (26), (28) при асимптотической оценке  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{R^{2n}}\right)$  определены рекомендации по учету  $n$  актов переотражения с целью обеспечения компромисса между требуемой адекватностью и вычислительной сложностью решения (24).

Обоснование достоверности модификации токового метода выполнено экспериментально с использованием САПР Ansoft HFSS при сравнении отклонения получаемых значений ДН по напряженности поля (рис. 9). Расчет характеристик направленности (эталон при сравнении) в Ansoft HFSS выполнен МКЭ. Полученные результаты определили высокую степень точности и достоверности предложенной модификации (особенно в области дальнего бокового излучения, см. рис. 9 для  $\theta > 16^\circ$ ), порядок средней относительной ошибки в секторе полного телесного угла по напряженности поля 7,55% (для известных 17,97%).

Разработанная модификация токового метода с применением обратного преобразования Фурье позволяет с требуемой точностью определить распределение мгновенных составляющих ЭМП в раскрыве  $\Omega_m$   $m$ -го излучателя в режиме

приема в разработанной физико-математической модели управления АМЛЗА (задает функцию  $P_2^{(m)}$ ).

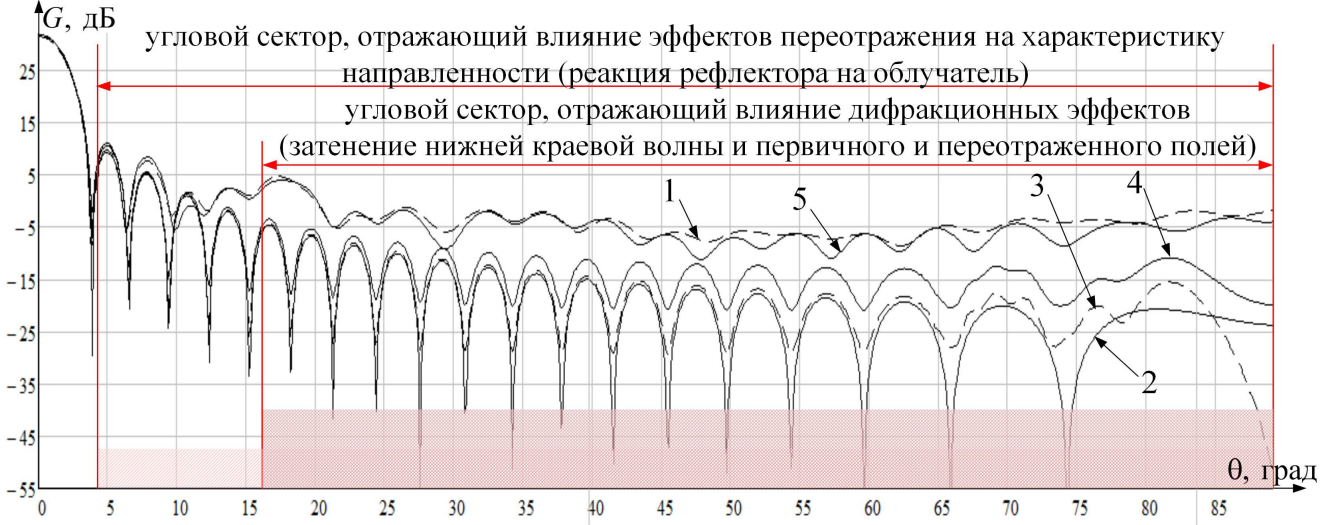


Рис. 9. Пример сравнения эталона (1) с расчетами ДН по методам: апертурному (2); токовому (3); токовому с учетом ГТД (4); модифицированному токовому (5)

В ряде задач анализа многоэлементных АМЛЗА предложенное асимптотическое решение (24), даже при учете одного акта переотражения, приводит к существенному росту вычислительных затрат. Для их снижения определена реализация БМ в решении системы интегральных уравнений магнитного поля электродинамической теории АМЛЗА (формируется из работ Ильинского А. С. по заданным постановкам задач дифракции на ограниченном экране и отверстии в плоском экране с учетом граничных условий и условий излучения на бесконечности задачи (1)):

$$\begin{aligned} \vec{n}_{m'}^0 \times \sum_{k=1}^M \vec{H}_{km'}^{\text{ind}} &= \sum_{k=1}^{M'} \frac{1}{4\pi i \varkappa} \left[ \nabla \iint_{S_k} \Psi (\nabla \cdot \vec{J}_k^{\text{M}}) dS + \iint_{S_k} \varkappa^2 \vec{J}_k^{\text{M}} \Psi dS \right] - \\ &- \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i \omega \mu_a^j} \left[ \nabla \iint_{\Omega_k} \Psi_j (\nabla \cdot \vec{J}_k^{\text{M}}) d\Omega + \iint_{\Omega_k} \varkappa_j^2 \vec{J}_k^{\text{M}} \Psi_j d\Omega \right]; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \vec{s}_m^{(o)} \times \sum_{k=1}^M \vec{H}_{km}^{\text{ind}} &= \sum_{k=1}^{M'} \frac{1}{4\pi i \varkappa} \left[ \nabla \iint_{S_k} \Psi (\nabla \cdot \vec{J}_k^{\text{M}}) dS + \iint_{S_k} \varkappa^2 \vec{J}_k^{\text{M}} \Psi dS \right] - \\ &- \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\pi i \omega \mu_a^j} \left[ \nabla \iint_{\Omega_k} \Psi_j (\nabla \cdot \vec{J}_k^{\text{M}}) d\Omega + \iint_{\Omega_k} \varkappa_j^2 \vec{J}_k^{\text{M}} \Psi_j d\Omega \right], \end{aligned}$$

где  $M'$  — число отражающих поверхностей  $S_{m'}$  ( $m' = \overline{1, M'}$ ) с определенными орт-векторами нормалей  $\vec{n}_{m'}^0$ ;  $\vec{J}^{\text{M}}$  — плотность магнитного тока на соответствующей поверхности  $S_{m'}$  или  $\Omega_m$  ( $m = \overline{1, M}$ );  $\vec{H}_{km'}^{\text{ind}}$  —  $\vec{H}^{\text{ind}}$  ( $k$ -й излучатель, где  $k = \overline{1, M}$ ), наведенное на  $S_{m'}$ ;  $\vec{H}_{km}^{\text{ind}}$  —  $\vec{H}^{\text{ind}}$ , наведенное на  $\Omega_m$ ;  $\vec{H}^{\text{ind}}$  — напряженность магнитного поля источника, наводимого на соответствующую поверхность;  $\Psi_j = \frac{e^{-i\varkappa_j R}}{R}$  ( $j = \{1, 2\}$ );  $\varkappa = \varkappa_1$ ,  $\varepsilon_a = \varepsilon_a^1$ ,  $\mu_a = \mu_a^1$  в  $\Omega_m^+$  (внешняя



область  $\Omega_m$ );  $\varkappa = \varkappa_2$ ,  $\varepsilon_a = \varepsilon_a^2$ ,  $\mu_a = \mu_a^2$  в  $\Omega_m^-$  (внутренняя область  $\Omega_m$ ). Постановка задачи анализа АМЛЗА может быть сведена к решению системы интегральных уравнений электрического поля по  $\vec{J}$  — плотность электрического тока на соответствующей поверхности  $S_{m'}$  или  $\Omega_m$ .

