

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

На правах рукописи

Меретин Алексей Сергеевич

**Разработка термодинамически согласованных
математических моделей и методов
математического моделирования для анализа
тепловых методов увеличения нефтеотдачи**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

по специальности 1.2.2 (05.13.18) — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Савенков Евгений Борисович

Москва — 2021

Оглавление

Введение	4
1 Физико-математическая модель	10
1.1 Основные законы сохранения	12
1.2 Определяющие соотношения	18
1.3 Вывод диссипативного неравенства	19
1.4 Процедура Колмана-Нолла	22
1.5 Система уравнений модели	31
1.6 Моделирование разрушения среды	34
2 Вычислительный алгоритм	56
2.1 Система уравнений модели	57
2.2 Слабая постановка задачи	59
2.2.1 Пространственные аппроксимации	63
2.2.2 Дискретизация по времени и решение нелинейной системы	66
2.2.3 Решение системы линейных алгебраических уравнений	68
3 Комплекс программ	70
4 Результаты моделирования	76
4.1 Задачи термopоупругости	76
4.1.1 Задача Терцаги	76
4.1.2 Тест Манделя	80
4.1.3 Одномерное неизотермическое расширение	83

4.2	Моделирование теплового воздействия на флюидонасыщенный пласт	86
4.2.1	Моделирование развития повреждаемости вблизи нагнетательной скважины	88
4.2.2	Моделирование термического воздействия на пласт с до- бывающей и нагнетательной скважиной	91
4.2.3	Моделирование развития трещиноватости при закачке теплоносителя	94
4.2.4	Моделирование работы скважины в слоистом пласте	99
5	Заключение	105
	Литература	107

Введение

В настоящее время в связи с вводом в эксплуатацию все большего числа месторождений с трудноизвлекаемой нефтью появилась необходимость в создании новых способов разработки и методов увеличения нефтеотдачи. В частности, для месторождений с высоковязкой нефтью применяется термическое воздействие на пласт. Суть метода заключается в подводе тепла в пласт путем закачки теплоносителя либо при помощи кондуктивного теплообмена. В результате нагрева пласта увеличивается подвижность находящихся в нем флюидов и реализуются процессы химического разложения содержащихся в пласте углеводородов (для сланцевых месторождений и месторождений нефтематеринских пород — генерация синтетической нефти).

Оценка эффективности термического воздействия возможна только при проведении комплексного моделирования основных процессов, происходящих в пласте, включая тепловые и геомеханические эффекты, в том числе разрушение пласта. Кроме того, вследствие неизотермичности процесса, дополнительным условием, предъявляемым к системе уравнений модели, является их термодинамическая согласованность, под которой понимается консервативность системы уравнений и справедливость второго закона термодинамики в подходящей формулировке.

В традиционных подходах к моделированию процессов нефтедобычи основное внимание уделяется движению флюидов в пласте [1]. При применении термических методов воздействия процесс вытеснения сопровождается изменением степени подвижности заполняющего поры флюида за счет изменения а) физико-химических свойств флюида под действием высокого давления и температуры, б) фильтрационно-емкостных свойств пласта за счет геомеханических процессов, связанных с деформацией пласта и его разрушением.

Существует ряд моделей, позволяющих описывать фильтрационные, деформационные и неизотермические процессы, а также разрушение среды [2,3]. В

большинстве их повреждаемость среды описывается в рамках теории континуального разрушения. В соответствии с ней разрушение пласта моделируется параметром повреждаемости (в общем случае являющимся тензором), эволюция которого описывается заданным кинетическим уравнением. Данный параметр входит в основные определяющие соотношения модели и влияет на фильтрационно-емкостные, термодинамические и механические параметры пласта.

Геомеханические модели с учетом разрушения, применяемые для анализа напряженно-деформированного состояния нефтегазового месторождения, условно можно разделить на два больших класса. К первому классу относятся термодинамически корректные в указанном выше смысле модели, которые, тем не менее, используют определяющие соотношения сравнительно простого вида. Последние обычно имеют качественный характер и в них отсутствует преемственность с распространенными моделями континуального разрушения чисто упругих сред, см., например, [4]. К моделям второго класса относятся модели, широко применяемые на практике, которые являются формальными обобщениями классических термопороупругих моделей и получаются добавлением в последние эмпирических зависимостей, учитывающих процесс разрушения [5–11]. При этом анализ таких моделей с точки зрения их термодинамической корректности не производится.

Использование новых математических моделей требует разработки соответствующих численных алгоритмов, которые обеспечивают корректность расчета в рамках выбранной модели и применимы в актуальных практических постановках. Для решения рассматриваемых задач наиболее широко распространены методы конечных объемов и конечных элементов. В настоящей работе использован последний класс методов.

В связи с этим построение полного комплекса средств математического моделирования (математические модели, вычислительные алгоритмы и их программная реализация), основанного на термодинамически корректных моделях, пригодных для анализа реалистичных сценариев разработки, является актуальной задачей.

Целью настоящей работы является разработка средств и методов математического моделирования — термодинамически согласованной физико-математической модели, вычислительных алгоритмов и их программной ре-

лизации — для анализа содержательных задач, связанных с разработкой нефтяных месторождений с использованием термических методов воздействия на пласт.

Для достижения поставленной цели в работе решены следующие **конкретные задачи**:

1. Разработка термодинамически согласованного (в смысле выполнения второго закона термодинамики и соответствующих законов сохранения) обобщения пороупругой модели Био для случая неизотермической постановки с учетом разрушения среды и его влияния на упругие и фильтрационно-емкостные свойства.
2. Разработка вычислительного алгоритма для численного решения уравнений построенной модели в рамках пространственно трехмерной постановки.
3. Реализация, на основе разработанных алгоритмов, программного комплекса, его валидация и проведение расчетов в постановках прикладного уровня сложности.

Научной новизной данной работы является:

1. Термодинамически согласованная математическая модель термopopoупругой среды с учетом эффектов разрушения породы и связанным с ним изменением геомеханических и фильтрационных свойств пласта.
2. Вычислительные алгоритмы для решения системы уравнений модели на основе метода конечных элементов.
3. Программный комплекс, пригодный для анализа задач в реалистичных постановках.

Теоретическая ценность настоящей работы заключается в разработанной физико-математической модели эволюции пороупругой среды с учетом разрушения и вычислительных методов для её решения.

Практически значимым результатом работы является разработанный программный комплекс для анализа процесса термического воздействия на пласт с учетом геомеханических эффектов и разрушения в реалистичных постановках.

Методология и методы исследования, использованные в данной работе, включают в себя методы математического анализа и теории дифференциальных уравнений в частных производных, численные методы решения систем нелинейных уравнений в частных производных, а также методологию построения численного эксперимента. Вывод моделей произведен в рамках современных методов рациональной термомеханики сплошной среды.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечены применением при выводе уравнений и определяющих соотношений математической модели обоснованной процедуры Колмана-Нолла, строгостью используемого для разработки вычислительного алгоритма математического аппарата, сопоставлением результатов моделирования с известными решениями.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Разработана термодинамически согласованная физико-математическая модель разрушения термopорoупругой среды, учитывающая деформационные, фильтрационные и неизотермические эффекты, пригодная для анализа эффективности современных и перспективных тепловых методов увеличения нефтеотдачи.
2. Разработан неявный численный алгоритм расчета эволюции термopорoупругой среды с учетом разрушения на основе метода конечных элементов с применением неструктурированных тетраэдральных сеток.
3. Реализован программный комплекс для моделирования термического воздействия на порoупругую среду с учетом разрушения. Проведены валидационные расчеты, подтверждающие корректность разработанных алгоритмов.
4. Выполнены расчеты по оценке влияния разрушения среды при применении термических методов воздействия на пласт, демонстрирующие применимость разработанных моделей и алгоритмов для решения задач в реалистичных постановках.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на 4-й Международной научной школе молодых ученых «Физическое и математическое моделирование процессов в геосредах» (г. Москва, 2018 г.), научных слушаниях, посвященных 110-летию со дня рождения С.А. Христиановича «Современные

проблемы механики и математики» (г. Москва, 2018 г.), 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ (г. Долгопрудный, 2018 г.), Научной конференции молодых ученых и аспирантов ИФЗ РАН (г. Москва, 2019 г.), семинаре ИПМ РАН «Вычислительные методы и математическое моделирование» им. Ю. П. Попова (г. Москва, 2020 г.), семинаре ИПМ РАН «Математическое моделирование» (г. Москва, 2020 г.).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 6 печатных работах из перечня ВАК [12–17], из них 2 — в изданиях, индексируемых Scopus [15,17], 1 — Web of Science [12].

Личный вклад соискателя. Соискатель самостоятельно разработал физико-математическую модель разрушения в пороупругой среде, вычислительные алгоритмы и программный комплекс, выполнил валидацию программного комплекса путем сравнения с аналитическими решениями, а также провел численные эксперименты по оценке разрушения флюидонасыщенного пласта в процессе термического воздействия и проанализировал полученные результаты. Все выносимые на защиту положения получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа представлена на 117 страницах, содержит 36 иллюстраций и 9 таблиц. Список литературы содержит 111 наименований.

Во введении диссертации описаны основные эффекты, сопровождающие процесс термического воздействия на пласт, и особенности их моделирования. Показана актуальность задачи комплексного моделирования пласта с учетом деформации породы, фильтрации флюида, учета неизотермических эффектов и разрушения породы. Описаны существующие подходы к моделированию, их преимущества и недостатки. Сформулированы цели и задачи работы, а также полученные результаты. Указаны сведения об апробации работы и публикациях на тему исследования.

В первой главе описана физико-математическая модель разрушения в пороупругой среде, являющаяся обобщением пороупругой модели Био. Базовая система уравнений модели включает в себя законы сохранения массы, импульса и энергии. Для замыкания системы уравнений используются определяющие соотношения, удовлетворяющие принципу термодинамической согласованности. Вывод определяющих соотношений производится с использованием процедуры

Колмана-Нолла. Для учета разрушения среды используется подход континуальной механики разрушения.

Во второй главе приводится описание численного алгоритма для решения системы уравнений полной модели. Данная система решалась методом конечных элементов. Описан вывод слабой постановки задачи, а также приводится конечный вид аппроксимированной системы уравнений. Для дискретизации уравнений по пространству используются тетраэдральные элементы Тейлора-Худа с квадратичными базисными функциями для перемещений и линейными для давления и температуры. Дискретизация уравнений по времени производится по неявной схеме относительно перемещений, давления и температуры и явной для параметра повреждаемости.

В третьей главе приводится описание разработанного программного комплекса для расчета неизотермического течения в пороупругой среде с учетом разрушения породы в рамках разработанного численного алгоритма. Программный комплекс реализован на языке программирования *C++* и состоит из трех основных компонентов: препроцессор, вычислительное ядро и постпроцессор. В данных блоках производится инициализация расчетной сетки, зачитывание параметров модели, сборка матрицы системы и правой части, решение нелинейной системы уравнений и выгрузка результатов для дальнейшего анализа.

В четвертой главе приведены результаты моделирования с использованием разработанного программного комплекса. Валидация алгоритма проводилась на ряде тестов (задача Терцаги, тест Манделя и тест на одномерное неизотермическое расширение) для которых известно аналитическое решение. Кроме того, был проведен ряд расчетов, моделирующих воздействие на пласт добывающих и нагнетательных скважин при различных условиях, с целью оценки влияния геомеханических эффектов.

В заключении сформулированы основные результаты работы.

Глава 1

Физико-математическая МОДЕЛЬ

Основой модели, разрабатываемой в настоящей работе, является классическая модель Био пороупругости, развитие которой было начато в работах К. Терцаги (К. Terzaghi) [18] и М. Био (М. Biot) [19–23]. В современном виде она впервые была описана в работе [24]. Модель описывает эволюцию напряженно-деформированного состояния пористого проницаемого деформируемого твердого тела и полей давления фильтрующегося в нем флюида. В рамках модели Био среда описывается как совокупность двух взаимопроникающих континуумов («фаз») — упругого «скелета» (твердой фазы) и насыщающей его жидкости (подвижной фазы). Уравнения модели представляют собой связанную систему уравнений термомеханики деформируемого твердого тела и фильтрации. Типичными приложениями модели Био являются задачи нефтяной и гидрогеологии [25], анализ процессов в костных и мягких биологических тканях [26,27], гидрогелях и многие другие.

Следует отметить, что модель Био является не единственной известной моделью для описания динамики пороупругой среды. В частности, следует отметить модель, предложенную в работах В.Н. Доровского и его коллег. Модель является термодинамически согласованной и получена в рамках развиваемой авторами теории многоскоростного континуума [28–30]. Особенностью данной модели является то, что пороупругая среда описывается тремя упругими модулями, однозначно определяемыми по скоростям распространения упругих волн [28]. Данная модель применяется для описания движения волн Стоун-

ли [29], в задачах сейсморазведки [30] и других областях.

Существует два основных способа вывода уравнений модели. Первый («микромеханический») основан на том, что на микроуровне (пространственном масштабе, меньшем масштаба представительного объема среды) среда описывается как совокупность двух фаз (твердой и подвижной), разделенных границей и занимающих каждая свою область пространства. Каждая среда описывается своей группой уравнений (соответственно, механики и гидродинамики). На границе раздела фаз считаются заданными соответствующие условия согласования, обеспечивающие непрерывность (микроскопических в указанном выше смысле) потоков массы, энергии и импульса. Далее производится усреднение уравнений модели и соответствующих полей первичных переменных по области пространства, вмещающей представительный объем среды. Результирующая модель, при выполнении определенных условий, обеспечивающих корректность процедуры асимптотического усреднения, приводит к уравнениям модели Био. Такой способ вывода уравнений модели Био и ее обобщений рассмотрен, например, в [31], см. также обзор в [32]. Отметим, что такой подход, вообще говоря, априорно не гарантирует термодинамическую корректность результирующей модели (которая, однако, может быть проверена постфактум). При этом сама процедура асимптотического усреднения является математически сложной и требует аккуратного обоснования. Более того, как сама процедура, так и ее обоснование, чрезвычайно усложняются при повышении сложности частных моделей, описывающих поведение отдельных фаз.

Второй подход (в дальнейшем — «термодинамический») является феноменологическим и основан на применении методов рациональной механики сплошной среды [33]. В рамках этого подхода обычно постулируется выполнение набора основных законов сохранения, задаются основные термодинамические переменные задачи (параметры состояния) и соответствующие (обобщенные) термодинамические силы, а также постулируется выполнение энтропийного неравенства (неравенства Клазиуса-Дюгема, Clausius-Duhem inequality) в подходящей форме. Последнее используется для вывода определяющих соотношений модели в рамках сравнительно формальной процедуры, которая носит название процедура Колмана-Нолла (Coleman-Noll procedure) [34]. Такой подход применяется, например, в монографиях [4,35,36]. В известном смысле он является более простым и общим по сравнению с «микромеханическим» — в частности,

с точки зрения обобщений модели. Вместе с тем, он априорно гарантирует термодинамическую корректность построенной модели в указанном выше смысле.

Для моделирования разрушения среды требуется расширить модель Био. Это может быть сделано путем введения дополнительных предположений о процессе развития повреждений. Существует два основных подхода к математическому описанию процессов, происходящих при разрушении материала. В первом подходе [37] разрушение рассматривается как развитие конечного набора крупномасштабных трещин. Предполагается, что каждая трещина имеет определенные границы, а её рост происходит при выполнении соответствующих критериев разрушения. Данный подход широко используется на практике в случаях, когда требуется описать развитие конечного (сравнительно небольшого) числа уединенных трещин, например, при моделировании процесса гидроразрыва пласта на нефтегазовых месторождениях.

Второй подход, который используется в настоящей работе, основан на использовании механики континуального разрушения [2,3]. В рамках данного подхода разрушение рассматривается как процесс снижения «эффективных» прочностных свойств материала, вызванный развитием множества микротрещин и микропор. Предполагается, что «степень разрушения» материала описывается дополнительным (в общем случае тензорным) параметром, называемым параметром повреждаемости. Эволюция данного параметра определяется заданным кинетическим уравнением, которое описывает скорость изменения параметра повреждаемости в зависимости от текущего состояния среды. Подробный обзор существующих моделей эволюции параметра повреждаемости будет приведен далее, см. раздел 1.6.

1.1 Основные законы сохранения

Рассмотрим двухфазную насыщенную пористую среду, состоящую из двух взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов, одновременно занимающих один и тот же объем: пористого деформируемого скелета и подвижного насыщающего флюида. Задача рассматривается в приближении малых пространственных перемещений и деформаций в полностью трехмерной постановке. Состояние среды описывается системой законов сохранения массы (фильтрация флюида), импульса (геомеханика пласта) и энергии (термодина-

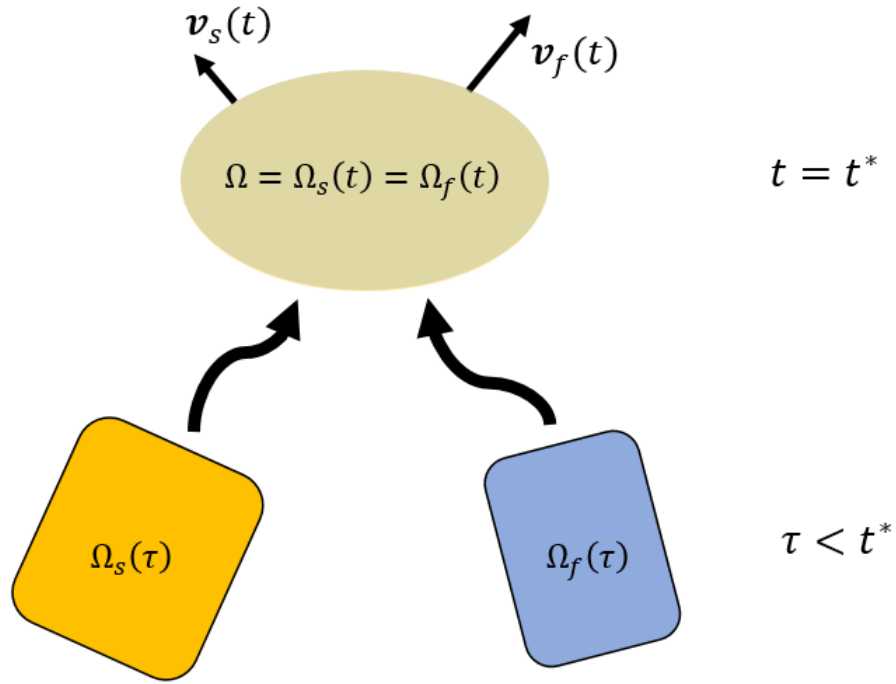


Рис. 1.1. Объем пространства Ω и материальные объемы Ω_f и Ω_s .

мика). Законы сохранения записываются с использованием эйлера подхода к описанию движения среды.

Рассмотрим элементарный объем пространства Ω , в котором содержатся две фазы — скелет и флюид. Будем считать, что в каждой точке пространства присутствуют обе фазы. В момент времени $t = t^*$ положения материальных объемов скелета $\Omega_s(t^*)$ и флюида $\Omega_f(t^*)$ совпадают $\Omega = \Omega_s(t^*) = \Omega_f(t^*)$. Пусть скорости движения фаз равны \mathbf{v}_s и \mathbf{v}_f соответственно (рис. 1.1).

Запишем основные законы сохранения для обоих континуумов в момент времени $t = t^*$.

Закон сохранения массы. Для фазы α ($\alpha = s$ для скелета и $\alpha = f$ для флюида) закон сохранения массы имеет вид:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha d\Omega_\alpha = 0,$$

где m_α — масса фазы α в единице объема среды («смеси»), а $d_\alpha(\cdot)/dt = \partial(\cdot)/\partial t + \mathbf{v}_\alpha \cdot \text{grad}(\cdot)$ — материальная производная вдоль траектории движения фазы α .

По определению материальной производной имеем:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[\frac{\partial m_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \right] d\Omega_\alpha = 0.$$

Таким образом, при отсутствии внешних источников массы имеют место следующие выражения [36]:

$$\frac{\partial m_s}{\partial t} + \operatorname{div}(m_s \mathbf{v}_s) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(m_f \mathbf{v}_f) = 0. \quad (1.2)$$

Введем вектор скорости фильтрации \mathbf{w} , равный:

$$\mathbf{w} = \frac{m_f}{\rho_f} (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s),$$

где ρ_f — «истинная» плотность флюида, то есть масса флюида, отнесенная к занимаемому им объему. Тогда уравнение (1.2) принимает вид:

$$\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(m_f \mathbf{v}_s) + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) называется уравнением неразрывности и выражает закон сохранения массы в дифференциальной форме.

Закон сохранения импульса. Пусть \mathbf{f} — внешняя сила, $\mathbf{b}_\alpha^{\text{int}}$ — плотность сил взаимодействия фазы α с остальными фазами среды, \mathbf{t}_α — вектор напряжений, то есть сила, действующая на континуум α со стороны окружающих тел на элементе $d\omega_\alpha$ поверхности $\partial\Omega_\alpha(t)$. В этом случае закон сохранения импульса имеет вид [35]:

$$\frac{d_\alpha}{dt} \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} (m_\alpha \mathbf{f} - \mathbf{b}_\alpha^{\text{int}}) d\Omega_\alpha + \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \mathbf{t}_\alpha d\omega_\alpha.$$

В соответствии с фундаментальной теоремой Коши [36] и формулой Грина

имеем:

$$\int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \mathbf{t}_\alpha d\omega_\alpha = \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \boldsymbol{\sigma}_\alpha \mathbf{n} d\omega = \int_{\Omega_\alpha(t)} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha) d\Omega_\alpha,$$

где $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ — тензор парциальных напряжений для фазы α . Таким образом, воспользовавшись определением материальной производной, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[\frac{\partial(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \otimes \mathbf{v}_\alpha) \right] d\Omega_\alpha &= \\ &= \int_{\Omega_\alpha(t)} (m_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{b}_\alpha^{\text{int}}) d\Omega_\alpha + \int_{\Omega_\alpha(t)} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha) d\Omega_\alpha, \end{aligned}$$

где символ « \otimes » обозначает тензорное произведение.

Рассмотрим левую часть последнего уравнения. В соответствии с формулой для дивергенции тензорного произведения получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[\frac{\partial(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \otimes \mathbf{v}_\alpha) \right] d\Omega_\alpha &= \\ &= \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[\frac{\partial m_\alpha}{\partial t} \mathbf{v}_\alpha + \operatorname{div}(m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha + m_\alpha \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \operatorname{div}(\mathbf{v}_\alpha) \right] d\Omega_\alpha. \end{aligned}$$

Применяя закон сохранения массы, а также определение полной производной, получаем:

$$\int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha \frac{d_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{dt} d\Omega_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} [m_\alpha \mathbf{f} + \mathbf{b}_\alpha^{\text{int}} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha)] d\Omega_\alpha.$$

Приравнивая подынтегральные выражения в последней формуле, получаем закон сохранения импульса в виде:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_s) + m_s \left(\mathbf{f} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right) + \mathbf{b}_s^{\text{int}} = 0, \quad (1.4)$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) + m_f \left(\mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} \right) + \mathbf{b}_f^{\text{int}} = 0, \quad (1.5)$$

причем $\mathbf{b}_f^{\text{int}} + \mathbf{b}_s^{\text{int}} = 0$.

Обозначим $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}_s$ — тензор полных напряжений. Тогда, после суммирования уравнений (1.4) и (1.5) получим:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + m_f \left(\mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} \right) + m_s \left(\mathbf{f} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) выражает закон сохранения импульса для двухфазной системы «скелет»/«флюид».

Закон сохранения энергии. Для объема пространства $\Omega(t) = \Omega_s(t) = \Omega_f(t)$ уравнение, описывающее закон сохранения энергии, выглядит следующим образом:

$$\frac{d_f}{dt} (K_f + U_f) + \frac{d_s}{dt} (K_s + U_s) = (P_f + Q_f) + (P_s + Q_s), \quad (1.7)$$

где

$$K_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha^2 d\Omega_\alpha$$

— кинетическая энергия фазы α ,

$$U_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha e_\alpha d\Omega_\alpha$$

— внутренняя энергия,

$$P_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{f}_\alpha d\Omega_\alpha + \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \mathbf{t}_\alpha \mathbf{v}_\alpha d\omega_\alpha$$

— мощность внешних сил,

$$Q_\alpha = - \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \mathbf{q}_\alpha \mathbf{n} d\omega_\alpha$$

— поток тепла. Здесь e_α — удельная внутренняя энергия фазы с учетом повреждаемости, \mathbf{q}_α — вектор плотности потока тепла, $\alpha = f, s$.

Рассмотрим левую часть уравнения (1.7):

$$\frac{d_\alpha}{dt} (K_\alpha + U_\alpha) = \frac{d_\alpha}{dt} \int_{\Omega_\alpha(t)} \left[m_\alpha \left(e_\alpha + \frac{\mathbf{v}_\alpha^2}{2} \right) \right] d\Omega.$$

С другой стороны, применяя формулу Грина к правой части уравнения (1.7), получаем:

$$P_\alpha + Q_\alpha = \int_{\Omega_\alpha(t)} [\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + (m_\alpha \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q}_\alpha)] d\Omega.$$

Таким образом, закон сохранения энергии в интегральном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[m_s \frac{d_s}{dt} \left(e_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) + m_f \frac{d_f}{dt} \left(e_f + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) \right] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{v}_f + \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{v}_s) + (m_s \mathbf{v}_s + m_f \mathbf{v}_f) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q})] d\Omega, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{q}_f + \mathbf{q}_s$.

При переходе от парциального тензора напряжений для скелета к тензору полных напряжений уравнение (1.8) в дифференциальном виде примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[m_s \left(e_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) + m_f \left(e_f + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) \right] + \\ + \operatorname{div} \left[m_s \left(e_s + \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} \right) \mathbf{v}_s \right] + \operatorname{div} \left[m_f \left(e_f + \frac{\mathbf{v}_f^2}{2} \right) \mathbf{v}_f \right] = \\ = \operatorname{div} [\boldsymbol{\sigma}_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}_s] + (m_s \mathbf{v}_s + m_f \mathbf{v}_f) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, получена базовая система уравнений модели, включающая в себя выражения для закона сохранения массы (1.3), импульса (1.6) и энергии (1.9) термопоупругой среды. Для дальнейшего вывода необходимо задать определяющие соотношения, замыкающие модель. Эти соотношения могут быть получены на основе диссипативного неравенства, которое рассматривается в следующих разделах.

1.2 Определяющие соотношения

В предыдущих разделах были сформулированы основные законы сохранения (массы, импульса, энергии), которые в рамках введенных предположений являются фундаментальными соотношениями механики сплошной среды. Для описания особенностей поведения конкретных сред необходимо ввести определяющие соотношения, то есть ограничения на поведение материала под влиянием внешнего воздействия.

Для построения теории определяющих соотношений Нолл [38] сформулировал ряд аксиом. Данные аксиомы отражают основные принципы, которым должны удовлетворять определяющие соотношения. Краткие формулировки некоторых из данных принципов (см. [33,35]) приведены ниже.

Принцип детерминизма. Напряженное состояние в конфигурации частицы X в момент времени t определяется только предысторией χ^t движения тела вплоть до момента t .

Принцип локальности. Исключается влияние частиц, находящихся на некотором конечном расстоянии от рассматриваемой частицы X .

Принцип материальной независимости от системы отсчета. Определяющие соотношения должны быть инвариантны относительно смены системы отсчета.

Принцип термодинамической согласованности. Определяющие соотношения должны удовлетворять второму началу термодинамики для любой истории состояний (процесса).

Последний принцип накладывает существенные ограничения на вид определяющих соотношений и требует рассмотрения второго начала термодинамики. В настоящей работе вид определяющих соотношений выводится с использованием процедуры Колмана-Нолла [34]. Основная идея данной процедуры заключается в том, что второй закон термодинамики должен быть выполнен для всех допустимых термодинамических процессов [39]. Колман и Нолл постулируют, что при наличии функциональных связей между параметрами, описывающими термодинамический процесс, вид данных зависимостей должен быть таким, чтобы второй закон термодинамики выполнялся при любой последовательности состояний. Подробное описание вывода определяющих соотношений приведено в следующих разделах.

1.3 Вывод диссипативного неравенства

Будем рассматривать термopоупругую среду, в которой в результате деформаций может возникнуть зона диффузного разрушения, под которой понимается образование в твердой фазе множества микротрещин, существенно влияющих на фильтрационные и упругие свойства среды. Существенным является то, что характерный размер трещин существенно меньше, чем размер представительного объема среды. По этой причине разрушение описывается определенной в пространстве величиной (в простейшем случае — скалярной), значения которой имеют смысл «степени поврежденности» среды.

В соответствии с классическими представлениями о механизмах развития трещин [40] для образования единицы площади её поверхности необходимо затратить определенную энергию. При этом, в связи с тем, что процесс образования трещин является необратимым, изменение энтропии системы не меньше, чем количество тепла, полученное системой, а также работа сил, отвечающих за разрушение среды.

Таким образом, второе начало термодинамики без учета внешних источников имеет вид:

$$\int_{\Omega} \left(m_s \frac{d_s s_s}{dt} + m_f \frac{d_f s_f}{dt} \right) d\Omega \geq - \int_{\partial\Omega_\alpha(t)} \frac{\mathbf{q}_\alpha \mathbf{n}}{T} d\omega_\alpha + \frac{1}{T} \int_{\Omega} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} d\Omega, \quad (1.10)$$

где s_α — удельная энтропия фазы $\alpha = f, s$, \mathbf{Y} — скорость диссипации энергии, связанной с разрушением материала скелета, \mathbf{D} — тензор повреждаемости.

Применяя формулу Грина и переходя к дифференциальному виду, имеем следующее выражение:

$$m_s \frac{d_s s_s}{dt} + m_f \frac{d_f s_f}{dt} + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \quad (1.11)$$

Определим свободную энергию Гельмгольца для фазы $\alpha = f, s$ как (считаем, что температуры фаз равны):

$$\psi_\alpha = e_\alpha - T s_\alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\psi_\alpha &= de_\alpha - Tds_\alpha - s_\alpha dT, \\ ds_\alpha &= \frac{1}{T} (de_\alpha - d\psi_\alpha - s_\alpha dT). \end{aligned}$$

Соответственно, неравенство (1.11) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_f \frac{d_f \psi_f}{dt} - m_s \frac{d_s e_s}{dt} - m_f \frac{d_f e_f}{dt} + \right. \\ \left. + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f s_f \frac{d_f T}{dt} \right) + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \quad (1.12) \end{aligned}$$

Запишем закон сохранения энергии (1.9) в виде:

$$\begin{aligned} m_s \frac{d_s e_s}{dt} + m_f \frac{d_f e_f}{dt} = \operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{v}_f + \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{v}_s) + \\ + m_s \mathbf{v}_s \left(\mathbf{f} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) + m_f \mathbf{v}_f \left(\mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} \right) - \operatorname{div}(\mathbf{q}). \quad (1.13) \end{aligned}$$

Воспользуемся выражением для баланса энергии флюида:

$$\begin{aligned} d\psi_f &= d(e_f - Ts_f) = \\ &= \left[-pd \left(\frac{1}{\rho_f} \right) + Tds_f \right] - d(Ts_f) = -pd \left(\frac{1}{\rho_f} \right) - s_f dT. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Подставляя уравнения (1.13) и (1.14) в (1.12), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left[\operatorname{div} (\boldsymbol{\sigma}_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{v}_s) + m_s \mathbf{v}_s \left(\mathbf{f} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right) + \right. \\ \left. + m_f \mathbf{v}_f \left(\mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} \right) \right] - \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{T} \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \\ + \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{1}{T} \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& [\boldsymbol{\sigma}_f : \text{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\mathbf{v}_s)] - \mathbf{q} \text{grad}(T) - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} - \\
& - \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \mathbf{v}_s \left[m_s \left(\mathbf{f} - \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} \right) + \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \right] + \\
& + \left[m_f \mathbf{v}_f \left(\mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{ft} \right) + (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \text{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) \right] \geq 0. \quad (1.15)
\end{aligned}$$

После подстановки выражения для закона сохранения импульса (1.6) в неравенство (1.15), получим:

$$\begin{aligned}
& - \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \\
& + [\boldsymbol{\sigma}_f : \text{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\mathbf{v}_s)] - \\
& - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} + (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \left[m_f \left(\mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{dt} \right) + \text{div} \boldsymbol{\sigma}_f \right] - \mathbf{q} \text{grad}(T) \geq 0. \quad (1.16)
\end{aligned}$$

Левая часть неравенства (1.16) представима в виде суммы диссипаций скелета δ_s , флюида δ_f и тепловой диссипации δ_t :

$$\delta_s + \delta_f + \delta_t \geq 0, \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned}
\delta_s = & - \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \\
& + [\boldsymbol{\sigma}_f : \text{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\mathbf{v}_s)] - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt}, \quad (1.18)
\end{aligned}$$

$$\delta_f = (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) \left[m_f \left(\mathbf{f} - \frac{d_f \mathbf{v}_f}{\partial t} \right) + \text{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) \right], \quad (1.19)$$

$$\delta_t = -\frac{\mathbf{q}}{T} \text{grad}(T). \quad (1.20)$$

Эти выражения далее используются для построения определяющих соотношений в рамках процедуры Колмана-Нолла.

