

На правах рукописи

Крапошин Матвей Викторович

Математическое моделирование сжимаемых течений с использованием гибридного метода аппроксимации конвективных потоков

Специальность 05.13.18 —

Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте системного программирования РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН

Виктор Петрович Иванников

Официальные оппоненты: **Игорь Вячеславович Ткаченко**,
доктор технических наук, профессор РАН,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»,
заведующий кафедрой

Артём Наилевич Нуриев,
кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»,
научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится 16 марта 2017 г. в «___» час. «___» мин. на заседании диссертационного совета Д 002.024.03 при ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, а также на сайте www.keldysh.ru.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 125047, Москва, Миусская пл., д. 4, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.024.03.

Автореферат разослан «___» _____ 2017 г.

Телефон для справок: +7(499) 220-78-23.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.024.03,
кандидат физико-математических
наук



Корнилина М.А.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена разработке и реализации гибридного численного метода аппроксимации конвективных слагаемых при моделировании сжимаемых течений в широком диапазоне чисел Маха. Особенностью предложенного метода является комбинирование численного метода Курганова — Тadmора для численного решения гиперболических уравнений и метода расщепления для слабосжимаемых течений. Разработанный численный метод позволяет расширить область применения указанных методов для широкого класса приложений. Предложенный метод реализован в виде программных модулей на языке C++ для использования в составе конечно-объёмной библиотеки OpenFOAM. Рассмотрены примеры применения метода на ряде валидационных и промышленных задач.

Актуальность. Сегодня одним из важнейших показателей успешности внедрения численного моделирования в промышленность является универсальность используемых методов и широта охвата классов решаемых задач. При этом универсальность может ограничиваться спецификой численного метода, определяющейся рядом параметров, сужающих область применения математических моделей, таких как уровень разрешения, требования к скорости вычислений и затратам вычислительных ресурсов.

Так, при решении задач гидро-, аэро- и газодинамики одним из наиболее распространённых является интегро-интерполяционный метод (или метод конечно-объёма), область применения которого распадается на две подобласти в зависимости от характерной скорости среды:

- несжимаемые или слабосжимаемые течения (локальная скорость среды существенно меньше скорости распространения акустических возмущений, а распространение акустических волн в расчётной области можно считать мгновенным);
- сжимаемые течения.

Для каждого из этих прикладных направлений используются свои методы аппроксимации и соответствующие разностные схемы, обеспечивающие требуемое качество решения. При моделировании дозвуковых течений стандартом де-факто стали методы расщепления переменных, в то время как методы приближённого решения задачи Римана (задачи о распаде разрыва) с явной схемой интегрирования по времени, называемые также годуновскими или характеристическими методами, часто используются для анализа сжимаемых течений. Попытки применения первого подхода для решения задач второго класса приводят, как правило, к появлению немоного решения. Использование же второго подхода при решении задач первого класса требует соблюдения условия устойчивости, которое накладывает жёсткие ограничения на максимальный шаг по времени, и в результате приводит к существенному росту вычислительных затрат. Отдельного рассмотрения заслуживают вопросы практического использования обоих подходов: анализ условий применимости, влияние топологии и качества расчетных сеток, численные схемы аппроксимации потоков, простота реализации метода т.д.

В настоящее время особенно востребованными являются направления численного моделирования, в которых задачи обоих классов имеют место — динамика плазмы, течения с пульсирующими источниками массы, энергии и импульса, двухфазные течения и пр. Необходимость разработки всё более универсальных программ и алгоритмов является несомненным вызовом и подталкивает к сопряжению различных методов и поиску способов их интеграции в единые модели.

Следовательно, разработка и реализация метода, позволяющего исследовать как дозвуковые, так и около- и сверхзвуковые течения в рамках единого подхода, является актуальной задачей. Решение этой задачи является шагом в сторону повышения универсальности математических моделей и расширения области применимости численных методов моделирования в промышленности.

Целью работы является разработка гибридного численного метода, позволяющего решать задачи гидро-, аэро- и газодинамики сжимаемых течений в широком диапазоне чисел Маха с автоматическим переключением между решением, получаемым на основе метода приближённого решения задачи Римана, и решением, получаемым с помощью метода расщепления.

Задачами работы являются:

- 1) анализ возможностей характеристических методов и методов расщепления для численного решения уравнений гидро-, аэро- и газодинамики;
- 2) поиск путей построения требуемого гибридного метода на основе рассмотренных методов;
- 3) выбор комбинируемых схем и способа их комбинирования;
- 4) реализация гибридного метода;
- 5) валидация и тестирование гибридного метода.

Методы исследования состоят в аппроксимации математических моделей и их численном анализе для описания движения сплошных жидких и газообразных сред — систем дифференциальных уравнений в частных производных, выражающих базовые законы классической механики сплошной среды: уравнений Навье — Стокса, уравнения неразрывности, уравнения баланса энергии.

Достоверность результатов обеспечивается:

- 1) выбором корректных допущений, использованием фундаментальных законов сохранения — массы, импульса и энергии, записанных в форме систем дифференциальных уравнений в частных производных;
- 2) использованием консервативной аппроксимации базовых уравнений, исследованием сеточной сходимости в валидационных задачах;
- 3) выполнением общефизических качественных закономерностей в тестовых задачах;
- 4) сравнением результатов исследования с известными аналитическими, экспериментальными и расчётными данными.

Основные положения выносимые на защиту.

- Гибридный метод аппроксимации конвективных слагаемых для моделирования сжимаемых течений в широком диапазоне чисел Маха, обеспечивающий неосциллирующее решение как при высоких числах Маха, так и при моделировании несжимаемых течений, включая расчёт распространения акустических волн.
- Реализация гибридного метода решения уравнений Навье — Стокса для сжимаемых течений на основе открытой библиотеки OpenFOAM, включая возможность использования её встроенного функционала для моделирования турбулентности, поиска стационарных решений, параллельного выполнения задач, изменения формы расчётной области и пр.
- Результаты применения разработанного метода для решения модельных, экспериментальных и промышленных задач, в том числе для моделирования течения двухфазной смеси в водокольцевом насосе с учётом сжимаемости и нелинейного уравнения состояния.

Научная новизна работы состоит в следующем.