Решение задачи (31) выполнено численно БМ при сведении системы СИУ к системе линейных уравнений с применением следующей аппроксимации  $\vec{J}_k$  и  $\vec{J}_k^M$  относительно соответствующей  $k$ -й поверхности  $\mathcal{S}_k$  (или  $S_k$ , или  $\Omega_k$ ) в  $N_k$ -мерной барицентрической системе координат  $\zeta_1^k, \zeta_2^k, \dots, \zeta_{N_k}^k$

**Теорема 12.** *Функции  $\vec{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj} \vec{\gamma}_j^{(k)}(P)$  и  $\vec{J}_k^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \tilde{J}_{kj}^M \times \vec{\chi}_j^{(k)}(P)$ , задающие аппроксимацию порядка  $p \in \mathbb{N}$  плотности поверхностных электрического  $\vec{J}_k$  и магнитного  $\vec{J}_k^M$  токов в интегральных уравнениях вида (31) при*

$$\vec{\gamma}_j^{(k)}(P) = \vec{n}_k^0(P) \times \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^{N_k} [\hat{\alpha}_{jn}^{(k)}(P) \vec{\Theta}_n^{(k)}(P)]; \quad \vec{\chi}_j^{(k)}(P) = \vec{n}_k^0(P) \times \vec{\gamma}_j^{(k)}(P), \quad (32)$$

являются аппроксимацией Рунца.

В заданных аппроксимациях  $\tilde{J}_{kj}$  и  $\tilde{J}_{kj}^M$  — коэффициенты в  $j$ -х узловых точках электрического  $\vec{J}_k$  и магнитного  $\vec{J}_k^M$  поверхностных токов на  $\mathcal{S}_k$ .

В выражении (32)  $\vec{n}_k^0(P)$  — орт-вектор нормали в  $P \in \mathcal{S}_k$ ;  $\hat{\alpha}_{jn}^{(k)}$  и  $\vec{\Theta}_n^{(k)}(P)$  — полином (19) и краевые базисные векторные функции (20) соответственно относительно  $n$ -й вершины многоугольника, задающего раскрыв  $\mathcal{S}_k$ .

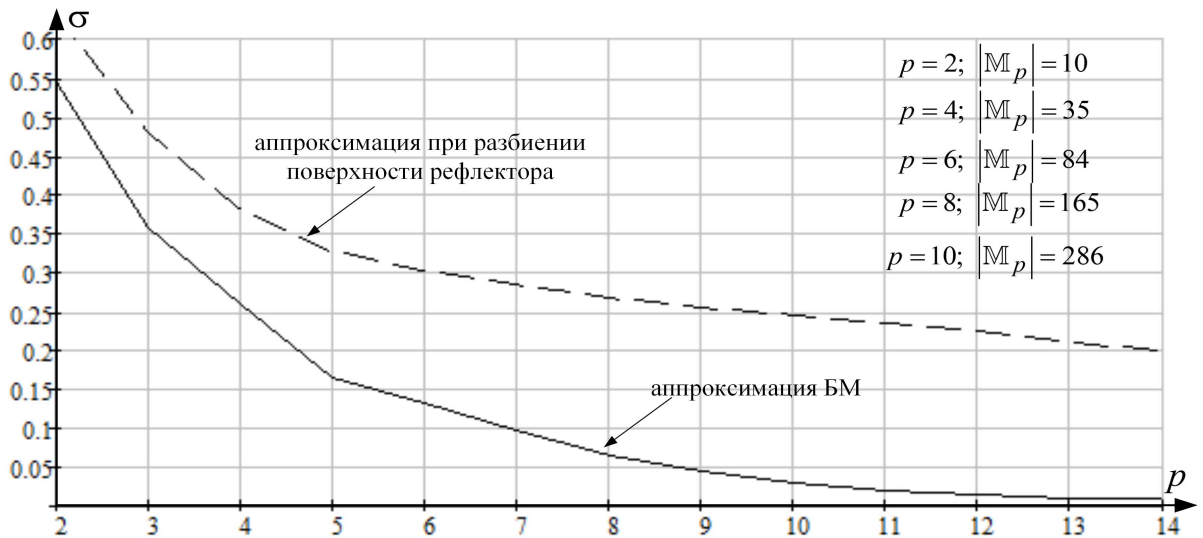


Рис. 10. Зависимость отклонения  $\Delta$  от порядка аппроксимации  $p$

Сравнительная оценка предпочтительности применения предложенной аппроксимации функциями (32) с известными проведена экспериментально. На рисунке 10 представлена зависимость среднеквадратического отклонения  $\Delta = \left[ \iint_{\Omega_1'} \left| \vec{J}(x, y) - \vec{J}_p(x, y) \right|^2 dx dy \right]^{1/2}$  между реальным распределением плотности

электрического тока  $\vec{J}_p(x, y)$  на поверхности рефлектора и его рассчитываемым значением  $\vec{J}(x, y)$  для различного  $p$  при сравнении разработанного решения с известными методами.

Из полученных результатов (рис. 10) сделан вывод о предпочтительности использования БМ в численном решении систем СИУ вида (31). Точность БМ в сравнении с существующими методами в среднем увеличивается в 3,32 раза при условии соизмеримости вычислительных затрат.

Решение задачи управления формой отражающей поверхности АМЛЗА сформировано для следующих представлений. Рефлектор  $S$  мембранный, а его раскрыв задан многоугольником  $\Omega'$ . Поверхность  $S$  параметризована функцией  $Z(x, y, t)$  прогиба в момент времени  $t$ . Деформация  $S$  задана конечным числом управляющих воздействий  $K$  деформирующих стержней  $g(x, y, t) = \sum_{k=1}^K Z_k^D(t) \delta(x - X_k^D) \delta(y - Y_k^D)$ , где  $Z_k^D(t)$  — положение  $k$ -го деформирующего стержня относительно оси  $OZ$  в момент времени  $t$ ;  $(X_k^D, Y_k^D) \in \Omega'$  — координаты  $k$ -го деформирующего стержня.

Ускоренное движение поверхности  $Z(x, y, t)$  для вязкого трения при вариации  $Z_k^D(t)$  задано известным бигармоническим уравнением теории изгиба пластин с учетом  $Z|_{(x,y) \in \partial\Omega'} = 0$ ;  $\frac{\partial Z}{\partial x}|_{(x,y) \in \partial\Omega'} = 0$ ;  $\frac{\partial Z}{\partial y}|_{(x,y) \in \partial\Omega'} = 0$ .

Для заданных представлений решение задачи выполнено с учетом принципа максимума Понтрягина в приближении БМ при сведении исходной краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием аппроксимации  $Z(x, y, t) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} Z_j^0(t) \alpha_j(x, y)$ , где  $\alpha_j(x, y)$  — полином (16);

$(x, y) \in \Omega'$ ;  $Z_j^0(t)$  — коэффициенты аппроксимации в  $j$ -х узловых точках в момент времени  $t$ .