1.4 Процедура Колмана-Нолла

Как уже упоминалось ранее процедура Колмана-Нолла позволяет получить такой вид функциональных зависимостей между различными параметрами, что второй закон термодинамики выполняется при любой последовательности состояний.

Рассмотрим выражение (1.19) для диссипации флюида δ_f . Предполагая, что тензор напряжений флюида — шаровой (то есть $\boldsymbol{\sigma}_f = -(m_f/\rho_f)\mathbf{I}p$), получаем, что

$$\delta_f = \boldsymbol{w} \left[-\text{grad}(p) + \rho_f \left(\boldsymbol{f} - \frac{d_f \boldsymbol{v}_f}{\partial t} \right) \right].$$

Условие $\delta_f \geq 0$ выполняется, если положить:

$$\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{k}}{\mu} \left[-\text{grad}(p) + \rho_f \left(\boldsymbol{f} - \frac{d_f \boldsymbol{v}_f}{\partial t} \right) \right],$$

что соответствует феноменологическому закону Дарси. Здесь \boldsymbol{k} — симметричный положительно определенный тензор абсолютной проницаемости, μ — вязкость флюида. Следовательно, получаем, что:

$$\delta_f = \boldsymbol{w} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{k}}{\mu} \right)^{-1} \cdot \boldsymbol{w} \geq 0.$$

Далее рассмотрим тепловую диссипацию δ_t . Воспользуемся законом Фурье в виде:

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\kappa} \text{grad}(T),$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ — симметричный положительно определенный тензор коэффициентов теплопроводности. В этом случае получаем, что:

$$\delta_t = \frac{1}{T} (\nabla T)^T : \boldsymbol{\kappa} : \nabla T \geq 0.$$

Отсюда

$$\delta_f + \delta_t \geq 0,$$

и согласно процедуре Колмана-Нолла можно предположить, что для выполне-

ния неравенства (1.17) достаточно, чтобы выполнялось:

$$\delta_s = - \left(m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} + m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + m_f \frac{p}{\rho_f^2} \frac{d_f \rho_f}{dt} \right) + \\ + [\boldsymbol{\sigma}_f : \text{grad}(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_s) + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\mathbf{v}_s)] - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \quad (1.21)$$

Введем тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Если рассматривать случай малых деформаций, тензор деформаций выражается через вектор перемещений $\boldsymbol{\xi}$ по формуле:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad} \boldsymbol{\xi} + \text{grad} \boldsymbol{\xi}^T).$$

Введем также пористость (объемную долю) ϕ , определяемую как отношение массы флюида в рассматриваемом объеме к «истинной» плотности флюида: $\phi = m_f / \rho_f$. Тогда, подставляя уравнение неразрывности (1.3) в выражение (1.21) и считая, что тензор напряжений флюида — шаровой, получаем:

$$\delta_s = -m_s \frac{d_s \psi_s}{dt} - m_s s_s \frac{d_s T}{dt} + p \frac{d_s \phi}{dt} + \boldsymbol{\sigma} : \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \mathbf{Y} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \quad (1.22)$$

Будем считать, что свободная энергия Гельмгольца для скелета $\psi_s = \psi_s(\chi)$ зависит от следующих параметров:

$$\chi_\psi = \{\boldsymbol{\varepsilon}, \phi, T, \mathbf{D}\},$$

тогда выражение для $d\psi_s/dt$ имеет вид:

$$\frac{d_s \psi_s}{dt} = \frac{\partial \psi_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} \frac{d_s \phi}{dt} + \frac{\partial \psi_s}{\partial T} \frac{d_s T}{dt} + \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{D}} : \frac{d_s \mathbf{D}}{dt}. \quad (1.23)$$

После подстановки (1.23) в (1.22) получаем:

$$\delta_s = \left(\boldsymbol{\sigma} - m_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} + \left(p - m_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \phi} \right) \frac{d_s \phi}{dt} - \\ - \left(s_s + \frac{\partial \psi_s}{\partial T} \right) \frac{d_s T}{dt} - \left(\mathbf{Y} + m_s \frac{\partial \psi_s}{\partial \mathbf{D}} \right) \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \quad (1.24)$$

Для того чтобы перейти от пористости ϕ к давлению p введем энергию

Гиббса g_s , зависящую от параметров:

$$\chi_g = \{\varepsilon, p, T, \mathbf{D}\},$$

такую, что

$$m_s g_s = m_s \psi_s - p \phi.$$

Тогда выражение (1.24), записанное в терминах энергии Гиббса, примет вид:

$$\begin{aligned} \delta_s = & \left(\boldsymbol{\sigma} - m_s \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \frac{d_s \boldsymbol{\varepsilon}}{dt} - \left(\phi + m_s \frac{\partial g_s}{\partial p} \right) \frac{d_s p}{dt} - \\ & - \left(s_s + \frac{\partial g_s}{\partial T} \right) \frac{d_s T}{dt} - \left(\mathbf{Y} + m_s \frac{\partial g_s}{\partial \mathbf{D}} \right) \frac{d_s \mathbf{D}}{dt} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Для выполнения принципа термодинамической согласованности и материальной независимости от системы отсчета достаточно, чтобы выполнялось неравенство (1.25). Частным решением данного неравенства являются соотношения:

$$\boldsymbol{\sigma} = m_s \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}; \quad m_f = -\rho_f(p, T) m_s \frac{\partial g_s}{\partial p}; \quad s_s = -\frac{\partial g_s}{\partial T}; \quad \mathbf{Y} = -m_s \frac{\partial g_s}{\partial \mathbf{D}}, \quad (1.26)$$

обеспечивающие выполнение равенства $\delta_s = 0$ и являющиеся определением величин, стоящих в левой части равенств.

Отметим, что теперь, если известно выражение для свободной энергии Гиббса g_s , то определяющие соотношения для всех требуемых переменных заданы. Их конкретный вид определяется видом зависимости энергии g_s от переменных χ_g .

Введем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \text{ — тензор коэффициентов упругой деформации} \\
&\quad \text{(4-го ранга),} \\
\mathbf{b} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial p} \text{ — тензор коэффициентов Био,} \\
\boldsymbol{\alpha}_T &= -\mathbf{C}^{-1} : \left(m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T} \right) \text{ — тензор термического расширения,} \\
\frac{1}{N} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial p} \text{ — модуль Био,} \\
\alpha_\varphi &= m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial T} \text{ — объемный коэффициент} \\
&\quad \text{термического расширения скелета,} \\
C_{ps} &= -m_s T \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial T} \text{ — теплоемкость скелета,} \\
\boldsymbol{\gamma} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{D}} \text{ — тензор коэффициентов разрушения,} \\
&\quad \text{связанный с деформацией породы,} \\
\boldsymbol{\omega} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \mathbf{D}} \text{ — тензор коэффициентов разрушения,} \\
&\quad \text{связанный с изменением порового давления,} \\
\boldsymbol{\theta} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \mathbf{D}} \text{ — тензор коэффициентов разрушения,} \\
&\quad \text{связанный с неизотермическими эффектами,} \\
\boldsymbol{\eta} &= -m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \text{ — тензор коэффициентов разрушения,} \\
&\quad \text{связанный с изменением поврежденности породы.}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Предположим, что тензор упругих коэффициентов \mathbf{C} является линейной функцией от параметра повреждаемости \mathbf{D} , а $\boldsymbol{\gamma}$ — линейной функцией от тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, причем из (1.27) следует, что должно выполняться условие:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{D}} = m_s \frac{\partial^3 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2 \partial \mathbf{D}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \tag{1.28}$$

Будем считать, что энергия Гиббса может быть представлена в виде много-

члена относительно элементов вектора χ_g следующего вида:

$$\Delta g_s = \mathbf{A} \cdot \Delta \chi_g + \frac{1}{2} \Delta \chi_g^T \cdot \mathbf{B} \cdot \Delta \chi_g + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_s}{\partial \epsilon^2 \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} \Delta \epsilon : \Delta \epsilon : \Delta \mathbf{D}, \quad (1.29)$$

где $\Delta f = f - f^0$ для всех f ,

$$\chi_g = \begin{bmatrix} \epsilon \\ p \\ T \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_s}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial g_s}{\partial p} \\ \frac{\partial g_s}{\partial T} \\ \frac{\partial g_s}{\partial \mathbf{D}} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g_s}{\partial \epsilon^2} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial \epsilon \partial p} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial \epsilon \partial T} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial \epsilon \partial \mathbf{D}} \\ \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \epsilon} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial T} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \mathbf{D}} \\ \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \epsilon} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial p} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial T^2} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \mathbf{D}} \\ \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \epsilon} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial p} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial T} & \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D}^2} \end{bmatrix}_{\chi_g^0}.$$

Отметим, что из слагаемых третьего порядка по аргументам $\Delta \chi_g$ в уравнении (1.29) оставлено только последнее, содержащее $\Delta \epsilon : \Delta \epsilon : \Delta \mathbf{D}$. Это связано с допущениями о том, что (а) \mathbf{C} линейно зависит от \mathbf{D} и (б) другие коэффициенты от \mathbf{D} не зависят (в частности от повреждаемости не зависят значения коэффициентов Био, модуля Био, теплоемкости среды и так далее). Допущение (б) можно мотивировать тем фактом, что образование новой поверхности трещин, вообще говоря, не означает, что образуется новый *объем* внутри трещины. Очевидно, что в этом случае все параметры модели, слабо зависящие от деформации, практически не меняются. Величина «трещиноватой» части внутренней энергии, таким образом, связана исключительно с образованием новой удельной поверхности трещин.

Согласно принципу равноприсутствия [41] набор независимых параметров, присутствующих в одном определяющем соотношении, должен присутствовать и в остальных. Поскольку в качестве набора параметров выбран χ_g , то считаем, что $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\chi_g)$, $m_f = m_f(\chi_g)$, $s_s = s_s(\chi_g)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\chi_g)$.

Дифференцируя энергию Гиббса (1.29) в соответствии с выражениями (1.26), получим определяющие соотношения:

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{\sigma} &= m_s \frac{\partial g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial p} \Big|_{\chi_g^0} \Delta p + m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial T} \Big|_{\chi_g^0} \Delta T + \\
&\quad + m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \mathbf{D} + m_s \frac{\partial^3 g_s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2 \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta \mathbf{D}, \\
\Delta m_f &= -\rho_f(p, T) m_s \frac{\partial g_s}{\partial p} = \\
&= -\rho_f m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - m_s \left(\rho_f \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial p} \Big|_{\chi_g^0} + \frac{\partial \rho_f}{\partial p} \frac{\partial g_s}{\partial p} \right) \Delta p - \\
&\quad - m_s \left(\rho_f \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial T} \Big|_{\chi_g^0} + \frac{\partial \rho_f}{\partial T} \frac{\partial g_s}{\partial T} \right) \Delta T - \rho_f m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial p \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \mathbf{D}, \tag{1.30} \\
\Delta S_s &= - \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial p} \Big|_{\chi_g^0} \Delta p - \\
&\quad - \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial T} \Big|_{\chi_g^0} \Delta T - \frac{\partial^2 g_s}{\partial T \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \mathbf{D}, \\
\Delta \mathbf{Y} &= - m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial p} \Big|_{\chi_g^0} \Delta p - m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial T} \Big|_{\chi_g^0} \Delta T - \\
&\quad - m_s \frac{\partial^2 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{D}} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \mathbf{D} - \frac{1}{2} m_s \frac{\partial^3 g_s}{\partial \mathbf{D} \partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \Big|_{\chi_g^0} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

С учетом (1.27) получаем конечный вид определяющих соотношений для скелета и флюида:

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{\sigma} &= \left(\mathbf{C}(\mathbf{D}^0) + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{D}^0)}{\partial \mathbf{D}} : \Delta \mathbf{D} \right) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0) : \Delta \mathbf{D}, \\
\Delta m_f &= \rho_f \mathbf{b} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T + \rho_f \boldsymbol{\omega} : \Delta \mathbf{D}, \\
\Delta S_s &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T + \boldsymbol{\theta} : \Delta \mathbf{D}, \tag{1.31} \\
\Delta \mathbf{Y} &= \left(\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \Delta p + \boldsymbol{\theta} \Delta T + \boldsymbol{\eta} : \Delta \mathbf{D},
\end{aligned}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} + \phi \frac{1}{K_f}, \quad \alpha_m = \alpha_\varphi + \phi \alpha_f, \quad S_\alpha = m_\alpha s_\alpha,$$

где K_f — модуль объемного сжатия флюида, C_{pf} — теплоемкость флюида, α_f — коэффициент теплового расширения флюида.

На примере выражения для тензора напряжений убедимся, что полученные определяющие соотношения в случае отсутствия повреждаемости совпадают со стандартными зависимостями для теории пороупругости. Рассмотрим подробнее часть выражения для напряжения, отвечающую за деформацию и повреждаемость:

$$\Delta\sigma = \left(\mathbf{C}(\mathbf{D}^0) + \frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{D}^0)}{\partial \mathbf{D}} : \Delta \mathbf{D} \right) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\varepsilon}^0) : \Delta \mathbf{D}.$$

В соответствии с предположением о линейной зависимости для \mathbf{C} и $\boldsymbol{\gamma}$ (1.28) данные коэффициенты можно представить в виде:

$$\mathbf{C} = A\mathbf{D} + \mathbf{B}, \quad \boldsymbol{\gamma} = -A\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta\sigma &= \\ &= (A\mathbf{D}^0 + \mathbf{B} + A(\mathbf{D} - \mathbf{D}^0)) : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) + (A\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{M}) : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^0) = \\ &= (A\mathbf{D} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon} - (A\mathbf{D} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon}^0 + (A\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{M}) : \mathbf{D} - (A\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{M}) : \mathbf{D}^0 = \\ &= (A\mathbf{D} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon} - A\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}^0 + A\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathbf{D} - \mathbf{M}\mathbf{D} - A\boldsymbol{\varepsilon}^0\mathbf{D}^0 + \mathbf{M}\mathbf{D}^0 = \\ &= [(A\mathbf{D} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon} - (A\mathbf{D}^0 + \mathbf{B}) \boldsymbol{\varepsilon}^0] - [\mathbf{M}\mathbf{D} - \mathbf{M}\mathbf{D}^0] = \\ &= \Delta(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta(\mathbf{M} : \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Если $\mathbf{M} = 0$, то $\Delta\sigma = \Delta(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon})$, что соответствует классическим представлениям о зависимости тензоров напряжений и деформаций.

Далее запишем выражения для внутренней энергии скелета и флюида. Внутренняя энергия скелета выражается через энергию Гиббса по формуле:

$$\Delta E_s = m_s \Delta e_s = m_s \Delta \psi_s + m_s \Delta(Ts_s) = m_s \Delta g_s + \Delta(p\phi) + \Delta(TS_s).$$

С учетом соотношений (1.29) и (1.31) выражение для внутренней энергии ске-

лета примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta E_s = & \sigma^0 \Delta \epsilon - \underline{\phi^0 \Delta p} - \underline{S_s^0 \Delta T} - \mathbf{Y}^0 \Delta \mathbf{D} - \mathbf{b} \Delta \epsilon \Delta p - \mathbf{C} : \alpha_T \Delta \epsilon \Delta T - \gamma^0 \Delta \epsilon \Delta \mathbf{D} + \\ & + \alpha_\varphi \Delta p \Delta T - \omega \Delta p \Delta \mathbf{D} - \theta \Delta T \Delta \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{C}^0 : \Delta \epsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{N} \Delta p^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T^2 - \frac{1}{2} \eta \Delta \mathbf{D}^2 - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^0}{\partial \epsilon} : \Delta \epsilon^2 \Delta \mathbf{D} + \underline{\Delta(p\phi)} + \underline{\Delta(S_s T)}. \end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые в последнем выражении можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \underline{-\phi^0 \Delta p + \Delta(\phi p)} &= -\phi^0 \Delta p + \phi^0 \Delta p + p \Delta \phi = p \Delta \phi = \\ &= p \left(\mathbf{b} : \Delta \epsilon + \frac{\Delta p}{N} - \alpha_\phi \Delta T + \omega : \Delta \mathbf{D} \right), \\ \underline{-S_s^0 \Delta T + \Delta(S_s T)} &= T \Delta S_s = T \left(\mathbf{C} : \alpha_T \Delta \epsilon - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T + \theta : \Delta \mathbf{D} \right). \end{aligned}$$

С учетом данных выражений внутренняя энергия скелета окончательно записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Delta E_s = & \left[\sigma^0 + \frac{1}{2} \mathbf{C}^0 : \Delta \epsilon + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \alpha_T \right] \Delta \epsilon + \\ & + \left[\frac{1}{N} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_\varphi \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p + \\ & + \left[-\alpha_\phi \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T - \\ & - \left[\mathbf{Y}^0 + \left(\gamma^0 + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^0}{\partial \epsilon} \Delta \epsilon \right) \Delta \epsilon - \omega p^0 - \theta T^0 + \frac{1}{2} \eta \Delta \mathbf{D} \right] \Delta \mathbf{D}. \quad (1.32) \end{aligned}$$

Дополним данные определяющие соотношения выражениями для флюида. Предположим, что удельная свободная энергия Гельмгольца флюида ψ_f зависит от двух параметров: плотности флюида ρ_f и температуры T :

$$\chi_{\psi_f} = \{\rho_f, T\},$$

тогда полный дифференциал свободной энергии Гельмгольца можно записать в виде:

$$d\psi_f = \frac{\partial \psi_f}{\partial \rho_f} d\rho_f + \frac{\partial \psi_f}{\partial T} dT.$$

Введем удельную энергию Гиббса для флюида, зависящую от давления p и температуры T :

$$\chi_{g_f} = \{p, T\}.$$

Полный дифференциал для энергии Гиббса можно выразить через свободную энергию Гельмгольца по формуле:

$$dg_f = d\psi_f + p \frac{1}{\rho_f} = \frac{\partial \psi_f}{\partial \rho_f} d\rho_f + \frac{\partial \psi_f}{\partial T} dT + p d \frac{1}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_f} dp.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \psi_f}{\partial \rho_f} = \frac{p}{\rho_f^2}, \quad \frac{\partial \psi_f}{\partial T} = -s_f,$$

то

$$\frac{\partial g_f}{\partial p} = \frac{1}{\rho_f}, \quad \frac{\partial g_f}{\partial T} = -s_f.$$

Предположим, что флюид является слабосжимаемой жидкостью. Тогда удельную энергию Гиббса можно представить в квадратичном виде:

$$g_f = g_f^0 + \left. \frac{\partial g_f}{\partial p} \right|_{\chi_{g_f}^0} \Delta p + \left. \frac{\partial g_f}{\partial T} \right|_{\chi_{g_f}^0} \Delta T + \left. \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial T} \right|_{\chi_{g_f}^0} \Delta p \Delta T + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_f}{\partial p^2} \right|_{\chi_{g_f}^0} \Delta p^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_f}{\partial T^2} \right|_{\chi_{g_f}^0} \Delta T^2. \quad (1.33)$$

Введем следующие коэффициенты:

$$\frac{1}{K_f} = -\rho_f \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial p} \text{ — коэффициент объемного расширения флюида,} \quad (1.34)$$

$$\alpha_f = \rho_f \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial T} \text{ — объемный коэффициент термического расширения флюида,} \quad (1.35)$$

$$C_{pf} = -T m_f \frac{\partial^2 g_f}{\partial T \partial T} \text{ — теплоемкость флюида.} \quad (1.36)$$

Тогда определяющие соотношения для плотности ρ_f и удельной энтропии флюида s_f примут вид:

$$\Delta \frac{1}{\rho_f} = \Delta \left(\frac{\partial g_f}{\partial p} \right) = \left. \frac{\partial^2 g_f}{\partial p^2} \right|_{\chi_g^0} \Delta p + \left. \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial T} \right|_{\chi_g^0} \Delta T = -\frac{1}{\rho_f} \frac{1}{K_f} \Delta p + \frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta T, \quad (1.37)$$

$$\Delta s_f = \Delta \left(-\frac{\partial g_f}{\partial T} \right) = - \frac{\partial^2 g_f}{\partial p \partial T} \Big|_{\chi_g^0} \Delta p - \frac{\partial^2 g_f}{\partial T^2} \Big|_{\chi_g^0} \Delta T = -\frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta p + \frac{C_{pf}}{m_f} \frac{\Delta T}{T^0}. \quad (1.38)$$

Запишем изменение внутренней энергии флюида через энергию Гиббса по формуле:

$$\Delta e_f = \Delta g_f + \Delta \left(p \frac{1}{\rho_f} \right) + \Delta(T s_f)$$

и рассмотрим каждое из слагаемых:

$$\Delta g_f = -\frac{1}{\rho_f^0} \Delta p - s_f^0 \Delta T + \frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta p \Delta T - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_f} \frac{1}{K_f} \Delta p^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{pf}}{T^0} \Delta T^2,$$

$$\Delta \left(p \frac{1}{\rho_f} \right) = p \Delta \frac{1}{\rho_f} + \frac{1}{\rho_f^0} \Delta p,$$

$$\Delta(T s_f) = T \Delta s_f + s_f^0 \Delta T.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta e_f &= p \Delta \frac{1}{\rho_f} + T \Delta s_f - \frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta p \Delta T + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_f} \frac{1}{K_f} \Delta p^2 - \frac{1}{2} \frac{C_{pf}}{m_f T^0} \Delta T^2 = \\ &= \frac{1}{\rho_f} \left[\frac{p}{K_f} \Delta p - \alpha_f p \Delta T - \alpha_f T \Delta p + \frac{C_{pf}}{m_f T^0} \frac{T}{T^0} \Delta T + \alpha_f \Delta p \Delta T - \frac{1}{2} \frac{1}{K_f} \Delta p^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{C_{pf}}{T^0} \Delta T^2 \right] = \frac{1}{\rho_f} \left[\frac{1}{K_f} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_f \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p - \\ &\quad - \frac{1}{\rho_f} \left[\alpha_f \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \frac{C_{pf}}{\phi T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T. \quad (1.39) \end{aligned}$$

В следующем разделе полученные определяющие соотношения рассматривались в рамках полной постановки задачи.

1.5 Система уравнений модели

Введем следующие предположения:

- плотность материала скелета пренебрежимо слабо зависит от давления;
- внешние и инерционные силы пренебрежимо малы;
- кинетическая энергия флюида пренебрежимо мала по сравнению с величиной внутренней энергии;

- скорость движения скелета пренебрежимо мала по сравнению со скоростью течения флюида.

С учетом данных допущений система уравнений (1.3), (1.6), (1.9) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) &= 0, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + (m_s + m_f) \mathbf{f} &= 0, \\
\frac{\partial (m_s e_s + m_f e_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f e_f \mathbf{w}) &= \\
&= \operatorname{div}(-p \mathbf{w}) + (m_s \mathbf{v}_s + m_f \mathbf{v}_f) \mathbf{f} - \operatorname{div}(\mathbf{q}), \\
\mathbf{w} = \frac{\mathbf{k}}{\mu} [-\operatorname{grad}(p) + \rho_f \mathbf{f}], \quad \mathbf{q} &= -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad}(T).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Для замыкания данной системы используются определяющие соотношения (1.31), (1.32), (1.39) и закон развития повреждаемости со временем в виде зависимости

$$\tau \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}, p, T, \mathbf{D}),$$

где τ — время релаксации. В случае $\tau = 0$ (мгновенная кинетика) предполагается, что величина разрушения зависит только от текущего состояния среды, то есть параметр повреждаемости является явной функцией от деформации, порового давления и температуры: $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon}, p, t)$.

Если в дополнение к сделанным ввести следующие допущения:

- параметр повреждаемости является скалярной величиной;
- коэффициенты разрушения $\boldsymbol{\omega} = 0, \boldsymbol{\theta} = 0, \boldsymbol{\eta} = 0$ (то есть напряжение, масса флюида и энтропия скелета не зависят явно от параметра повреждаемости),

то система (1.40) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) &= 0, \\
\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= 0, \\
\frac{\partial (m_s e_s + m_f e_f)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f e_f \mathbf{w}) &= \operatorname{div}(-p \mathbf{w}) - \operatorname{div}(\mathbf{q}), \\
\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \operatorname{grad}(p), \quad \mathbf{q} = -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad}(T), \quad \tau \frac{dD}{dt} &= F(\boldsymbol{\varepsilon}, p, T, \mathbf{D}).
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Для уточнения вида определяющих соотношений требуется определить конкретный вид зависимости тензора упругих коэффициентов \mathbf{C} от повреждаемости D . Используемая выше процедура Колмана-Нолла не позволяет однозначно установить вид данной зависимости, однако характерное поведение \mathbf{C} может быть получено из общих соображений, отражающих тот факт, что D — параметр *повреждаемости*. Это означает, что с ростом D должен «убывать» тензор упругих коэффициентов \mathbf{C} (то есть среда оказывает меньшее сопротивление нагрузке). В простейшем случае такая зависимость может быть выражена формулой [5]:

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}(1 - D), \quad (1.42)$$

где $\tilde{\mathbf{C}}$ — тензор упругих коэффициентов неповрежденного материала. Таким образом, в соответствии с выражением (1.28) коэффициент γ зависит от тензора деформаций как $\gamma(\boldsymbol{\varepsilon}) = \tilde{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}$.

В результате определяющие соотношения (1.31) принимают вид:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\sigma} &= \tilde{\mathbf{C}}(1 - D) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T - \tilde{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 : \Delta D, \\ \Delta m_f &= \rho_f \mathbf{b} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T, \\ \Delta S_s &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \alpha_\phi \Delta p + \frac{C_{ps}}{T^0} \Delta T, \\ \Delta Y &= \tilde{\mathbf{C}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \\ \Delta \frac{1}{\rho_f} &= -\frac{1}{\rho_f} \frac{1}{K_f} \Delta p + \frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta T, \\ \Delta S_f &= -\frac{1}{\rho_f} \alpha_f \Delta p + \frac{C_{pf}}{m_f} \frac{\Delta T}{T^0}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Стоит отметить, что представленный вид обобщенной силы \mathbf{Y} совпадает используемым в литературе, см., например, [42].

Выражение для внутренней энергии скелета имеет вид:

$$\Delta E_s = \Delta E_{s\varepsilon} + \Delta E_{sp} + \Delta E_{sT} + \Delta E_{sD},$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta E_{s\varepsilon} &= \left[\boldsymbol{\sigma}^0 + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\
\Delta E_{sp} &= \left[\frac{1}{N} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_\varphi \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p, \\
\Delta E_{sT} &= \left[-\alpha_\varphi \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T, \\
\Delta E_{sD} &= - \left[\mathbf{Y}^0 + \tilde{\mathbf{C}} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right] \Delta \mathbf{D}.
\end{aligned} \tag{1.44}$$

Выражение для внутренней энергии флюида имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta E_f &= \left[\frac{\phi}{K_f} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \phi \alpha_f \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta p - \\
&\quad - \left[\phi \alpha_f \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \frac{C_{pf}}{T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \Delta T.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

В данном разделе был приведен общий вид системы уравнений модели. Для учета разрушения среды требуется ввести конкретный вид выражения, описывающего эволюцию параметра повреждаемости. В следующем разделе приведено описание возможных подходов к моделированию динамики разрушения.

1.6 Моделирование разрушения среды

В представленном выше выводе параметр \mathbf{D} является феноменологическим. Его физический смысл как параметра повреждаемости связан с определенными механическими процессами в среде и может быть определен только с помощью дополнительных предположений. Настоящий раздел посвящен анализу данного вопроса.

В работе [43] понятие разрушения материала понимается как «исчерпание несущей способности тела, происшедшее или вследствие наступления беспрепятственного пластического течения (неограниченного изменения формы) или вследствие накопления повреждений и развития трещин». Существует несколько подходов к моделированию процессов разрушения, основными из которых являются механика развития трещин и континуальная механика разрушения.

Первый класс подходов, предложенный А. Гриффитсом [37], рассматривает каждую трещину как отдельный объект, имеющий определенные границы,

причем трещина является поверхностью разрыва параметров сплошной среды. В данном подходе предполагается, что рост трещины происходит при достижении определенного критического состояния сплошной среды (критерий разрушения) в точках фронта трещины. Процессы инициации трещины, вообще говоря, не описываются в рамках данного класса моделей.

Второй подход был предложен Ю.Н. Работновым [2] и Л.М. Качановым [3]. В рамках данной теории предполагается, что разрушение материала вызвано наличием в материале множества различных микротрещин и микропор, при этом «эффективные» прочностные свойства среды будут зависеть от степени разрушения. Описание процесса накопления повреждений материала производится при помощи некоторого макроскопического параметра. В качестве такого параметра используется параметр повреждаемости $0 \leq \mathbf{D} \leq 1$ (Ю.Н. Работнов) или параметр сплошности $\psi = 1 - \mathbf{D}$ (Л.М. Качанов).

В настоящей работе используется подход механики континуального разрушения. При этом рассматриваются достаточно медленные, квазистатические процессы, а пластические деформации отсутствуют. Для описания степени разрушения среды используется параметр повреждаемости, который может быть как скалярной величиной, так и тензором второго или четвертого ранга. Значение параметра, равное 0, соответствует состоянию среды в отсутствие повреждений, а 1 — полному разрушению. Различные способы интерпретации данного параметра приводятся далее.

Интерпретация параметра повреждаемости. В наиболее простом случае, когда разрушение изотропно (то есть происходит одинаково во всех направлениях), параметр повреждаемости является скалярной величиной и имеет смысл поверхностной плотности пересечений микротрещин с любой плоскостью внутри тела, имеющей нормаль \mathbf{n} [6] (рисунок 1.2).

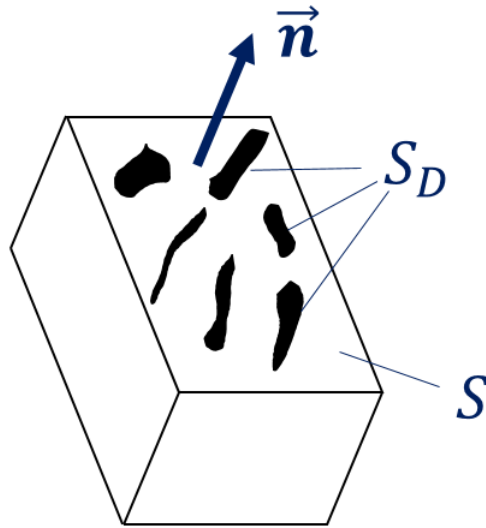


Рис. 1.2. Интерпретация скалярного параметра повреждаемости

Рассмотрим некоторую плоскость, проходящую через элементарный объем поврежденной среды. Пусть S — общая площадь сечения элемента плоскостью, а S_D — суммарная площадь поверхности сечения, имеющей повреждения. Тогда параметр повреждаемости определяется как [3,44]:

$$D = \frac{S_D}{S}, \quad \mathbf{D} = D \cdot \mathbf{I}, \quad (1.46)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор.

В случае, если имеют место сразу несколько механизмов разрушения [42], то для каждого процесса может быть введен свой скалярный параметр. Например, согласно [45] при анализе разрушения композитных материалов естественно ввести свой параметр повреждаемости для каждой фазы композита.

