

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Кальметьев Рустем Шайнурович

**МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ФЕЙНМАНА-ЧЕРНОВА
АППРОКСИМАЦИИ ПОЛУГРУПП**

Специальность 1.1.6. — «Вычислительная математика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Орлов Юрий Николаевич

Москва — 2023

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Итерации Фейнмана-Чернова и их приложения к аппроксимации полугрупп	13
1.1 Композиции случайных операторнозначных функций	14
1.2 Случайные аффинные преобразования аргумента функций	19
1.3 Фейнмановские аппроксимации диффузионных полугрупп	29
1.4 Усреднение по Чернову линейных обыкновенных дифференциальных уравнений	30
Глава 2. Аппроксимация решений многомерного уравнения Колмогорова	42
2.1 Уравнение Колмогорова и формула Фейнмана-Каца	43
2.2 Аппроксимация решений с помощью итераций Фейнмана-Чернова	46
2.3 Усреднение аффинных преобразований	48
2.4 Результаты численных экспериментов	50
Глава 3. Моделирование необратимой квантовой эволюции	55
3.1 Постановка задачи и предлагаемый подход	56
3.2 Оператор эволюции автономного квантового осциллятора и формула Зассенхауса	58
3.3 Квантовые системы со случайным гамильтонианом	62
3.4 Численное моделирование необратимой квантовой эволюции	64
Глава 4. Аппроксимации операторов сдвига с помощью итераций Чернова	67

4.1	Представление когерентных состояний и операторы сдвига	68
4.2	Усреднение случайных операторов сдвига	70
4.3	Операторы сдвига для неканонических коммутационных соотношений	71
4.4	Методы аппроксимации операторов сдвига	79
Заключение		84
Список литературы		85

Введение

Данная диссертация посвящена разработке методов аппроксимации эволюционных полугрупп и вычислительных алгоритмов решений эволюционных дифференциальных уравнений с помощью итераций Фейнмана-Чернова для случайных операторнозначных функций.

В настоящее время методы вычислительной математики широко применяются в различных научных областях и приложениях, и особенно актуальными являются задачи связанные с большими размерностями данных. Для достаточно больших размерностей численное решение уравнений в частных производных при помощи сеточных алгоритмов, таких как конечно-разностные алгоритмы или метод конечных элементов, становится практически невозможным. Стандартным подходом для задач большой размерности сегодня является построение статистических оценок методом Монте-Карло. Также в последние годы получили развитие идеи применения глубоких нейронных сетей для аппроксимации решений. При этом обучение таких сетей тоже требует достаточно больших обучающих выборок, которые, как правило, строятся опять же методами Монте-Карло. Итерации Фейнмана-Чернова (последовательности композиций случайных операторнозначных функций увеличивающейся кратности) в свою очередь в некоторых случаях могут использоваться для вычислительно более эффективного построения аппроксимаций решений эволюционных уравнений.

Формулы представления решений эволюционных уравнений в виде пределов кратных интегралов при стремящейся к бесконечности кратности были впервые опубликованы Фейнманом в работах [1] (формулы Фейнмана в форме Лагранжа для траекторий в конфигурационном пространстве) и [2] (формулы Фейнмана в форме Гамильтона для траекторий в фазовом пространстве). Теоретическое обоснование лагранжевых формул было построено Нельсоном [3] в 1964 году с использованием теоремы Троттера-Далецкого-Ли [4]. Гамильтоновы

формулы Фейнмана были доказаны в 2002 году в работе Смолянова, Токарева и Трумана [5] при помощи теоремы Чернова [6]. Термин итерации Фейнмана-Чернова был введен в 2016 году в работе Орлова, Сакбаева и Смолянова [7]. О современном состоянии исследований в данной области можно судить по статьям [8–27] и обзорам [28–31], а также ссылкам в этих работах.

В случае конечномерного линейного пространства случайные линейные операторы могут быть представлены в виде случайных матриц. Теория статистических свойств произведений независимых случайных матриц и композиций независимых случайных преобразований интенсивно развивалась во второй половине XX века, ее основные положения можно найти в работах [32–36].

В приложениях композиции случайных операторнозначных функций, возникают, например, в задачах классической и квантовой механики для систем, находящихся в случайных нестационарных полях [37–44]. Усредненная динамика таких систем имеет как теоретический, так и практический интерес с точки зрения анализа средних значений наблюдаемых. В частности, важно представлять, в какой мере усреднение решений некоторого эволюционного уравнения с нестационарными параметрами связано с решением уравнения, усредненного по этим параметрам. Использование для этой цели процедуры усреднения с помощью построения эквивалентных по Чернову полугрупп является весьма эффективным методом, который был развит в [7–9].

Вопросами аппроксимации эволюционных полугрупп занимается множество научных коллективов, при этом подавляющее большинство работ по черновским аппроксимациям полугрупп имеют теоретический характер. В связи с этим, особенный интерес представляют вопросы разработки новых численных методов и моделей, основанных на использовании итераций Фейнмана-Чернова, и их применения в приложениях классической и квантовой механики, экономики, биологии и других областях науки.

Целью данного диссертационного исследования является разработка численных методов построения аппроксимаций решений эволюционных уравнений

с помощью усреднения итераций Фейнмана-Чернова для случайных операторнозначных функций.