Предпочтительность применения БМ проверена экспериментально при решении задачи управления формой рефлектора. На рисунке 11,а представлена зависимость  $\Delta(t) = \left[ \iint_{\Omega'} (Z(x, y, t) - Z_{\text{тр}}(x, y))^2 dx dy \right]^{1/2}$  — отклонения ре-

лизуемой формы рефлектора от требуемой  $Z_{\text{тр}}(x, y)$  на интервале управления  $[t_0, t_1]$  при фиксированном значении порядка аппроксимации  $p = 4$  для БМ и МКЭ. На рисунке 11,б представлена зависимость  $\Delta(t_1)$  от  $p$  для БМ и МКЭ.

Из результатов моделирования следует, что БМ позволяет с соизмеримыми вычислительными затратами получить наиболее точное (рис. 11) решение. Низкая точность МКЭ обусловлена тем, что разбиение  $\Omega'$  малым числом треугольных элементов приводит к значительным ошибкам вычисления (при оценке прогиба рефлектора МКЭ визуально видно разделение отражателя на элементы, см. рис. 11,а) на смежных ребрах между отдельными треугольниками, расположенными внутри анализируемой области. Увеличение точности МКЭ требует разбиения  $\Omega'$  на как можно большее число треугольных элементов. Последнее для решения задачи управления формой рефлектора АМЛЗА при решении бигармонического дифференциального уравнения приводит к существенному росту вычислительных и емкостных затрат МКЭ в сравнении с барицентрическим методом.

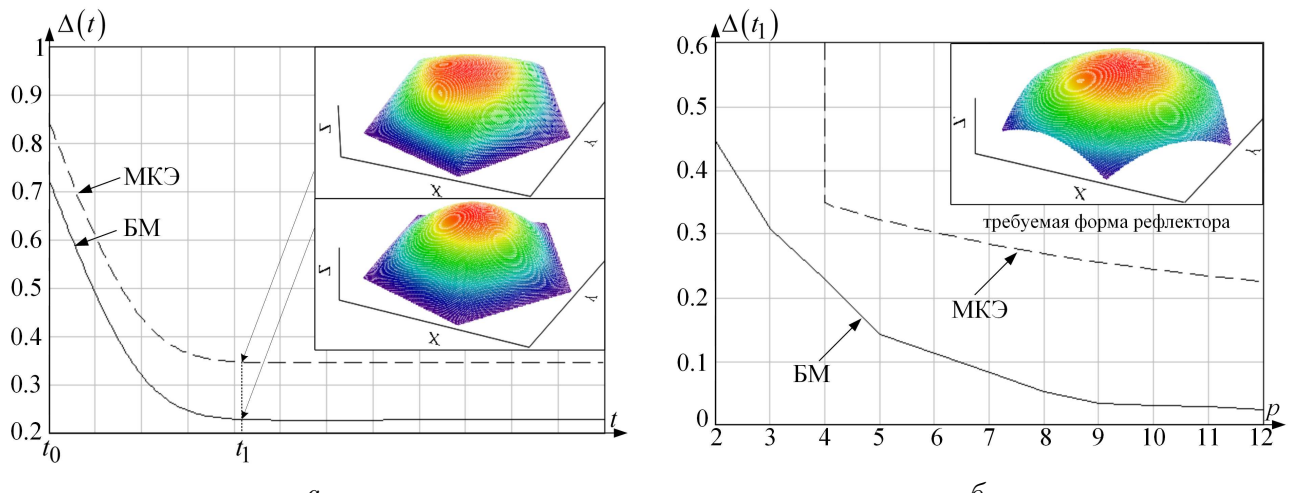


Рис. 11. Отклонение реализуемой формы рефлектора от требуемой:  
*a* — на интервале времени управления для  $p = 4$ ; *б* —  $\Delta(t_1)$  от  $p$

Итоговая оценка достоверности разработанных методов математического моделирования выполнена с применением САПР Ansoft HFSS. По ее результатам определено, что: 1) БМ позволяет достигнуть приемлемой точности решения внутренних и внешних задач в приближении электродинамической теории АМЛЗА при  $D / |M_p| \leq \lambda$ , где  $D$  — диаметр апертуры анализируемой области; 2) применение модифицированного токового метода является предпочтительным с позиции вычислительных затрат по отношению к БМ при решении СИУ для анализа однозеркальных и двухзеркальных АМЛЗА с числом излучателей  $M \leq 10$ ; 3) для порядка точности  $10^{-2} \div 10^{-1}$  требуется, чтобы интерполяция раскрытых излучающих и отражающих элементов АС с применением БМ при решении СИУ была задана с учетом правила  $D / |M_p| = \lambda$ , а для БМ при решении задачи электродинамики в ограниченной расчетной области —  $D / |M_p| = 0,5\lambda$ .

**В пятой главе** на основе предложенной модификации гибридного генетического метода с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач поиска глобального экстремума многомерной многоэкстремальной функции разработаны алгоритмы синтеза и управления АМЛЗА. По результатам сформированных решений с учетом современных технологий параллельных вычислений разработан проблемно-ориентированный программный комплекс (ПК) для последующего анализа и тестирования эффективности полученных решений с применением ЭВМ.

Модификация гибридного генетического метода заключается в комбинации эволюционных методов оптимизации с методами локальной оптимизации и стохастического анализа. Такое объединение предполагает по выбранному методу локальной оптимизации использовать градиентное обучение всех особей-лидеров с предшествующей мутацией популяции с применением моделей прогнозирования авторегрессии — скользящего среднего заданного порядка и скрещивания с использованием метода параболической интерполяции.

Эффективность модификации метода проверена асимптотической оценкой сходимости в сравнении с известными решениями на ряде многоэкстремальных тестовых функций. Из полученных результатов сделан вывод о предпочтительности использования разработанной модификации метода, которая в сравнении с известными решениями позволяет в среднем сократить в 1,3 раза вычислительные затраты. Также определено, что рекомендуемым градиентным обуче-

нием является применение градиентных методов с сопряжением направления спуска и переменной метрикой.

С учетом сформированных алгоритмов определены основные этапы решения задачи адаптации (6)–(8):

1) максимально-правдоподобная оценка плотности потока энергии  $\vec{I}^{(m)}$  ( $\tau_{n+1}$ ) в раскрывах излучателей в дискретный момент времени  $\tau_{n+1}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

- в дискретные моменты времени  $\tau_v^n \in [\tau_n, \tau_{n+1}]$  измерение  $\vec{\xi}_{\tau_v^n}$  (3);
- для принятых отсчетов ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) вектора сигналов  $\vec{\xi}_{\tau_v^n}$  вычислить элементы, составляющие  $\vec{G}^{(1)}(\vec{\xi}, \vec{u}_n, \tau)$  и  $\mathbf{G}^{(2)}(\vec{\xi}, \vec{u}_n, \tau)$  ( $\vec{u}_n = \vec{u}(\tau_n)$ ) в (4);

– в анализируемый момент времени  $\tau_{n+1}$  по разработанным методам математического моделирования АМЛЗА рассчитать элементы матрицы  $\mathbf{Q}_m(\vec{u}_n)$ ;

– вычислить приближенные значения  $\vec{I}^{(m)}(\tau_{n+1})$  и  $\vec{\psi}^{(m)}(\tau_{n+1})$  при решении уравнений (7),(8) для момента времени  $\tau_{n+1}$  с использованием схем Рунге–Кутты с учетом выбранного числа отсчетов на интервале  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ ;

2) вычисление вектора управляющих воздействий  $\vec{u}_{n+1}$  для момента времени  $\tau_{n+1}$  при решении уравнения (6) для  $m = \overline{1, M}$  модифицированным гибридным генетическим методом с учетом оценки  $\vec{I}^{(m)}(\tau_{n+1})$  и  $\vec{\psi}^{(m)}(\tau_{n+1})$  на  $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ .

Для улучшения точности оценки  $\mathbf{G}^{(2)}(\vec{\xi}, \vec{u}, \tau) = \hat{\mathbf{D}}$  дисперсионно-ковариационной матрицы (ДКМ) на ограниченной выборке отсчетов ( $v = \overline{1, V}$ ) вектора сигналов  $\vec{\xi}_{\tau_v^n}$  определено следующее утверждение.

**Теорема 13.** Пусть  $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_v, \dots, \vec{\xi}_V \in \mathbb{C}$  есть конечная последовательность векторов размерности  $M$  случайных величин, распределенных по многомерному нормальному закону. Тогда максимально правдоподобная оценка ДКМ  $\hat{\mathbf{D}}$  полученной выборки объема  $V$  определяется отношением

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{2}{V(V-1)} \sum_{v=1}^V \left\{ (V+1-v) [\vec{\xi}_v - \vec{\xi}] \cdot [\vec{\xi}_v - \vec{\xi}]^T \right\}. \quad (33)$$

В выражении (33)  $\vec{\xi} = V^{-1} \sum_{v=1}^V \vec{\xi}_v$  – вектор средневыворочных значений наблюдаемого вектора случайных величин  $\vec{\xi}$ .

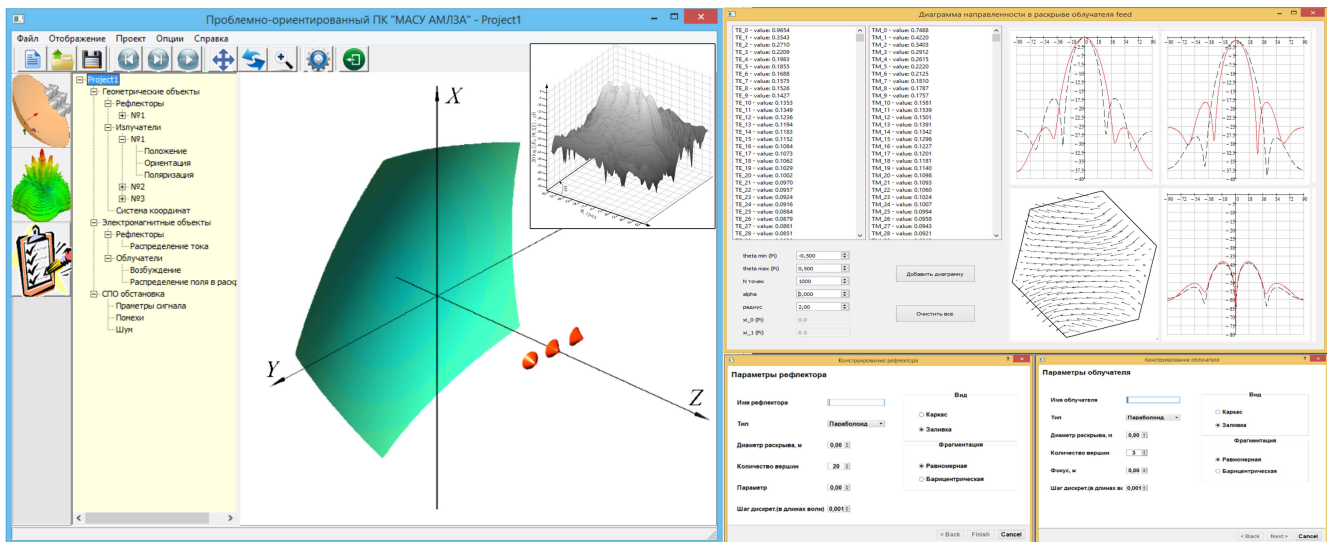


Рис. 12. Интерфейс ПК моделирования, анализа, синтеза и управления АМЛЗА

На основе сформированных решений разработан проблемно-ориентированный ПК (рис. 12), прошедший официальную регистрацию в Российском агентстве по патентам и товарным знакам. При разработке ПК активно применялись технологии, связанные с многопроцессорными системами. Распараллеливание вычислительных процессов в ПК производится при реализации процедур численного интегрирования и получении корреляционных оценок (см. рис. 13, модули с меткой CPU GPU). Указанные процедуры сводятся к суммированию элементов массива, заданного вектором (размерность 1), матрицей (размерность 2) и т. д. до размерности 4 (вычисление элементов матриц при решении СИУ (31)).