Как правило, разрушение материала неізотропно. В этом случае параметр повреждаемости имеет тензорный вид. Рассмотрим элементарную площадку dS , ориентированную нормалью \mathbf{n} . Тогда параметр повреждаемости можно представить в виде оператора, являющегося тензором второго ранга и преобразующего данную поврежденную поверхность в некоторую неповрежденную (эффективную) с площадью $d\tilde{S} = dS - dS_D$ и нормалью $\tilde{\mathbf{n}}$ [8]. В этом случае аналог формулы (1.46) имеет вид:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}) \mathbf{n} dS = \tilde{\mathbf{n}} d\tilde{S}. \quad (1.47)$$

Дальнейшее обобщение этой модели представлено в работах [9,46–48]. В них

предполагается, что параметр повреждаемости является тензором четвертого или более высокого ранга. В дополнение к предыдущему описанию для выбранной площадки вводится некоторый опорный вектор $\boldsymbol{\nu}$ таким образом, чтобы тензор $\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{n} dS$ (« \otimes » — тензорное произведение векторов, $[\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{n}]_{i,j} = \nu_i n_j$) описывал исходную геометрическую конфигурацию (рисунок 1.3). Соответственно, формула (1.47) принимает вид:

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) : (\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{n}) dS = \boldsymbol{\nu} \otimes \tilde{\boldsymbol{n}} d\tilde{S}. \quad (1.48)$$

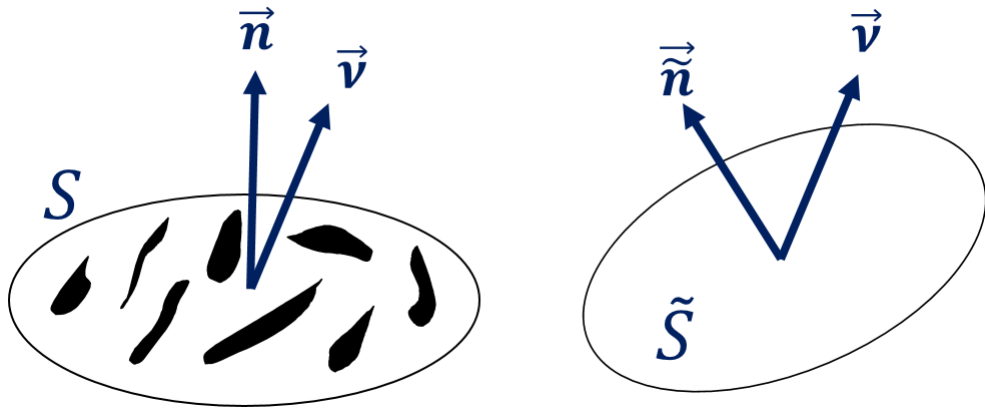


Рис. 1.3. Интерпретация тензорного параметра повреждаемости

В рамках данного подхода к описанию параметра повреждаемости часто вводится также понятие эффективного напряжения $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, то есть напряжения, действующего на неповрежденную часть поверхности [42]. Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ — напряжение, приложенное к некоторому поврежденному элементу поверхности. Тогда в общем случае из баланса сил следует:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\boldsymbol{n}} d\tilde{S} = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{n} dS,$$

откуда, с учетом (1.48), получим:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}) : (\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{n}) dS = \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\nu} \otimes \boldsymbol{n}) dS$$

или

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D})^{-1}.$$

Существуют и другие подходы к определению параметра повреждаемости.

Например, в [8] для моделирования повреждения при ползучести в металлах используется параметр повреждаемости, являющийся тензором второго ранга. Рассмотрим некоторый элементарный объем V . Пусть площадь поверхности k -ой ($k = \overline{1, N}$) поры в межзерновом пространстве равна $dS_g^{(k)}$, а нормальный вектор равен $\mathbf{n}^{(k)}$ (рисунок 1.4). Тогда параметр повреждаемости можно определить как:

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^N \int_{S^k} \frac{1}{S^{(k)}(V)} \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} dS_g^{(k)},$$

где $S^{(k)}(V)$ — площадь сечения объема V плоскостью, проходящей через элемент поверхности $dS_g^{(k)}$.

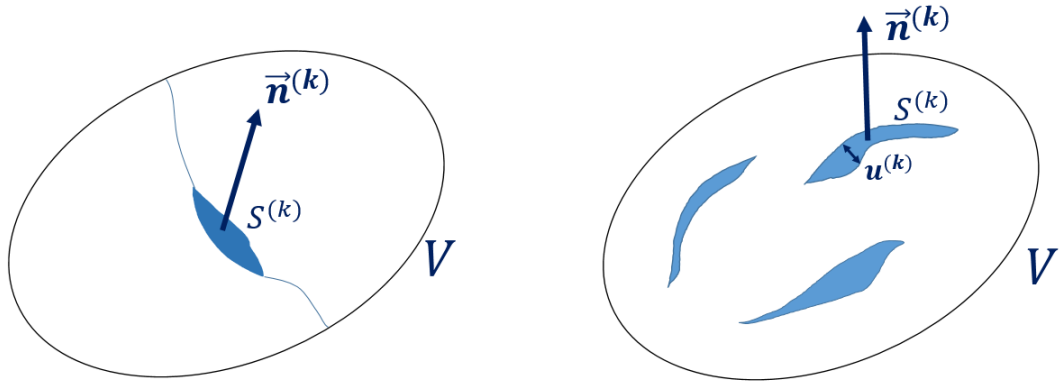


Рис. 1.4. Разрушение материала, вызванное наличием пор в межзерновом пространстве (слева) и микротрещин (справа)

С другой стороны, параметр повреждаемости можно описать с точки зрения развития микротрещин в материале (рисунок 1.4, справа). Тогда [50]:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^N \int_{S^{(k)}} \mathbf{u}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)} dS^{(k)},$$

где $S^{(k)}$ — поверхность k -й микротрещины до начала раскрытия, $\mathbf{n}^{(k)}$ и $\mathbf{u}^{(k)}$ — нормальный вектор и скачок перемещений в каждой точке трещины.

Еще один подход к определению параметра повреждаемости, описанный в [51–53], основан на статистическом анализе распределения микропор в материале. Рассмотрим некоторую сферическую поверхность S^2 вокруг рассматриваемой точки. Введем функцию распределения $\xi(\mathbf{n})$ площади микропор на некоторой элементарной площадке dA , имеющей нормаль \mathbf{n} . В соответствии с

[52] функцию распределения можно разложить в ряд:

$$\xi(\mathbf{n}) = D_0 + \mathbf{D}_1 : \mathbf{f}_1(\mathbf{n}) + \mathbf{D}_2 : \mathbf{f}_2(\mathbf{n}) + \dots,$$

где $\mathbf{f}_{1,2}$ — неприводимые тензорные базисы второго и четвертого рангов соответственно, $D_0, \mathbf{D}_{1,2}$ — скалярный и тензорные (второго и четвертого ранга соответственно) коэффициенты, имеющие смысл параметров повреждаемости. Символ «:» обозначает двойное скалярное произведение (свертку).

С учетом некоторых преобразований [54] из данного выражения следует:

$$D_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \xi(\mathbf{n}) d\Omega,$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{15}{2} \int_{S^2} \xi(\mathbf{n}) \mathbf{f}_1(\mathbf{n}) d\Omega,$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{315}{8} \int_{S^2} \xi(\mathbf{n}) \mathbf{f}_2(\mathbf{n}) d\Omega.$$

Кинетическое уравнение для параметра повреждаемости. В общем случае изменение параметра повреждаемости может быть описано некоторым кинетическим уравнением. Кинетическое уравнение может быть получено как теоретически, так и в результате лабораторных экспериментов и в общем виде записывается как:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = F(\mathbf{D}, \dots),$$

где F зависит от \mathbf{D} и таких переменных, как тензор напряжений, температура, время и так далее. В случае если текущая реакция повреждающегося материала зависит от предыстории состояний, то такую кинетику разрушения называют конечной. В противном случае — мгновенной [4]. Рассмотрим примеры зависимостей для каждого из этих случаев.

Конечная кинетика разрушения. Модель конечной кинетики разрушения характеризуется тем, что текущая степень поврежденности материала зависит от предыдущих состояний среды. В работе [43] рассматривается пример кинетического уравнения такого вида для случая изотермического разрушения

сплошной среды при одноосном растяжении. При этом скорость изменения скалярного параметра повреждаемости зависит только от максимальной величины растягивающего напряжения σ_{\max} по степенному закону вида:

$$\frac{dD}{dt} = A \left(\frac{\sigma_{\max}}{1 - D} \right)^n,$$

где A — положительный коэффициент, n — неотрицательный показатель степени.

В более общем виде уравнение для параметра поврежденности при растяжении однородного стержня выражается следующим образом [2,5,55]:

$$\frac{dD}{dt} = c\sigma^k(1 - D)^{-s},$$

где σ — напряжение, а $c > 0, k > 0, s \geq 0$ — параметры, в общем случае являющиеся функциями состояния.

Дальнейшее развитие данных подходов привело к появлению модели Качанова-Работнова-Хэйхерста [56], которая подходит для описания изотропной ползучести материала в случае одноосного и многоосного напряженных состояний. Кинетическое уравнение имеет вид, аналогичный закону Аррениуса:

$$\frac{dD}{dt} = A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \frac{\langle \sigma_{\text{eq}}^D \rangle^m}{(1 - D)^l}, \quad \langle \sigma_{\text{eq}}^D \rangle = \frac{1}{2} (\sigma_{\text{eq}}^D + |\sigma_{\text{eq}}^D|),$$

где A, l, m — параметры материала, Q — энергия активации для процесса повреждаемости, R — константа Больцмана, T — температура. Выражение для эквивалентного напряжения σ_{eq}^D может быть представлено в следующем виде:

$$\sigma_{\text{eq}}^D = a\sigma_1 + 3b\sigma + c\sigma_{\text{eq}},$$

где a, b, c — некоторые константы, σ_1 — максимальное главное напряжение, σ — среднее напряжение, σ_{eq} — эквивалентное напряжение по Мизесу.

В работе [10] представлено следующее кинетическое уравнение:

$$\frac{dD}{dt} = AD^2 + BD - C(\tau - \tau^*),$$

где A, B, C — параметры материала, τ — максимальное касательное напряже-

Таблица 1.1. Параметры материалов, приведенные в работе [57]

Тест	Материал	δ	γ
Одноосное сжатие	Мрамор	665	760
Одноосное сжатие	Известняк	1015	500
Одноосное сжатие	Гранодиорит	385	140
Одноосное сжатие	Бетон I	616	760
Одноосное сжатие	Бетон II	616	214
Одноосное сжатие	Бетон III	616	214
Трехосное сжатие	Кварцит	546	190
Трехосное сжатие	Кварцит	448	156

ние в рассматриваемой плоскости, а τ^* — пороговое его значение.

В работе [57] для моделирования разрушения горных породах при одноосном и многоосном сжатии использовался следующий закон эволюции параметра повреждаемости:

$$\frac{dD}{dt} = c\delta \frac{\gamma\xi_D}{1 + \gamma\xi_D} \left(1 - \frac{D}{D_c}\right) \frac{d\xi_D}{dt},$$

где D_c — критическое значение повреждаемости, $\xi_D = (e_{ij}e_{ij})^{1/2}$ — эквивалентная деформация, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}\delta/3$ — девиатор тензора деформаций, c — параметр нагрузки. В работе также приводится таблица со значениями параметров δ и γ для некоторых материалов (таблица 1.1).

В работе [58] представлена модель разрушения материала с учетом вязкопластических эффектов в следующем виде:

$$\frac{dD}{dt} = C_d I_2 (D^\beta \xi - \xi_0),$$

где $\xi = I_1/\sqrt{I_2}$, I_1 и I_2 — соответственно первый и второй инварианты тензора деформаций,

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad I_2 = -\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{xz}^2,$$

где ε_{ij} — компонента тензора деформаций.

Для определения коэффициентов C_d , β , ξ_0 авторами работы [58] были проведены лабораторные эксперименты на образцах песчаника и гранита. Результаты приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2. Параметры материалов, приведенные в работе [58]

Материал	$C_d, 1/c$	β	ξ_0
Гранит	3	0	-0,56
Гранит	2,2	0,15	-0,62
Песчаник	50	0,5	-0,8
Песчаник	50	0,5	-1,0

В работе [11] представлено две модели кинетики разрушения материала, полученные в результате экспериментов с газовой пушкой. Первая модель основана на расчете скорости распространения упругой волны:

$$D = 1 - \left(\frac{c}{c_0} \right)^2,$$

где c_0 и c — скорости распространения продольных упругих волн в неповрежденном и поврежденном материале соответственно.

Вторая модель основана на исследовании развития микротрещиноватости в образце горной породы и имеет следующий вид:

$$\frac{dD}{dt} = (1 - D)^2 \left(\frac{D}{1 - D} A_0 + N_0 \right) \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_0} - 1 \right)^\chi,$$

где σ_s — растягивающее напряжение, σ_0 — величина напряжения при пороговом значении параметра повреждаемости, A_0, N_0, χ — параметры материала. В расчетах, приведенных в статье [11], использовались следующие значения параметров: $N_0 = 5.2 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$, $A_0 = 9.8 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$, $\sigma_0 = 30 \text{ МПа}$, $\chi = 1.3$.

В работе [59] на основе анализа баланса энергии получено следующее уравнение:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\sigma_{\text{eq}}(1 - D)}{BD^{n-1}(1 - D)^3 - \sigma_{\text{eq}}^2} \cdot \frac{d\sigma_{\text{eq}}}{dt},$$

где σ_{eq} — эквивалентное напряжение по Мизесу, B и n — параметры материала.

В работе [60] предполагается, что скорость накопления повреждений определяется затратами энергии на создание новой свободной поверхности микротрещин. Для однородной изотропной среды предлагается кинетическое уравнение

вида:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\langle \alpha I_1 + \alpha_J J - \gamma - \beta D \rangle}{\tau \beta}, \quad \langle x \rangle = \min(0, x),$$

где I_1 — первый инвариант тензора малых деформаций, J — интенсивность касательных деформаций, τ — время релаксации, $\alpha, \alpha_J, \gamma, \beta$ — параметры модели.

Мгновенная кинетика разрушения. Мгновенная кинетика разрушения предполагает, что значение параметра повреждаемости зависит только от текущего состояния среды. Одной из наиболее известных моделей для данного случая является модель Мазарса [61], описывающая повреждение цемента при одноосном нагружении с учетом его нагрева. В данной модели предполагается, что параметр поврежденности D представляет из себя взвешенную сумму параметров поврежденности при растяжении D_t и сжатии D_c :

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c,$$

где α_t и α_c — весовые коэффициенты, а

$$D_i = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_i)}{\varepsilon_{eq}} - A_i \exp[-B_i(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})], \quad i = t, c,$$

ε_{d0} , A_i , B_i — параметры материала. Эффективное напряжение ε_{eq} можно выразить через главные напряжения по формуле:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},$$

где ε_i — главные деформации.

Для весовых коэффициентов α_t и α_c в работе [61] предлагаются выражения вида:

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{ti}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\varepsilon_{eq}^2}, \quad \alpha_c = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_{ci}(\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci})}{\varepsilon_{eq}^2},$$

где $H_i = 1$, если $\varepsilon_{ti} + \varepsilon_{ci} \geq 0$, и $H_i = 0$ в других случаях.

На основе данной модели в работе [62] предложена зависимость параметра

повреждаемости от эквивалентных деформаций в следующем виде:

$$D = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \{1 - \alpha + \alpha \exp[-\gamma(\kappa - \kappa_0)]\},$$

где κ — историческая переменная, κ_0 — пороговая деформация, α, γ — параметры материала. При этом данные параметры не обязательно имеют постоянные значения и могут зависеть, например, от температуры [63].

Данная формула использовалась в работе [64] для моделирования трещинообразования в цементе. Увеличение параметра поврежденности D определяется с помощью параметра κ , называемого пороговым разрушением и равного максимальному значению эффективной степени деформации $\tilde{\varepsilon}$, достигнутому в процессе нагрузки породы:

$$\kappa(\tau) = \max_{\tau \leq t} \tilde{\varepsilon}(\tau).$$

Для расчета $\tilde{\varepsilon}$ предлагается следующее выражение:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k} \sqrt{\left(\frac{k-1}{1-2\nu} I_1^\varepsilon\right)^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon},$$

где параметр k равен отношению сжимающего и растягивающего сопротивления материала, а I_1^ε и J_2^ε — первый инвариант тензора деформаций и второй инвариант девиаторной части тензора деформаций:

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad J_2^\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \frac{1}{6} (I_1^\varepsilon)^2.$$

Для тестовых расчетов использовались следующие значения параметров: $\kappa_0 = 7 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = 0.92$, $\beta = 250$.

В [65] представлен обобщенный вид зависимости параметра повреждаемости от некоторого скалярного параметра \tilde{x} :

$$D = \begin{cases} 0, & \tilde{x} < \tilde{x}_c; \\ D_{\max} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}_c}{\tilde{x}_{\text{off}} - \tilde{x}_c}, & \tilde{x}_c \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_{\text{off}}; \\ 1 - (1 - D_{\max}) \frac{\tilde{x}_{\text{off}}}{\tilde{x}}, & \tilde{x} > \tilde{x}_{\text{off}}, \end{cases}$$

где в качестве параметра x может использоваться напряжение σ или деформация ε .

В случае использования в качестве опорного параметра x напряжения, функция $\tilde{\sigma}$ может равняться максимальному главному напряжению $\tilde{\sigma} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ или вычисляться на основе критерия Друкера-Прагера [66]:

$$\tilde{\sigma} = \alpha I_1 + \sqrt{J_2},$$

где α — константа, зависящая от материала, I_1 — первый инвариант тензора напряжений, J_2 — второй инвариант тензора девиатора напряжений.

При использовании в качестве параметра x деформации, авторы предлагают вычислять функцию $\tilde{\varepsilon}$ исходя из энергетического критерия [67]:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{E} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}},$$

где E — модуль Юнга, \mathbf{C} — тензор упругих коэффициентов. Кроме того, данную функцию можно вычислять по формуле, предложенной Мазарсом [61]:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},$$

где ε_i — главные деформации.

Таблица 1.3. Параметры материалов, приведенные в работе [65]

	Энергетический критерий	Формула Мазарса	Максимум главных напряжений	Критерий Друкера-Прагера
\tilde{x}_c	0.0002	0.0002	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
\tilde{x}_{off}	0.015	0.003	$1.5 \cdot 10^8$	$3.3 \cdot 10^7$
$\tilde{\nu}_1$	50	50	50	50
$\tilde{\nu}_2$	50	50	50	50
\tilde{D}_1	0.81	0.81	0.65	0.6
\tilde{D}_2	0.9	0.9	0.72	0.72

В работе [68] параметр повреждаемости измеряется методом акустической эмиссии при одноосном нагружении образца гранита. В результате, авторами

была получена следующая зависимость параметра D от деформации ε :

$$D = \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq \varepsilon_a; \\ c_1 \left(\exp \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_a}{c_2} - 1 \right), & \varepsilon_a < \varepsilon \leq \varepsilon_b; \\ c_1 \left(\exp \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_a}{c_2} - 1 \right) \frac{\varepsilon_c - \varepsilon}{\varepsilon_c - \varepsilon_b} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_b}{\varepsilon_c - \varepsilon_b}, & \varepsilon_b \leq \varepsilon < \varepsilon_c, \end{cases}$$

где c_1, c_2 — параметры образца, ε_a — значение деформации в конце фазы сжатия, ε_b — остаточная деформация, ε_c — деформация при разрушении.

В [69] процесс накопления повреждений рассматривается как увеличение размеров микротрещин и микродефектов в материале. Рассмотрим элементарный объем среды, который в начальный момент содержит случайно распределенные трещины, каждая из которых ориентирована нормалью \mathbf{n} . В этом случае тензор повреждаемости рассчитывается по следующей формуле:

$$\mathbf{D} = \sum_k \left(\frac{l^3 - l_0^3}{b^3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right)_k = \sum_k \left((r^3 - r_0^3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right)_k,$$

где l_0 — средний радиус начальных микротрещин, b — характерное расстояние между трещинами в начальный момент времени.

Такой способ описания повреждаемости предполагает, что закон развития разрушения будет напрямую зависеть от скорости роста микротрещин. Для связи размеров микротрещин с внешней нагрузкой в статье используется следующее уравнение:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, r) = \sqrt{r} \left[\sigma_n + f(r) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^d \cdot \mathbf{n} \right] - c_r = 0,$$

где c_r — прочность материала, $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ — нормальное напряжение, приложенное к трещине, а тензор второго ранга $\boldsymbol{\sigma}^d = \boldsymbol{\sigma} - (\sigma_{kk}/3) \mathbf{I}$ — девиаторная часть тензора напряжений. Функция $f(r)$ имеет вид:

$$f(r) = t \left[1 - \frac{(1-r)^2}{r_0(r_0-1)} \right],$$

где t — параметр модели.

В работе [70] предлагается определять параметр повреждаемости в момент

времени t по следующей формуле:

$$D(t) = 1 - \frac{r(0)}{\tau(t)} \exp \left[A \left(1 - \frac{r(t)}{r(0)} \right) \right],$$

где τ — некоторая функция от инвариантов тензора деформаций или тензора напряжений неповрежденного материала (эквивалентная деформация), r — пороговое значение поврежденности, которое в начальный момент времени является параметром материала, а в момент времени t определяется по формуле:

$$r(t) = \max\{r(0), \max \tau(s)\}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Для образца бетона по результатам испытаний на одноосное сжатие были получены следующие значения коэффициентов: $A = 1500$, $r(0) = 0.01$.

В работе [71] представлены результаты лабораторных экспериментов по определению зависимости повреждаемости от деформаций при постоянном трехосном нагружении для образца песчаника. Лабораторные данные были аппроксимированы кривой, основанной на реологической модели Бюргерса:

$$D = \begin{cases} 1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon_{\text{eq}})^A}, & \varepsilon_{\text{eq}} < \varepsilon_0; \\ 1 - \exp \left[-B (\varepsilon_{\text{eq}}^2 - \varepsilon_{\text{thr}}^2)^{1/C} \right] + \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon_{\text{thr}})^A} \right], & \varepsilon_{\text{eq}} \geq \varepsilon_0, \end{cases}$$

где A, B, C — параметры материала, ε_{thr} — пороговая величина деформаций (полученное значение — $8.38 \cdot 10^{-3}$), ε_{eq} — эквивалентная деформация, определяемая по формуле:

$$\varepsilon_{\text{eq}} = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2},$$

где ε_i — главные значения тензора деформаций.

Эксперимент проводился в диапазоне напряжений 100–150 МПа. Значения коэффициентов приведены в таблице 1.4.

В работе [72] представлены зависимости параметра повреждаемости от деформации и напряжений, полученные при сжатии и растяжении образца песчаника. Кинетический закон для повреждаемости в условиях растяжения имеет

Таблица 1.4. Параметры материалов, полученные в работе [71]

Напряжение, МПа	A	B	C
100	0.010	0	0
120	0.015	0	0
130	0.018	0	0
140	0.020	0	0
145	0.021	0	0
150	0.028	$3.76 \cdot 10^{-9}$	0.314

вид:

$$D = \begin{cases} 0, & \varepsilon_0 < \varepsilon; \\ 1 - \frac{f_{\text{tr}}}{E_o \varepsilon}, & \varepsilon_{\text{tu}} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \\ 1, & \varepsilon < \varepsilon_{\text{tu}}, \end{cases}$$

где f_{tr} — остаточное растягивающее напряжение.

Аналогично для сжимающих напряжений f_{cr} :

$$D = \begin{cases} 0, & \varepsilon < \varepsilon_{c0}; \\ 1 - \frac{f_{\text{cr}}}{E_o \varepsilon}, & \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Модели изменения проницаемости при деформации и разрушении.

Процессы деформации и разрушения пористых сред оказывают влияние не только на прочностные характеристики материала, но и на его фильтрационно-емкостные свойства. Исследованию влияния данных процессов посвящены различные работы, в которых приводятся модели эволюции проницаемости среды при её деформации и разрушении.

Так, в [65] предлагается зависимость проницаемости i -й компоненты тензора проницаемости k^i от параметра повреждаемости D^i в виде:

$$k^i(D^i) = k_0^i + k_1^i(D^i) - k_2^i(D^i),$$

где k_0^i — проницаемость неповрежденной среды, а k_1^i и k_2^i — функции вида:

$$k_1^i = \frac{k_{\text{max}} - k_o^i}{1 + \exp[-\nu_1 (D^i - D_1)]}, \quad k_2^i = \frac{k_{\text{max}} - k_f}{1 + \exp[-\nu_2 (D^i - D_2)]}.$$

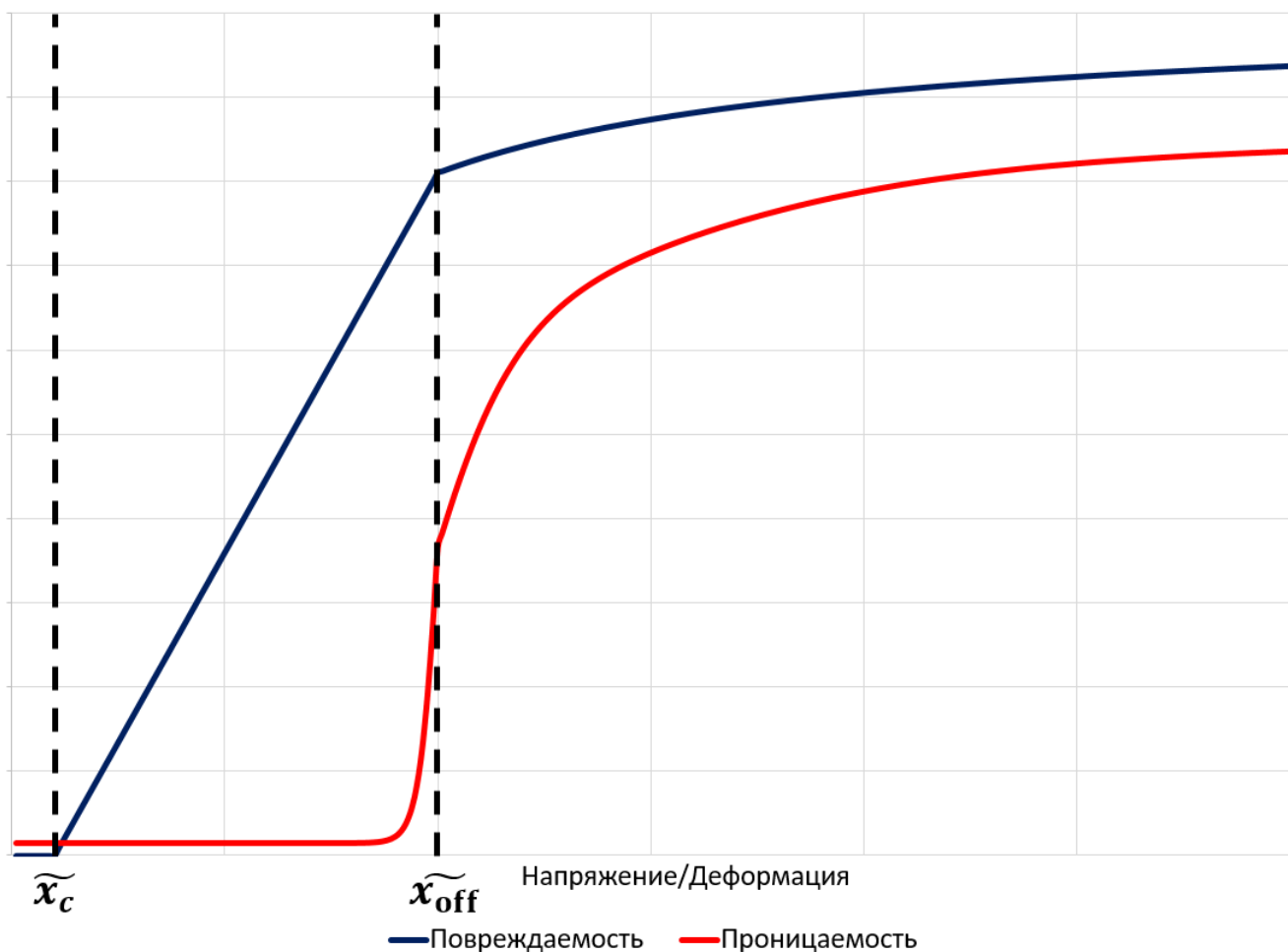


Рис. 1.5. Зависимости параметра повреждаемости и проницаемости от напряжения/деформации, предложенные в работе [65]

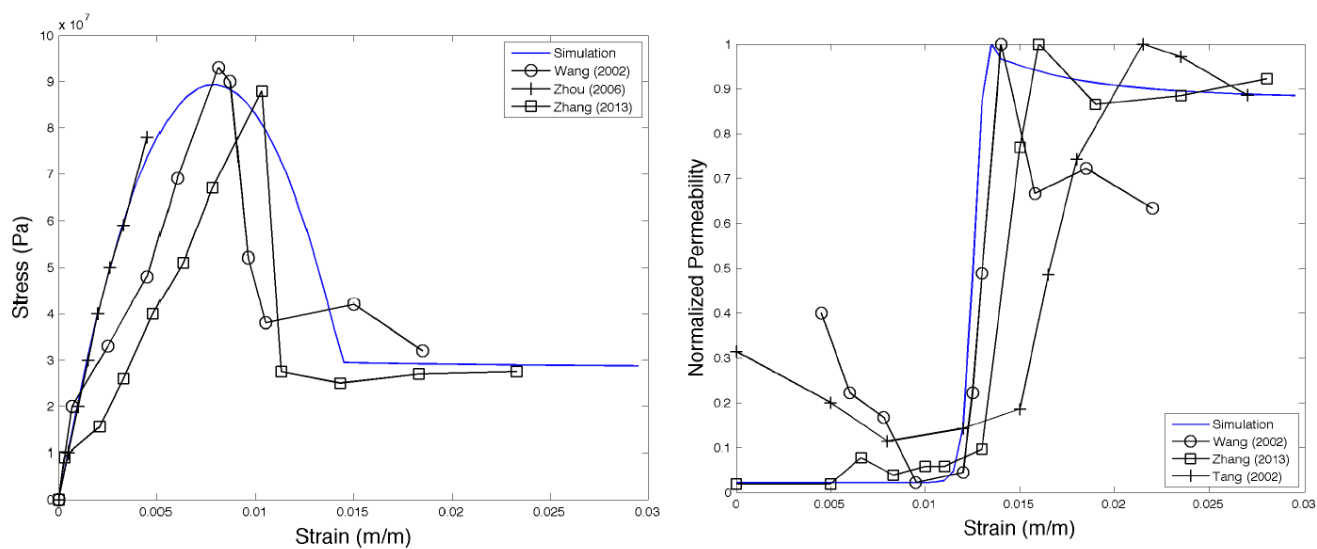


Рис. 1.6. Результат аппроксимации лабораторных исследований модельной кривой в [65] для напряжения и проницаемости

В этом случае графики зависимостей повреждаемости и проницаемости приведены на рисунке 1.5.

Для определения параметров k_{\max} , k_0 , k_f , ν_1 , ν_2 , D_1 , D_2 авторы провели анализ результатов лабораторных исследований, описанных в [72–75]. В данных исследованиях производилось измерение деформации и проницаемости горных пород в зависимости от нагрузки (рисунок 1.6). Полученные значения параметров корреляции для повреждаемости для различных вариантов критериев приведены в таблице 1.3. Параметры для проницаемости равны соответственно $k_0 = 10^{-16} \text{ м}^2$, $k_{\max} = 5 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$, $k_f = 4 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2$.

В работе [72] для проницаемости приведена следующая зависимость:

$$k = \begin{cases} k_0 \exp[-\beta(\sigma - \alpha p)], & D = 0; \\ \xi k_0 \exp[-\beta(\sigma - \alpha p)], & D > 0. \end{cases}$$

В результате проведенного эксперимента авторы приводят следующие значения для параметров: $\xi = 20$, $\beta = 0.05$, $f_{\text{cr}} = 220 \text{ МПа}$, $f_{\text{tr}} = 22 \text{ МПа}$.

В некоторых моделях, представленных в литературе, для описания эволюции проницаемости используются зависимости не от параметра повреждаемости, а напрямую от деформации и напряжения. Одна из наиболее простых зависимостей представлена в [76], в которой проницаемость k является функцией от пористости ϕ , которая, в свою очередь, зависит от параметров состояния среды (деформации, давления и так далее):

$$k = k_0 \exp \left[\gamma \left(\frac{\phi}{\phi_0} - 1 \right) \right],$$

где γ — определяемый экспериментально коэффициент, ϕ_0 и k_0 — отсчетные значения пористости и проницаемости соответственно.