- Разработан новый численный метод моделирования течений сжимаемых сред в широком диапазоне числе Маха. В основу метода положены два известных подхода: метод расщепления, применяемый для расчёта несжимаемых вязких течений, и метод годуновского типа (схема Курганова — Тадмора), применяемый для расчёта сжимаемых течений при высоких числах Маха. Предложенный гибридный метод позволяет сочетать преимущества обоих подходов и использовать в расчётах единый критерий устойчивости — поточное число Куранта.
- Гибридный метод реализован в виде самостоятельных приложений на основе открытой платформы OpenFOAM, расширяющих её функционал.
- Разработанные модели, алгоритмы и программы использованы для решения задачи о моделировании течения в пространстве водокольцевого насоса двухфазной среды в новой постановке: с учётом сжимаемости среды и нелинейного уравнения состояния.

Практическое значение работы состоит в возможности использования разработанного численного метода для решения широкого круга прикладных задач газо-, гидро- и аэродинамики — расчёта течений однокомпонентных, многокомпонентных и двухфазных сжимаемых сред. Предложенный подход позволяет вести разработку новых моделей в пакете OpenFOAM с сохранением принципов связывания давления, плотности и скорости, заложенных в алгоритмы PISO и SIMPLE. Реализация предложенного метода в рамках открытой платформы OpenFOAM сокращает время разработки новых моделей за счёт возможности повторного использования имеющихся стандартных алгоритмов и библиотек, расширяет область применения численных моделей в том числе для следующих типов задач:

- поиск стационарных решений;
- численное моделирование с использованием подвижных (деформируе-

- мых) сеток в области течения с переменной геометрией;
- расчёт течений турбулентных сред.

Возможности применения гибридного метода продемонстрированы для четырёх групп модельных и прикладных задач:

- численное моделирование сжимаемых однофазных течений в области транс- и сверхзвуковых чисел Маха;
- численное моделирование несжимаемых однофазных течений;
- моделирование распространения акустических волн;
- решение промышленных задач (моделирование высокоскоростного микрокомпрессора, системы генерации газа подушек безопасности и водокольцевого насоса).

Тестирование метода на большом числе модельных, экспериментальных и промышленных задач позволило сделать следующие эмпирически обоснованные выводы о преимуществе использования гибридного метода по сравнению с методом расщепления и схемой Курганова — Тадмора:

- а) снятие ограничения на шаг по времени по акустическому числу Курганта при моделировании дозвуковых (несжимаемых) течений;
- б) повышенная устойчивость численной схемы (особенно на ячейках произвольной формы плохого качества) за счёт использования неявной схемы решения уравнения для давления.

Апробация работы. Материалы работы докладывались и обсуждались на XL Академических Чтениях по Космонавтике, посвященных памяти академика С. П. Королева (Москва, 26-29 января 2016), на семинаре «Свободное ПО для решения задач механики сплошных сред» конференции “Облачные вычисления. Образование. Исследования. Разработка. 2015” (Москва, 3-4 декабря 2015 г.), на международной конференции 11th OpenFOAM Workshop (Португалия, Гимарэш, 26-30 июня 2016 г.), на подсекции № 1 Секции № 2 НТС ФГУП ЦНИИмаш (Королёв, 7 июля 2016 г.), на международной конференции 3rd International Rotating Equipment Conference (ФРГ, Дюсселдорф, 14-15 сентября 2016 г.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 5 печатных работах, 4 из которых в журналах из перечня ВАК или индексируемых Scopus.

Личный вклад. Работа полностью выполнена автором, в том числе выполнен обзор подходов к численному моделированию сжимаемых течений, предложен и реализован гибридный метод аппроксимации конвективных слагаемых, выполнено тестирование реализации разработанного метода на перечисленных выше задачах. Из работ, выполненных совместно с другими авторами, в диссертацию включены только части, выполненные соискателем непосредственно.

Структура и объём диссертации. Диссертация изложена на 182 страницах, включая 90 рисунков и 17 таблиц. Материал работы включает в себя введение, 3 главы, заключение и список литературы из 94 позиций.

Работа поддержана грантом Министерства Образования и Науки РФ RFMEFI60714X0090, грант № 14.607.21.0090.

Содержание работы

Введение содержит краткую характеристику работы, включая обоснование актуальности, цель, задачи и методы исследования, обоснование достоверности результатов, сведения об основных положениях, выносимых на защиту, научной новизне и практическом значении работы. Завершается глава перечислением опубликованных по материалам диссертации работ и описанием апробации и личного вклада автора.

В первой главе приводятся базовые уравнения гидро-, аэро- и газодинамики, описывающие движения сред, рассматриваемых в рамках данной работы: сжимаемого и несжимаемого однофазных течений, течений многокомпонентных газов и двухфазных жидкостей.

В случае течения совершенного вязкого газа в отсутствие массовых сил система уравнений приобретает вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \otimes \rho \vec{U}) = \nabla \cdot \hat{\Pi}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \rho e) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \nabla \cdot (\hat{\Pi} \cdot \vec{U}), \quad (3)$$

$$\hat{\Pi} = - \left(p + \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \vec{U} \right) \hat{I} + \eta \left(\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T \right), \quad (4)$$

$$p = \rho \frac{R}{\mu} T, \quad (5)$$

$$e = u(p, T) + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U}, \quad (6)$$

$$du = C_v dT, \quad (7)$$

$$\lambda = \lambda(p, T), \quad (8)$$

$$\eta = \eta(p, T), \quad (9)$$

$$C_v = C_v(p, T). \quad (10)$$

Здесь ρ — плотность среды; \vec{U} — скорость среды; $\hat{\Pi}$ — тензор напряжений; e — полная удельная энергия; λ — коэффициент теплопроводности; p — давление; η — коэффициент динамической вязкости; \hat{I} — единичный тензор; R — универсальная газовая постоянная; μ — удельная молярная масса; T — температура; u — удельная внутренняя энергия; C_v — удельная изохорная теплоёмкость.