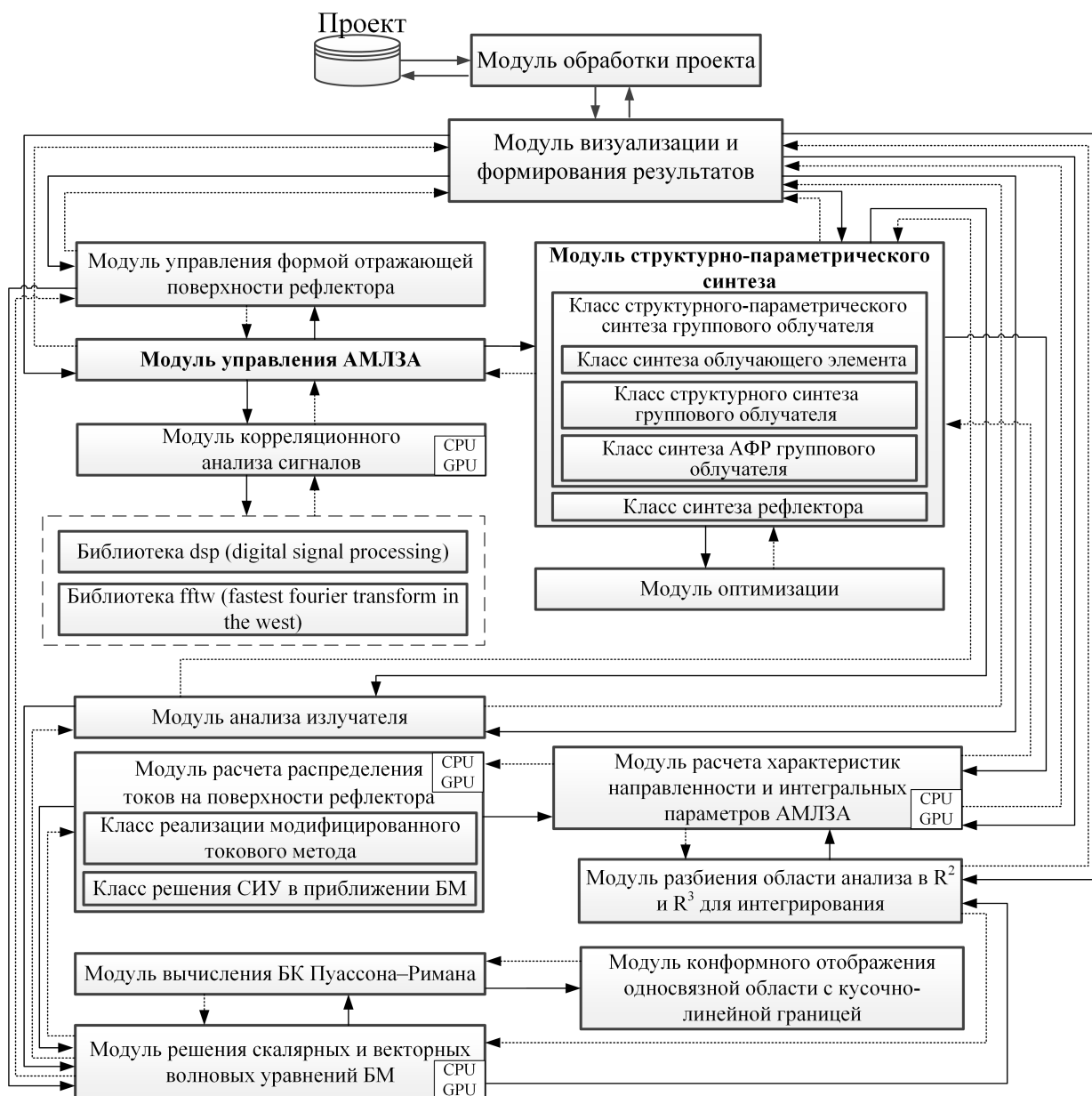


Рис. 13. Структурная схема ПК моделирования, анализа, синтеза и управления АМЛЗА

В зависимости от спецификации аппаратных средств параллельные вычисления реализованы на CPU и GPU. Параллельные вычисления на CPU реализованы с помощью C++ и применения библиотеки boost с использованием крупноблочного распараллеливания, в котором при суммировании элементов массива `Input` число потоков `N_potoc` ставится в соответствие числу логических ядер процессора (рис. 14).

**КЛАСС ПРОГРАММЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ.**

```

class cThread_Integration
{public: cThread_Integration(unsigned int& Start1, unsigned int& Stop1, std::vector< double >& Input1, double& sumReduction1)
:Start(Start1), Stop(Stop1), Input(Input1), sumReduction(sumReduction1) { }
void operator() () {sumReduction = 0.; for (int i = Start; i <= Stop; ++i){ sumReduction += Input[i];}}
private: unsigned int& Start; unsigned int& Stop; std::vector< double >& Input; double& sumReduction;};

```

**1. Инициализация**

```

1.1. Определить число процессоров
SYSTEM_INFO sysinfo; GetSystemInfo(&sysinfo); unsigned int N_potoc = std::min(sysinfo.dwNumberOfProcessors, Max_stream);

```

**1.2. Выделение в массиве N\_potoc участков**

```

unsigned int shag = size_array / N_potoc; std::vector< unsigned int > Start(N_potoc);
std::vector< unsigned int > Stop(N_potoc); std::vector< double > sumReduction(N_potoc);
for (unsigned int i = 0; i < N_potoc - 1; ++i) { Start[i] = i * shag; Stop[i] = (i + 1) * shag - 1;}
if (N_potoc != 1) {Start[N_potoc - 1] = Stop[N_potoc - 2] + 1; Stop[N_potoc - 1] = N - 1; }

```

**1.3. Создание потоков с учетом заданного класса программы вычислений**

```

std::vector< std::unique_ptr<cThread_Integration> > Tread_n(N_potoc);
std::vector< std::unique_ptr< boost::thread > > Thread(N_potoc);
for (unsigned int j = 0; j < N_potoc; ++j)
{ Tread_n[j].reset(new cThread_Integration(Start[j], Stop[j], Input, sumReduction[j]));
  Thread[j].reset(new boost::thread(std::ref(*Tread_n[j])));}

```

**2. Запуск вычислений на CPU**

```

2.1. Запуск потоков
for (t_count j = 0; j < N_potoc; ++j) {Thread[j]->join();}

```

```

2.2. Сложение итоговых результатов из выходов потоков
double finalSumCPU = 0.; for (int k = 0; k < N_potoc; ++k) {finalSumCPU += sumReduction[k]; }

```

**3. Вывод результата = finalSumCPU.**

Рис. 14. Схема суммирования при реализации на CPU

Параллельные вычисления на GPU реализованы на основе метода сдвигания с помощью C/C++ и OpenCL (рис. 15). Общий массив **Input** размера **size\_array** разбивается на логические блоки с учетом числа устройств **clDeviceCount** и рабочих групп **nWorkGroups** GPU таким образом, чтобы для **size = size\_array mod nWorkGroups** выполнялось **size = 0**. Если **size ≠ 0**, то на вход GPU подается **size\_array – size** первых элементов **Input**. Внутри рабочей группы суммирование выполняется с использованием локальной памяти, а синхронизация задается инструкцией **barrier(CLK\_LOCAL\_MEM\_FENCE)**. Результаты записываются в элементы массива **sumReduction**. Затем элементы этого массива и оставшиеся **size** последних элементов **Input** складываются на CPU в итоговый результат.

С применением разработанного ПК проведен ряд вычислительных экспериментов для заключительной верификации сформированных решений. В результате оценки эффективности разработанных алгоритмов определено, что алгоритмы корректны, удовлетворяют требованиям, предъявляемым к ним, имеют квадратичную скорость сходимости, полиномиальную вычислительную сложность  $\mathcal{O}\left(\tilde{M}^5 \log_2(\tilde{M})\right)$  в зависимости от числа входных переменных  $\tilde{M}$  — излучателей  $M$  и рефлекторов  $M'$ .

Выполнено решение ряда тестовых задач управления при оценке зависимостей (рис. 16)  $SNR$ ,  $K_c$  и  $t_a$  от числа  $N$  помеховых сигналов  $\eta_n(t)$  ( $n = \overline{1, N}$ ) для различных мощностей множества управляемых параметров, характеризующих вариацию степеней свободы АМЛЗА.