В [77] представлена модель изменения проницаемости при внешней нагрузке в метаноугольных пластах. Предполагается, что процесс изменения проницаемости разбивается на два этапа: на первом этапе преобладают упругие деформации, на втором — пластические. Таким образом, авторами [77] предлагается

следующая зависимость:

$$\frac{k}{k_0} = \begin{cases} \left(1 + \frac{\gamma^p}{\gamma_*^p}\right) A, & 0 \leq \gamma^p \leq \gamma_*^p \\ (1 + \xi) A, & \gamma^p > \gamma_*^p, \end{cases}$$

где ξ — параметр, γ_*^p — пороговое значение пластической деформации, $A = \exp\left[-3C_f\left(\Delta\tilde{\sigma} - \Delta p + f_m \frac{E}{3(1-2\nu)} \Delta\varepsilon_m^S\right)\right]$, $\gamma^p = \sqrt{2/[3(\varepsilon_1^p \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p \varepsilon_3^p)]}$ — эквивалентная пластическая деформация, ε_i^p — пластическая деформация в i -ом направлении.

Ещё одна модель зависимости проницаемости от тензора деформаций представлена в [78]. В работе рассматриваются результаты проведенных экспериментов по трехосному сжатию глинистых горных пород. Для описания зависимости проницаемости от напряженно-деформированного состояния предлагается следующая формула:

$$k = \begin{cases} k_0, & \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_B, \\ k_0 \exp(-\gamma\sigma_3) \left[1 - \exp\left(-\frac{|\varepsilon_v - \varepsilon_p|}{\varepsilon_p}\right)\right], & \sigma_B \geq \sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_R, \\ \frac{k_f}{\varepsilon_f^3} |\varepsilon_f - \varepsilon_v|^3, & \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_R, \end{cases}$$

где σ_1 и σ_3 — максимальные и минимальные главные напряжения соответственно, σ_B и σ_R — критические значения напряжений, k_0 — начальная проницаемость, k_f — максимальное значение проницаемости, ε_v — объемная деформация материала, ε_f и ε_p — критические значения деформаций.

В ряде работ задача определения зависимости между проницаемостью среды и параметром повреждаемости решается с использованием статистических подходов.

В работе [79] предлагается связанная модель, учитывающее развитие повреждаемости и проницаемости в горных породах при высокой нагрузке. Предполагается, что материал является изотропным, а накопление повреждений характеризуется появлением случайно распределенных трещин с плотностью C_d равной

$$C_d = \gamma N a^3,$$

где N — количество трещин, a — средний размер трещин, γ — коэффициент

пропорциональности. Если считать, что рост трещин начинается, когда деформации достигают определенного критического значения, то для N можно записать следующее выражение:

$$N = k\langle\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_c\rangle^m,$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — сумма главных деформаций, $\tilde{\varepsilon}_c$ — критическое значение деформаций, k, m — параметры материала.

В этом случае кинетическое уравнение для плотности распределения трещин записывается в виде:

$$\frac{dC_d}{dt} = \gamma \left(a^3 \frac{dN}{dt} + 3a^2 N \frac{da}{dt} \right) = \gamma \left(a^3 k m \langle\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_c\rangle^{m-1} \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} + 3a^2 N \frac{da}{dt} \right).$$

В качестве выражения для оценки среднего размера трещин используется формула, предложенная в [80,81]:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{20} K_{IC}}{\rho c R_{\max}} \right)^{2/3},$$

где K_{IC} — трещиностойкость породы, ρ — её плотность, c — скорость распространения P -волны, R_{\max} — наибольшая скорость деформации материала. Тогда, считая, что a не зависит от времени, получаем:

$$\frac{dC_d}{dt} = \frac{5}{2} \gamma k m \langle\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_c\rangle^{m-1} \left(\frac{K_{IC}}{\rho c R_{\max}} \right)^2 \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt}.$$

Далее предполагается, что параметр повреждаемости D и проницаемость K зависят от плотности распределения трещин по формулам:

$$D = 1 - \exp(-\alpha C_d), \quad \ln \frac{K}{K_0} = C_2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}_c} - \frac{\tilde{\varepsilon}_s}{\tilde{\varepsilon}_c} \right),$$

где $\alpha = 16/9$, K_0 — начальная проницаемость материала, C_2 — параметр материала, $\tilde{\varepsilon}_s$ — критическое значение деформации, выше которого начинается рост проницаемости. При проведении расчетов авторы [79] использовали следующие значения параметров: $a = 0.5$, $\tilde{\varepsilon}_s = 0.001$, $K_0 = 46.2$ Д.

В работе [82] процесс разрушения рассматривается с точки зрения микроско-

пического и макроскопического подходов. Макроскопический подход используется для определения кинетического закона для повреждаемости как функции напряженно-деформированного состояния:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \lambda \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}}, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{\varepsilon_{ij} + |\varepsilon_{ij}|}{2},$$

где λ — параметр модели.

В соответствии с микроскопическим подходом предполагалось, что микро-трещины, появляющиеся в результате разрушения материала, распределены с некоторой плотностью вероятности ρ так, что:

$$\mathbf{D} = \rho \omega \mathbf{F},$$

где ω — средний объем трещин в элементарном объеме среды, \mathbf{F} — тензор второго ранга ориентации повреждаемости, зависящий от параметров анизотропии среды и направления нагрузки.

Для связи проницаемости и повреждаемости использовалась следующая зависимость:

$$\text{tr}(\mathbf{K}) = f(\eta) = A\eta^B,$$

где $\eta = \text{tr}(\mathbf{D})$.

В статье [83] представлен ещё один подход к описанию зависимости порового объема и проницаемости от повреждаемости. В модели рассматривается элементарный объем, содержащий естественные поры и трещины, возникающие в результате разрушения материала. Предполагается, что естественные поры и трещины имеют вид цилиндров с равными длинами, но различными радиусами, причем радиусы имеют нормальное распределение. Плотность вероятности распределения радиусов поровых каналов имеет вид:

$$p_p(r) = \begin{cases} \frac{1}{s\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(r-m)^2}{2s^2}\right), & \text{если } r_{\min}^p \leq r \leq r_{\max}^p; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где m и s — среднее и среднеквадратичное отклонение распределения радиусов, а r_{\min}^p и r_{\max}^p — минимальный и максимальный радиусы пор.

Функция распределения радиусов трещин имеет вид:

$$p_c(r) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_c} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_c}\right), & \text{если } r_{\min}^c \leq r \leq r_{\max}^c; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где λ_c — среднеквадратичное отклонение.

Таким образом, объем, который занимают поры или трещины в элементарном объеме, определяется по формуле:

$$V_{p,c} = \pi N_{p,c} \int_{r_{\min}^{p,c}}^{r_{\max}^{p,c}} p_{p,c}(r) r^2 dr,$$

где $N_{p,c}$ — количество пор или трещин соответственно. С другой стороны, изменение объема определяется через тензор деформаций:

$$\Delta V_{c,p} = -\mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}_{c,p},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{c,p}$ — тензор упругих деформаций и деформаций, вызванных разрушением.

Соответственно, по известным в каждый момент времени деформациям определяются объемы V_p и V_c , после чего восстанавливаются параметры соответствующей функции распределения. Данные параметры далее используются для расчета проницаемости.

В статье предполагается, что проницаемость зависит от пористости по следующей формуле:

$$k = \frac{\gamma}{8\mu} \Phi \left[\int_0^\infty f(r) dr \right]^{-1} \int_0^\infty f(r) r^2 dr, \quad f(r) = [N_p p_p(r) + N_c p_c(r)] \pi r^2,$$

где Φ — суммарная пористость.

Таким образом, данный подход позволяет пересчитывать проницаемость в соответствии с текущим напряженно-деформируемым состоянием. При этом модель не зависит от выбранного кинетического закона для параметра повреждаемости.

Как видно из изложенного в данном разделе, задача построения модели

непосредственно эволюции параметра повреждаемости является крайне сложной. Кроме того данная задача дополнительно усложняется в случае наличия «перекрестных» эффектов, то есть отличных от нуля параметров ω, θ, η (см. (1.27)). По этой причине и было сделано допущение о равенстве нулю этих коэффициентов.

Таким образом, конкретная, используемая в дальнейших расчетах модель учитывает только основные факторы, описывающие влияние параметра повреждаемости на изменение свойств среды. Тем не менее, в «полной» модели они явно учтены, а предположения, принятые для построения вычислительного алгоритма, прозрачно обобщаются на случаи отличных от нуля значений коэффициентов ω, θ, η .

Отметим, что далее, в качестве модели эволюции параметра повреждаемости была выбрана зависимость из работы [65]:

$$D = \begin{cases} 0, & \tilde{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}_c, \\ D_{\text{off}} \frac{\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_c}{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}} - \tilde{\varepsilon}_c}, & \tilde{\varepsilon}_c \leq \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \\ D_{\text{lim}} - (D_{\text{lim}} - D_{\text{off}}) \frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}}}{\tilde{\varepsilon}}, & \tilde{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}. \end{cases}$$

Выбор данной зависимости обусловлен тем, что авторы [65] обобщили различные результаты лабораторных исследований по нагружению образцов горной породы (песчаника), установили, что во всех экспериментах зависимости напряжения и деформации имеют общий вид, определили вид данной зависимости и из неё получили модель эволюции параметра повреждаемости. За счет этого есть основания полагать, что данная зависимость будет достаточно корректно описывать разрушение реальных горных пород.

Глава 2

Вычислительный алгоритм

В рассматриваемом приближении система уравнений (1.41), описывающая динамику термopорoупругой среды с учетом разрушения, представляет собой связанную задачу для эллиптического уравнения (описывающего напряженно деформированное состояние насыщенной среды) и параболических уравнений (описывающих законы сохранения массы флюида и энергии системы). Для решения указанной системы уравнений могут применяться различные методы, среди которых отметим метод конечных объемов, метод конечных элементов и метод граничных интегральных уравнений.

Для аппроксимаций по времени чаще всего используются полностью неявные схемы, они же будут использованы и в настоящей работе. При этом полная система уравнений может аппроксимироваться как одно целое, либо задача «развязывается» и ее решение получается в ходе тех или иных итераций между группами уравнений фильтрации и упругости. Последний подход чаще всего применяется в случае, если для решения задачи используется две различных программы для расчета фильтрационной части (например, с помощью промышленного симулятора фильтрации) и для решения задачи теории упругости. Построение эффективных итерационных методов решения таких задач является отдельной проблемой, см., например, [84].

Характерным свойством системы уравнений порoупругости в рассматриваемом приближении является то, что после аппроксимации по времени система уравнений имеет вид задачи о седловой точке (см. [85]). В этом случае для устойчивости решения задачи как в континуальном, так и в дискретном случае необходимо выполнение так называемых inf-sup-условий (условия Ладыженской-Бабушки-Бреззи) [85]. При нарушении этих условий в задачах

пороупругости возникают численные неустойчивости и эффекты «блокировки» («locking») конечномерного решения, особенно в несжимаемом пределе, см. [86] и ссылки там. Простейшим примером конечного элемента, удовлетворяющего этим условиям является элемент Тэйлора-Худа [87], в котором для аппроксимации перемещений используются конечные элементы второго порядка, а для аппроксимации давления — первого. При этом обе системы функций заданы на одном и том же разбиении области на конечные элементы. Данный конечный элемент гарантирует оптимальную скорость сходимости, в том числе, и в задачах пороупругости [88]. Этот подход будет использоваться и в настоящей работе.

Альтернативным подходом является регуляризация исходной задачи (см., например, [89–91]). Целью регуляризации является построение задачи, для которой inf-sup условия выполняются для стандартных пар пространств (конечные элементы одинакового, первого, порядка и для поля перемещений, и для давления и температуры).

Как уже отмечалось ранее, в настоящей работе для численного решения уравнений модели применяется метод конечных элементов. К его достоинствам можно отнести достаточно формальный способ построения конечномерной задачи и эффективность при использовании неструктурированных расчетных сеток. В отличие от ряда других исследований (см., например, [92,93]), в настоящей работе задача рассматривается в полностью связанной («монолитной») постановке, когда все уравнения модели решаются одновременно, в рамках единой системы уравнений. Таким образом, не происходит итерационного связывания между группами уравнений теории упругости, фильтрации и баланса энергии, что особенно важно в связи с многодисциплинарностью задачи.

Кроме того, учитываются дополнительные эффекты (непосредственно разрушение и зависимость от него параметров модели). Для моделирования разрушения среды вводится параметр повреждаемости, эволюция которого описывается явным образом.

2.1 Система уравнений модели

Базовой математической моделью, используемой для дальнейших расчетов, является система уравнений (1.41). Для полноты приведем её здесь в оконча-

тельном, замкнутом виде:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= 0, \\
\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) &= 0, \\
\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} \right) + \operatorname{div} (p \mathbf{w}) + \operatorname{div}(\mathbf{q}) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

которая дополняется следующим набором определяющих соотношений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= -\frac{\mathbf{k}}{\mu} \operatorname{grad}(p), \\
\mathbf{q} &= -\boldsymbol{\kappa} \operatorname{grad}(T), \\
\Delta \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}(1 - D) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{b} \Delta p - \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \Delta T - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0 \Delta D, \\
\Delta m_f &= \rho_f \mathbf{b} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_f \frac{\Delta p}{M} - \alpha_m \rho_f \Delta T, \\
\Delta Y &= \mathbf{C} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \\
\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \boldsymbol{\xi} + \operatorname{grad} \boldsymbol{\xi}^T),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор полных напряжений, m_f — масса флюида в единичном объеме, ρ_f — плотность флюида, \mathbf{w} — скорость фильтрации, E_α — внутренняя энергия фазы α , ϕ — пористость, p — поровое давление, \mathbf{q} — суммарный поток тепла, \mathbf{k} — тензор проницаемости, μ — вязкость флюида, $\boldsymbol{\kappa}$ — тензор теплопроводности, \mathbf{C} — тензор упругих коэффициентов неповрежденного материала, D — параметр повреждаемости, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензор деформаций, \mathbf{b} — коэффициент Био, $\mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T$ — тензор термоупругих коэффициентов, M — модуль Био, α_m — коэффициент теплового расширения, Y — обобщенная сила, связанная с повреждаемостью, $\boldsymbol{\xi}$ — перемещения скелета.

Первичными неизвестными системы уравнений (2.1) являются перемещения $\boldsymbol{\xi}$, давление p и температура T . Задача рассматривается в трехмерной области Ω с границей $\partial\Omega$, на которой для каждого параметра определены граничные условия Дирихле ($\partial\Omega_D$) или Неймана ($\partial\Omega_N$), $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$. Основные типы граничных условий для данной задачи имеют следующий вид:

условие Дирихле:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}|_{\partial\Omega_D} &= 0 & \text{— жестко закрепленная граница области,} \\ p|_{\partial\Omega_D} &= \tilde{p} & \text{— давление на границе области,} \\ T|_{\partial\Omega_D} &= \tilde{T} & \text{— температура на границе области;}\end{aligned}$$

условие Неймана:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}|_{\partial\Omega_N} &= \tilde{\mathbf{t}} & \text{— вектор напряжения на границе области,} \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_N} &= \tilde{q} & \text{— поток флюида через границу области,} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_N} &= \tilde{q}_T & \text{— поток тепла через границу области.}\end{aligned}$$

Стоит отметить, что для каждой переменной области $\partial\Omega_N$ и $\partial\Omega_D$ — «свои», то есть для переменной α : $\partial\Omega = \partial\Omega_N^{(\alpha)} \cup \partial\Omega_D^{(\alpha)}$. Однако для упрощения дальнейших выкладок будем считать, что они совпадают. Также отметим, что могут быть использованы более общие граничные условия, чем описанные выше.

2.2 Слабая постановка задачи

В дальнейшем будем аппроксимировать систему уравнений (2.1) с помощью метода конечных элементов. Для этого сначала рассмотрим слабую постановку задачи. Пусть V_α — пространство достаточно гладких (вектор)функций в области Ω , причем $\boldsymbol{\xi} \in V_\xi, p \in V_p, T \in V_T$. Введем пробные функции $\mathbf{v}_\alpha, \alpha = \{\boldsymbol{\xi}, p, T\}$ в пространстве $V_\alpha^0 \subset V$, где $V_\alpha^0 = \{\mathbf{v} \in V_\alpha : \mathbf{v}|_{\partial\Omega_D} = 0\}$. Домножим уравнения системы (2.1) на функции \mathbf{v}_α слева:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{v}_\xi^T \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} v_p \left[\frac{\partial m_f}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) \right] d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} v_T \left[\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} \right) + \operatorname{div}(p\mathbf{w}) + \operatorname{div}(\mathbf{q}_T) \right] d\Omega &= 0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Симметричные тензоры деформаций и напряжений представим с помощью

векторных обозначений Фойгта [94]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz} \right]^T, \quad \gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz} \right]^T.$$

В этом случае тензор 4-го ранга упругих коэффициентов может быть записан в виде матрицы размерностью 6×6 . Предполагая, что упругие свойства материала изотропны, тензор упругих коэффициентов можно записать через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν в виде:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим следующие интегралы:

$$I_1 = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{w}) d\Omega, \quad I_2 = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} d\Omega,$$

$$I_3 = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\rho_f e_f \mathbf{w}) d\Omega, \quad I_4 = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(p \mathbf{w}) d\Omega, \quad I_5 = \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\mathbf{q}) d\Omega.$$

Введем следующий дифференциальный оператор, который является матричным представлением оператора деформации:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T,$$

то есть $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\boldsymbol{\xi}$, где $\boldsymbol{\xi} = [\xi_x, \xi_y, \xi_z]^T$.

Тогда в соответствии с формулой Грина данные интегралы можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \int_{\Omega} (\text{grad } v)^T \rho_f \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v \rho_f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS, \\
I_2 &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}v)^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \\
I_3 &= - \int_{\Omega} (\text{grad } v)^T \rho_f e_f \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v \rho_f e_f \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS, \\
I_4 &= - \int_{\Omega} (\text{grad } v)^T p \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v p \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS, \\
I_5 &= - \int_{\Omega} (\text{grad } v)^T \mathbf{q} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS.
\end{aligned}$$

С учетом данных выражений система уравнений (2.3) примет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\mathbf{L}v_{\xi})^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\partial\Omega_N} v_{\xi}^T \tilde{\mathbf{t}} dS = 0, \\
& \int_{\Omega} v_p \frac{\partial m_f}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} (\text{grad } v_p)^T \mathbf{w} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v_p \tilde{q} dS = 0, \\
& \int_{\Omega} v_T \left[\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T p \mathbf{w} d\Omega - \\
& - \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T \mathbf{q} d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} v \frac{1}{\phi} E_f \tilde{q} dS + \int_{\partial\Omega_N} v p \tilde{q} dS + \int_{\partial\Omega_N} v_T \tilde{q}_T dS = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Предположим, что начальный тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}^0$ постоянен для всего объема, а начальные деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ равны нулю. Тогда, используя определяющие соотношения для тензора напряжений и массы флюида в единице объема,

из (2.4) получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\mathbf{L}v_{\xi})^T : \mathbf{C}(1 - D) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{L}v_{\xi})^T \mathbf{b}pd\Omega - \\
& \quad - \int_{\Omega} (\mathbf{L}v_{\xi})^T : \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T T d\Omega = \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{v}_{\xi}^T \tilde{\mathbf{t}} dS, \\
& \int_{\Omega} v_p \mathbf{b} : \mathbf{L} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} v_p \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} d\Omega - \int_{\Omega} v_p \alpha_m \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \\
& \quad + \int_{\Omega} (\text{grad } v_p)^T \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad}(p) d\Omega = - \int_{\partial\Omega_N} v_p \tilde{q} d\Omega, \\
& \int_{\Omega} v_T \left[\frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} \right] - \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T \frac{1}{\phi} E_f \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T p \mathbf{w} d\Omega - \\
& \quad - \int_{\Omega} (\text{grad } v_T)^T \mathbf{q}_T d\Omega = - \int_{\partial\Omega_N} v_T \rho_f e_f \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} v_T p \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} v_T \tilde{q}_T dS.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Рассмотрим первое подынтегральное выражение в последнем уравнении системы (2.5). Воспользовавшись выражениями для внутренней энергии скелета (1.44), найдем её производную по времени:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_s}{\partial t} &= [\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \\
& \quad + \left[\frac{1}{N} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) - \alpha_{\varphi} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[\frac{1}{N} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_{\varphi} \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \right] \Delta p + \\
& \quad + \left[-\alpha_{\varphi} \left(p - \frac{1}{2} \Delta p \right) + \frac{C_{ps}}{T^0} \left(T - \frac{1}{2} \Delta T \right) \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \left[-\alpha_{\varphi} \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{C_{ps}}{T^0} \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial t} \right] \Delta T - \\
& \quad - \left[\mathbf{Y}^0 + \mathbf{C} \left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right] \frac{\partial D}{\partial t} - \left[\mathbf{C} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \right] \Delta D = \\
& \quad = [\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1 - \Delta D) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \\
& \quad + \left[\frac{1}{N} p - \alpha_{\varphi} T \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[-\alpha_{\varphi} p + \frac{C_{ps}}{T^0} T \right] \frac{\partial T}{\partial t} - \left[\mathbf{Y}^0 + \mathbf{C} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \right] \frac{\partial D}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Аналогично для внутренней энергии флюида (1.45) получим:

$$\frac{\partial E_f}{\partial t} = \left[\frac{\phi}{K_f} p - \phi \alpha_f T \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[-\phi \alpha_f p + \frac{C_{pf}}{T^0} T \right] \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Таким образом, в соответствии с введенными ранее обозначениями, а также предполагая, что $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = 0$, $D^0 = 0$ и $\mathbf{Y}^0 = 0$, производная суммарной внутренней энергии системы по времени имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} = & \left[\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1 - D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \\ & + \left[\frac{1}{M} p - \alpha_m T \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[-\alpha_m p + \frac{C_{ps} + C_{pf}}{T^0} T \right] \frac{\partial T}{\partial t} - \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] \frac{\partial D}{\partial t}. \end{aligned}$$

Поскольку производная параметра повреждаемости по времени по сути описывает развитие повреждаемости, задаваемое последним уравнением системы (2.2), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial t} = & \left[\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1 - D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}_T \right] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} + \\ & + \left[\frac{1}{M} p - \alpha_m T \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \left[-\alpha_m p + \frac{C_{ps} + C_{pf}}{T^0} T \right] \frac{\partial T}{\partial t} - \left[\frac{1}{2} F(\chi) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] \boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

2.2.1 Пространственные аппроксимации

Рассмотрим пространственную аппроксимацию системы уравнений (2.5). Для этого введем конечномерные пространства $V_\alpha^h \subset V_\alpha$, $V_\alpha^{0,h} \subset V_\alpha^0$, причем $V_\alpha^h = \text{span}(\phi_i^{(\alpha)})$, где $\phi_i^{(\alpha)}$ — базисные функции. Тогда для произвольной функции f имеем:

$$f = \sum_{i=1}^{N_\alpha} \phi_i^{(\alpha)} f_i, \quad f = \boldsymbol{\xi}, p, T.$$

Векторные поля аппроксимируются аналогичным образом покомпонентно.

Соответственно, аппроксимация системы (2.5) в матричном виде записывается как

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\xi\xi} \boldsymbol{\xi} - \mathbf{A}_{\xi p} p + \mathbf{A}_{\xi T} T &= \mathbf{f}_\xi, \\ \mathbf{A}_{p\xi} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{A}_{pp} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{A}_{pT} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{B}_{pp} p &= \mathbf{f}_p, \\ \mathbf{A}_{T\xi} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + \mathbf{A}_{Tp} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{A}_{TT} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{B}_{T\xi} \boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}_{Tp} p + \mathbf{B}_{TT} T &= \mathbf{f}_t, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\xi\xi} &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{C}(1-D) (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, & \mathbf{A}_{\xi p} &= \mathbf{A}_{p\xi}^T = \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{b}\phi_p d\Omega, \\
\mathbf{A}_{\xi T} &= - \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \mathbf{C}(1-D) : \alpha_T \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{B}_{pp} &= \int_{\Omega} \nabla \phi_p^T \mathbf{k} / \mu \nabla \phi_p d\Omega, \\
\mathbf{A}_{pp} &= \int_{\Omega} \phi_p^T M^{-1} \phi_p d\Omega, & \mathbf{A}_{pT} &= - \int_{\Omega} \phi_p^T \alpha_m \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{A}_{T\xi} &= \int_{\Omega} \phi_T^T (\boldsymbol{\sigma}^0 + \mathbf{C}(1-D) : \boldsymbol{\varepsilon} + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \alpha_T) (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, \\
\mathbf{A}_{Tp} &= \int_{\Omega} \phi_T^T (M^{-1} p - \alpha_m T) \phi_p d\Omega, \\
\mathbf{A}_{TT} &= \int_{\Omega} \phi_T^T [-\alpha_m p + (C_{ps} + C_{pf}) T / T^0] \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{B}_{T\xi} &= \int_{\Omega} \nabla \phi_T^T [1/2 F(\chi) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}] (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, \\
\mathbf{B}_{Tp} &= \int_{\Omega} \nabla \phi_T^T \{ E_f^0 / \phi + [p / K_f - \alpha_f T] \Delta p - [\alpha_f p - C_{pf} / \phi] \Delta T \} \mathbf{k} / \mu \nabla \phi_p d\Omega, \\
\mathbf{B}_{TT} &= \int_{\Omega} \nabla \phi_T^T \boldsymbol{\kappa} \nabla \phi_T d\Omega, \\
\mathbf{f}_{\xi} &= \int_{\partial\Omega_N} \phi_{\xi}^T \tilde{\mathbf{t}} dS, & \mathbf{f}_p &= - \int_{\partial\Omega_N} \phi_p^T \tilde{q} d\Omega, \\
\mathbf{f}_T &= - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T \rho_f e_f \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T p \tilde{q} dS - \int_{\partial\Omega_N} \phi_T^T \tilde{q}_T dS.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

В матричном виде систему (2.6) можно записать как

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t \\ \partial p / \partial t \\ \partial T / \partial t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\xi\xi} & -\mathbf{A}_{\xi p} & \mathbf{A}_{\xi T} \\ 0 & \mathbf{B}_{pp} & 0 \\ \mathbf{B}_{T\xi} & \mathbf{B}_{Tp} & \mathbf{B}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ p \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\xi} \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

Первая матрица системы, которую в результате необходимо будет обращать при решении системы на каждом временном слое, несимметрична. Для её симметризации продифференцируем первое уравнение по времени. Получим:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial t \\ \partial p/\partial t \\ \partial T/\partial t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{pp} & 0 \\ \mathbf{B}_{T\xi} & \mathbf{B}_{Tp} & \mathbf{B}_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ p \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial\mathbf{f}_\xi/\partial t \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Вычисление интегралов в уравнении (2.7) производится с использованием квадратурных формул Гаусса второго порядка [95].

Для дискретизации уравнения (2.8) по пространству использовалась тетраэдральная сетка с квадратичными базисными функциями для перемещений и линейными для давления и температуры (элементы Тейлора-Худа [87], рисунок 2.2). Линейные базисные функции вычисляются по формуле $\phi_{p,T}^{(i)} = N_i$, где N_i — i -я каноническая координата рассматриваемой точки. Квадратичные базисные функции вычисляются как $\phi_\xi(i) = N_i(2N_i - 1)$ для неизвестных, расположенных в узлах тетраэдра, и $\phi_\xi^{(ij)} = 4N_iN_j$ для неизвестных, находящихся в центре ребра, расположенного между узлами i и j . Графики данных функций в одномерном случае представлены на рисунке 2.1.

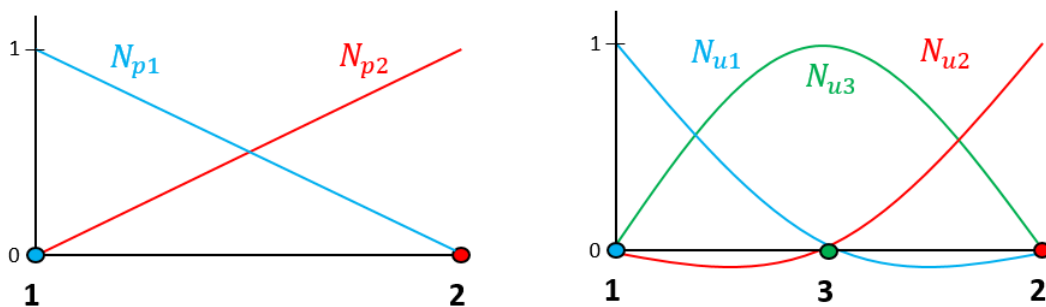


Рис. 2.1. Линейные (слева) и квадратичные (справа) базисные функции

Использование элементов Тейлора-Худа обеспечивает выполнение $\inf - \sup$ условий (условия Ладыженской-Бабушки-Бреззи, [85]), которые необходимы для устойчивости решения уравнений пороупругости. Рассмотрим подробнее данные условия. Пусть V и Q — гильбертовы пространства, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ — билинейные формы, а $f \in V^*$, $g \in Q^*$, где V^* и Q^* — пространства, сопряженные пространствам V и Q . Рассмотрим задачу нахождения седловой точки: для пар a и b найти $u \in V$ и $p \in Q$, такие, что для любых $v \in V$

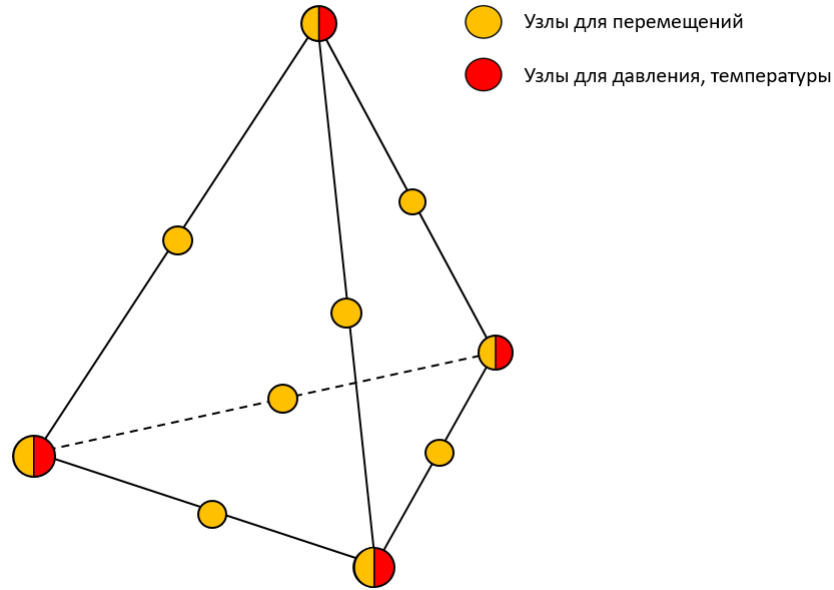


Рис. 2.2. Элемент Тейлора-Худа.

и $q \in Q$:

$$\begin{aligned}
 a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle, \\
 b(u, q) &= \langle g, q \rangle.
 \end{aligned}$$

Предположим, что существует такое α , что $a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$ для любого v , такого что $b(v, q) = 0$ для любого $q \in Q$. В этом случае, если b удовлетворяет $\inf - \sup$ условию:

$$\sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|u\|_V} \geq \beta \|q\|_Q,$$

то для любого q существует единственное решение задачи седловой точки, непрерывно зависящее от f и g .

2.2.2 Дискретизация по времени и решение нелинейной системы

Для аппроксимации системы уравнений по времени будем использовать полностью неявную схему относительно перемещений ξ , давления p и температуры T . Параметр повреждаемости D будет учитываться явным образом. Пусть $f = f(t)$ — значение какой-либо величины в момент времени t , тогда $\hat{f} = f(t + \Delta t)$ — её значение в момент времени $t + \Delta t$. Соответственно, система

уравнений (2.9) после аппроксимации по времени примет вид:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} + \Delta t \mathbf{B}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} + \Delta t \mathbf{B}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} + \Delta t \mathbf{B}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} + \Delta t \mathbf{B}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}} \\ \hat{p} \\ \hat{T} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{A}_{T\xi} & \mathbf{A}_{Tp} & \mathbf{A}_{TT} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ p \\ T \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} -\Delta \mathbf{f}_{\xi} / \Delta t \\ \mathbf{f}_p \\ \mathbf{f}_T \end{bmatrix}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

В связи с тем, что коэффициенты матрицы \mathbf{B}_{Tp} зависят от давления и температуры, то система уравнений (2.10) является нелинейной. Для её решения используется метод Ньютона. Суть данного метода заключается в итерационном поиске решения нелинейной системы уравнений $\mathbf{R}(\mathbf{X}) = 0$ по формуле:

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X}^k) \mathbf{R}(\mathbf{X}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где \mathbf{R} — рассматриваемая система нелинейных уравнений с вектором решения \mathbf{X} и якобианом $\mathbf{J} = \partial \mathbf{R}(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X}$. Критерием сходимости итерационного процесса является одновременное выполнение условий:

$$\|\mathbf{X}^{k+1} - \mathbf{X}^k\| < \varepsilon_1, \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}^k) < \varepsilon_2,$$

где $0 \leq \varepsilon_{1,2} \leq 1$ — параметры, определяющие точность решения, $\|\cdot\|$ — подходящая норма.