Система уравнений (1)–(10) дополняется начальными условиями (распределением искомых функций в пространстве расчётной области в начальный момент времени) и граничными условиями (распределением искомых функций или их производных на границе расчётной области). В случае других течений рассматриваемых в работе, система либо упрощается (несжимаемые среды), либо дополняется новыми уравнениями (многокомпонентные и двухфазные потоки). Уравнения приведённой системы дискретизируются методом конечного объёма (МКО). Выбор способа дискретизации конвективных слагаемых системы уравнений и совместного решения алгебраических систем дискретного аналога уравнений сохранения определит свойства численного решения и, как следствие, область применения метода. Среди наиболее часто используемых методов можно выделить следующие два типа, согласно классификации О.М. Белоцерковского:

- явные годуновские, или характеристические методы;
- полунявные методы расщепления по физическим процессам.

Методы обоих типов обладают своими преимуществами и недостатками, которые во многом связаны с необходимостью поиска компромисса между монотонностью решения и ограничением на шаг по времени. Устойчивость приведённых методов связана с аппроксимацией конвективных и диффузионных слагаемых. Для сравнения методов полезно рассмотреть как меняется область устойчивости обоих методов в зависимости от числа Маха $Ma = U/c$ и числа Пекле $Pe = U\Delta x/D$ для конвективных и диффузионных слагаемых соответственно (рис. 1), где D — коэффициент диффузии, c — локальная скорость звука, Δx — шаг по пространству. Устойчивость численных схем оценивается с использованием следующих безразмерных величин:

- поточный критерий Куранта $Co = |\vec{u}| \Delta t / \Delta x$;
- характеристический критерий Куранта $CCo = (|\vec{u}| + c) \Delta t / \Delta x$;
- акустический критерий Куранта $ACo = c \Delta t / \Delta x$;
- диффузионный критерий Куранта $DCo = D \Delta t / \Delta x^2$.

Указанные критерии связаны друг с другом через локальные число Ma и число Pe : $Co = CCo (1 + 1/Ma)^{-1}$ и $DCo = Co/Pe$ соответственно.

Основным преимуществом явных годуновских методов является возможность получения монотонного численного решения за счёт обеспечения противопоточности схемы. Недостатком же, как следует из рис. 1, является зависимость шага по времени от скорости среды, локальной скорости звука и коэффициента диффузии, что приводит к дроблению шага при исследовании дозвуковых течений или же течений с доминированием диффузионных механизмов обмена массой, энергией и импульсом.

В противовес годуновским методам, методы расщепления с неявным уравнением для давления позволяют решать уравнения движения жидкости при дозвуковых скоростях с шагом по времени, ограниченным только числом Co . Недостатком этих методов является принципиальная невозможность обеспечения противопоточности схемы для конвективных слагаемых и, следовательно, монотонности численного решения.

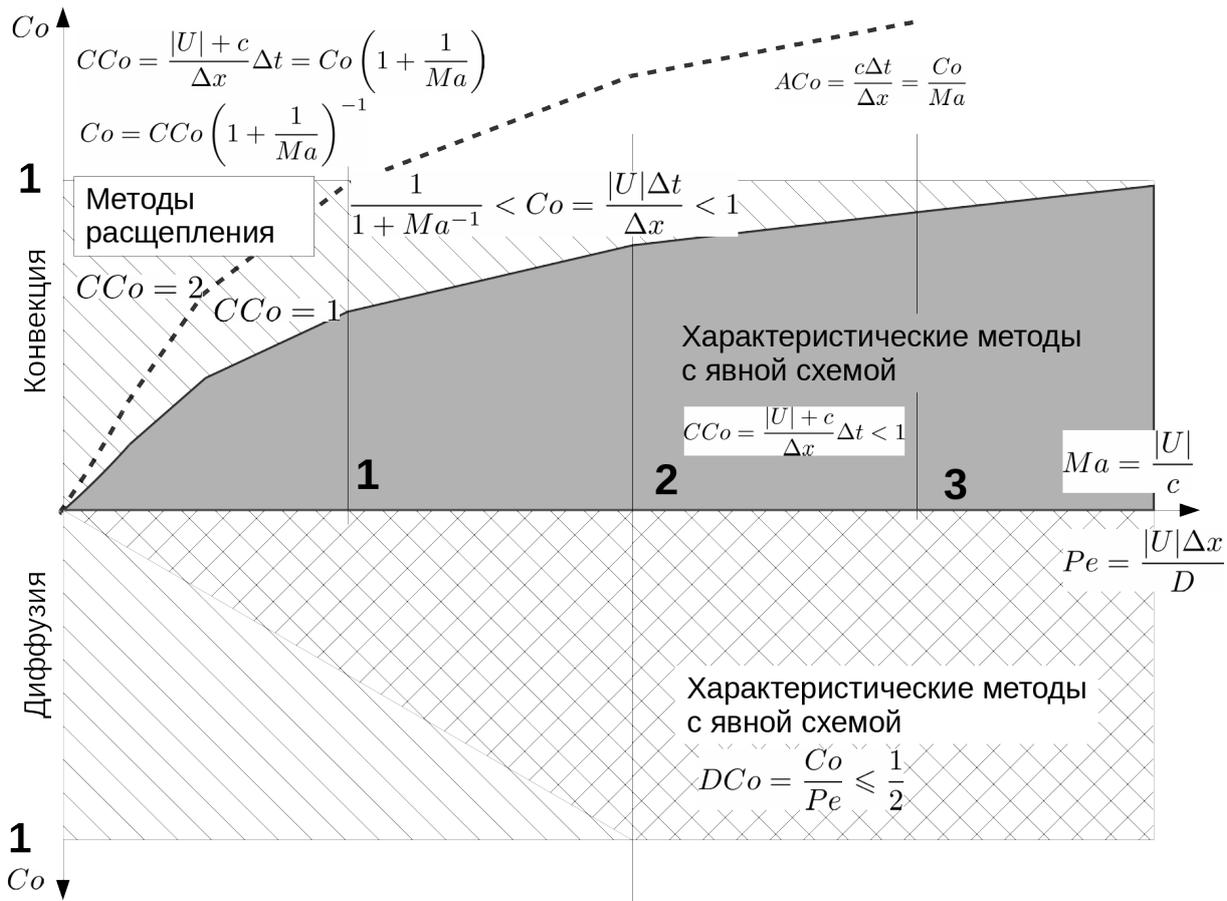


Рис. 1. Сравнение областей применимости и устойчивости характеристических методов и методов расщепления

Вторая глава содержит описание разработанного гибридного метода и его программной реализации. Необходимость поиска компромисса между устойчивостью и монотонностью решения приводит к идее создания гибридного метода, объединяющего преимущества методов гоудуновского типа и методов на основе расщепления по физическим процессам.

