

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор - проректор  
по научной деятельности  
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)  
федеральный университет,  
профессор, д.ф.-м.н.,  
Д.А. Таюрский

« 5 » \_\_\_\_\_ 2024 г.



## ОТЗЫВ

ведущей организации

на диссертацию

Кальметьева Рустема Шайнуровича

«Метод итераций Фейнмана-Чернова аппроксимации полугрупп»,

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук по специальности

1.1.6. – Вычислительная математика.

### **Актуальность темы диссертации**

Численное решение эволюционных уравнений в частных производных в больших размерностях актуально для большого числа приложений, таких как моделирование динамики квантовых систем, задачи финансовой математики, модели эволюционной биологии. Из-за большой размерности сеточные численные методы для подобного рода задач неприменимы. И одним из интенсивно развивающихся на сегодняшний день направлений в этой области является теория аппроксимации однопараметрических полугрупп с помощью композиций операторнозначных функций. Такие композиции называются итерациями Фейнмана-Чернова. Работа Кальметьева Р.Ш. посвящена разработке и исследованию методов аппроксимации полугрупп с помощью усреднения итераций Фейнмана-Чернова для случайных операторов.

## **Общая характеристика диссертационной работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 96 страниц, включая 20 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 110 наименований.

Во *введении* обосновывается актуальность исследования, а также формулируются цель и задачи работы, научная новизна и положения, выносимые на защиту.

В *первой главе* рассматриваются случайные аффинные преобразования аргумента функций, определенных на конечномерном евклидовом пространстве. Изучаются порождаемые при этом случайные операторнозначных функции и их усреднения по Чернову. Доказываются достаточные условия сходимости итераций Фейнмана-Чернова к усредняющей полугруппе. Рассматривается задача усреднения по Чернову случайных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Во *второй главе* описывается численный метод аппроксимации решений задачи Коши для уравнения Колмогорова определенного вида, основанный на усреднении конечнократных итераций Фейнмана-Чернова. Приводятся результаты численных экспериментов.

*Третья глава* посвящена моделированию эволюции квазивероятностных распределений для последовательностей случайных гамильтонианов. Для случайных гамильтонианов, сохраняющих когерентность квантового состояния, приведено уравнение эволюции в явном виде и результаты численного моделирования.

В *четвертой главе* рассматривается задача аппроксимации операторов сдвига для неканонических коммутационных соотношений. Для определенных коммутационных соотношений доказываются существование обобщенных унитарных операторов сдвига. Проведено сравнение разработанного алгоритма аппроксимации с существующими альтернативными методами.

В заключении приводятся основные результаты работы.

## **Научная новизна полученных результатов**

Диссертационная работа Кальметьева Р.Ш. выполнена на высоком научном уровне. Результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми.

Доказаны достаточные условия сходимости к предельной полугруппе для итераций Фейнмана-Чернова операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента. Разработан метод аппроксимации решений многомерного уравнения Колмогорова на основе усреднения итераций Фейнмана-Чернова. Разработан метод моделирования эволюции квазивероятностного распределения открытой квантовой системы с помощью усреднения итераций Фейнмана-Чернова. Найдено однопараметрическое семейство операторов рождения и уничтожения, для которых операторнозначная функция сдвига является унитарной и



удовлетворяет полугрупповому свойству на прямых, проходящих через начало координат.

### **Теоретическая и практическая значимость полученных автором диссертации результатов**

В работе разработан, имеющий широкое поле применения, метод аппроксимации эволюционных полугрупп с помощью усреднения случайных итераций Фейнмана-Чернова и доказаны достаточные условия сходимости для случая операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента. Разработанные численные алгоритмы могут быть использованы в задачах оптимального управления квантовыми системами при моделировании квантового шума.

### **Обоснованность и достоверность результатов работы**

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и заключений подтверждается строгими математическими доказательствами и верификацией численных расчетов.

### **Апробация работы**

Результаты работы докладывались на 9 международных конференциях и научных семинарах.

По теме диссертации опубликованы в 8 работ, 6 из которых изданы в рекомендованных журналах из перечня ВАК, 4 – в журналах, входящих в базы данных WoS и SCOPUS.

### **Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.**

### **Замечания по диссертационной работе**

1. В первой главе не приведены примеры случайных операторнозначных функций, для которых отсутствует сходимость к сильно непрерывной полугруппе при усреднении итераций Фейнмана-Чернова.
2. Во второй главе приведены оценки сложности алгоритма аппроксимации для случая, когда значения операторнозначных функций принадлежат представлению какой-либо произвольной конечномерной группы Ли, при этом далее рассмотрен только один пример усреднения аффинных преобразований аргумента.
3. В третьей главе рассматриваются квадратичные по операторам рождения и уничтожения гамильтонианы, для которых эволюция конечных моментов квазивероятностного распределения может быть вычислена аналитически. В работе не приводится сравнение разработанного метода с этим подходом.
4. В четвертой главе приводится пример семейства неканонических коммутационных соотношений, для которых существуют унитарные обобщенные операторы сдвига. При этом не проведено исследование единственности этого семейства.

Приведенные замечания не снижают общей положительной оценки диссертационной работы Кальметьева Р.Ш.

## Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным положением о порядке присуждения ученых степеней

Диссертационная работа Кальметьева Рустама Шайнуровича «Метод итераций Фейнмана-Чернова аппроксимации полугрупп» является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задачи аппроксимации полугрупп операторов с помощью усреднения итераций Фейнмана-Чернова, имеющей значение для развития вычислительной математики, что соответствует требованиям п. 9 – 10 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.6 – Вычислительная математика.

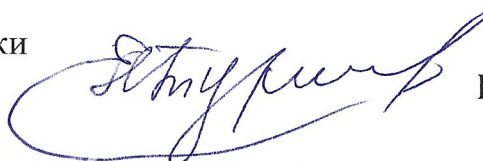
Отзыв подготовлен доктором физико-математических наук, зав. кафедрой математической статистики ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» Туриловой Екатериной Александровной, обсужден и одобрен на расширенном заседании кафедры математической статистики ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», протокол № 5 от 26 января 2024 года.

Зам.директора  
по научной деятельности  
Института математики и механики  
им.Н.И.Лобачевского



Б.Ф.Тазюков

Заведующий кафедрой  
математической статистики  
Института математики и механики  
им.Н.И.Лобачевского, д.ф.-м.н



Е.А. Турилова

Сведения о ведущей организации: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Адрес: 420008, Россия, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д.18

Телефон: +7 (843) 233-71-09

Сайт организации: <http://www.kpfu.ru>

Электронная почта: [public.man@kpfu.ru](mailto:public.man@kpfu.ru)