Вычислим якобиан рассматриваемой системы уравнений. Для этого запишем систему (2.10) в виде

$$\begin{aligned} & -\mathbf{A}_{\xi\xi} \Delta \boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_{\xi p} \Delta p - \mathbf{A}_{\xi T} \Delta T + \Delta \mathbf{f}_{\xi} = 0, \\ & \mathbf{A}_{\xi p}^T \Delta \boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_{pp} \Delta p + \mathbf{A}_{pT} \Delta T + \Delta t \mathbf{B}_{pp} \hat{p} - \Delta t \mathbf{f}_p = 0, \\ & \mathbf{A}_{T\xi} \Delta \boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_{Tp} \Delta p + \mathbf{A}_{TT} \Delta T + \Delta t \mathbf{B}_{T\xi} \hat{\boldsymbol{\xi}} + \Delta t \mathbf{B}_{Tp} \hat{p} + \Delta t \mathbf{B}_{TT} \hat{T} - \Delta t \mathbf{f}_T = 0. \end{aligned}$$

С учетом вида матриц (2.7) якобиан данной системы имеет вид:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{\xi\xi} & \mathbf{A}_{\xi p} & -\mathbf{A}_{\xi T} \\ \mathbf{A}_{\xi p}^T & \mathbf{A}_{pp} + \Delta t \mathbf{B}_{pp} & \mathbf{A}_{pT} \\ \mathbf{J}_{T\xi} & \mathbf{J}_{Tp} & \mathbf{J}_{TT} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{T\xi} &= \mathbf{A}_{T\xi} + \Delta t \mathbf{B}_{T\xi} + \frac{\partial \mathbf{A}_{T\xi}}{\partial \xi} \Delta \xi + \Delta t \frac{\partial \mathbf{B}_{T\xi}}{\partial \xi} \hat{\xi}, \\ \mathbf{J}_{Tp} &= \mathbf{A}_{Tp} + \Delta t \mathbf{B}_{Tp} + \frac{\partial \mathbf{A}_{Tp}}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial \mathbf{A}_{TT}}{\partial p} \Delta T + \Delta t \frac{\partial \mathbf{B}_{Tp}}{\partial p} \hat{p}, \\ \mathbf{J}_{TT} &= \mathbf{A}_{TT} + \Delta t \mathbf{B}_{TT} + \frac{\partial \mathbf{A}_{Tp}}{\partial T} \Delta p + \frac{\partial \mathbf{A}_{TT}}{\partial T} \Delta T + \Delta t \frac{\partial \mathbf{B}_{Tp}}{\partial T} \hat{p}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_{T\xi}}{\partial \xi} &= \int_{\Omega} \phi_T^T [\mathbf{C}(1-D) : \mathbf{I}] (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, & \frac{\partial \mathbf{A}_{Tp}}{\partial p} &= \int_{\Omega} \phi_T^T \frac{1}{M} \phi_p d\Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{Tp}}{\partial T} &= - \int_{\Omega} \phi_T^T \alpha_m \phi_p d\Omega, & \frac{\partial \mathbf{A}_{TT}}{\partial p} &= - \int_{\Omega} \phi_T^T \alpha_m \phi_T d\Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{TT}}{\partial T} &= \int_{\Omega} \phi_T^T \frac{C_{ps} + C_{pf}}{T^0} \phi_T d\Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{T\xi}}{\partial \xi} &= \int_{\Omega} \text{grad } \phi_T^T \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial F(\chi)}{\partial \xi} \mathbf{C} : \varepsilon + F(\chi) \mathbf{C} : (\mathbf{L}\mathbf{I}) \right) \right] (\mathbf{L}\phi_{\xi}) d\Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{Tp}}{\partial p} &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \left[\frac{1}{K_f} (2\hat{p} - p^0) - \alpha_f (2\hat{T} - T^0) \right] \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad } \phi_p d\Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{Tp}}{\partial T} &= \int_{\Omega} (\mathbf{L}\phi_{\xi})^T \left[\frac{C_{pf}}{\phi} - \alpha_f (2\hat{p} - p^0) \right] \frac{\mathbf{k}}{\mu} \text{grad } \phi_p d\Omega. \end{aligned}$$

2.2.3 Решение системы линейных алгебраических уравнений

Решение системы линейных уравнений на каждой ньютоновской итерации производится с использованием стабилизированного метода бисопряженных градиентов (BiCGStab) [96]. В качестве предобуславливателя использовалось неполное LU разложение с одноуровневым заполнением (ILU(1)). Для обеспечения устойчивости конечномерной задачи применялся ряд подходов, в соответствии с которыми преобразовывалась матрица системы (2.10).

В первую очередь, использовался метод диагонализации матриц масс (mass lumping, [97]). Диагонализированные матрицы при этом будут иметь вид:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{i,i} = \sum_j \mathbf{S}_{i,j},$$

где \mathbf{S} обозначает матрицы масс \mathbf{A}_{pp} , \mathbf{A}_{pT} , \mathbf{A}_{Tp} и \mathbf{A}_{TT} .

Помимо этого производилось обезразмеривание системы путем введения для каждой переменной $(\boldsymbol{\xi}, p, T)$ своего обезразмеривающего коэффициента. Таким образом, уравнение:

$$\mathbf{A}_{\xi}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_p p + \mathbf{A}_T T = f$$

преобразовывалось к виду:

$$\alpha_{\xi}\mathbf{A}_{\xi}(\boldsymbol{\xi}/\alpha_{\xi}) + \alpha_p\mathbf{A}_p(p/\alpha_p) + \alpha_T\mathbf{A}_T(T/\alpha_T) = f,$$

где α_{ξ} , α_p , α_T — соответствующие размерные параметры. Далее каждая строка преобразованной матрицы системы и правой части нормировались на диагональный элемент. Таким образом, диагональ матрицы состоит из единичных коэффициентов.

Для уменьшения ширины ленты разреженной матрицы системы использовался алгоритм Катхилла-Макки [98].

Глава 3

Комплекс программ

Как правило, при необходимости учитывать в расчетах одновременно деформационные, фильтрационные, неизотермические эффекты и разрушение, используют различные программные модули и итерационно их связывают. Например, на каждом расчетном шаге запускается симулятор фильтрации и распределение порового давления затем передается в геомеханический симулятор.

Приведенный в настоящей работе вычислительный алгоритм позволяет учитывать различные эффекты совместно. Для проведения практических расчетов данный алгоритм реализован в виде программного модуля, написанного на языке C++. Основными компонентами модуля являются препроцессор, вычислительное ядро и постпроцессор, подробное описание работы которых приведено далее.

В данном разделе приведено описание программного комплекса для расчета неизотермического течения в пороупругой среде с учетом разрушения породы в рамках разработанной математической модели и численного алгоритма. Программный комплекс реализован на языке программирования C++ и состоит из трех основных компонентов: препроцессор, вычислительное ядро и постпроцессор.

Препроцессор. Работа программного модуля начинается с запуска блока препроцессора, который отвечает за зачитывание и подготовку входных данных для модели. Входные данные представляют из себя набор текстовых файлов, каждый из которых описывает отдельный блок данных и имеет фиксированный формат. В первую очередь производится зачитывание расчетной сетки. В связи с тем, что используемый вычислительный алгоритм подразумевает воз-

возможность расчета сложных трехмерных задач, то в качестве элементов расчетной сетки использовались тетраэдры. Как было сказано ранее элементы имеют второй порядок аппроксимации по перемещениям и первый по давлению и температуре. Таким образом, для каждого тетраэдра помимо основных 4 узлов должны быть определены промежуточные на гранях. Для простоты промежуточные узлы задавались в центрах ребер. Таким образом, количество узлов для каждого элемента равно 10. Их локальная нумерация приведена на рисунке 3.1. Для однозначного задания расчетной сетки требуется указать координаты всех её узлов, а также перечислить все тетраэдры с указанием индексов узлов, из которых они состоят, в глобальной нумерации.

Для построения простой расчетной сетки в данном формате был написан скрипт на языке `Matlab`, в основе которого лежит использование встроенной функции триангуляции заданной области по алгоритму Делоне [100]. Данный генератор расчетной сетки принимает на вход данные о форме и размере расчетной области и шаге расчетной сетки (может быть переменным), а на выходе выдает набор текстовых файлов, содержащих информацию о координатах расчетных узлов, а также список узлов, формирующих каждый конечный элемент. Пример расчетной сетки приведен на рисунке 3.2. Отметим, что программа позволяет использовать любые другие генераторы сетки, принимающие на вход описанные данные.

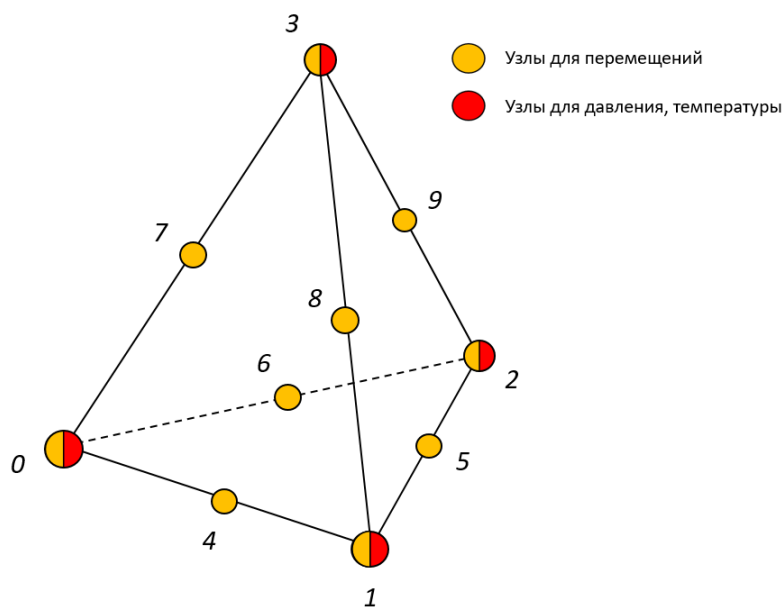


Рис. 3.1. Локальная нумерация узлов в конечном элементе

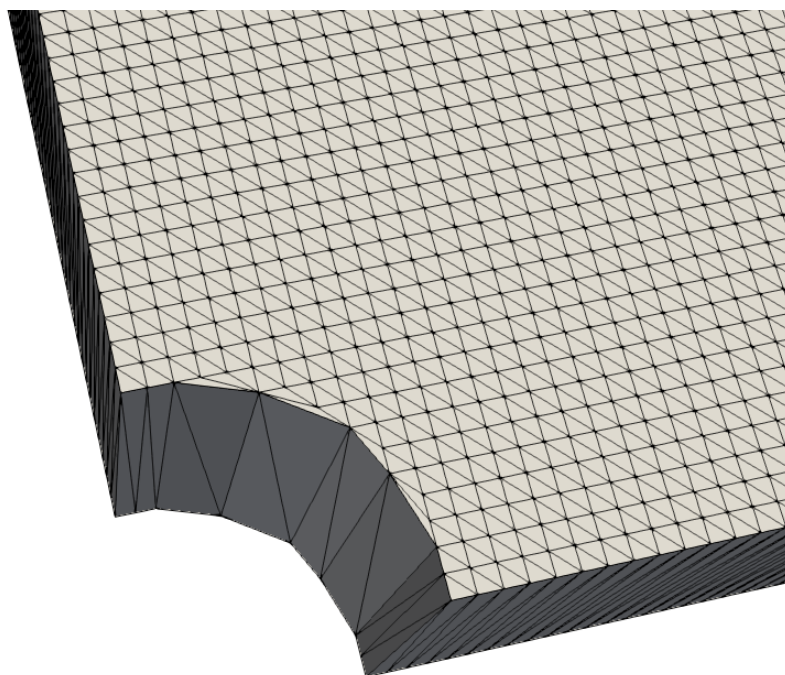


Рис. 3.2. Пример расчетной сетки

Полное описание расчетной модели помимо сетки включает в себя информацию о значении параметров модели в каждой ячейке, а также полный набор начальных и граничных условий. Параметры модели задаются в виде набора данных в формате «ключевое слово» — «значение параметра». Список основных параметров включает в себя геомеханические свойства породы (модуль Юнга, коэффициент Пуассона), коэффициент Био, параметры сжимаемости (модуль Био для скелета и коэффициент объемного сжатия флюида), плотности скелета и флюида, фильтрационно-емкостные свойства пласта (пористость, проницаемость), теплофизические свойства (теплоемкости, коэффициенты объемного термического сжатия), а также начальные условия для давления. При этом, может быть задано как одно значение на всю модель, так и данные для каждой ячейки сетки в отдельности.

В программном модуле имеется возможность задания граничных условий как первого, так и второго рода. Граничные условия первого рода задаются для отдельных узлов, расположенных на соответствующей границе в формате: номер соответствующей переменной (компонента вектора перемещений, давление или температура) в векторе неизвестных и её значение. Граничное условие второго рода задается для соответствующих треугольных граней. Для каждой грани задаются номера узлов, формирующих грань, а также значения вектора

напряжений, действующего на неё и массового и теплового потока, протекающего через эту грань.

Вычислительное ядро. После полного описания всех входных данных для модели, они передаются в вычислительное ядро, в котором производится решение системы уравнений (2.9) на каждый момент времени. Как уже отмечалось ранее, для решения системы нелинейных уравнений используется метод Ньютона. На каждой ньютоновской итерации производится сборка матрицы Якоби и вычисление правой части. Заполнение матрицы Якоби производится поблочно путем вычисления объемных интегралов (2.7) для каждого элемента расчетной сетки. Интегралы, содержащие базисные функции для перемещений, вычисляются по квадратурным формулам Гаусса второго порядка для тетраэдральных элементов. В остальных интегралах базисные функции только первого порядка, поэтому вычисление интеграла может быть выполнено аналитически. Для хранения и выполнения операций над матрицами используется библиотека `Eigen` [101]. В связи с тем, что якобиан является разреженной матрицей, то матрица хранится в CSR формате. При использовании данного формата хранения матрицы записывается информация только о ненулевых коэффициентах, включающая в себя значение коэффициента, номер колонки, а также индексы блоков данных для каждой строки.

После «сборки» якобиана и вычисления правой части применяются граничные условия. Для каждой переменной, для которой задано граничное условие первого рода, зануляется соответствующая ей строка в якобиане и правой части, а на диагонали матрицы ставится 1. Это означает, что приращение данной компоненты вектора неизвестных равно нулю, то есть её значение на каждый момент времени соответствует начальному (которое задается из начальных условий). Для граничных условий второго рода вычисляются поверхностные интегралы f_ξ, f_p, f_T (2.7) и добавляются к правой части.

Условием сходимости итерационного алгоритма является одновременное выполнение следующих условий:

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_\infty < \varepsilon_x, \quad \|\mathbf{R}\|_\infty < \varepsilon_R,$$

где $\Delta \mathbf{x}$ – величина приращения неизвестных на текущей итерации, \mathbf{R} – значение нелинейной невязки, $\varepsilon_{x,R}$ – параметры точности. В случае если количество

итераций на одном временном шаге превышает 5, то временной шаг уменьшается в 2 раза и итерационный алгоритм повторяется с начала. В случае успешной сходимости алгоритма осуществляется расчет следующего временного периода с постепенным увеличением шага по времени.

На каждой ньютоновской итерации осуществляется решение системы линейных уравнений. После предварительной подготовки матрицы системы по алгоритмам, описанным в предыдущей главе, запускается линейный солвер. В качестве солвера используется стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab), реализованный в библиотеке HYPRE [102] с предобуславливателем ILU(1) из этой же библиотеки. Относительная погрешность вычислений линейного солвера установлена равной ε_{lin} .

После расчета временного шага производится пересчет некоторых параметров модели, явно зависящих от текущего состояния среды. В первую очередь производится расчет параметра повреждаемости. Повреждаемость задается для всего элемента и зависит от состояния среды. Для вычисления значения повреждаемости все необходимые данные интерполируются на центр элемента, после чего рассчитанное по определенной формуле значение присваивается всему элементу. Поскольку во многих моделях повреждаемость зависит от главных значений тензора напряжений или деформаций, то для расчета главных значений вычисляются собственные значения соответствующей матрицы с использованием функционала библиотеки Eigen.

Кроме повреждаемости в разработанном модуле также осуществляется пересчет проницаемости среды, а также физических свойств флюида (в частности, вязкости). Данные величины также рассчитываются явно в конце шага по формулам, которые будут приведены в следующем разделе.

Постпроцессор. После завершения всех расчетов, относящихся к текущему временному шагу, данные передаются в постпроцессор. В постпроцессоре производится выгрузка основных результатов (давление, температура, деформации, напряжения, параметр повреждаемости, проницаемость, компоненты энергии и так далее) на каждый момент времени для последующей визуализации и анализа. Для визуализации используется программа Paraview [103], которая принимает на вход .vtu файл с неструктурированной сеткой и заданными на ней распределениями свойств. Для генерации данного файла используется библиотека VTK [104]. Итоговая блок-схема полного алгоритма приведена на рисунке 3.3.

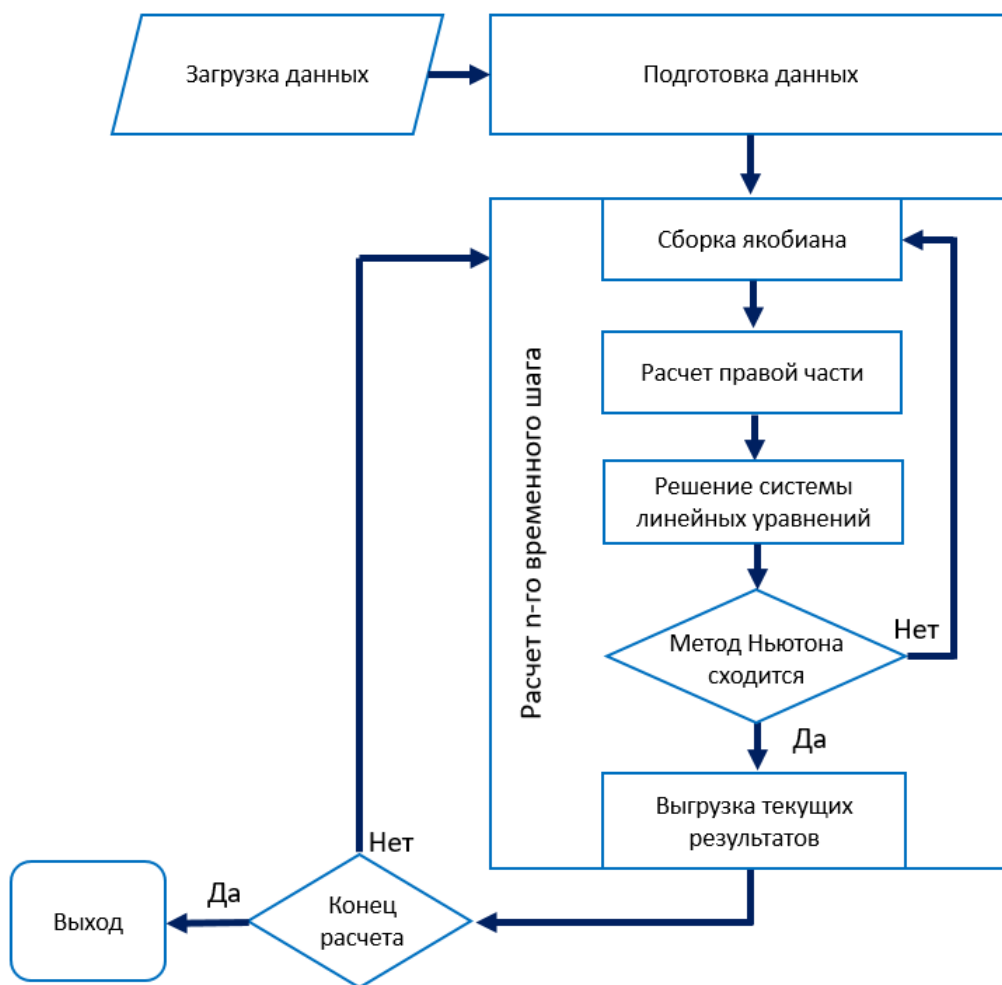


Рис. 3.3. Блок-схема работы программного модуля

Глава 4

Результаты моделирования

В данном разделе приведены результаты моделирования с использованием программного комплекса, описанного в предыдущей главе. Валидация алгоритма проводилась на ряде тестов (задача Терцаги, тест Манделя и тест на одномерное неизотермическое расширение), для которых известно аналитическое решение. Кроме того, был проведен ряд расчетов, моделирующих воздействие на пласт добывающих и нагнетательных скважин при различных условиях с целью оценки влияния геомеханических эффектов на процесс вытеснения.

4.1 Задачи термoporоупругости

4.1.1 Задача Терцаги

В первом тесте моделировалась консолидация пороупругого материала под воздействием внешней нагрузки (рисунок 4.1). Расчетная область имеет форму параллелепипеда, размер области в латеральном направлении равны $L_a = 1$ м, в вертикальном — $L_z = 1$ м. Нижняя грань области зафиксирована, а на боковых гранях равны нулю горизонтальные перемещения. На боковых и нижней грани задано условие непротекания, к верхней грани приложено постоянное вертикальное напряжение 1 кПа. Поровое давление на верхней грани постоянно.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x = 0, x = L_a : \quad u_x = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
 y = 0, y = L_a : \quad u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\
 z = 0 : \quad u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\
 z = L_z : \quad \sigma_z = \text{const}, \quad p = 0.
 \end{aligned}$$

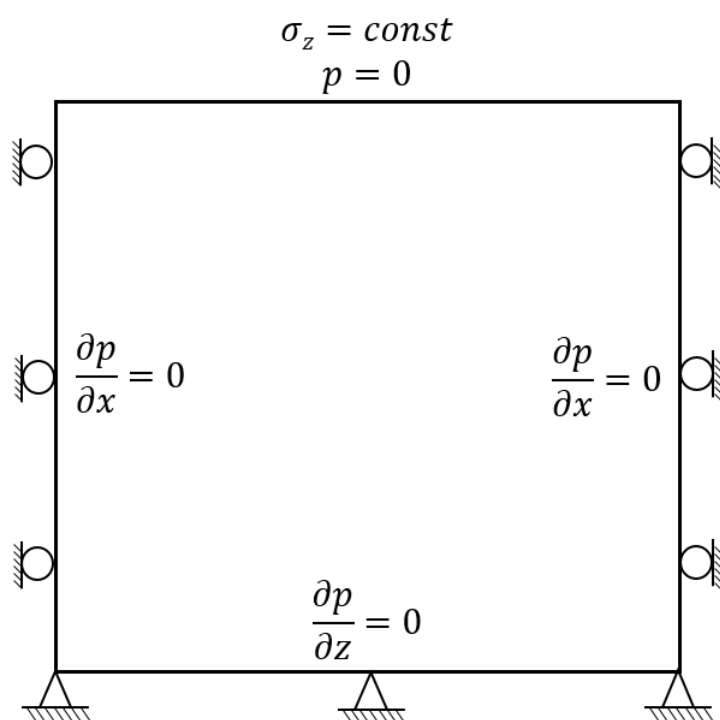


Рис. 4.1. Схема расчетной области для задачи Терцаги

Таблица 4.1. Значения входных параметров для задачи Терцаги

Параметр	Значение
Модуль Юнга, E	14 ГПа
Коэффициент Пуассона, ν	0.2
Модуль Био, $1/N$	13 ГПа
Коэффициент Био, b	0.79
Проницаемость, k	$1,9 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$
Вязкость, μ	1 мПа · с

Расчетная сетка состоит из 200 тетраэдров, причем в латеральном направлении — 2 элемента, а в вертикальном — 100. Общее количество узлов — 1809. Параметры модели представлены в таблице 4.1.

В работе Терцаги [106] приведено аналитическое решение рассматриваемой задачи. Решение для порового давления и перемещений может быть записано в виде [25]:

$$p(z, t) = p_0 - p_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\operatorname{erfc} \frac{(2m+1)L_z - (z - L_z)}{\sqrt{4ct}} + \operatorname{erfc} \frac{(2m+1)L_z + (z - L_z)}{\sqrt{4ct}} \right],$$

$$u_z(z, t) = u_0 + c_m \gamma \sigma_0 [(L_z - z) - 8 \frac{L_z}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \exp \left(\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 ct}{4L_z^2} \right) \times \cos \left(\frac{(2m+1)\pi z}{2L_z} \right)],$$

где

$$\gamma = \frac{B(z + \nu_u)}{3(1 - \nu_u)}, \quad c_m \gamma = \frac{\nu_u - \nu}{2G(1 - \nu)(1 - \nu_u)}, \quad c = \frac{2kG(1 - \nu)(\nu_u - \nu)}{\mu b^2(1 - 2\nu)^2(1 - \nu_u)},$$

G — модуль сдвига, ν_u — недренированный коэффициент Пуассона, $B = bm/(K + b^2N)$ — коэффициент Скемптона.

На рисунках 4.2 и 4.3 приведено сравнение зависимости порового давления и вертикальных перемещений соответственно от высоты для рассчитанного и аналитического решения в интервале времен от 5 до 100 с. В результате получено хорошее совпадение с аналитическим решением.

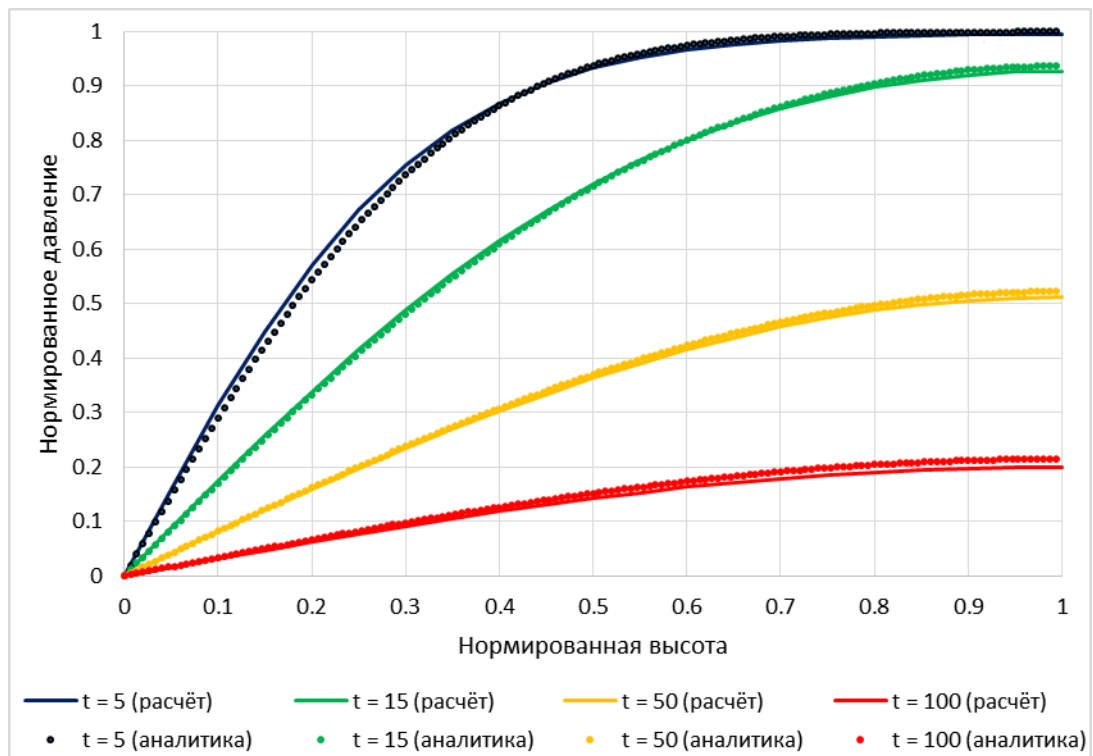


Рис. 4.2. Сравнение рассчитанного нормированного давления с аналитическим решением для моментов времени 5-100 с.

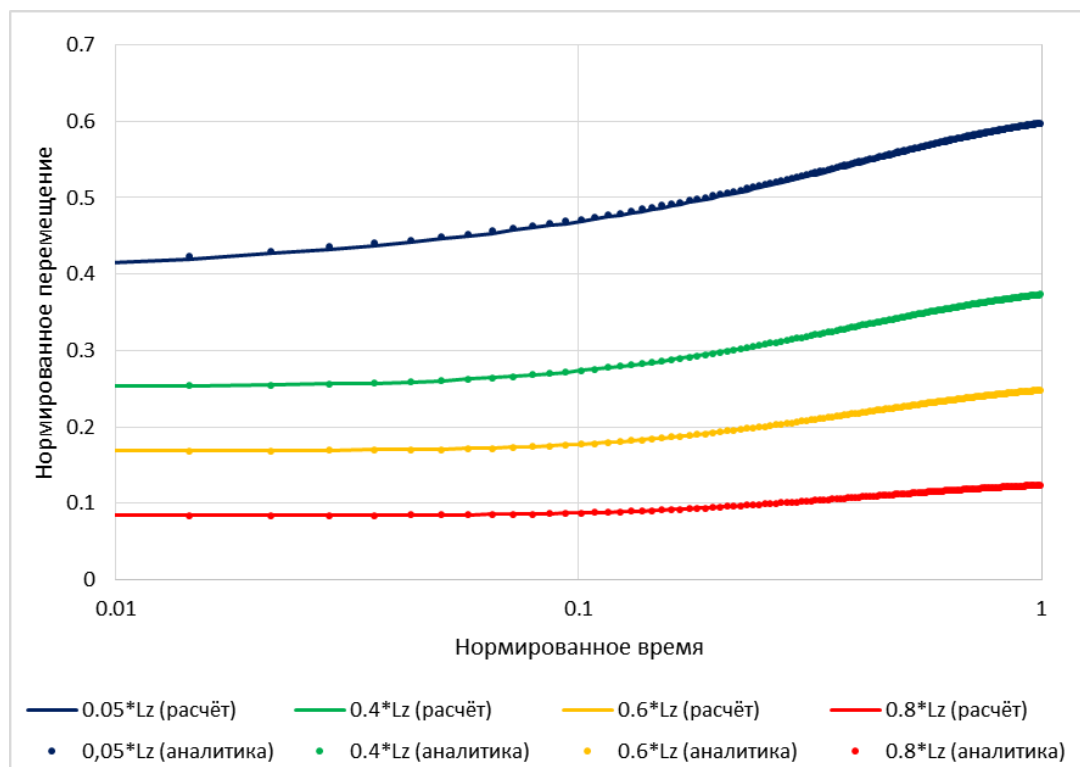


Рис. 4.3. Сравнение динамики изменения рассчитанного нормированного перемещения с аналитическим решением

4.1.2 Тест Манделя

В работе Манделя [107] рассматривался случай трехмерной консолидации пороупругого материала, при котором наблюдается немонотонная динамика изменения порового давления с течением времени (эффект Манделя-Крайера). В оригинальной постановке рассматривается образец пороупругого материала длиной $2a$ и высотой $2b$, насыщенного флюидом (рисунок 4.4). Образец закреплен между двумя жесткими вертикальными непроницаемыми пластинами, к верхней грани приложена распределенная нагрузка с силой $2F$.