Предложенный гибридный метод состоит в использовании аппроксимирующих соотношений схемы Курганова — Тадмора для конвективных слагаемых в уравнениях переноса (плотности, энергии, импульса и др.), применении алгоритмов типа PISO или SIMPLE для связывания скорости, плотности и давления и введении функции-переключателя для перехода между несжимаемой и сжимаемой постановками аппроксимирующих соотношений в зависимости от локальных свойств среды и шага интегрирования по времени.

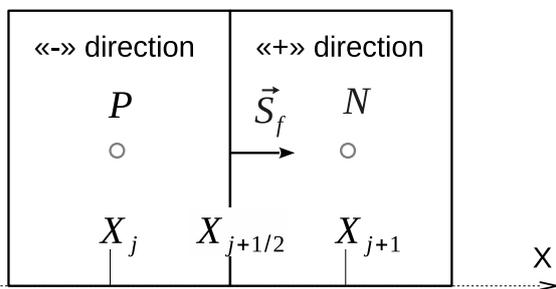


Рис. 2. Сопоставление обозначений, принятых в методе конечных разностей (схеме Курганова — Тадмора) и методе конечного объёма.

Конвективные потоки плотности ρ среды, переносимой полем скорости \vec{U} , аппроксимируются следующим выражением с помощью стандартной схемы МКО (см. рис. 2):

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{U}\rho) dV = \int_S \vec{dS} \cdot \vec{U}\rho \approx \sum_f \rho_f (\vec{U}_f \cdot \vec{S}_f) = \sum_f \rho_f \phi_f.$$

Плотность ρ интерполируется на грань f с использованием значений в двух соседних ячейках и заранее известного потока ϕ_f . В случае использования схемы Курганова — Тадмора (рис. 2), аппроксимирующее соотношение для конвективного потока плотности ρ состоит из двух частей, явно учитывая разрыв свойств среды на грани f :

$$\sum_f \rho_f \phi_f = \sum_f \rho_f^P (\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min}) + \rho_f^N (\alpha_f^N \phi_f^N - \alpha_f^P a_f^{min}).$$

Здесь используются следующие обозначения: $a_f^{max} = a_{j+1/2}^+$ и $a_f^{min} = -a_{j+1/2}^-$ — максимальная и минимальная скорости распространения сигнала из объёма P в N ; плотность среды и конвективные потоки на границах объёмов P и N : $\rho_f^P = \rho_{j+1/2}^-$, $\rho_f^N = \rho_{j+1/2}^+$, $\phi_f^P = f(\rho_{j+1/2}^-)$, $\phi_f^N = f(\rho_{j+1/2}^+)$, доля вклада в конвективный перенос от состояний в объёмах P и N : $\alpha_f^P = a_f^{max} / (a_f^{max} + a_f^{min})$ и $\alpha_f^N = a_f^{min} / (a_f^{min} + a_f^{max})$.

Введя переключатель κ_f , меняющийся от 0 до 1 в зависимости от локальных свойств среды и величины шага по времени (если среда несжимаема, то переключатель должен стремиться к 0, а если сжимаема — к 1) и разделив поток из P в N на составляющие, пропорциональные κ_f и $(1 - \kappa_f)$, получим новые массовые потоки Φ_f^P и Φ_f^N , математически строго соответствующие исходной схеме:

$$\begin{aligned} \Phi_f^P &= \kappa_f \rho_f^P (\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min}), \\ \Phi_f^N &= \rho_f^N (\alpha_f^N \phi_f^N - \alpha_f^P a_f^{min}) + (1 - \kappa_f) \rho_f^P (\alpha_f^P \phi_f^P + \alpha_f^P a_f^{min}). \end{aligned}$$

В несжимаемых течениях поток Φ_f^P будет стремиться к 0, а поток Φ_f^N — к суммарному массовому потоку, обеспечивая стандартную схему расщепления. В сжимаемых течениях оба потока будут стремиться к стандартной схеме Курганова — Тадмора.

Функция-переключатель выбрана исходя из общих соображений и требований к её поведению: $\kappa_f = \min(Ma_f / AC_{of}, 1)$, величины с индексом f вычисляются в центре грани.

В рамках гибридного метода алгоритм связывания решения для полей скорости, давления и плотности типа PISO или SIMPLE претерпевает следующие изменения.

- 1) Уравнение для давления по-прежнему выводится из уравнения неразрывности, импульса и состояния, но с учётом распространения возмущений самой быстрой и самой медленной волн.
- 2) Каждая итерация SIMPLE или PISO завершается обновлением поля функции-переключателя и массовых потоков среды.

Универсальность разработанного гибридного метода позволяет применять его при решении задач для многокомпонентных или многофазных сред в гомогенном приближении без существенного изменения алгоритма. В этом случае система балансных уравнений для плотности, скорости и удельной энергии дополняется уравнениями переноса массовых долей компонент или фаз среды, а алгоритм интегрирования — соответствующими этапами.

Третья глава посвящена валидации и тестированию разработанного гибридного метода и включает в себя результаты моделирования следующих групп задач.

1. Валидационные задачи для случая сжимаемого течения. В эту группу входят задачи с относительно простой формой области течения, имеющие либо аналитическое решение, либо “эталонные” данные из эксперимента, либо результаты численного моделирования с помощью других численных методов или пакетов. Рассмотрены задачи: а) распространение волны в прямом канале (задача Сода и др.); б) обтекание плоского клина; в) обтекание обратного уступа сверхзвуковым потоком; г) обтекание прямого уступа сверхзвуковым потоком; д) течение в сверхзвуковом сопле при наличии прямого скачка уплотнения в закритической части.

2. Валидационные задачи для случая несжимаемого течения: а) течение Пуазейля; б) обтекание цилиндра в ламинарном режиме; в) обтекание цилиндра турбулентным потоком; г) течение струй газов со смешением.