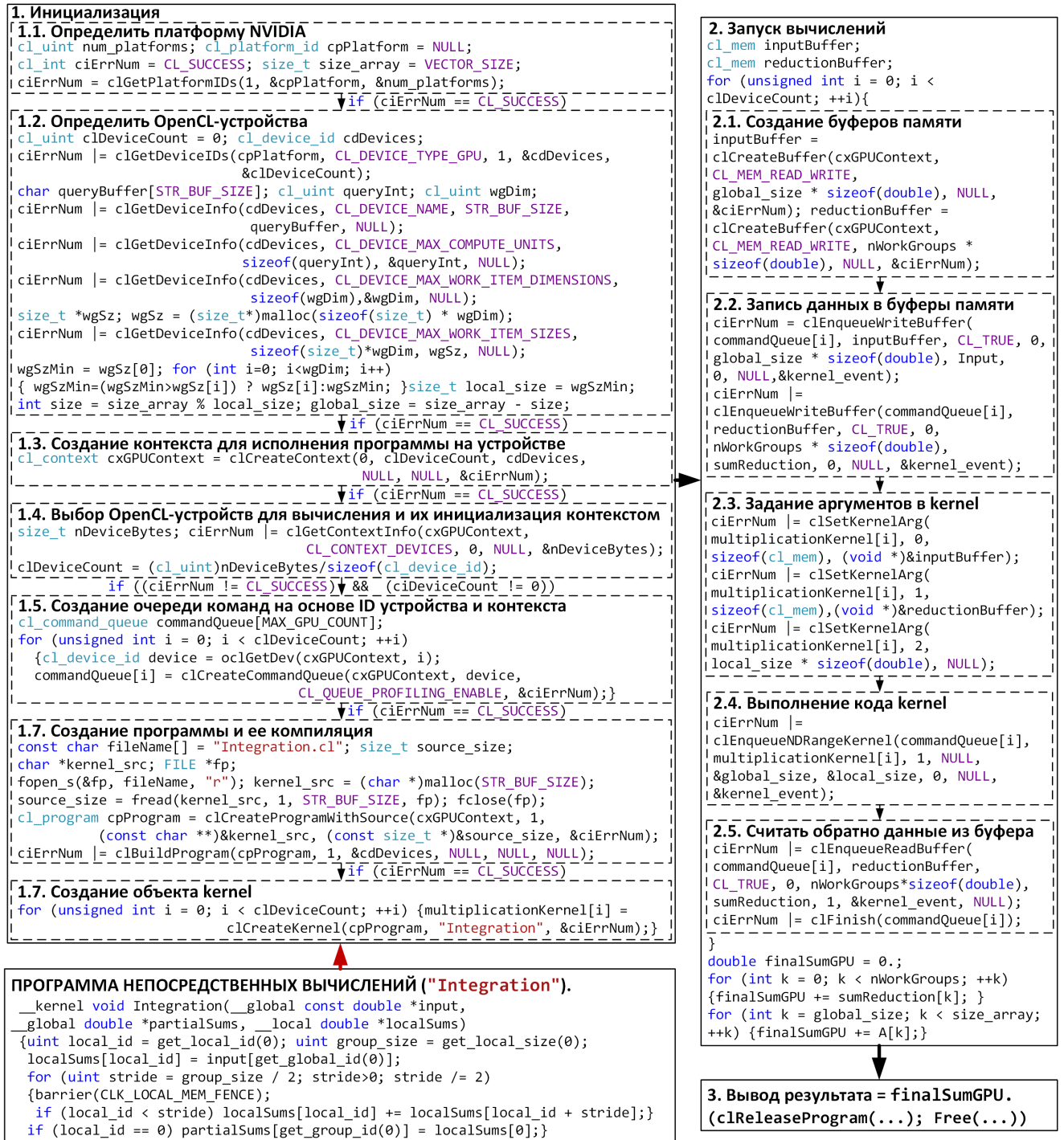


Рис. 15. Схема суммирования при реализации на GPU

Полученные результаты моделирования определяют предпочтительность использования АМЛЗА в сравнении с ААР по потенциальной возможности адаптации к условиям СПО при исходной эквивалентности интегральных характеристик направленности и числа  $M$  излучателей сравниваемых антенн. Ситуация  $M \ll N$  для АМЛЗА приводит к снижению коэффициента использования поверхности ЗА, что обуславливает спад  $SNR$  и  $K_c$  (см. рис. 16,а, 16,б). Рост показателей качества адаптации осуществляется путем увеличения  $M$ , что неизменно приводит к усложнению конструкции адаптивной антенны и увеличению  $t_a$  (см. рис. 16,в). Указанное противоречие определяет необходимость подбора компромиссного решения по выбору конструктивных особенностей АМЛЗА

при реализации робастного алгоритма адаптации в зависимости от параметров приема/передачи сигналов.

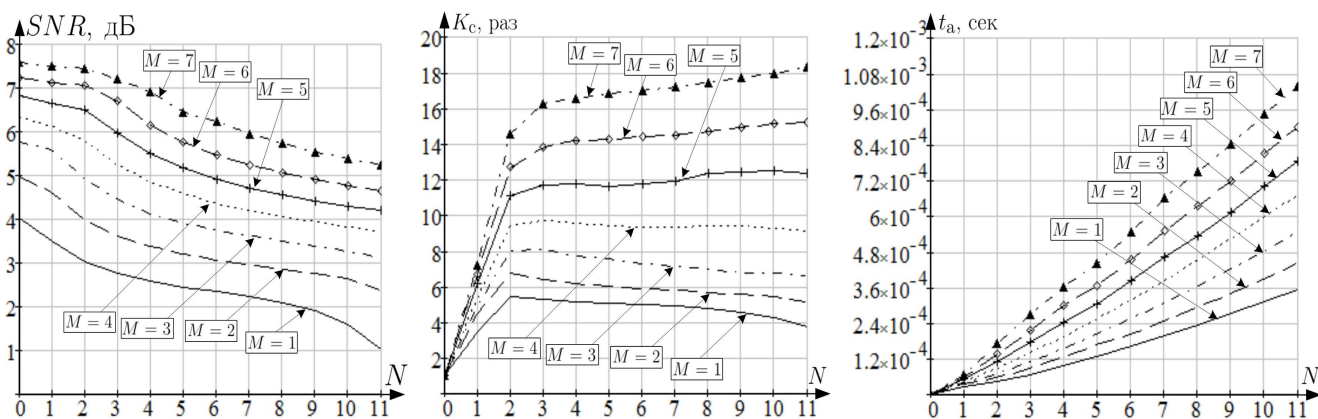


Рис. 16. Зависимость  $SNR$  (а),  $K_c$  (б) и  $t_a$  (в) от  $M$  и  $N$  при  $K^6 = 15$

**В заключении** приведены основные результаты работы, которые отражают научную новизну диссертационного исследования и составляют суть положений, выносимых на защиту.

### Публикации автора по теме диссертации

*Публикации в центральных изданиях, включенных в перечень периодических изданий ВАК при Минобрнауки России*

1. Полянский, И. С. Бариеентрические координаты Пуассона–Римана / И. С. Полянский // Труды СПИИРАН. – 2016. – № 6(49). – С. 32–48.
2. Полянский, И. С. Векторный бариеентрический метод в вычислительной электродинамике / И. С. Полянский // Труды СПИИРАН. – 2017. – № 2(51). – С. 206–222.
3. Полянский, И. С. Методы конформных отображений многогранников в  $\mathbb{R}^3$  / В. М. Радыгин, И. С. Полянский // Вестник удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2017. – Т. 27. – № 1. – С. 60–68.
4. Полянский, И. С. Бариеентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн / И. С. Полянский, Ю. С. Пехов // Труды СПИИРАН. – 2017. – № 5(54). – С. 244–262.
5. Полянский, И. С. Бариеентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны / И. С. Полянский // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29. – №11. – С. 140–150.
6. Полянский, И. С. Синтез локально-оптимальной структуры классификатора информационных ресурсов по критерию минимума средней длины процедуры поиска / А. А. Батенков, И. С. Полянский, К. А. Батенков, М. А. Сазонов, В. Т. Еременко // Вестник компьютерных и информационных технологий, № 7(109) 2013 г. – С. 3–8.
7. Полянский, И. С. Методологические аспекты синтеза оптимальной древовидной структуры в системах сбора и обработки информации / В. Т. Еременко, И. С. Полянский, И. И. Беседин // Вестник компьютерных и информационных технологий, № 11(113) 2013 г. – С. 15–21.
8. Полянский, И. С. Бариеентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) / И. С. Полянский // Вестник СГТУ. – 2015. – № 1(78). – С. 30–36.
9. Полянский, И. С. Бариеентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) / И. С. Полянский // Вестник СГТУ. – 2015. – № 1(78). – С. 36–42.
10. Полянский, И. С. Бариеентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // Антенны. – 2015. – № 1(212). – С. 32–40.