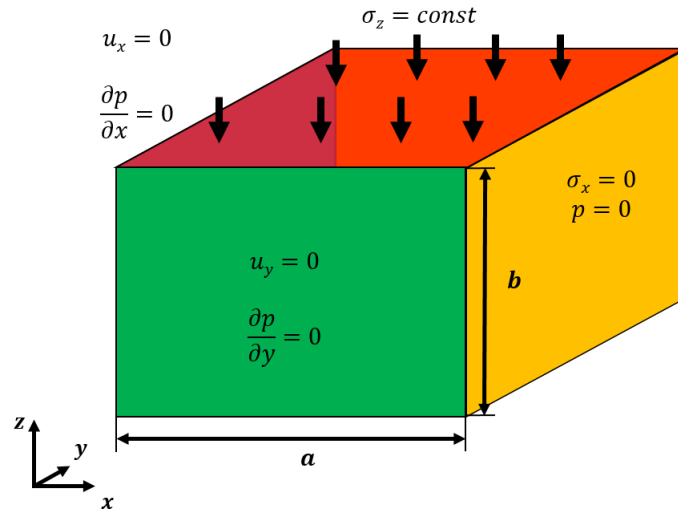


Рис. 4.4. Схема расчетной области для теста Манделя

В силу симметрии задачи для тестовых расчетов рассматривалась $1/8$ часть образца. Таким образом, граничные условия в данной постановке имеют вид:

$$\begin{aligned}
 x = 0 : \quad & u_x = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
 x = a : \quad & \sigma_x = 0, \quad p = 0, \\
 y = 0, y = a : \quad & u_y = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\
 z = 0 : \quad & u_z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\
 z = b : \quad & \int_0^a \sigma_z(x, b, t) dx = -\sigma_0 a, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.
 \end{aligned}$$

Таблица 4.2. Значения входных параметров для теста Манделя

Параметр	Значение
Модуль Юнга, E	14 ГПа
Коэффициент Пуассона, ν	0.2
Модуль Био, b	13 ГПа
Коэффициент Био, $1/N$	0.79
Проницаемость, k	$1,9 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$
Вязкость, μ	1 мПа · с

Размеры образца составляли $1 \times 1 \times 1$ м. Расчетная сетка является равномерной в каждом направлении. Общее количество элементов — 48000, узлов — 78182. Вертикальное напряжение, действующее на верхнюю грань, равно 1 кПа. Начальное давление и перемещения равны нулю. Значения параметров среды и флюида приведены в таблице 4.2.

Аналитическое решение для данной задачи представлено в [108] и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 p(x, t) &= \frac{2}{3} \sigma_0 B (1 + \nu_u) \times \\
 &\quad \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \left(\cos \frac{\lambda_m x}{a} - \cos \lambda_m \right) \exp \left(-\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right), \\
 u_x(x, t) &= \left[\frac{\sigma_0 \nu}{2G} - \frac{\sigma_0 \nu_u}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \exp \left(-\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right) \right] x + \\
 &\quad + \frac{\sigma_0 a}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \sin \frac{\lambda_m x}{a} \exp \left(-\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right), \\
 u_z(z, t) &= \left[-\frac{\sigma_0 (1 - \nu)}{2G} + \frac{\sigma_0 (1 - \nu_u)}{G} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_m \cos \lambda_m}{\lambda_m - \sin \lambda_m \cos \lambda_m} \exp \left(-\frac{\lambda_m^2 ct}{a^2} \right) \right] z,
 \end{aligned}$$

где λ_m — решение уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda_m = \frac{1 - \nu}{\nu_u - \nu} \lambda_m.$$

Сравнение рассчитанных распределений порового давления вдоль оси x и проекции перемещения вдоль осей x и z в сравнении с аналитическим решением для моментов времени 0.00625 — 0.325 с представлены на рисунке 4.5.

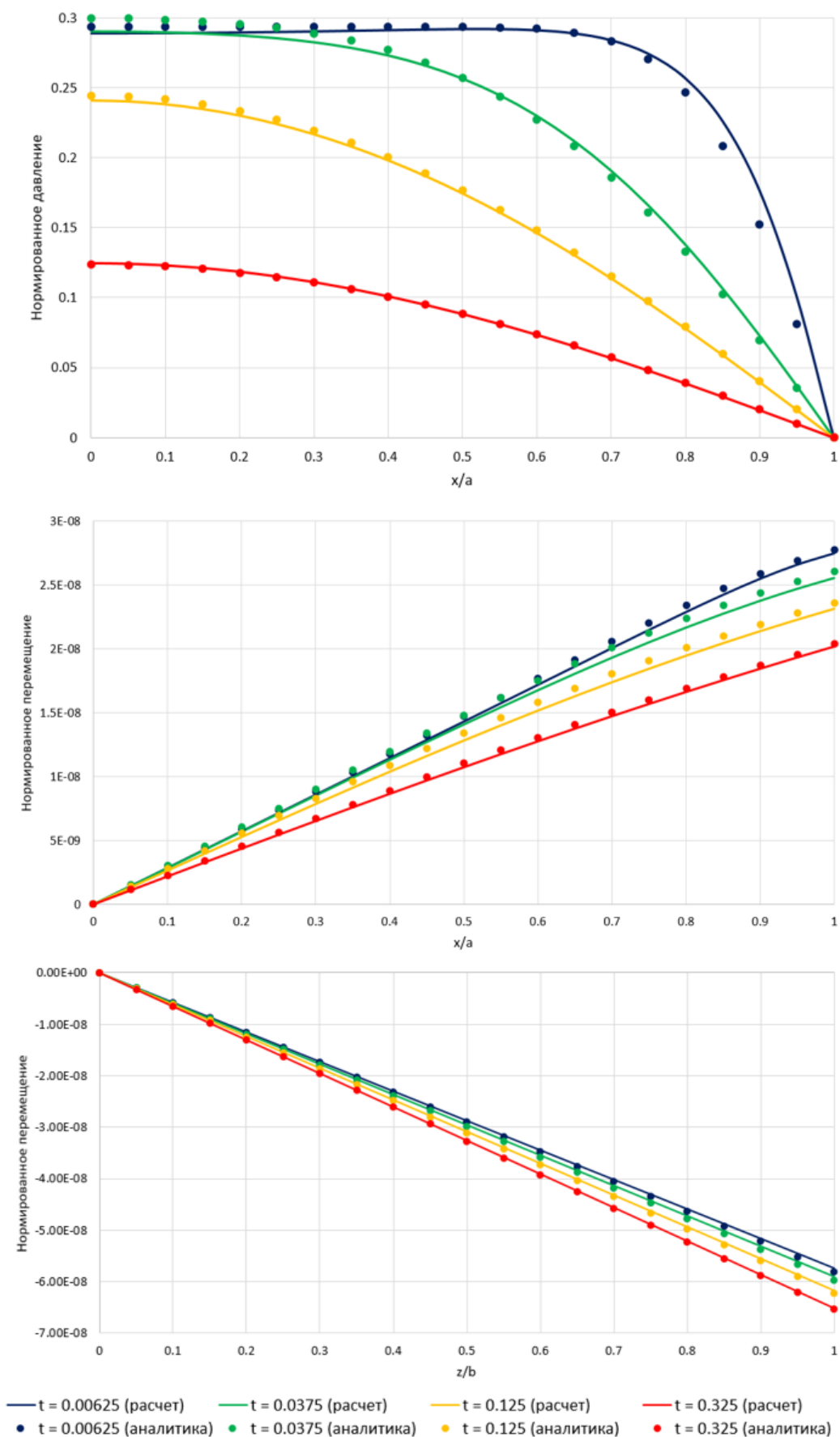


Рис. 4.5. Распределение нормированного порового давления вдоль оси x (сверху), проекция нормированного перемещения по x (по центру) и z (снизу) компоненте

4.1.3 Одномерное неизотермическое расширение

В данном тесте рассматривается одномерная задача термической деформации образца (рисунок 4.6). Размеры образца: $a \times a \times h$. Основание образца закреплено, боковые границы допускают только вертикальные перемещения, верхняя граница свободна. Предполагается, что образец термически изолирован и в начальный момент времени имеет температуру T_0 . Верхняя граница имеет постоянную температуру, равную $T_0 + \theta_0$. С учетом данной постановки граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 z = 0 : \quad & u_x = 0, \quad u_y = 0, u_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \\
 x = 0, x = a : \quad & u_y = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\
 y = 0, y = a : \quad & u_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \\
 z = h : \quad & \sigma_z = 0, \quad T = T_0 + \theta_0,
 \end{aligned}$$

начальные условия:

$$u(t = 0) = 0, \quad T(t = 0) = T_0.$$

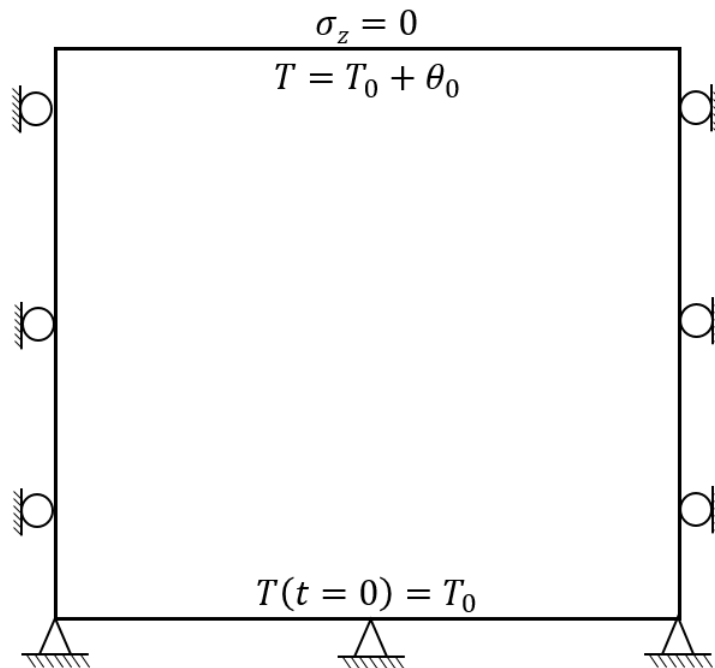


Рис. 4.6. Модель одномерного изотермического расширения

Задача имеет аналитическое решение в образах преобразования Лапласа по времени [109]:

$$\tilde{\theta}(z, s) = \left(\frac{\theta_0}{s} \right) \frac{\cosh(\mu z)}{\cosh(\mu h)}, \quad \tilde{w} = \left(\frac{\theta_0}{\mu s} \right) \left(\frac{\beta}{M} \right) \frac{\sinh(\mu z)}{\cosh(\mu h)},$$

где $\mu = \sqrt{\rho c_v (sA/kM)}$, $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(z, s)$ и $\tilde{w} = \tilde{w}(z, s)$ — температура и вертикальные перемещения в образах преобразования Лапласа, s — переменная Лапласа, β — коэффициент температурной деформации, M и A — компрессионные модули деформации в изотермическом и адабатическом состоянии соответственно:

$$M = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad A = M + \frac{\beta^2 T_0}{\rho c_v}.$$

Для получения точного решения в основных переменных был реализован модуль вычисления обратного преобразования Лапласа, основанный на использовании численного алгоритма Стефеста [110].

Сравнение численного и аналитического решений проводилось для моментов времени от 10 до 200 ч. Параметры тестовых расчетов приведены в таблице 4.3. Результаты представлены на рисунках 4.7 и 4.8.

Таблица 4.3. Значения параметров для теста на одномерное изотермическое расширение

Параметр	Значение
Размер сетки	1 × 1 × 100 ячеек
Размер модели, $a \times a \times h$	1 × 1 × 1 м
Модуль Юнга, E	14 ГПа
Коэффициент Пуассона, ν	0.2
Коэффициент линейного расширения, α	10 ⁻⁵ 1/К
Теплоемкость, C_{ps}	2 МДж/(м ³ · К)
Теплопроводность, κ	2 Вт/(м · К)
Начальная температура, T_0	373 К
Температура на верхней границе, $T_0 + \theta_0$	573 К

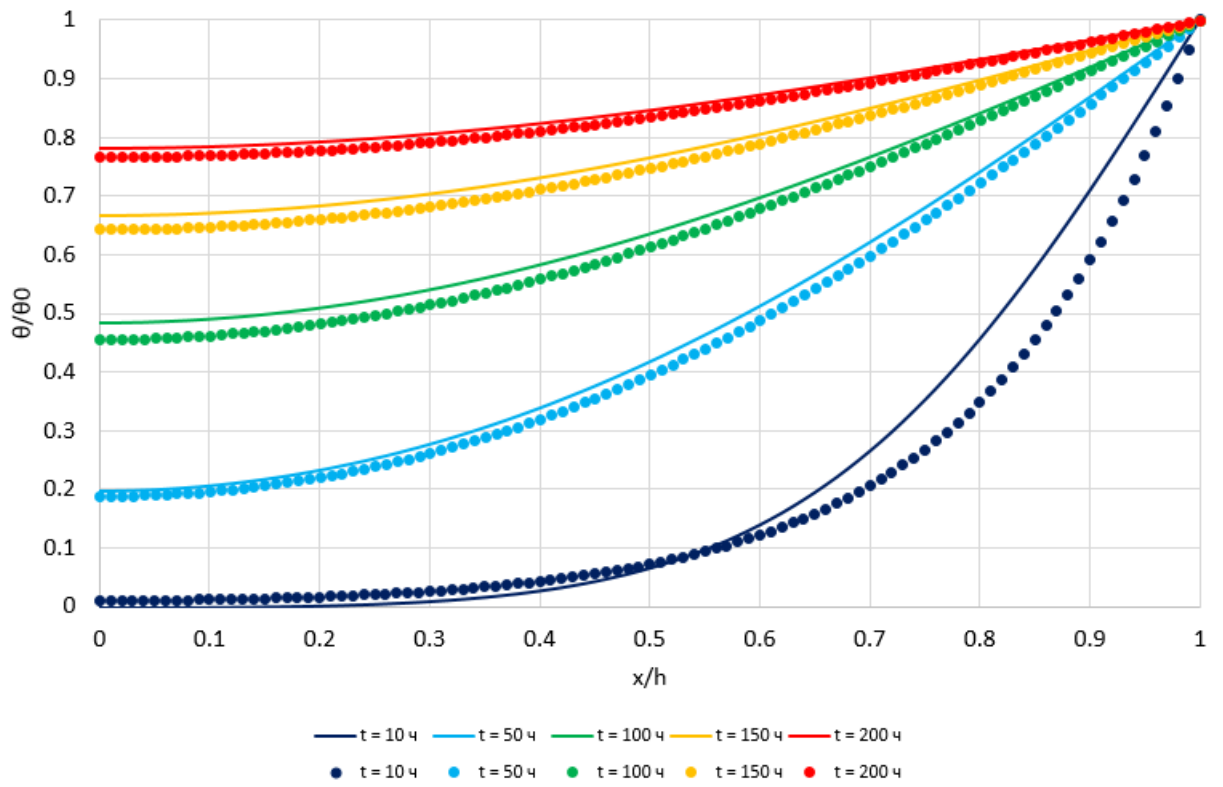


Рис. 4.7. Распределение температуры по образцу

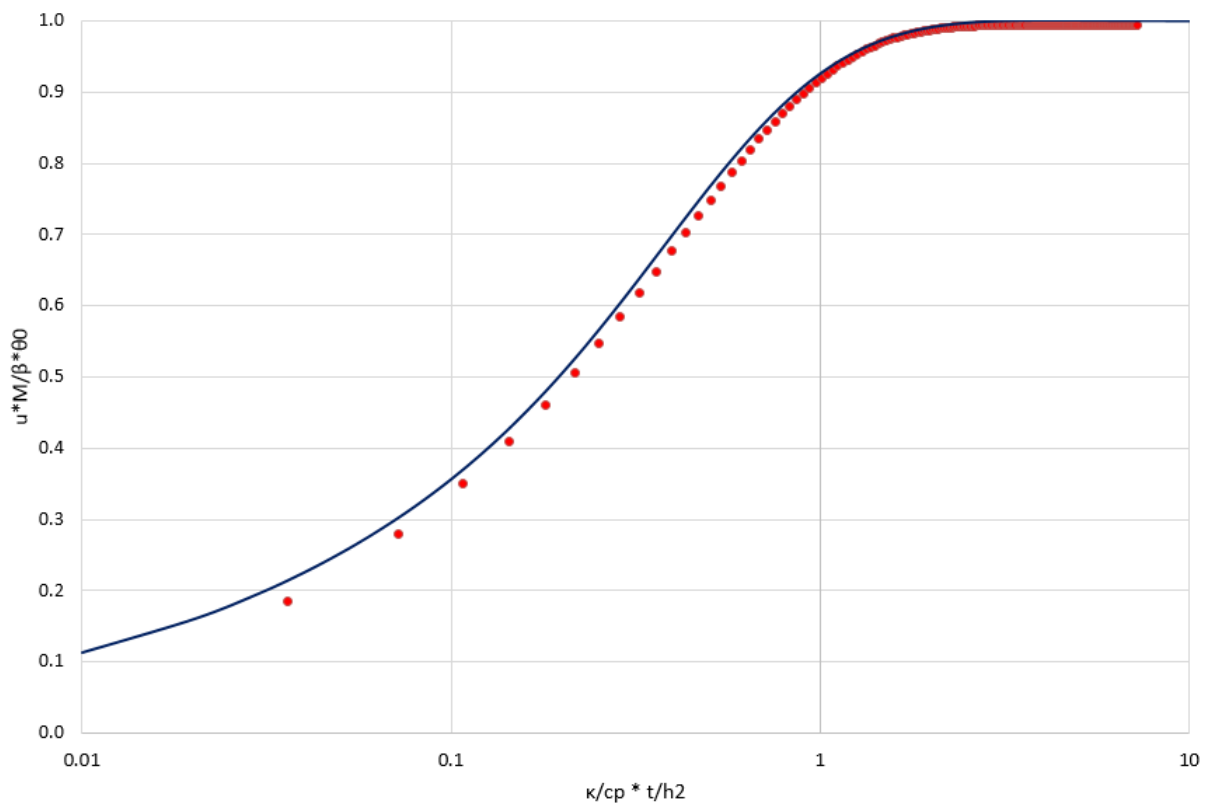


Рис. 4.8. Вертикальное перемещение на верхней границе образца

4.2 Моделирование теплового воздействия на флюидонасыщенный пласт

Для демонстрации возможности практического применения программного комплекса был проведен ряд расчетов по моделированию термического воздействия на флюидонасыщенный пласт. При проведении расчетов помимо стандартных, учитывались следующие эффекты: разрушение среды, изменение проницаемости пласта при его деформации, зависимость вязкости флюида от давления и температуры.

В качестве формулы, связывающей повреждаемость с параметрами среды, используется явная зависимость параметра повреждаемости от деформации породы [65]:

$$D = \begin{cases} 0, & \tilde{\varepsilon} < \tilde{\varepsilon}_c, \\ D_{\text{off}} \frac{\tilde{\varepsilon} - \tilde{\varepsilon}_c}{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}} - \tilde{\varepsilon}_c}, & \tilde{\varepsilon}_c \leq \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \\ D_{\text{lim}} - (D_{\text{lim}} - D_{\text{off}}) \frac{\tilde{\varepsilon}_{\text{off}}}{\tilde{\varepsilon}}, & \tilde{\varepsilon} > \tilde{\varepsilon}_{\text{off}}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $\tilde{\varepsilon}$ вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle^2}, \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2}.$$

где ε_i — главные деформации. Параметры зависимости (4.1) принимались следующими: $D_{\text{lim}} = 1$, $D_{\text{off}} = 1$, $\varepsilon_{\text{off}} = 0.015$, $\varepsilon_c = 0.0002$. Данные значения приведены в [65] и были получены для образцов песчаника.

Для моделирования зависимости проницаемости от параметров состояния среды используется зависимость [72]:

$$k = k_0 \exp[-\beta(\tilde{\sigma} - \alpha p)], \quad (4.2)$$

где k_0 — начальное значение проницаемости, $\tilde{\sigma} = 1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ — среднее напряжение. В качестве коэффициентов формулы (4.2) использовались следующие значения [72]: $\alpha = 0.1 \text{ МПа}^{-1}$, $\beta = 0.05 \text{ МПа}^{-1}$.

Для описания изменения вязкости флюида от состояния пласта используется корреляция Беггса-Робинсона [99], широко используемая в нефтяном инжини-

ринге:

$$\mu = 10^X - 1, \quad X = 10^Z T^{-1.163}, \quad Z = 3.0324 - 0.02023\gamma_0, \quad (4.3)$$

где γ_0 — удельная плотность флюида, измеряемая в 0API (безразмерная единица измерения, описывающая отношение плотности флюида к плотности воды). Для перевода плотности нефти из системы СИ в 0API используется следующая формула:

$$\gamma_0 = \frac{141.5}{\rho_o/1000 + 131.5},$$

где ρ_o — плотность флюида в $\text{кг}/\text{м}^3$. Параметры модели, используемые в дальнейших расчетах, приведены в таблице 4.4.

Таблица 4.4. Значения входных параметров для модели термического воздействия на пласт

Параметр	Значение
Толщина пласта, h	1 м
Начальное пластовое давление, p_0	200 бар
Начальная температура пласта, T_0	100 °C
Начальное значение напряжения по направлению x , σ_{xx}^0	300 бар
Начальное значение напряжения по направлению y , σ_{yy}^0	330 бар
Модуль Юнга, E	20 ГПа
Коэффициент Пуассона, ν	0.3
Модуль Био, N	10 ГПа
Модуль объемного сжатия флюида, K_f	3.3 ГПа
Коэффициент Био, b	0.79
Проницаемость, k	$1 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2$
Пористость, φ	0.1
Вязкость, μ	1 мПа · с
Плотность скелета, ρ_s	2100 $\text{кг}/\text{м}^3$
Плотность флюида, ρ_f	1000 $\text{кг}/\text{м}^3$
Коэффициент объемного температурного расширения скелета, α_s	$1 \cdot 10^{-6} \text{ 1}/\text{K}$
Коэффициент объемного температурного расширения флюида, α_f	$1 \cdot 10^{-4} \text{ 1}/\text{K}$
Удельная теплоемкость скелета, c_{ps}	1000 Дж/(кг · К)
Удельная теплоемкость флюида, c_{pf}	4200 Дж/(кг · К)
Эффективная теплопроводность, κ	2 Вт / (м · К)

4.2.1 Моделирование развития повреждаемости вблизи нагнетательной скважины

В данном расчете рассматривается разрушение призабойной зоны нагнетательной скважины при закачке теплоносителя в пласт при высоком давлении в начальные моменты времени. Для оценки возникающих эффектов было проведено моделирование в расчетной области размером $0.5 \times 0.5 \times 0.2$ м, в углу которой расположена скважина радиусом 0.1 м, нагнетающая флюид при температуре 300°C с постоянной приемистостью $1 \text{ м}^3/\text{сут}$. Начальное пластовое давление — 200 бар, начальная температура — 100°C , напряжения по осям x , y и z — 300, 330 и 550 бар соответственно, начальные деформации равны нулю. Данные значения характерны для горных пород, находящихся в пластовых условиях на глубине нескольких километров. Проницаемость и модуль Юнга заданы в модели в соответствии с распределением Гаусса со средними значениями из таблицы 4.4. Расчетная сетка построена с учетом измельчения вблизи скважины (рисунок 3.2), общее количество конечных элементов сетки составляет 59508, узлов — 120183.

На рисунке 4.9 приведены поля динамических параметров на моменты времени 3, 6 и 12 часов. По результатам расчета можно видеть практически полное разрушение коллектора в радиусе 0.2 м от скважины. При этом разрушение в большей степени вызвано повышенным пластовым давлением (более 800 бар), поскольку увеличение температуры в данной зоне незначительно. Также получено увеличение проницаемости в 2 раза по сравнению с начальной. Распределение компонент тензора деформаций на данные моменты времени приведены на рисунке 4.10.

Для данной модели была проведена оценка влияния проницаемости на распределение поля давления. На рисунке 4.11 приведено сравнение распределения поля давления в случае учета изменения проницаемости от состояния среды (слева), а также в случае неизменной проницаемости (справа). В результате проведенных расчетов получено различие в давлении более 50 бар.

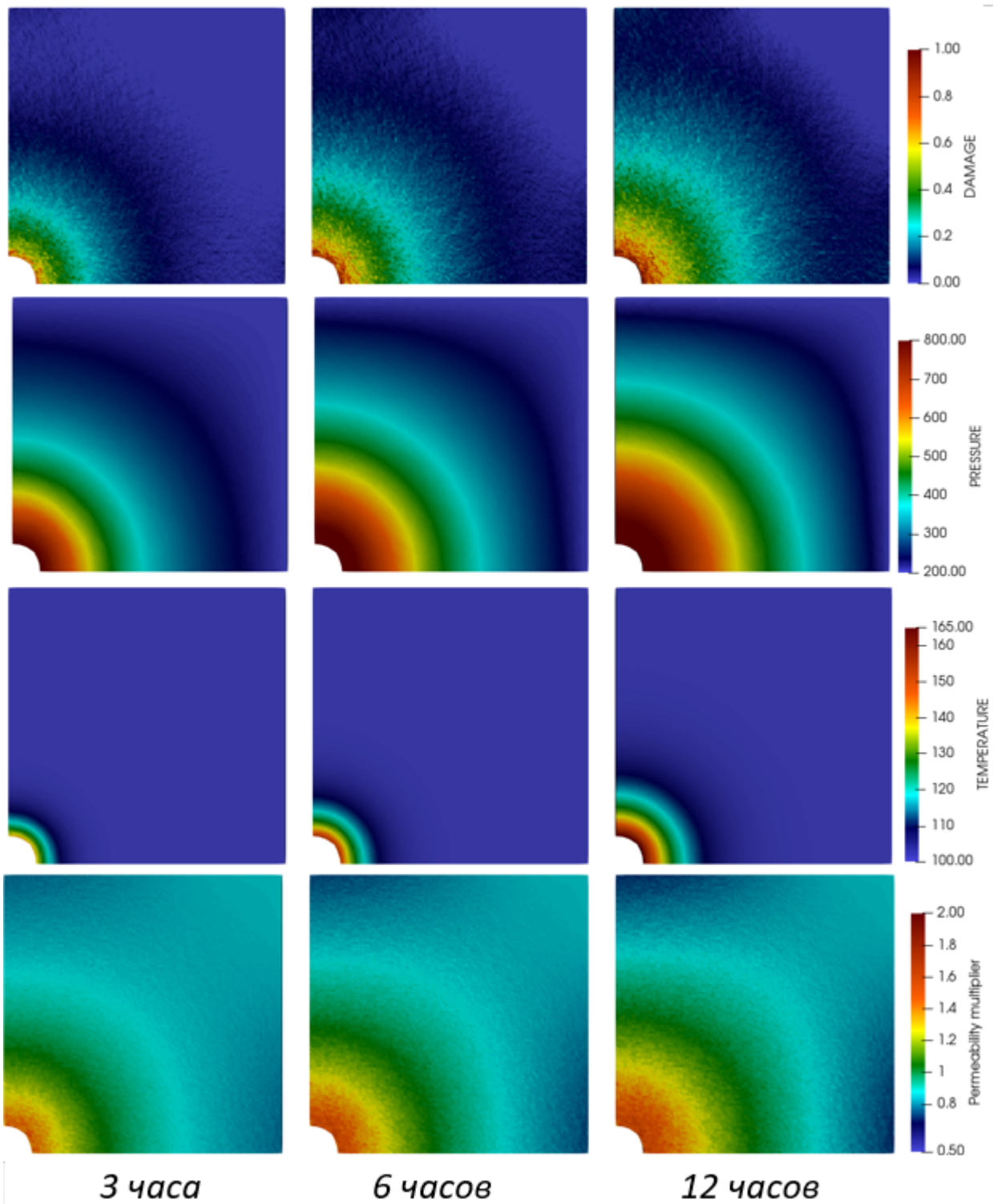


Рис. 4.9. Распределение параметра повреждаемости D , давления p , температуры T , отношения текущей и начальной проницаемости k/k^0 через 3, 6 и 12 часов

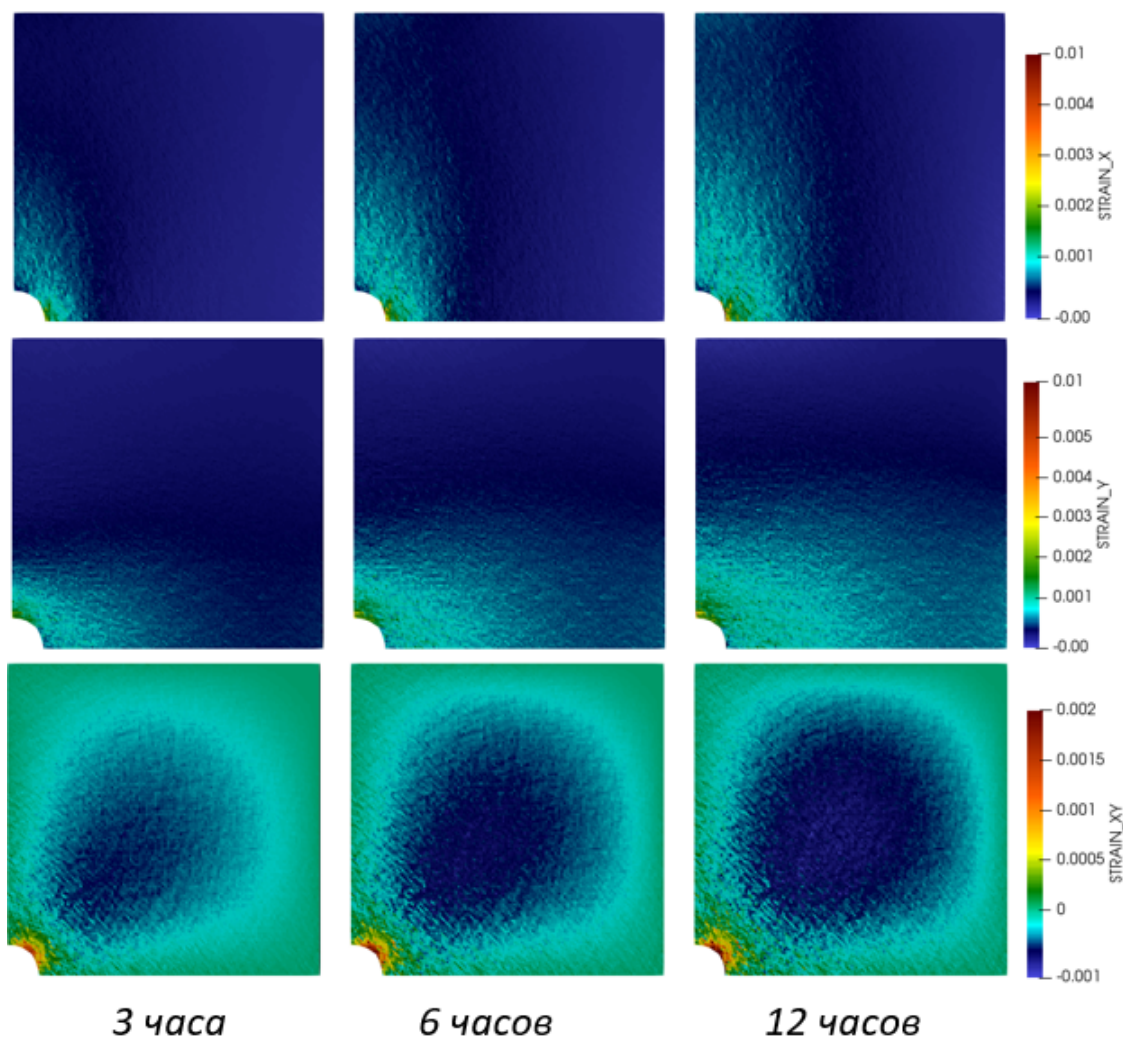


Рис. 4.10. Распределение латеральных компонентов тензора деформаций ε_{xx} , ε_{yy} и ε_{xy} через 3, 6 и 12 часов

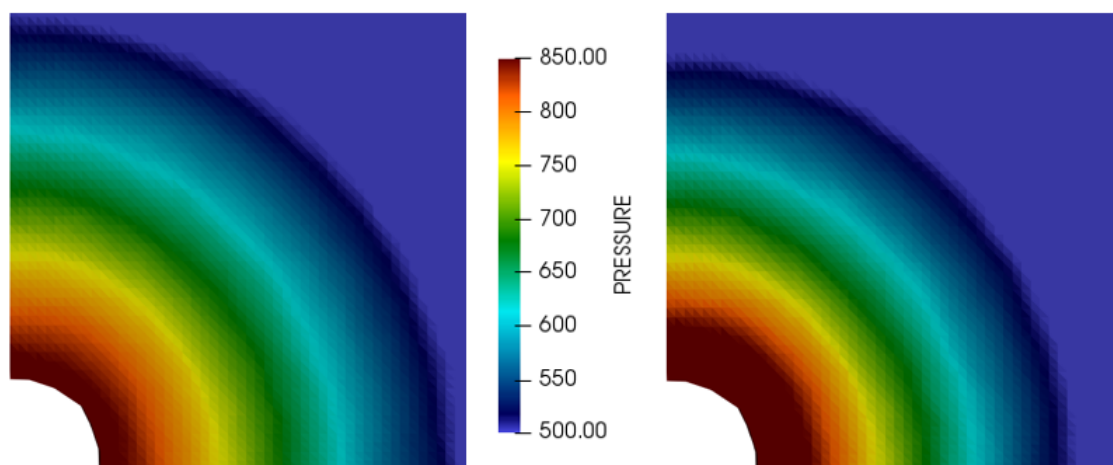


Рис. 4.11. Сравнение поля давления на момент времени 12 часов при учете изменения проницаемости (слева) и при постоянной проницаемости (справа)

4.2.2 Моделирование термического воздействия на пласт с добывающей и нагнетательной скважиной

В данном расчете моделируется реакция пласта при использовании системы поддержания пластового давления, при котором нагнетательная скважина закачивает флюид при температуре 400°C с приемистостью $0.2 \text{ м}^3/\text{сут}$. Добывающая скважина работает с постоянным забойным давлением 100 бар. Начальные и граничные условия аналогичны предыдущему случаю.