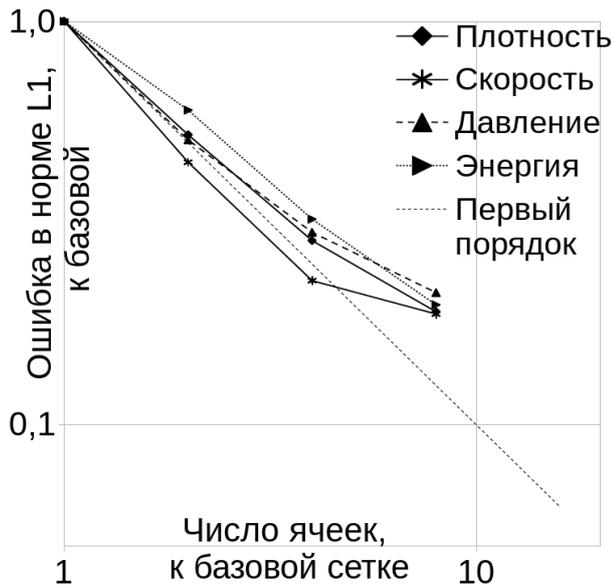
3. Моделирование распространения акустических волн.

4. Промышленные задачи: а) моделирование истечения струи газа из сверхзвукового сопла; б) расчёт истечения квазиравновесной расширяющейся струи плазмы в область низкого давления; в) моделирование течения в высокоскоростном компрессоре; г) моделирование систем генерации газа в подушках безопасности; д) моделирование гидродинамики водокольцевого насоса.

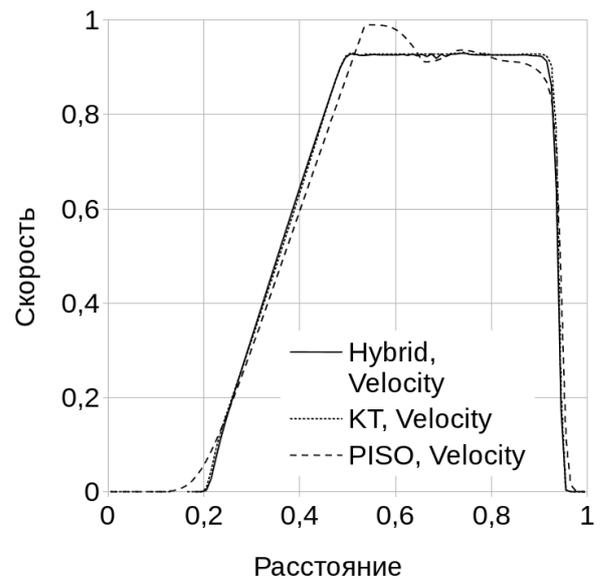
Базовым тестом для оценки качества численной схемы решения уравнений Эйлера являются задачи распада разрыва для совершенного газа в одномерном приближении (см. Toro Eleuterio F., *Rieman Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Practical Introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009). В рамках данного теста были исследованы:

- 1) близость численного решения, получаемого по явной и неявной версии Курганова — Тадмора;
- 2) наличие сеточной сходимости, оценка порядка аппроксимации;
- 3) влияние функции-переключателя на численное решение;
- 4) монотонность решения и влияние параметров схемы при больших градиентах давления.

Анализ решения задачи Сода на различных сетках показал наличие се-



а) Сеточная сходимость гибридного метода для задачи Сода



б) Сравнение поля скорости в задаче Сода, полученного гибридным методом (Hybrid), явным методом со схемой Курганова – Тадмора (KT) и стандартным методом PISO (PISO)

Рис. 3. Результаты тестирования гибридного метода на задаче Сода

точной сходимости гибридного метода (см. рис. 3а), порядок аппроксимации схемы близок к первому. Визуальное сравнение распределений газодинамических величин, полученных явным методом Курганова – Тадмора и с помощью гибридного метода, показывает их удовлетворительное совпадение (например, см. рис. 3б для скорости). Показано, что использование аппроксимирующих соотношений Курганова – Тадмора в неявном виде позволяет получить схему, со свойством монотонности, аналогичным или же близким к исходной.

С целью анализа влияния функции-переключателя на свойства численного решения была выбрана модифицированная задача Сода, в которой отношение давлений в состояниях слева и справа составило 1.17:1 вместо 10:1, что обеспечивает распространение дозвуковой волны. В этом случае расчёт может вестись как с малыми значениями акустического критерия ACo , и тогда метод будет аналогичен исходной схеме, так и со значениями $ACo \geq 1$.

В результате расчётов (см. рис. 4) было получено, что повышение ACo

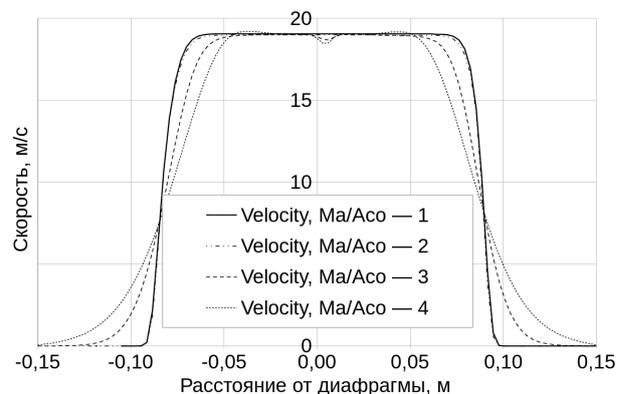


Рис. 4. Влияние функции-переключателя на решение. Линия 1 соответствует $ACo \approx 0.01$, 2 – $ACo \approx 0.1$, 3 – $ACo \approx 1$, 4 – $ACo \approx 3$

с 0.01 до 0.1 оказывает слабое влияние на результат. Дальнейший рост CCo и, следовательно, уменьшение значения κ_f , приводит к росту вклада от стандартной схемы, что выражается в появлении осцилляций в области контактного разрыва и росте диссипативности схемы в области ударной волны и волны разряжения. Тем не менее решение, получаемое гибридным методом остаётся ближе к аналитическому, чем получаемое с помощью стандартного метода PISO.