11. Полянский, И. С. Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей / В. М. Радьгин, И. С. Полянский // Вестник ТГУ. Математика и механика. – 2016. – № 1(39). – С. 25–35.
12. Полянский, И. С. Расчет диаграммы направленности зеркальных антенн в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции / А. М. Сомов, Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // Труды НИИР. – 2015. – № 2. – С. 68–78.
13. Полянский, И. С. Алгоритм аппроксимации функции многих переменных на основе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (часть I) / И. С. Полянский, Н. С. Архипов // Телекоммуникации. – 2012. – № 1. – С. 2–8.
14. Полянский, И. С. Алгоритм аппроксимации функции многих переменных на основе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода (часть II) / И. С. Полянский, Н. С. Архипов // Телекоммуникации. – 2012. – № 3. – С. 11–15.
15. Полянский, И. С. Синтез отражающих поверхностей антенной системы зеркального типа с использованием барицентрического подхода при параметризации рефлектора / А. М. Сомов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // Антенны. – 2015. – № 8. – С. 11–19.
16. Полянский, И. С. Алгоритм формирования характеристики излучения многолучевой гибридной зеркальной антенны / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, В. Д. Сахончик // Труды НИИР. – 2012. – С. 68–78.
17. Полянский, И. С. Алгоритм формирования кластерных групп облучателей гибридных зеркальных антенн / И. С. Полянский, Н. С. Архипов, А. С. Великих [и др.] // Телекоммуникации. – 2010. – № 10. – С. 25–32.
18. Полянский, И. С. Алгоритм и результаты решения задачи по исследованию степени развязки в многолучевых гибридных зеркальных антеннах. Часть 1 // Н. С. Архипов, И. С. Полянский // Телекоммуникации. – 2012. – № 8. – С. 23–28.
19. Полянский, И. С. Алгоритм и результаты решения задачи по исследованию степени развязки в многолучевых гибридных зеркальных антеннах. Часть 2 // Н. С. Архипов, И. С. Полянский // Телекоммуникации. – 2013. – № 9. – С. 2–10.
20. Полянский, И. С. Синтез корректирующего рефлектора двухзеркальных антенн зонтичного типа, построенных по схеме со смещенной образующей (схема АДЭ) / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Г. А. Ермишин // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2013. – № 4. – С. 48–56.
21. Полянский, И. С. Представление отражающих поверхностей антенной системы в задачах анализа и синтеза зеркальных антенн методами физической оптики / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов // Телекоммуникации. – 2014. – № 7. – С. 15–21.
22. Полянский, И. С. Гибридный генетический метод с градиентным обучением и прогнозированием для решения задач глобальной оптимизации многоэкстремальных функций / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов, М. М. Фролов // Вестник БГТУ. – 2014. – № 3(43). – С. 138–146.
23. Полянский, И. С. Метод одномерной безусловной оптимизации в задаче оценки развязки парциальных лучей многолучевой антенны зеркального типа / И. С. Полянский // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 4; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=6880>
24. Полянский, И. С. Векторная математическая модель системы спутниковой связи с многолучевыми антеннами зеркального типа / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, А. В. Карпов // Телекоммуникации. – 2014. – № 12. – С. 15–20.
25. Полянский, И. С. Оценка пропускной способности системы спутниковой связи, обеспечивающей пространственное и частотное разделение зон обслуживания / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, А. И. Ветров // Телекоммуникации. – 2015. – № 2. – С. 24–30.
26. Полянский, И. С. Распределение частотно-поляризационного ресурса многолучевой спутниковой системы / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, А. В. Карпов // Телекоммуникации. – 2015. – № 5. – С. 20–26.
27. Полянский, И. С. Алгоритм распределения однородных непрерывных ограниченных ресурсов на основе решения задачи условной оптимизации по критерию минимума моментов инерции / И. С. Полянский, Н. С. Архипов, В. А. Хомаза // Телекоммуникации. – 2011. – № 11. – С. 8–12.

28. Полянский, И. С. Алгоритм оптимизации бюджета PON-сети / С. Н. Архипов, И. С. Полянский // Телекоммуникации. – 2012. – № 13. – С. 3–9.

29. Полянский, И. С. Распределение однородного непрерывного ограниченного ресурса в иерархических системах транспортного типа с древовидной структурой / И. С. Полянский, И. В. Логинова, И. И. Беседин, М. М. Фролов // Информационные системы и технологии, № 2 (76), март–апрель 2013 г. – С. 99–106.

30. Полянский, И. С. Алгоритм распределения неоднородных дискретных ограниченных ресурсов в системе физической защиты / И. С. Полянский, И. И. Беседин // Информационные системы и технологии, № 4 (78), июль–август 2013 г. – С. 10–18.

31. Полянский, И. С. Математическая модель комплекса инженерно-технических средств системы физической защиты объекта охраны / И. С. Полянский, И. И. Беседин, Б. Л. Панин // Фундаментальные исследования № 6 (часть 6) 2013 г. – С. 1359–1365.

32. Полянский, И. С. Методика оценки вероятности ошибочного приема кодового слова с учетом разбиения на блоки и локализации участков / А. Н. Шкердин, И. С. Полянский // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 4.; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=9789>

33. Полянский, И. С. Максимально правдоподобная оценка дисперсионно-ковариационной матрицы / И. С. Полянский, Д. Ю. Патронов // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 1.; URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=8516>

#### *Монографии и учебные пособия*

34. Полянский, И. С. Методы анализа и структурно-параметрического синтеза зеркальных антенн / Н. С. Архипов, И. С. Полянский. – Орёл : Академия ФСО России, 2014. – 269 с.

35. Полянский, И. С. Анализ и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн: под ред. А. М. Сомова / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, А. М. Сомов. – Москва : Горячая линия – Телеком, 2017. – 226 с.

36. Полянский, И. С. Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. – Орёл : Академия ФСО России, 2017. – 148 с.

37. Полянский, И. С. Методы анализа волноводных линий передачи: под ред. А. М. Сомова / Н. С. Архипов, С. Н. Архипов, И. С. Полянский, А. М. Сомов. – Москва : Горячая линия – Телеком, 2017. – 114 с.

#### *Статьи в других журналах и сборниках докладов конференций*

38. Polyanskii, I. S. An algorithm for generating the cluster groups of hybrid mirror antenna radiators / N. S. Arkhipov, A. S. Velikikh, A. V. Karpov, I. S. Polyanskii // Telecommunications and Radio Engineering. – 2013. – № 72(2). – 147–160 pp.

39. Полянский, И. С. Оценка корреляционной матрицы сигналов на входе адаптивной антенной решетки в комплексах радиосвязи с подвижными объектами / Д. Ю. Патронов, И. С. Полянский // Техника радиосвязи. – 2014. – № 3(23). – С. 61–69.

40. Полянский, И. С. Выбор оптимального места размещения приемного/передающего световода в мультиплексорах и демultipлексорах / И. С. Полянский, С. Н. Архипов, А. В. Карпов // III Международная интернет-конференция молодых ученых, аспирантов и студентов «Инновационные технологии: теория, инструменты, практика» (InnoTech 2011). – Пермь, 2011.