Рассматривается трехслойный изотропный пласт размером $100 \times 100 \times 1 \text{ м}$. Скважины расположены на противоположных концах диагонали пласта. Для более корректного учета эффектов, возникающих в прискважинной зоне, расчетная сетка имеет локальное измельчение вдоль границы модели (рисунок 4.12). Механические граничные условия: $\xi_x(x = 0) = 0, \xi_y(y = 0) = 0, \xi_z(z = 0) = 0, t_x(x = 100) = 300 \text{ бар}, t_y(y = 100) = 300 \text{ бар}, t_z(z = 1) = 550 \text{ бар}$. Фильтрационные и термические граничные условия: термически изолированная непроницаемая граница.

Моделировалась разработка пласта в течении 5 лет. По результатам расчетов оценивалось изменение давления, температуры, параметра повреждаемости и проницаемости со временем. Распределения полей соответствующих величин через 6, 12 и 60 месяцев приведены на рисунках 4.13. Распределение латеральных компонент тензора напряжений приведено на рисунке 4.14.

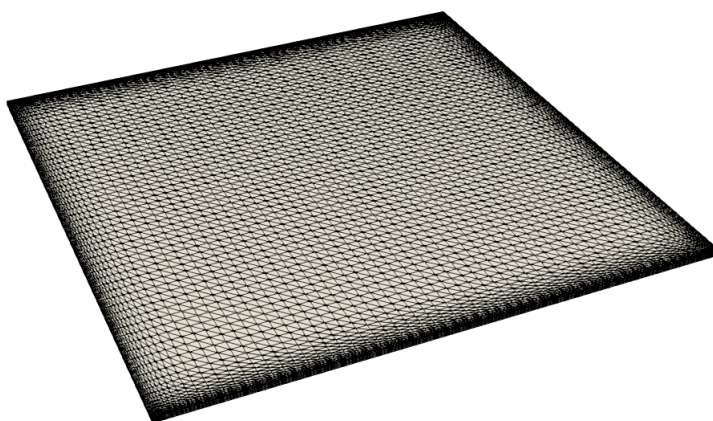


Рис. 4.12. Расчетная сетка для модели с нагнетательной и добывающей скважинами

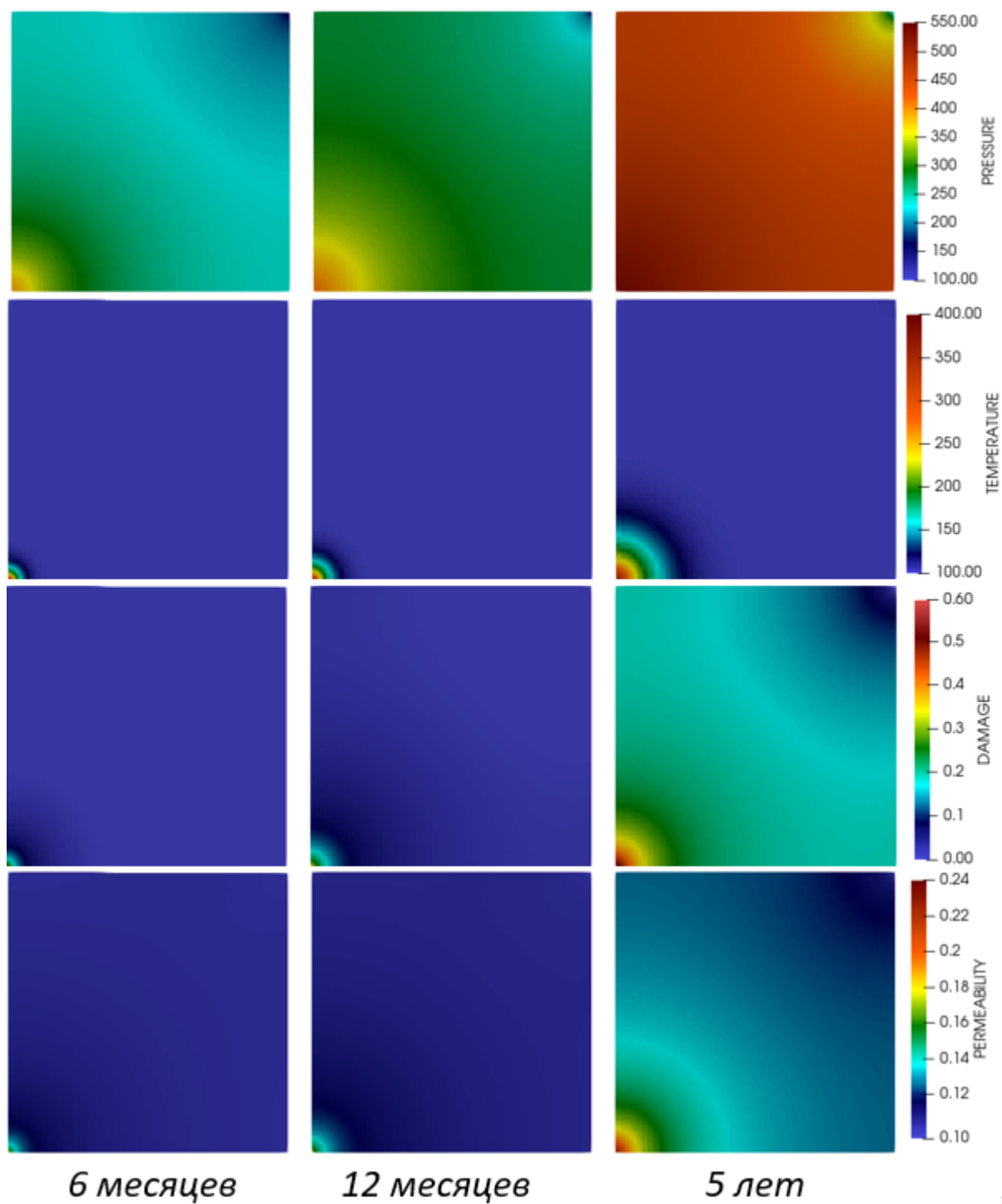


Рис. 4.13. Распределение давления p (1 ряд), температуры T (2 ряд), параметра повреждаемости D (3 ряд), проницаемости k (4 ряд) через 6 месяцев (слева), 12 месяцев (по центру) и 5 лет (справа)

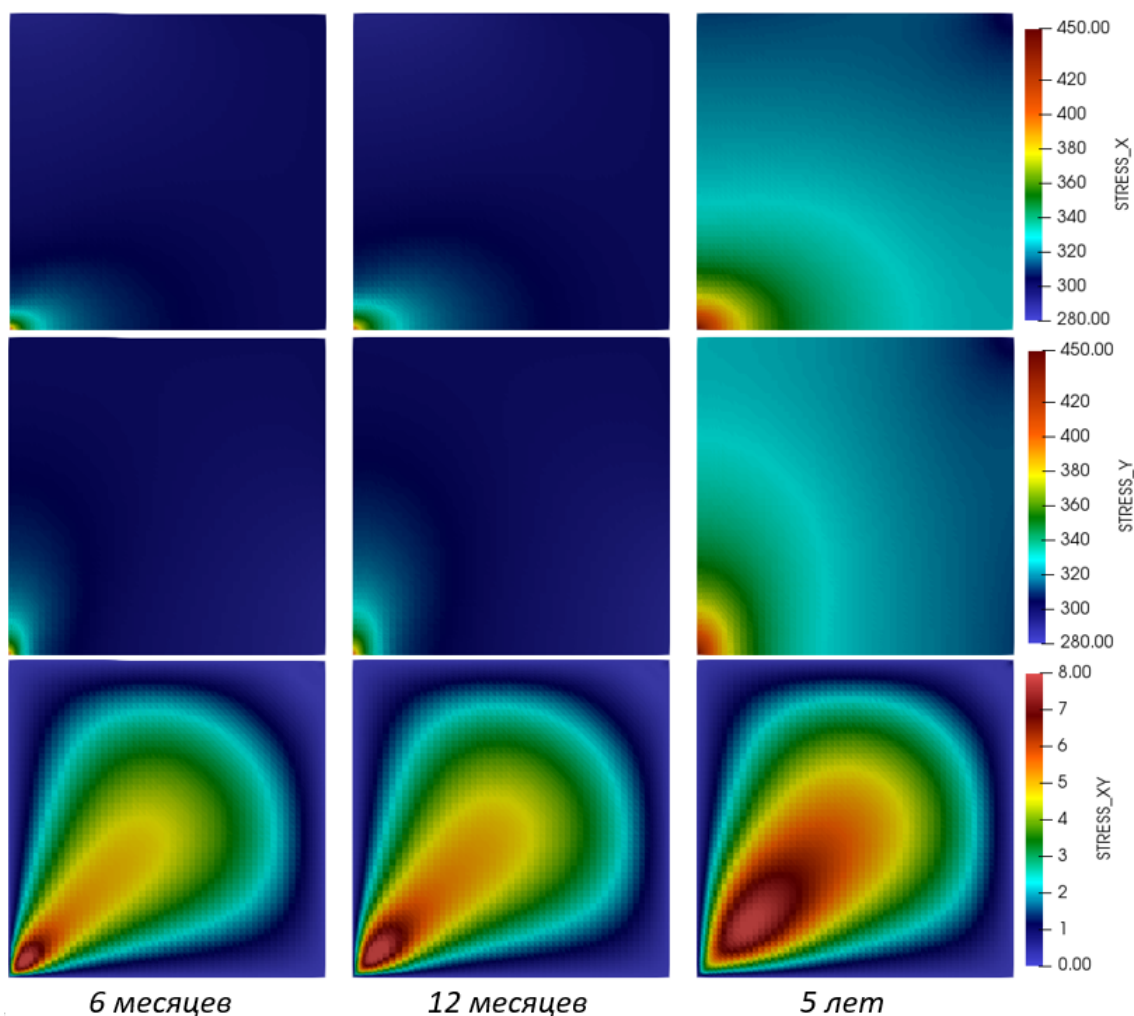


Рис. 4.14. Распределение латеральных компонентов тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} через 6 месяцев (слева), 12 месяцев (по центру) и 5 лет (справа)

Также был проведен расчет данной модели без учета повреждаемости. Сравнение распределений компоненты ε_{xx} тензора деформаций на момент времени 5 лет для случаев учета и в отсутствие учета повреждаемости приведено на рисунке 4.15. Из данного рисунка видно, что учет разрушения породы существенно влияет на расчет напряженно-деформированного состояния (для данного теста различие в значениях тензора деформаций достигает 20%).

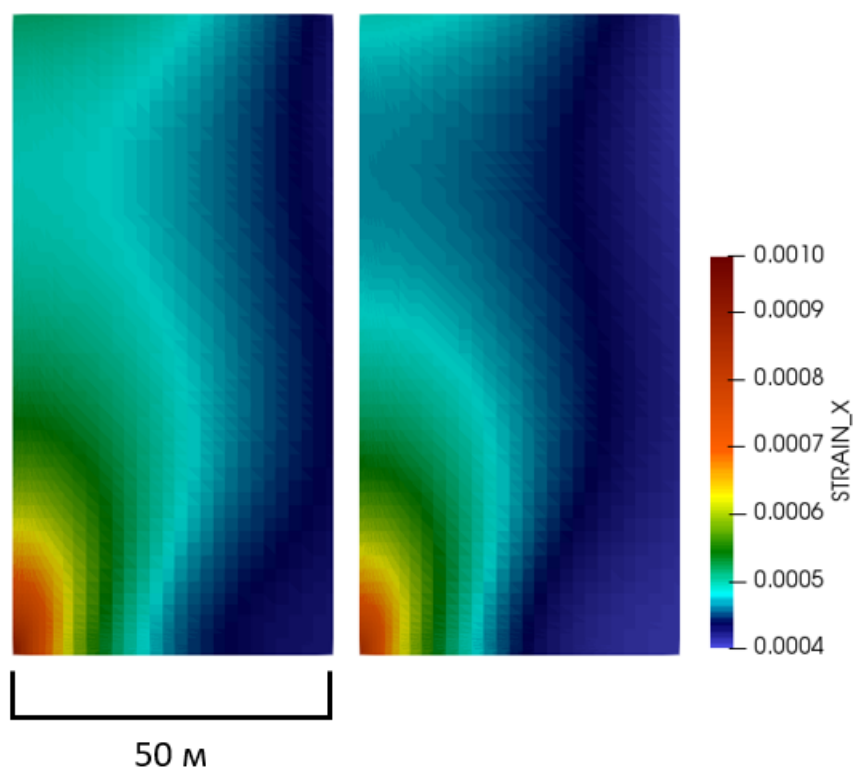


Рис. 4.15. Компонента ε_{xx} тензора деформаций на момент времени 5 лет при учете (слева) и в отсутствие учета (справа) повреждаемости

4.2.3 Моделирование развития трещиноватости при закачке теплоносителя

Рассмотрим задачу об образовании зоны повреждаемости в окрестности нагнетательной скважины при закачке в нее горячей жидкости под давлением, превышающим пластовое. Данная задача является некоторым аналогом задачи о самопроизвольном развитии трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Конечно, рассматриваемая постановка не описывает развитие трещины как уединенного объекта, поскольку для этого необходимо применение других моделей, качественно отличающихся от рассматриваемой. Однако, можно ожидать, что качественное поведение зоны разрушения имеет ряд особенностей, характерных для «настоящей» трещины ГРП. В частности, это характерная (уплощенная) форма зоны разрушения и ее ориентация относительно направлений главных напряжений. Отметим также, что целью представленного ниже расчета не является моделирование динамики зоны разрушения в содержательной прикладной постановке. Описанный ниже расчет демонстрирует основные возможности использованной математической модели, алгоритмов и программной реализации.

Рассматриваемая модель имеет пять слоев, размеры модели $50 \times 50 \times 5$ м. В центре модели расположена нагнетательная скважина, закачивающая флюид при постоянном давлении 800 бар и температуре 400°C . Начальное пластовое давление составляет 200 бар, температура — 100°C , полные (сжимающие) напряжения по направлению x, y и z соответственно 300, 550 и 700 бар.

Для более корректной оценки продвижения фронта разрушения, связанного с ростом трещин, требуется ввести дополнительные условия в выражение для параметра повреждаемости (4.1). В соответствии с [111] в качестве такого условия введено требование, что повреждаемость изменяется, если максимальное значение главных компонентов тензора эффективных напряжений было больше некоторого порогового значения, то есть:

$$\sigma_{\text{eff}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} > \sigma_{\text{max}}.$$

Значение σ_{max} в данных расчетах принималось равным 100 бар.

Моделировалась закачка флюида в течении 5 сут. Распределение повреждаемости, давления и температуры на различные моменты времени показано на рисунке 4.16. Латеральные компоненты тензора напряжений приведены на рисунке 4.17.

В центре модели можно выделить область в форме эллипса (рисунок 4.18), соответствующую диффузному разрушению вокруг скважины. Размер области на момент времени 5 суток равен 30×20 м, среднее значение параметра повреждаемости в этой области равно 0.2, а проницаемость в ней увеличена примерно в 12 раз. Резкий переход из области разрушения в неповрежденную область связан с введением критерия на пороговое значение тензора эффективных напряжений, приведенного выше.

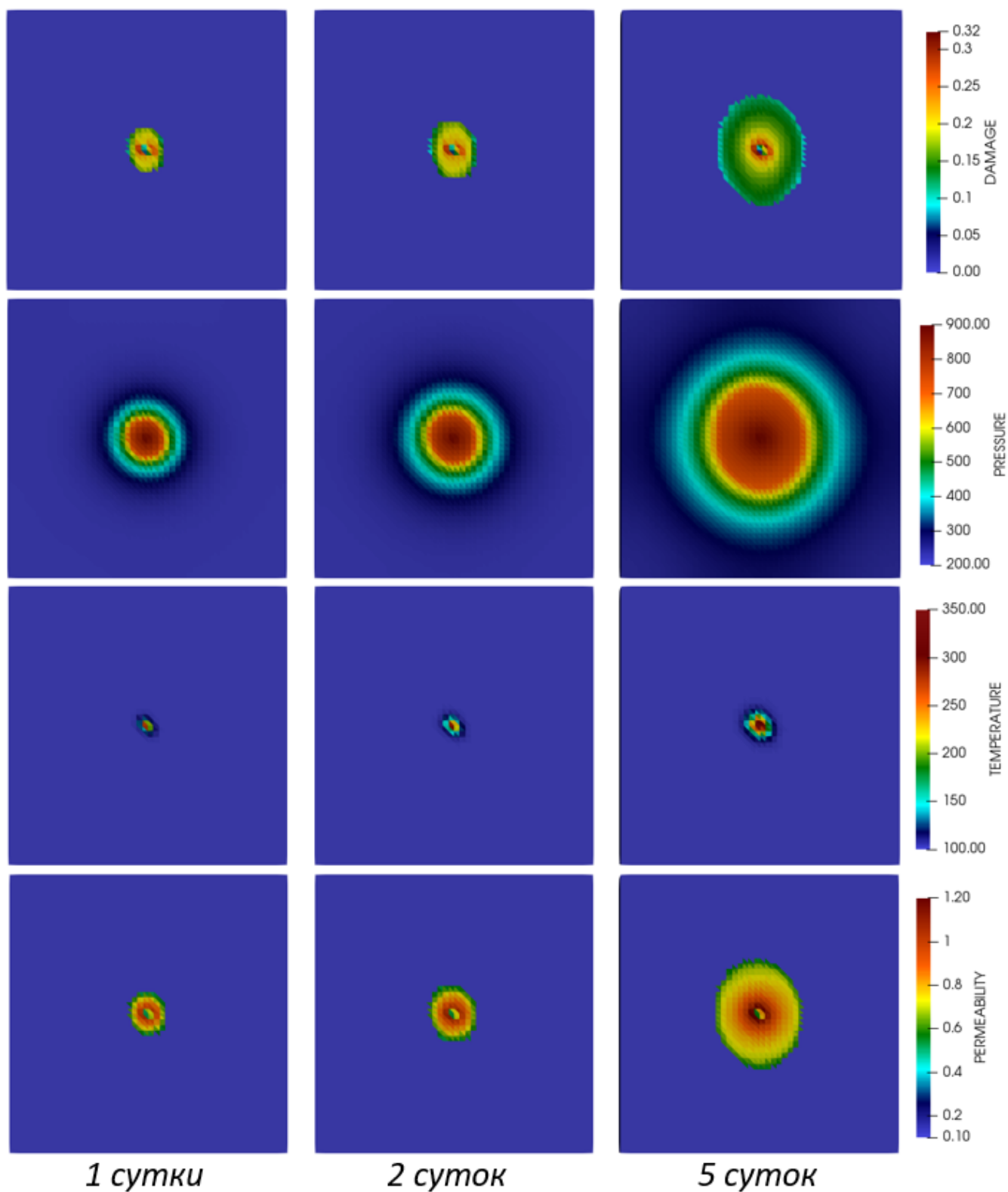


Рис. 4.16. Распределение параметра повреждаемости D (1 ряд), давления p (2 ряд), температуры T (3 ряд), проницаемости k (4 ряд) через 1 сутки (слева), 2 суток (по центру) и 5 суток (справа)

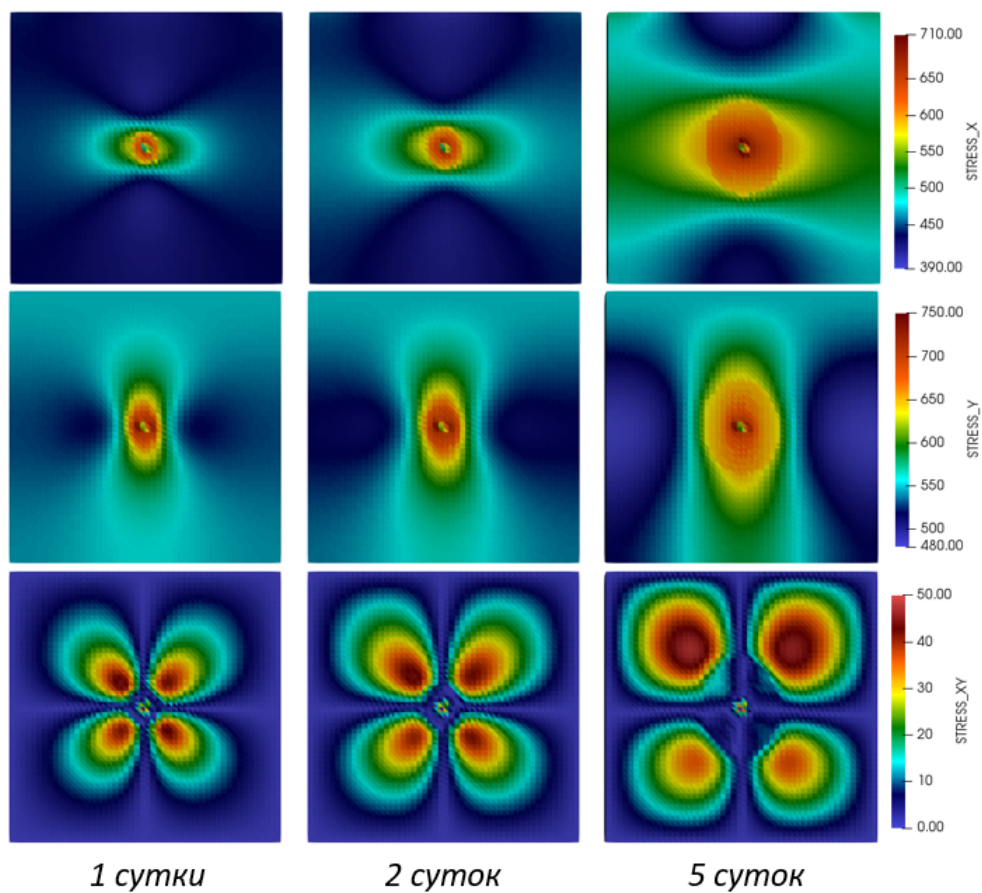


Рис. 4.17. Распределение латеральных компонентов тензора напряжений σ_{xx} , σ_{yy} и σ_{xy} через 1 сутки (слева), 2 суток (по центру) и 5 суток (справа)

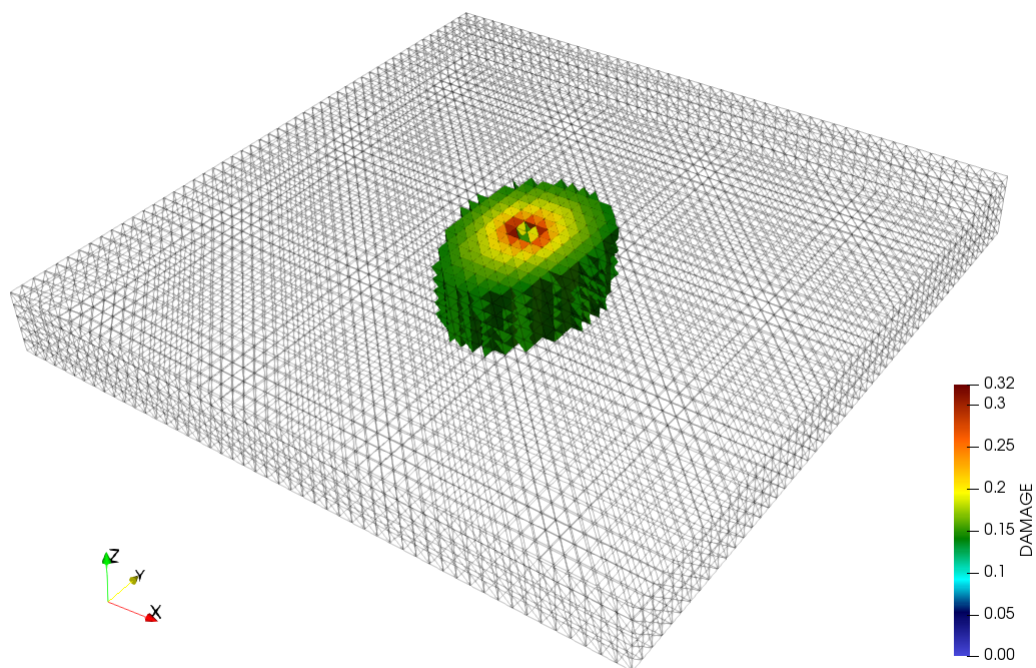


Рис. 4.18. Зона с наибольшим разрушением

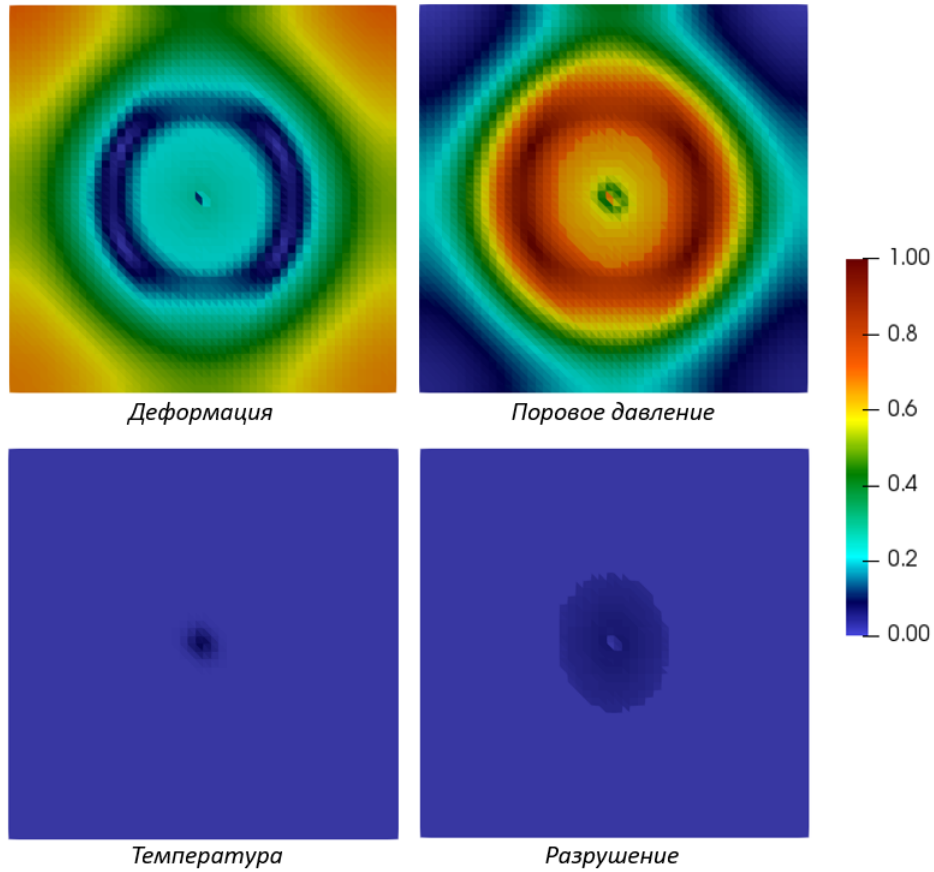


Рис. 4.19. Вклад различных параметров в изменение среднего напряжения (в долях) на момент времени 30 суток

Для данного расчета была проведена оценка вклада различных эффектов в напряженно-деформированное состояние пласта. Представим выражение (1.43) для тензора полных напряжений в виде:

$$\Delta\sigma = \sigma_\varepsilon - \sigma_p - \sigma_T - \sigma_D,$$

где

$$\sigma_\varepsilon = \mathbf{C} : \Delta\varepsilon \quad \text{— деформационная часть,}$$

$$\sigma_p = \mathbf{b}\Delta p \quad \text{— фильтрационная часть,}$$

$$\sigma_T = \mathbf{C} : \alpha_T \Delta T \quad \text{— термическая часть,}$$

$$\sigma_D = \mathbf{D} \cdot \mathbf{C} : \Delta\varepsilon \quad \text{— часть, связанная с разрушением.}$$

На рисунке 4.19 приведено распределение долей каждой компоненты на момент времени 30 суток, где каждая компонента тензора полных напряжений нормировалась на величину:

$$\Sigma = |\sigma_\varepsilon| + |\sigma_p| + |\sigma_T| + |\sigma_D|.$$

Из рисунка 4.19 видно, что основной вклад в напряженно-деформированное состояние вносят деформационные и фильтрационные процессы. Вклад разрушения в поврежденной области составляет порядка 15%, а термических эффектов — менее 10 %.

4.2.4 Моделирование работы скважины в слоистом пласте

В данном расчете моделировалась закачка горячего флюида в пласт с различными свойствами по слоям. Рассматривалась модель размером $50 \times 50 \times 5$ м, имеющая 5 слоев. Проницаемость и модуль Юнга в каждом пропластке заданы в соответствии с лог-нормальным распределением. Средние значения величин приведены в таблице 4.5, их распределение изображено на рисунках 4.20 и 4.21. Значения прочих параметров в таблице 4.4.

В углу модели расположена нагнетательная скважина, полностью вскрывающая пласт и закачивающая флюид с приемистостью $1 \text{ м}^3/\text{сут}$ при температуре $400 \text{ }^\circ\text{C}$. Предполагалось, что распределение закачиваемого флюида по пропласткам прямо пропорционально проницаемости соответствующего слоя.

Моделировалась работа скважины в течение 30 сут. Распределение параметра повреждаемости, давления и температуры на различные моменты времени показано на рисунках 4.22, 4.23 и 4.24 соответственно.