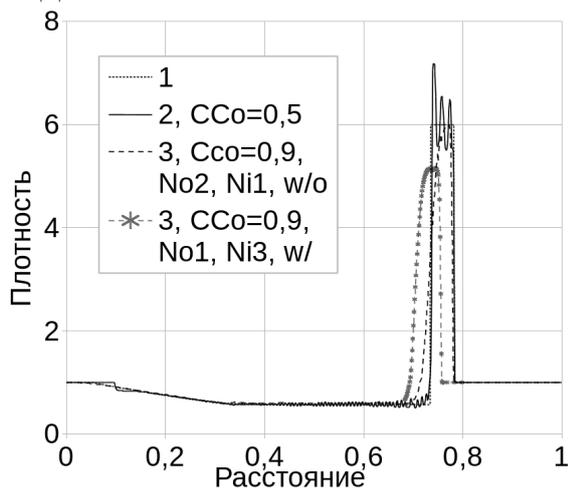


Рис. 5. Распределение поля плотности в задаче распада разрыва № 3 в зависимости от выбора параметров численных схем

них итераций типа SIMPLE, Ni — число внутренних итераций типа PISO, w/o — без прогноза скорости, w/ — с прогнозом скорости. Несмотря на относительно высокое значение характеристического числа Куранта, гибридный метод обеспечивает решение без осцилляций по плотности, а осцилляции по скорости значительно меньше, чем в явной схеме, несмотря на то, что в явной схеме CCo почти в 2 раза ниже. Отсутствие внешних итераций SIMPLE может приводить в гибридном методе к изменению скорости распространения волн. В то же время использование по крайней мере двух внешних итераций позволяет рассчитывать скорость волны правильно (см. рис. 5).

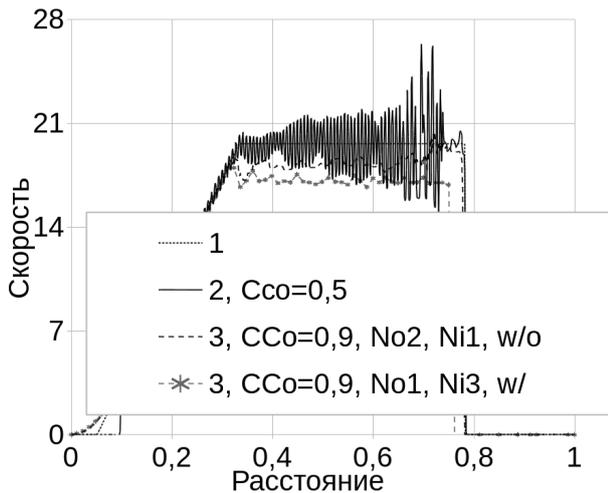
Таблица 1. Сравнение L_1^h -норм ошибки явного метода Курганова — Тадмора и гибридного метода для теста №3 и различных параметрах алгоритма интегрирования

| | Тадмор, $CCo = 0.5$ | Тадмор, $CCo = 0.01$ | Гибридный, $CCo = 0.9,$ $No = 2,$ $Ni = 1$ | Гибридный, $CCo = 0.9,$ $No = 3,$ $Ni = 1$ | Гибридный, $CCo = 0.5,$ $No = 3,$ $Ni = 1$ |
|-----------|------------------------|-------------------------|---|---|---|
| Плотность | 0.06 | 0.02 | 0.09 | 0.06 | 0.05 |
| Скорость | 1.00 | 0.05 | 0.73 | 0.21 | 0.11 |
| Давление | 22.98 | 1.03 | 18.15 | 5.58 | 3.33 |
| Энергия | 32.61 | 8.73 | 56.4 | 29.52 | 21.40 |

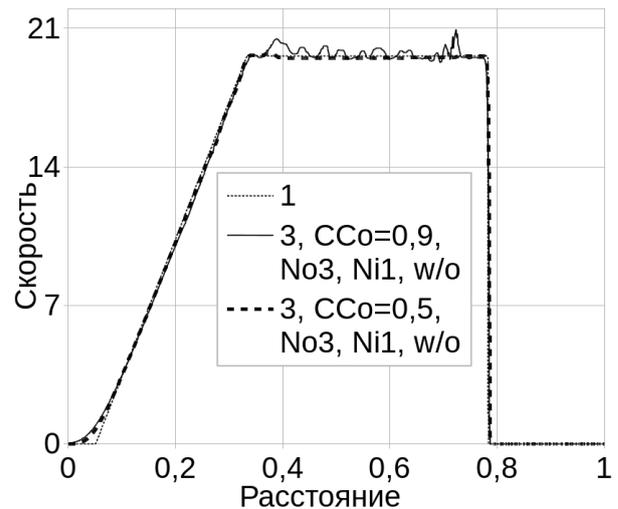
Снижение характеристического числа Куранта до 0.5 приводит к полному исчезновению осцилляций в решении, полученном с помощью гибридного метода (см. рис. 6б). Из таблицы 1 видно, что использование гибридного

Одним из наиболее «жестких» тестов является задача о распаде разрыва № 3 из работы Е. Того — рассматривается набегание сильной ударной волны с отношением давлений 100000:1.

Для данной задачи гибридный метод обеспечивает первый порядок точности, при этом область устойчивости и монотонности (по числу CCo) шире по сравнению с явным методом - см. рис. 5 - 6. На рисунках линия 1 соответствует аналитическому решению, линия 2 — явной схеме Курганова — Тадмора, линия 3 — гибриднему методу, No — число внешних



а) Влияние параметров алгоритма на осцилляции в численном решении, получаемым явным и гибридным методом Курганова – Тадмора

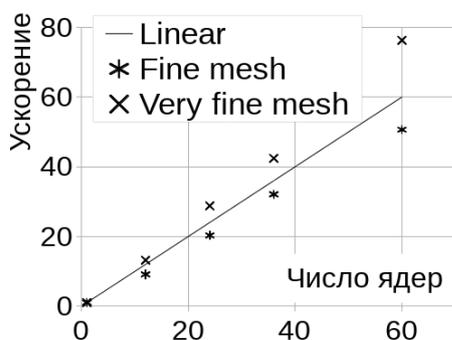


б) Влияние максимального значения CCo на монотонность численного решения

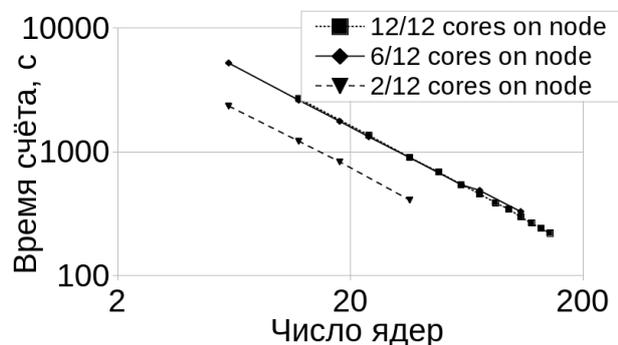
Рис. 6. Влияние параметров гибридного алгоритма на свойства численного решения метода при одинаковом числе Куранта позволяет достичь меньших ошибок аппроксимации, чем у явного метода.