41. Полянский, И. С. Математическая модель многолучевого векторного канала системы спутниковой связи, использующей пространственно-поляризационную развязку зон обслуживания с повторным использованием частот / И. С. Полянский, В. Д. Сахончик, Г. А. Ермишин // III Международная интернет-конференция молодых ученых, аспирантов и студентов «Инновационные технологии: теория, инструменты, практика» (InnoTech 2011). – Пермь, 2011.

42. Полянский, И. С. Задача поляризационного разделения зон обслуживания систем спутниковой связи с многолучевыми гибридными зеркальными антеннами на бортовом ретрансляторе / И. С. Полянский // Перспективы развития информационных технологий. – 2011. – № 6. – С. 188–194.

43. Полянский, И. С. Сшивание электромагнитных полей группового облучателя и рефлектора многолучевой гибридной зеркальной антенны / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов //

XIV Международная НПК «Научное образование физико-математических и технических наук в XXI веке». – Москва : 27–28.02.2015. – С. 61–67.

44. Полянский, И. С. Прямое и обратное конформные отображения дискретных областей в евклидовых пространствах / В. М. Радыгин, И. С. Полянский // X Всероссийская межведомственная научная конференция: материалы и доклады (Орёл, 7–8 февраля 2017 года). В 12 ч. Ч. 6 / под. общ. ред. В. В. Мизерова. – Орёл : Академия ФСО России, 2017. – 196 с.

45. Полянский, И. С. Задача распределения неоднородных дискретных ограниченных ресурсов / И. С. Полянский, И. И. Беседин // VI Всероссийская научно-практическая конференция «Территориально распределенные системы охраны» – ФГКОУ ВПО «Калининградский пограничный институт ФСБ России», г. Калининград, 2–4 апреля 2013 г. – С. 153–157.

46. Полянский, И. С. Задача структурно-топологического синтеза системы иерархического типа с древовидной структурой / И. С. Полянский, И. И. Беседин // XVIII Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Научная сессия ТУСУР – 2013», г. Томск, 15–17 мая 2013 г. – С. 62–66.

47. Полянский, И. С. Определение вероятности ошибки системы охранной сигнализации объекта / И. С. Полянский, И. И. Беседин, С. В. Шабанов, Т. В. Босых // VII Международная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы науки», г. Москва, 25 октября 2012 г. – С. 56–66.

### *Патенты*

48. Пат. № 2461929 Российской Федерации, МПК H01Q19/10, H01Q19/17. Способ оптимального размещения и ориентации приемного/передающего излучателя в виде коаксиально расположенных диэлектриков цилиндрической формы в фокальной области используемых коллимирующих поверхностей / Н. С. Архипов, С. Н. Архипов, И. С. Полянский, Г. А. Ермишин; заявитель и патентообладатель Государственное казенное военное образовательное учреждение высшего профессионального образования Академия ФСО России. – № 2011115901; заявл. 21.04.2011; опубл. 20.09.2012.

49. Пат. № 2576493 Российской Федерации, МПК H01Q3/01. Способ синтеза формы отражающей поверхности антенной системы зеркального типа / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов; заявитель и патентообладатель Государственное казенное военное образовательное учреждение высшего профессионального образования Академия ФСО России. – № 2014124657; заявл. 17.06.2014; опубл. 05.02.2016. – 11 с.

50. Пат. № 2547627 Российской Федерации, МПК H04W84/18. Способ структурно-функционального синтеза защищенной иерархической сети связи / Н. С. Архипов, И. С. Полянский, М. М. Фролов, И. И. Беседин, В. Т. Еременко; заявитель и патентообладатель Государственное казенное военное образовательное учреждение высшего профессионального образования Академия ФСО России. – № 2013128819/08; заявл. 24.06.2013; опубл. 27.12.2014. – 19 с.

### *Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ*

51. Поиск оптимального положения облучающей антенной решетки для решения задачи расчета характеристики поля коллинеарных поверхностей оптического и радио диапазонах / С. Н. Архипов, И. С. Полянский // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610621 от 11.01.2011.

52. Расчет поля дальнего бокового излучения антенн зеркального типа / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, М. В. Безручко, В. Д. Сахончик // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610620 от 11.01.2011.

53. Расчет поля многолучевых зеркальных антенн в дальней зоне / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, М. В. Безручко, А. В. Карпов, А. С. Великих // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610149 от 11.01.2011.

54. Расчет поля фокальной области коллинеарных поверхностей оптического и радио диапазонах / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, М. В. Безручко, А. В. Карпов, А. С. Великих, Г. А. Ермишин // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610623 от 11.01.2011.

55. Поиск оптимальных значений весовых коэффициентов элементов облучающей системы для решения задачи расчета характеристики поля в оптическом и радио диапазоне / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, М. В. Безручко, А. С. Великих // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011610619 от 11.01.2011.

56. Анализ величины развязки характеристики излучения многолучевой гибридной зеркальной антенны с кластерными излучателями произвольной формы / С. Н. Архипов, И. С. Полянский, А. В. Карпов, Г. А. Ермишин, М. М. Фролов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011616903 от 06.09.2011.

57. Анализ информационных потоков каналов спутниковой связи стандарта DVB в ОС Windows / В. А. Хомаза, И. С. Полянский, А. В. Свиридов, Г. А. Ермишин, М. М. Фролов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615638 от 21.10.2011.

58. Анализ информационных потоков магистральных линий связи с пакетной коммутацией / В. А. Хомаза, И. С. Полянский, А. В. Свиридов, Г. А. Ермишин, М. М. Фролов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2011615639 от 21.10.2011.

59. Программа для реализации алгоритма структурного синтеза иерархической системы / И. С. Полянский, И. И. Беседин, Т. В. Босых, А. А. Полшведкин // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013615091 от 28.05.2013.

60. Программа для реализации алгоритма распределения разнородного дискретного ограниченного ресурса в иерархической системе / И. С. Полянский, И. И. Беседин, Т. В. Босых, А. А. Полшведкин // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013616337 от 03.07.2013.

61. Система проектирования комплекса инженерно-технических средств системы физической защиты «Рубеж» / И. С. Полянский, И. И. Беседин, В. Г. Сосунов, Д. М. Кривоносов, Р. Ю. Салихов // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013615673 от 18.06.2013.

62. Программа для реализации алгоритма синтеза отражающих поверхностей антенных систем зеркального типа: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014619647 Российской Федерации / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов, А. И. Ветров; заявл. 29.06.2014; зарег. 18.09.2014.

63. Программа анализа характеристик излучения зеркальных антенных систем в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2014617058 Российской Федерации / И. С. Полянский, Д. Е. Степанов; заявл. 20.05.2014; зарег. 10.07.2014.

64. Анализ дальнего бокового излучения зеркальных параболических антенн в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2015619651 Российской Федерации / А. М. Сомов, Н. С. Архипов, И. С. Полянский, Д. Е. Степанов; заявл. 18.03.2015; зарег. 09.09.2015.

---

Подписано в печать \_\_\_\_\_.2018 г.

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 2. Тираж 100 экз. Заказ № \_\_\_\_\_.

Отпечатано в типографии Академии ФСО России.

302034, г. Орёл, ул. Приборостроительная, 35.