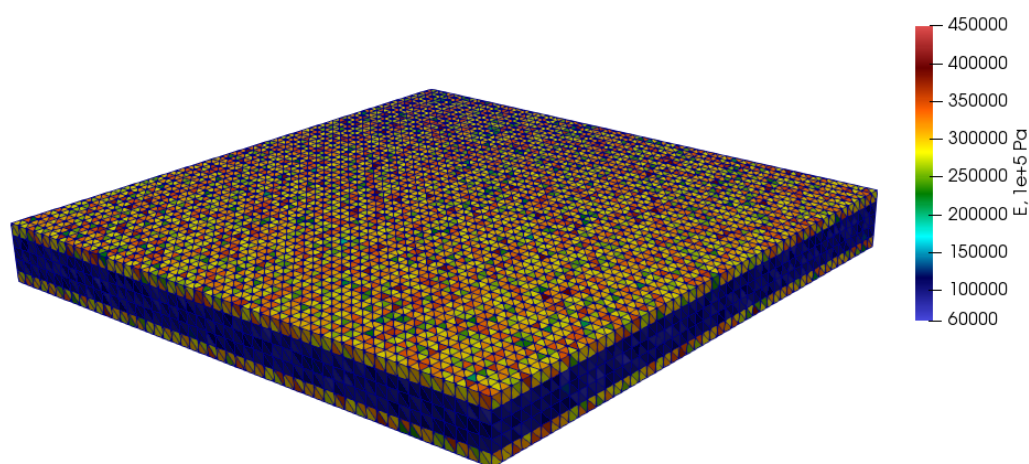


Рис. 4.20. Начальное распределение модуля Юнга в модели

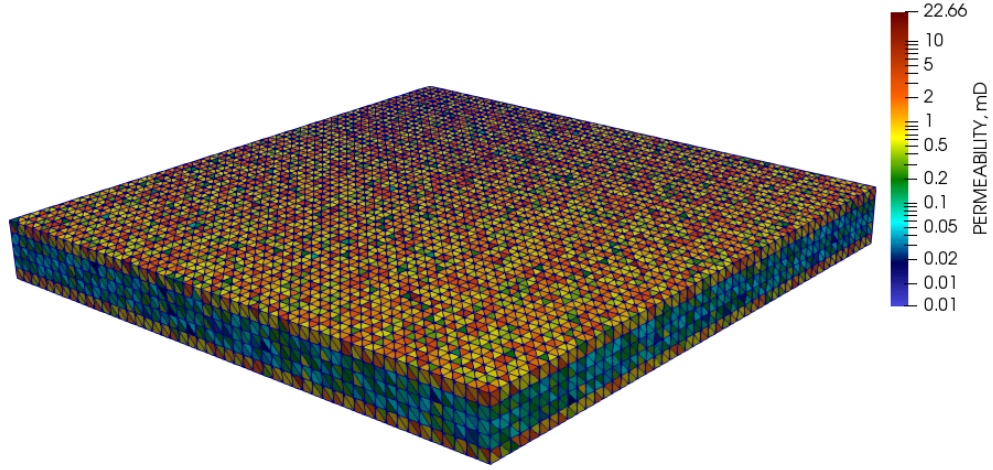


Рис. 4.21. Начальное распределение проницаемости в модели

Таблица 4.5. Средние значения проницаемости и модуля Юнга по слоям

Номера слоев	Проницаемость, мД		Модуль Юнга, ГПа	
	Среднее	Дисперсия	Среднее	Дисперсия
1	1	0.1	30	5
2-4	0.1	0.01	10	2
1	1	0.1	30	5

В данном тесте оценивался вклад каждого эффекта в энергию скелета. Для этого суммарная энергия скелета, вычисляемая по формуле (1.44), была разделена на компоненты, соответствующие вкладу деформационных эффектов ($E_{s\xi}$), влияния порового давления (E_{sp}), влияния неизотермичности (E_{sT}) и затраты энергии на разрушение (E_{sD}):

$$\Delta E_s = \Delta E_{s\xi} + \Delta E_{sp} + \Delta E_{sT} - \Delta E_{sD},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta E_{s\xi} &= (\boldsymbol{\sigma}^0 + p^0 \mathbf{b} + T^0 \mathbf{C} : \boldsymbol{\alpha}) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, & \Delta E_{sp} &= \left(p^0 \frac{1}{N} - T^0 \alpha_\varphi \right) \Delta p, \\ \Delta E_{sT} &= (C_{ps} - \alpha_\varphi p^0) \Delta T, & \Delta E_{sD} &= \mathbf{Y}^0 \Delta \mathbf{D}. \end{aligned}$$

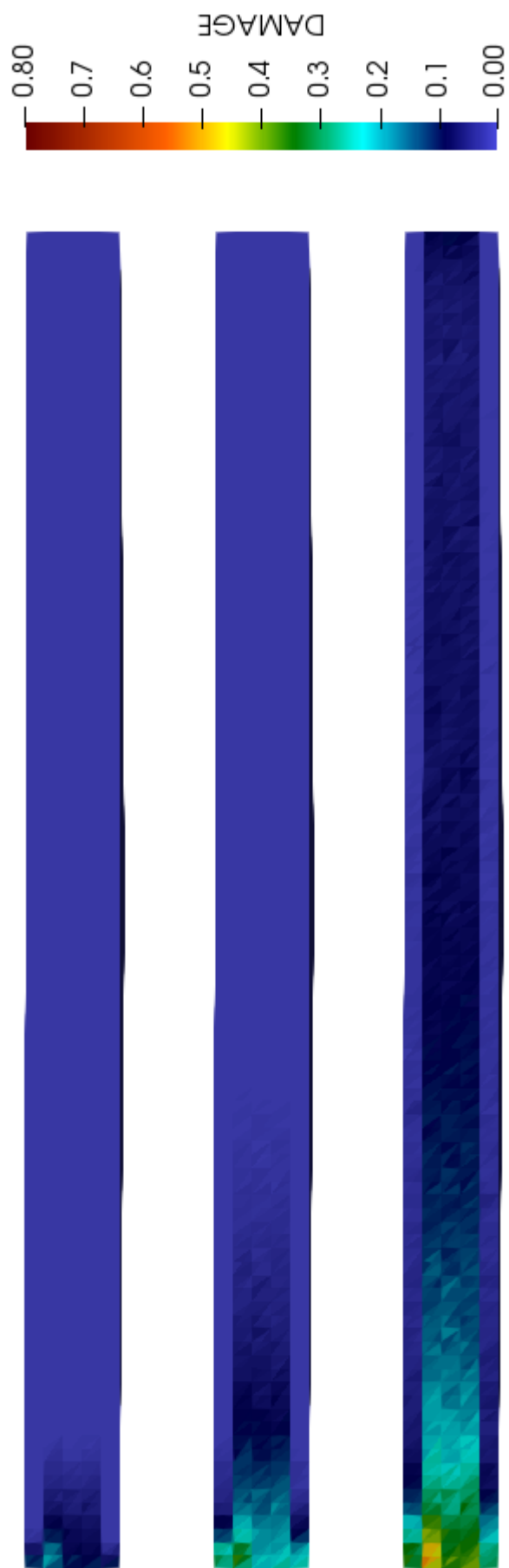


Рис. 4.22. Распределение параметра повреждаемости через 1, 15 и 30 сут.

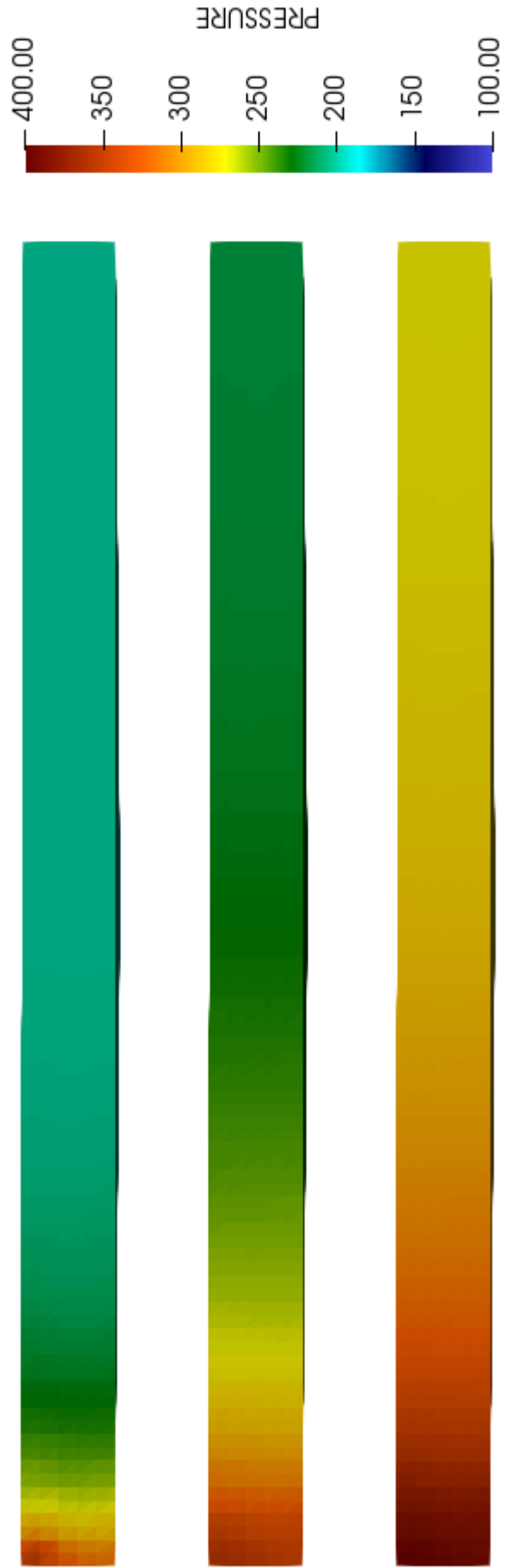


Рис. 4.23. Распределение давления через 1, 15 и 30 сут.

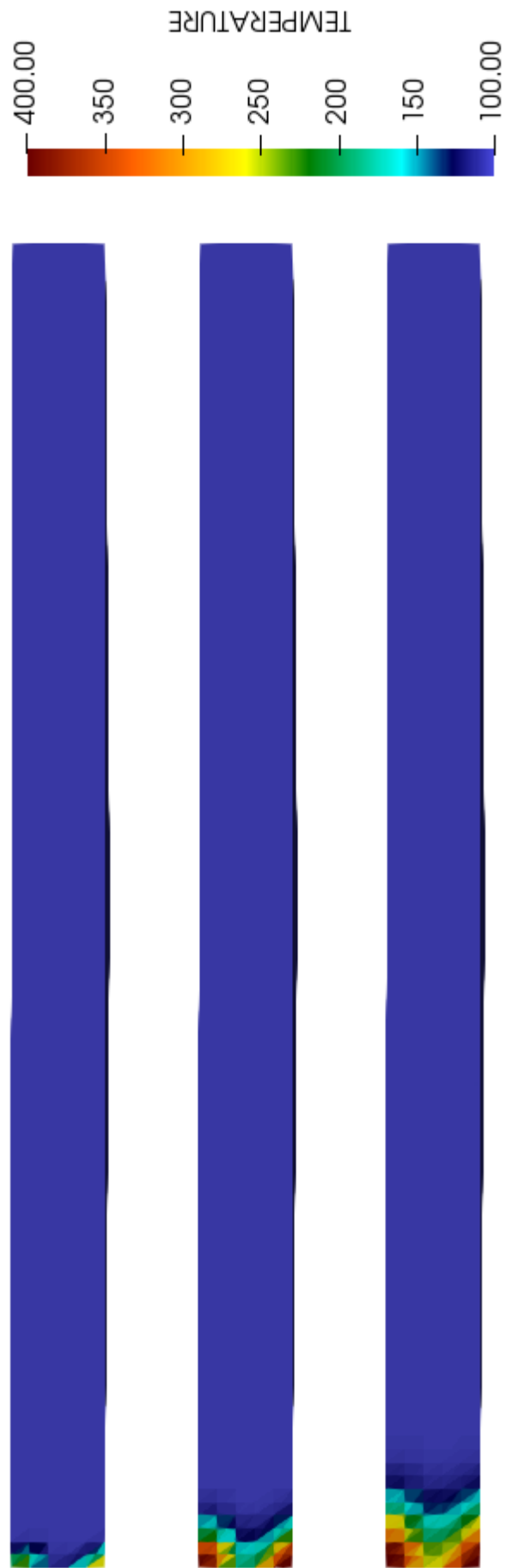


Рис. 4.24. Распределение температуры через 1, 15 и 30 сут.

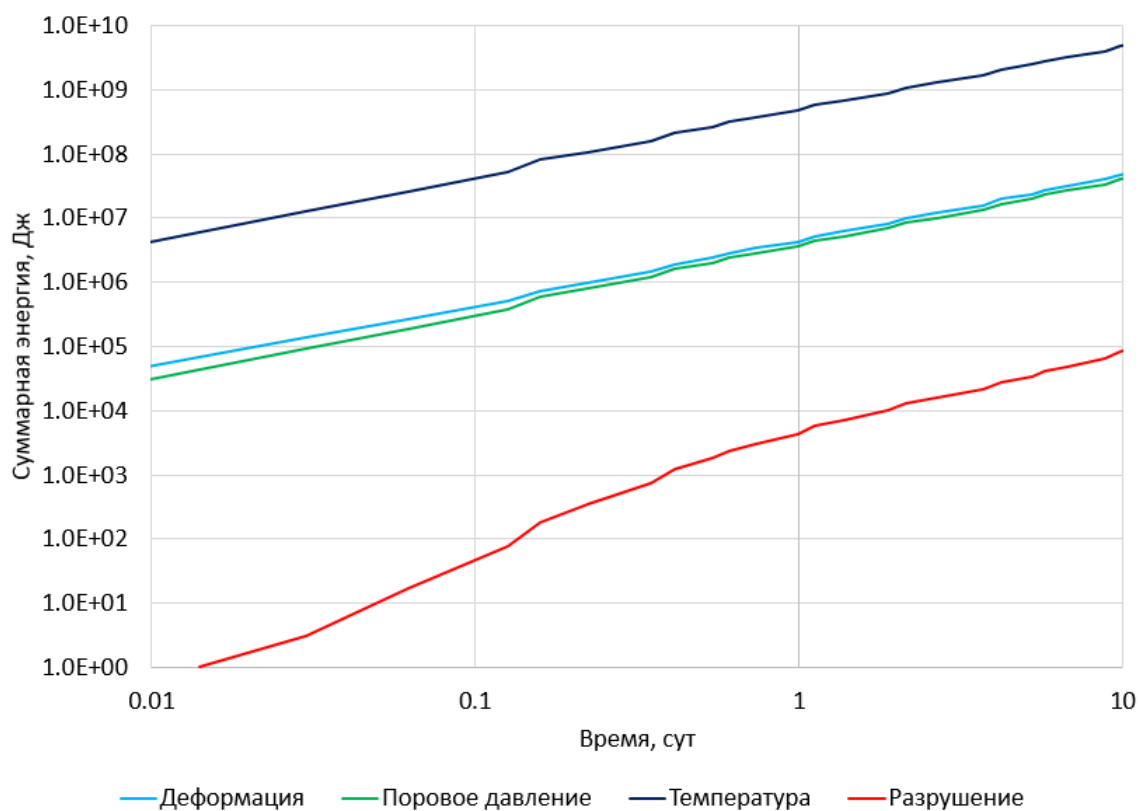


Рис. 4.25. Распределение компонент энергии по времени

График изменения величины каждой компоненты представлен на рисунке 4.25. Из данного графика можно сделать вывод, что наибольший вклад во внутреннюю энергию скелета вносит изменение температуры. Вклад порового давления и деформаций на несколько порядков меньше.

Глава 5

Заключение

В диссертационной работе приведено описание физико-математической модели для описания эволюции термopopoупругой среды с разрушением. Модель является термодинамически согласованной за счет выполнения второго закона термодинамики и является пригодной для проведения расчетов прикладного характера. Система уравнений модели состоит из фундаментальных законов сохранения и замыкается термодинамически согласованными определяющими соотношениями, полученными с использованием процедуры Колмана-Нолла. Разрушение среды учитывается с использованием подхода континуальной механики разрушений. В работе проведен обзор существующих экспериментальных зависимостей параметра повреждаемости и фильтрационно-емкостных свойств от параметров среды. Для разработанной модели представлен вычислительный алгоритм, основанный на методе конечных элементов. Данный алгоритм реализован в виде программного комплекса, позволяющего проводить расчеты эволюции термopopoупругой среды с учетом разрушения в реалистичных постановках. Валидация разработанного алгоритма проводилась на ряде тестов для термopopoупругости, кроме того были проведены расчеты по моделированию термического воздействия на нефтяной пласт.

Основными результатами диссертационной работы являются:

1. Термодинамически согласованная физико-математическая модель разрушения пороупругой среды, учитывающая деформационные, фильтрационные и неизотермические эффекты, пригодная для анализа эффективности современных и перспективных тепловых методов увеличения нефтеотдачи.

2. Неявный численный алгоритм расчета эволюции термopорoупругой среды с учетом разрушения на основе метода конечных элементов с применением неструктурированных тетраэдральных сеток.
3. Программный комплекс для моделирования термического воздействия на порoупругую среду с учетом разрушения, а также результаты проведенных валидационных и тестовых расчетов, подтверждающих корректность разработанных алгоритмов.

В рамках дальнейшего развития данной работы предполагается расширение физико-математической модели на случай многофазной фильтрации, учет химических реакций и фазовых переходов, а также усложнение PVT модели флюидов (учет зависимости физико-химических свойств флюида от состояния среды). Кроме того планируется исследовать эффективность различных подходов к выбору оптимальных алгоритмов решения систем линейных уравнений, а также ускорить расчет за счет использования параллельных вычислений.

Литература

- [1] Aziz K. Petroleum reservoir simulation. Applied Science Publishers. Vol. 476. 1979.
- [2] Работнов Ю. Н. Механизм длительного разрушения. // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: АН СССР, 1959. — С. 5-7.
- [3] Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — №. 8. — С. 26-31.
- [4] Кондауров В. И., Фортвов В. Е. Основы термомеханики конденсированной среды. М.: МФТИ, 2002, 336 с.
- [5] Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture // Journal of engineering materials and technology. — 1985. — V. 107. — No. 1. — P. 83-89.
- [6] Krajcinovic D., Lemaitre J. (ed.). Continuum damage mechanics: theory and applications. New York : Springer-Verlag, 1987, 294 p.
- [7] Zhang W., Cai Y. Continuum damage mechanics and numerical applications. Springer Science and Business Media, 2010, 1000 p.
- [8] Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage // Creep in structures. — Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. — P. 422-444
- [9] Leckie F. A., Onat E. T. Tensorial nature of damage measuring internal variables // Physical non-linearities in structural analysis. — Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. — P. 140-155.
- [10] Silberschmidt V. V., Silberschmidt V. G. Stochastic dynamics of damage

- evolution in brittle rocks // *Geologische Rundschau*. — 1996. — V. 85. — No. 1. — P. 103-109
- [11] Wang Z., Li Y., Wang J. G. A method for evaluating dynamic tensile damage of rock // *Engineering fracture mechanics*. — 2008. — V. 75. — No. 10. — P. 2812-2825
- [12] Meretin A., Savenkov E. B. Simulation of Coupled Flow and Damage in Porous Medium // *Physical and Mathematical Modeling of Earth and Environment Processes (2018)*. — Springer, Cham, 2019. — P. 132-141
- [13] Меретин А.С., Савенков Е.Б. Математическая модель фильтрационных процессов в термопороупругой среде с учетом континуального разрушения. — Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2019, № 58, 38 с.
- [14] Меретин А.С., Савенков Е.Б. Вычислительный алгоритм для описания эволюции термопороупругой среды с учетом разрушения — Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 82.
- [15] Меретин А. С., Савенков Е. Б. Моделирование термопороупругой среды с учетом разрушения // *Математическое моделирование*. — 2020. — Т. 32. — №. 7. — С. 59-76.
- [16] Меретин А. С. Программный комплекс для математического моделирования разрушения термопороупругой среды // *Вычислительные методы и программирование*. — 2020. — Т. 21. — С. 138-151.
- [17] Меретин А. С., Савенков Е. Б. Математическая модель разрушения термопороупругой среды // *Инженерно-физический журнал*. — 2021. — №. 2. — С. 380-392.
- [18] Terzaghi K. Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen // *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, Abt. IIa*. — 1923. — V. 132. — P. 105-124
- [19] Biot M.A. General theory of three dimensional consolidation // *Journal of Applied Physics* — 1941 — V. 12 — P. 155–164

- [20] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I Low frequency range // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1956. — V. 28. — P. 168-178
- [21] Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. II Higher frequency range // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1956. — V.28.
- [22] Biot M.A. The elastic coefficients of the theory of consolidation // Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME. — 1957. — V. 24. — P. 594-601
- [23] Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // Journal of Applied Physics. — 1962. — V. 33. — P. 1482-1498
- [24] Rice J.R., Cleary M.P. Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid-Saturated Elastic Porous Media With Compressible Constituents // Reviews of Geophysics and Space Physics. — 1976 — V.14. — No. 2. — P. 227-241
- [25] Wang H.F. Theory of linear poroelasticity with applications to geomechanics and hydrogeology. Princeton University Press, 2000, 276 p.
- [26] Cowin S.C. Bone poroelasticity // Journal of Biomechanics. — 1999. — V.32. — P. 217-238
- [27] Malandrino A., Moeendarbary E. Poroelasticity of Living Tissues // Encyclopedia of Biomedical Engineering. Elsevier: Amsterdam, Netherlands, 2017. — P. 238-245
- [28] V. Dorovsky, Yu. Perepechko. Theory of partial melting // Russian Geology and Geophysics, 1989. — V.30 — P. 56–65.
- [29] V. Dorovsky, Yu. Perepechko, A. Fedorov. The Stonely Waves in the Biot-Johnson Theory and Continuum Filtration Theory // Russian Geology and Geophysics, 2012. — V.53 — P. 621-630.
- [30] В.И. Голубев, А.В. Шевченко, И.Б. Петров. Об учёте водонасыщенности донных осадков в задаче морской сейсмической разведки // ДАН, 2019. — Т. 488 — №3 — С. 248-252

- [31] Lewis R.W., Schrefler B.A. The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media, 2nd Edition. Wiley, 1998, 508 p.
- [32] de Boer R. Highlights in the Historical Development of the Porous Media Theory: Toward a Consistent Macroscopic Theory // Appl. Mech. — 1996. — P. 201-262
- [33] Труделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975, 592 с.
- [34] Coleman B. D., Noll W. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity // Archive for rational mechanics and analysis. — 1963. — V. 13. — No. 1. — P. 167-178
- [35] Кондауров В. И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды. М.: МФТИ, 2007, 309 с.
- [36] Coussy O. Poromechanics. John Wiley and Sons, 2004, 312. p.
- [37] Griffith A. A. VI. The phenomena of rupture and flow in solids // Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character. — 1921. — V. 221. — No. 582-593. — P. 163-198
- [38] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Archive for rational Mechanics and Analysis. — 1958. — V. 2. — No. 1. — P. 197-226
- [39] Hütter G. An extended Coleman–Noll procedure for generalized continuum theories // Continuum Mechanics and Thermodynamics. — 2016. — V. 28. — No. 6. — P. 1935-1941
- [40] Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы, 1974, 640 с.
- [41] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories // Principles of classical mechanics and field theory/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. — Springer, Berlin, Heidelberg, 1960. — P. 226-858

- [42] Lemaitre J., Desmorat R. Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures. Springer Science and Business Media, 2005, 380 p.
- [43] Качанов Л. М. Основы механики разрушения. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974, 312 с.
- [44] Hult J. Damage-induced tensile instability // Structural mechanics in reactor technology. — 1975.
- [45] Ladeveze P. On an anisotropic damage theory // Proc. CNRS Int. Coll. — 1983. — V. 351. — P. 355-363.
- [46] Lemaitre J., Chaboche J. L. Phenomenological approach of damage rupture // Journal de Mecanique Appliquee. — 1978. — V. 2. — No. 3. — P. 317-365
- [47] Krajcinovic D., Fonseka G. U. The continuous damage theory of brittle materials, part 1: general theory // Journal of applied Mechanics. — 1981. — V. 48. — No. 4. — P. 809-815
- [48] Chow C. L., Wang J. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics // International Journal of Fracture. — 1987. — V. 33. — No. 1. — P. 3-16
- [49] Murakami S. Continuum damage mechanics: a continuum mechanics approach to the analysis of damage and fracture. — Springer Science and Business Media, 2012. — V. 185.
- [50] Вакуленко А. А., Качанов М. Л. Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР. МТТ. — 1971. — №. 4. — С. 159-166.
- [51] Ken-Ichi K. Distribution of directional data and fabric tensors // International Journal of Engineering Science. — 1984. — V. 22. — No. 2. — P. 149-164.
- [52] Onat E. T., Leckie F. A. Representation of mechanical behavior in the presence of changing internal structure // Journal of Applied Mechanics. — 1988. — V. 55. — No. 1. — P. 1-10.
- [53] Lubarda V. A., Krajcinovic D. Damage tensors and the crack density distribution // International Journal of Solids and Structures. — 1993. — V. 30. — No. 20. — P. 2859-2877

- [54] Krajcinovic D. Damage mechanics. Amsterdam: Elsevier Sci., 1996. V. 41, 761 p.
- [55] Голуб В. П., Романов А. В. К задаче построения нелинейных моделей накопления повреждений при ползучести // Проблемы прочности. — 1990. — №. 6. — С. 9.
- [56] Leckie F.A. and Hayhurst D.R. Constitutive equations for creep rupture // Acta Metall. — V. 25. — 1977. — P. 1059-1070
- [57] Cheng H. H., Dusseault M. B. A continuum damage mechanics model for geomaterials // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2004. — V. 41. — No. 3. — P. 375.
- [58] Hamiel Y. et al. A viscoelastic damage model with applications to stable and unstable fracturing // Geophysical Journal International. — 2004. — V. 159. — No. 3. — P. 1155-1165
- [59] Mishnaevsky Jr L. L., Schmauder S. Damage evolution and localization in heterogeneous materials under dynamical loading: stochastic modelling // Computational mechanics. — 1997. — V. 20. — No. 1-2. — P. 89-94
- [60] Извеков О. Я., Кондауров В. И. Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом // Физика Земли. — 2009. — №. 4. — С. 31-42.
- [61] Mazars J., Pijaudier-Cabot G. Continuum damage theory — application to concrete // Journal of Engineering Mechanics. — 1989. — V. 115. — No. 2. — P. 345-365
- [62] Peerlings R. H. J. *et al.* Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture // Mechanics of Cohesive-frictional Materials. — 1998. — V. 3. — No. 4. — P. 323-342
- [63] Pearce C. J., Nielsen C. V., Bicanic N. Gradient enhanced thermo-mechanical damage model for concrete at high temperatures including transient thermal creep // International journal for numerical and analytical methods in geomechanics. — 2004. — V. 28. — No. 7-8. — P. 715-735

- [64] Bobiński J., Tejchman J. Simulations of fracture in concrete elements using continuous and discontinuous models // *Mechanics and Control*. — 2011. — V. 30. — No. 4.
- [65] Pogacnik J., O’Sullivan M., O’Sullivan J. A Damage Mechanics Approach to Modeling Permeability Enhancement in Thermo-Hydro-Mechanical Simulations // *Conference: 39th Geothermal Reservoir Engineering Workshop* — 2014. — P. 24-26
- [66] Drucker D. C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design // *Quarterly of applied mathematics*. — 1952. — V. 10. — No. 2. — P. 157-165
- [67] Crisfield M. A. et al. *Nonlinear finite element analysis of solids and structures*. — John Wiley and Sons, 2012.
- [68] Ji M. *et al.* Damage evolution law based on acoustic emission and Weibull distribution of granite under uniaxial stress // *Acta Geodynamica et Geomaterialia*. — 2014. — V. 11. — No. 3. — P. 269-278
- [69] Shao J. F., Rudnicki J. W. A microcrack-based continuous damage model for brittle geomaterials // *Mechanics of Materials*. — 2000. — V. 32. — No. 10. — P. 607-619
- [70] Oliver J. et al. *Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete* SCI-C 1990, Second Int // *Conf. on Computer Aided Design of Concrete Structure*, Zell am See, Austria. — 1990. — P. 945-957
- [71] Wang W., Lv J., Wang H. C. A creep-damage constitutive model for sandstone // *Applied Mechanics and Materials*. — Trans Tech Publications, 2012. — V. 170. — P. 289-294
- [72] Tang C. A. *et al.* Coupled analysis of flow, stress and damage (FSD) in rock failure // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. — 2002. — V. 39. — No. 4. — P. 477-489
- [73] Wang J. A., Park H. D. Fluid permeability of sedimentary rocks in a complete stress-strain process // *Engineering geology*. — 2002. — V. 63. — No. 3-4. — P. 291-300

- [74] Zhou J. J., Shao J. F., Xu W. Y. Coupled modeling of damage growth and permeability variation in brittle rocks // *Mechanics Research Communications*. — 2006. — V. 33. — No. 4. — P. 450-459
- [75] Zhang R. *et al.* The relationship between the deformation mechanism and permeability on brittle rock // *Natural hazards*. — 2013. — V. 66. — No. 2. — P. 1179-1187
- [76] Wei C. *et al.* A study of nonlinear elasticity effects on permeability of stress sensitive shale rocks using an improved coupled flow and geomechanics model: a case study of the Longmaxi shale in China // *Energies*. — 2018. — V. 11. — No. 2. — P. 329.
- [77] Lu S. *et al.* Damage-induced permeability model of coal and its application to gas predrainage in combination of soft coal and hard coal // *Energy Science and Engineering*. — 2019.
- [78] Zhang C. L. The stress–strain–permeability behaviour of clay rock during damage and recompaction // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. — 2016. — V. 8. — No. 1. — P. 16-26
- [79] Wang Q. *et al.* A Coupled Damage-Permeability Constitutive Model for Brittle Rocks Subjected to Explosive Loading // *Advances in Civil Engineering*. — 2018.
- [80] L. M. Taylor, E.-P. Chen, and J. S. Kuszmaul. Microcrackinduced damage accumulation in brittle rock under dynamic loading,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1986 — V. 55. — No. 3 — P. 301–320
- [81] J. S. Kuszmaul. *A New Constitutive Model for Fragmentation of Rock under Dynamic Loading*, Sandia National Labs, Albuquerque, NM, USA, 1987.
- [82] Maleki K., Pouya A. Numerical simulation of damage–Permeability relationship in brittle geomaterials // *Computers and Geotechnics*. — 2010. — V. 37. — No. 5. — P. 619-628
- [83] Arson C., Pereira J. M. Influence of damage on pore size distribution and permeability of rocks // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. — 2013. — V. 37. — No. 8. — P. 810-831

- [84] J. Kim, H.A. Tchelepi, R. Juanes. Stability, Accuracy and Efficiency of Sequential Methods for Coupled Flow and Geomechanics // SPE Paper 119084, 2009.
- [85] F. Brezzi, M. Fortin. Mixed and Hybrid Finite Elements Methods. — Springer, 1991.
- [86] P.J. Phillips, M.F. Wheeler. Overcoming the problem of locking in linear elasticity and poroelasticity: an heuristic approach // Comput. Geosci. — 2009. — V. 13. — P. 5–12
- [87] C. Taylor, P.A. Hood. A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique // Computers and Fluids. — 1973. — V. 1. — No. 1. — P. 73-100
- [88] R.E. Showalter. Diffusion in Poro-Elastic Media // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2000. — V. 251. — No. 1. — P. 310–340
- [89] J.A. White, R.I. Borja. Stabilized low-order finite elements for coupled solid deformation/fluid-diffusion and their application to fault zone transients // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — V. 197. — No. 49–50. — P. 4353–4366
- [90] J. Wan. Stabilized Finite Element Method for Coupled Geomechanics and Multiphase Flow. — PhD Thesis, Stanford Univeristy, 2002. — P. 180
- [91] K. Xia, A. Masud. Stabilized Finite Elements For Computational Geomechanics // ARMA/USRMS Paper No 05-874, 2005.
- [92] J. Kim. Sequential methods for coupled geomechanics and multiphase flow. — Stanford University, 2010. — P. 248.
- [93] S.E. Minkoff, N. M. Kridler. A comparison of adaptive time stepping methods for coupled flow and deformation modeling // Applied mathematical modelling. — 2006. — V. 30. — No. 9 — P. 993-1009
- [94] Voigt W. Lehrbuch der kristallphysik. Leipzig : Teubner, 1928. V. 962.
- [95] Zenkevich O. Finite-element method in engineering. Moscow, Mir, 1975. V. 5.

- [96] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. Siam, 2003. V. 82.
- [97] Neuman S. P. Saturated-unsaturated seepage by finite elements // Journal of the hydraulics division. – 1973. – V. 99. – No. 12. – P. 2233-2250.
- [98] E. Cuthill and J. McKee. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices // In Proc. 24th Nat. Conf. ACM. – 1969. – P. 157–172
- [99] Beggs H. D. et al. Estimating the viscosity of crude oil systems // Journal of Petroleum technology. – 1975. – V. 27. – No. 09. – P. 1140-1141
- [100] Delone B. Sur la sphère vide. A la mémoire de George Voronoi // Izv. AN OMEN. – 1934. – V. 525. – P. 526.
- [101] URL: [http:// eigen.tuxfamily.org/](http://eigen.tuxfamily.org/).
- [102] URL: [https:// computation.llnl.gov/projects/hypre-scalable-linear-solvers-multigrid-methods](https://computation.llnl.gov/projects/hypre-scalable-linear-solvers-multigrid-methods)
- [103] URL: [https:// www.paraview.org/](https://www.paraview.org/)
- [104] URL: [https:// www.vtk.org/](https://www.vtk.org/)
- [105] Rabotnov Y. N. Creep rupture // Applied mechanics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1969. – P. 342-349
- [106] von Terzaghi C. Erdbaumechanik auf bodenphysikalischer Grundlage. – Deuticke, 1925.
- [107] Mandel J. Consolidation des sols (étude mathématique) // Geotechnique. – 1953 – P. 287–299
- [108] Cheng A.H-D., Detournay E. A direct boundary element method for plane strain poroelasticity // Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech. – 1988. – V. 12. – P. 551–572
- [109] Carter J.P., Booker J.R. Finite Element Analysis of Coupled Thermoelasticity // Computers and Structures. – 1989. – V. 31. – No. 1. – P. 73-80
- [110] Stehfest H. Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms // Communications of the ACM. – 1970. – V. 13. – No. 1. – P. 47-49

[111] Sun F., Jia P., Xue S. Continuum Damage Modeling of Hydraulic Fracture from Perforations in Horizontal Wells // Mathematical Problems in Engineering. — 2019. — V. 2019 — P. 12