Исследование свойств схемы для несжимаемых задач показало близость решения, получаемого гибридным методом, к несжимаемому приближению в ламинарном режиме и возможность обеспечения второго порядка точности. В случае турбулентного течения различия проявляются сильнее, возможно из-за дополнительной вязкости. При этом в целом отличия от “эталонных” экспериментальных данных не превышают 12 %.

Масштабируемость реализации метода проверялась на двух задачах: двумерное сверхзвуковое набегание потока на уступ и сверхзвуковое течение газа в газогенераторе подушки безопасности. В обоих случаях была получена линейная или близкая к ней зависимость ускорения от увеличения числа вычислительных ядер — см. рис. 7а и рис. 7б.



а) Масштабируемость реализации гибридного метода для задачи 2D набегания сверхзвукового потока на прямой уступ, 4 млн. ячеек



б) Масштабируемость реализации гибридного метода для задачи моделирования 3D течения в газогенераторе подушки безопасности, 2.7 млн. ячеек

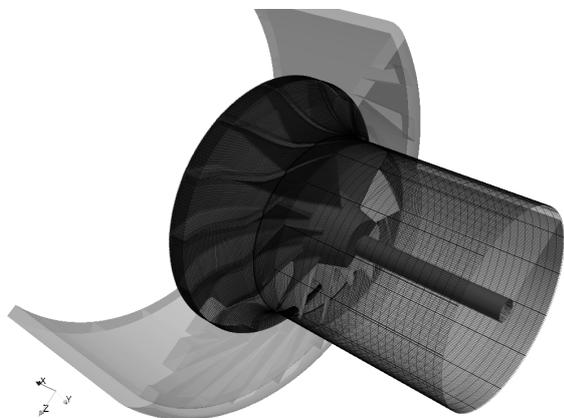
Рис. 7. Результаты исследования масштабируемости реализации гибридного метода

Использование стандартного алгоритма PISO позволило выполнить процедуру интегрирования уравнений на подвижной сетке аналогично имеющимся в OpenFOAM моделям. Реализация алгоритма была валидирована на стандартном тесте ERCOFTAC, результаты валидации показали удовлетворительное совпадение расчётного и экспериментального профилей давления в зазоре модельного центробежного компрессора.

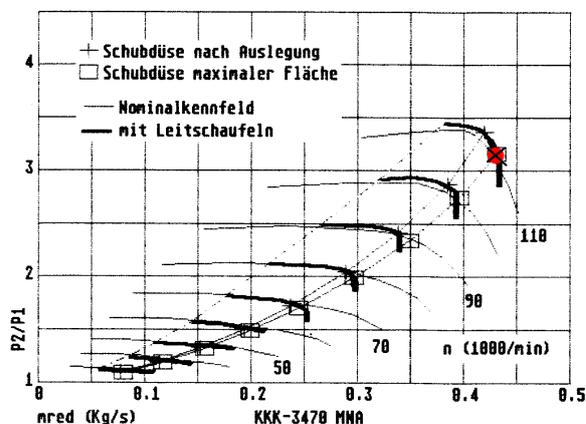
Применимость метода для решения подобных задач промышленного масштаба была проверена на модели высокоскоростного микрокомпрессора с конструкцией, близкой к реальной (рис. 8а). В результате численного моделирования с параметрами, соответствующими выбранной рабочей точке (рис. 8б), расчётный коэффициент повышения давления составил 3.20 при экспериментальном значении порядка 3.12.

Адекватность гибридного метода была также исследована с помощью статистического метода ортогональной декомпозиции (POD), позволяющем выделять характерные пространственные моды и временные частоты в распределениях нестационарных полей газодинамических величин. Метод POD можно рассматривать как аналоги модальных методов анализа конструкций, применяемых для выявления собственных форм и частот колебаний конструкций. С другой стороны, эти методы могут использоваться как инструменты тестирования численных схем — для рассматриваемого течения заранее известны определённые моды и соответствующие им частоты, определяемые геометрией компрессора и частотой вращения вала ротора. В работе использовалась реализация алгоритма POD, выполненная в Институте Системного Программирования РАН с применением фреймворка Apache Spark, вычисления проводились на специальном оборудовании, оптимизированном для данного типа вычислений.

Анализ мод течения в модели компрессора показал наличие характерных частот, соответствующих лопаточным частотам ротора, статора и оборотной частоте. Получено, что даже на относительно грубой сетке (2.7 миллиона ячеек) основные частоты, характерные для данного типа машин, — оборот-



а) Сеточные линии в области проточной части компрессора



б) Характеристика компрессора, рабочая точка отмечена крестом.

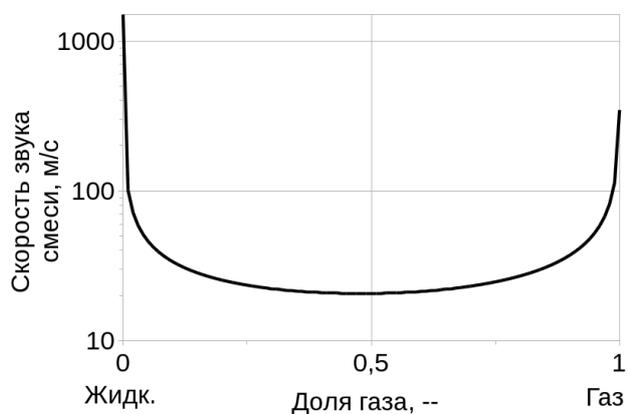
Рис. 8. Результаты исследования масштабируемости реализации гибридного метода

ная, лопаточная импеллера и лопаточная диффузора могут быть разрешены с использованием гибридного метода.

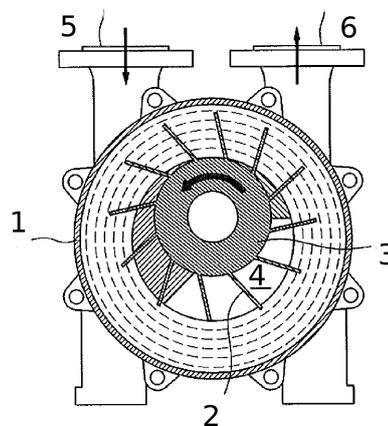
Важной областью применения гибридного метода является моделирование двухфазных течений с учётом сжимаемости. В гомогенном приближении такие модели могут быть ценным инструментом для получения предварительных оценок интегральных характеристик, пульсаций давления и уровня акустического шума в технических устройствах со смешением потоков.

В качестве примера можно указать водокольцевые насосы, часто используемые в энергетике для создания разрежения высокой степени. Моделирование таких устройств обычно осуществляется либо в несжимаемом приближении, либо с использованием уравнений состояний, не учитывающих немонотонной зависимости свойств смеси от её состава (см. рис. 9а). Отличительной особенностью двухфазных смесей является падение локальной скорости звука до малых величин при объёмных долях газа порядка 50 %, рис. 9а.

Принцип работы водокольцевого насоса (рис. 9б) состоит в разбрасывании воды лопастями 2 к корпусу 1, что приводит к созданию канала переменного сечения 4. Газ, проходя по этому каналу, сначала расширяется, создавая разрежение для втягивания среды с всаса 5 насоса, затем при переходе через широкую часть сужается, нагнетая давление, проталкивающее рабочую среду к выходу 6.



а) Зависимость скорости звука в двухфазной смеси от её состава



б) Принципиальная схема устройства и работы водокольцевого насоса

Рис. 9. Скорость звука двухфазной смеси и принцип работы водокольцевого насоса

На основе геометрии технического устройства, близкого к реальному, была разработана численная модель, для которой выполнен расчёт течения в режиме, близком к номинальному: напор 40 кПа (давление на всасе 60 кПа), частота вращения 200 рад/с. Вычисленная подача по порядку величины близка к характеристике устройства, разница может быть связана с различиями в геометрии изделия и расчётной области.

Анализ расчётных полей гидродинамических величин, характеризующих течение, показывает наличие трансзвуковых зон в областях с объёмной долей воздуха порядка 50 %. Учёт сжимаемости и «немонотонного» уравнения состояния в модели течения двухфазной среды показывает, что даже

при сравнительно малых скоростях могут наблюдаться эффекты, характерные для транс- и сверхзвуковых течений, а также связанные с ними явления.

Стороннее применение. С момента публикации описания гибридного метода, он нашёл применение в численных исследованиях ряда коллективов.

Реализация гибридного метода для случая течения многокомпонентной среды идеальных вязких газов была использована В. Schmidt (Californian Institute of Technology) с целью численного моделирования эксперимента по изучению влияния инъекции различных газов на толщину сверхзвукового пограничного слоя после впрыска. Результаты численного моделирования показали хорошее количественное соответствие между экспериментом и расчётом для газов с молярной массой, близкой или меньшей молярной массы вдуваемого потока. Для газов с молярной массой, большей молярной массы основного потока, было получено удовлетворительное качественное соответствие, даны объяснения наблюдаемых различий.

Гибридный метод также нашёл применение в работах М. Banholzer и М. Pfitzner (Universität der Bundeswehr München), при моделировании течений газов с реальным уравнением состояния. Алгоритм решения уравнения для давления был доработан для подключения различных уравнений состояния, таких как Пенга — Робинсона или Соав — Редлих — Квонга. Были проведены валидационные расчеты для одномерных тестов течения в канале переменного сечения, показавшие наличие сеточной сходимости численного решения к аналитическому.

Основные результаты

1. Разработан гибридный метод аппроксимации конвективных слагаемых в уравнениях гидро- и газодинамики, основанный на комбинировании стандартной схемы PISO, разработанной для численного моделирования слабосжимаемых и несжимаемых течений, и схемы Курганова — Тадмора для моделирования сжимаемых течений. Выполненные вычислительные эксперименты показывают что предложенный метод позволяет моделировать течения вязких сжимаемых сред в широком диапазоне чисел Маха — от 0 до 4–6; при этом устойчивость метода определяется единственным условием — величиной поточного числа Куранта.

2. Предложенный гибридный метод реализован в виде программ, расширяющих стандартные возможности открытой библиотеки OpenFOAM и предназначенных для моделирования течений однофазных сжимаемых сред, смесей сжимаемых газов и двухфазных смесей. Реализация метода осуществлена по лицензии GPL, исходный код находится в открытом доступе. Метод внедрён в практику математического моделирования различными научными коллективами для решения актуальных прикладных задач.

3. Разработанный программный комплекс, основанный на новом гибридном методе, позволил исследовать гидродинамику двухфазной среды водокольцевого вакуумного насоса, описываемую математической моделью сжимаемой гомогенной смеси с уравнением состояния, учитывающим немонотонную зависимость скорости звука в смеси от её состава.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты работы отражены в следующих публикациях, в том числе в журналах из списка ВАК и индексируемых в международных системах цитирования:

1. Васильев В.А., Крапошин М.В., Ницкий А.Ю., Юскин А.В. Применение НРС-технологий для решения пространственных задач мультифизики // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т. 12, № 1. С. 160–169.
2. Kraposhin M., Brouzet C., Dauxois T. [et al.] Direct numerical simulation of internal gravity wave attractor in trapezoidal domain with oscillating vertical wall // Proceedings of ISP RAS. 2014. Vol. 26, No 5. Pp. 117–142.
3. Kraposhin M., Bovtrikova A., Strijhak S. Adaptation of Kurganov — Tadmor Numerical Scheme for Applying in Combination with the PISO Method in Numerical Simulation of Flows in a Wide Range of Mach Numbers // Procedia Computer Science. 2015. Vol. 66. Pp. 43–52.
4. Kraposhin M., Kalugin M., Strijhak S., Evdokimov I. Numerical study of characteristic modes and frequencies of flow in high speed compressors. 3rd Internation Rotating Equipment Conference: Technical Paper. Dusseldorf, 2016.
5. Крапошин М.В. Возможности гибридного метода аппроксимации конвективных потоков при моделировании течений сжимаемых сред // Труды Института системного программирования РАН. 2016. Т. 28, № 3. С. 267–326.