В работе решаются следующие **задачи**:

- разработка и обоснование сходимости алгоритма численной аппроксимации решений задач Коши для эволюционных уравнений с помощью итераций Фейнмана-Чернова, и в частности разработка эффективного метода аппроксимации решений многомерных уравнений Колмогорова, порождаемых случайными аффинными преобразованиями аргумента;
- создание и реализация численного метода моделирования необратимой эволюции квантовых систем на основе усреднения итераций Фейнмана-Чернова;
- создание и реализация алгоритма численной аппроксимации операторов сдвига для произвольных коммутационных соотношений.

Научная новизна. Для последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова случайных операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента, сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости к предельной сильно непрерывной полугруппе. Разработан алгоритм численной аппроксимации решений задач Коши для эволюционных уравнений с помощью итераций Фейнмана-Чернова. Разработан численный метод моделирования необратимой эволюции квантовых систем. Для случая неклассических коммутационных соотношений найдено однопараметрическое семейство операторов рождения и уничтожения, для которых операторнозначная функция сдвига является унитарной и удовлетворяет полугрупповому свойству на прямых, проходящих через начало координат.

Теоретическая ценность и практическая значимость результатов исследования состоят в разработке доказательного способа построения сходящейся последовательности аппроксимаций решений эволюционных уравнений с помощью итераций Фейнмана-Чернова.

Методы. В диссертации использован аппарат теории конечнократных аппроксимаций по формулам Фейнмана-Чернова, и в целом методы вычислитель-

ной математики, бесконечномерного анализа и теории операторов, линейной алгебры, теории вероятностей и теории случайных процессов.

Обоснованность и достоверность результатов исследования подтверждаются использованием строгих математических доказательств и рассуждений и апробированных в научной практике методов численного анализа. Верификация разработанного программного комплекса проводилась в том числе с помощью сравнительного анализа результатов расчетов с аналитическими решениями и результатами расчетов с помощью альтернативных численных методов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований аргумента к предельной сильно непрерывной полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка.
2. Разработан алгоритм численной аппроксимации решений многомерных уравнений Колмогорова, порождаемых случайными аффинными преобразованиями аргумента.
3. Найдено однопараметрическое семейство операторов рождения и уничтожения, для которых операторнозначная функция сдвига является унитарной и удовлетворяет полугрупповому свойству на прямых, проходящих через начало координат.
4. Разработан и реализован в виде программного комплекса численный метод моделирования необратимой эволюции квантовых систем.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. XX Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2021» (1-4 декабря 2021, Казань);

2. XXI Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения-2022» (28 ноября – 1 декабря 2022, Казань);
3. Международная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (18-22 октября 2022, Уфа);
4. International Online Conference One-Parameter Semigroups of Operators (OPSO 2023) (27 February – 3 March 2023);
5. Научный семинар лаборатории БД и ИС ИПМ им. Келдыша РАН (многokrатно, 2019-2023, Москва);
6. Международная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (1-3 июня 2023, Уфа);
7. Научный семинар «Математическое моделирование» 15 отдела ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (22 июня 2023, Москва);
8. Международная конференция «Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ» (5–13 июля 2023, Долгопрудный);
9. Научный семинар «МИАН Квантовая математическая физика» (18 октября 2023, Москва).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях [45–52], 6 из которых изданы в рекомендованных журналах из перечня ВАК [45–50], 4 — в журналах, входящих в базы данных WoS и SCOPUS [45–48], 2 — в тезисах докладов [51; 52].

Личный вклад автора. Все результаты, выносимые на защиту, получены соискателем лично. Автор диссертации, работая в коллективе соавторов Ю.Н. Орлова и В.Ж. Сакбаева, самостоятельно сформулировал и доказал достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований аргумента к предельной полугруппе, доказал унитарность и выполнение полугруппового свойства для конкретного семейства лестничных операторов, разработал численные алгоритмы и провел серию вычислительных экспериментов. Математическая постановка задач принадлежит научному руководителю.

В работе [45] автором получены представления когерентных состояний для двух частных случаев коммутационных соотношений и построено преобразование к стандартной скобке Пуассона. В работе [46] автором доказаны достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований аргумента к предельной сильно непрерывной полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения переноса. Также автором проведено численное моделирование последовательностей итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований. В работе [47] автором доказаны достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований аргумента к предельной сильно непрерывной полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка. В работе [48] автором разработан алгоритм моделирования необратимой эволюции квантовых систем.

Структура и объем диссертации. Диссертация «Аппроксимация эволюционных полугрупп с помощью усреднения итераций Фейнмана-Чернова» состоит из введения, четырех глав и заключения. Результаты исследования изложены на 96 страницах и содержат 20 рисунков и 1 таблицу. Библиографический список состоит из 110 наименований.

Содержание работы. В первой главе рассматривается задача усреднения последовательностей итераций Фейнмана-Чернова, представляющих собой композиции независимых случайных операторнозначных функций увеличивающейся кратности, и изучаются предельные свойства таких композиций. Для определенного класса операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента, получены достаточные условия для сходимости математического ожидания последовательности итераций Фейнмана-Чернова к полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка. В первом разделе содержатся необходимые предварительные сведения, включающие теорему Чернова и используемые определения случайного

оператора и математического ожидания от случайного оператора, а также дается общая постановка рассматриваемых задач. Во втором разделе рассматривается семейство случайных операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента, и доказываются вспомогательные леммы. В третьем разделе формулируется и доказывается являющаяся основным результатом данной главы теорема о сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова к соответствующей усредняющей по Чернову полугруппе. В четвертом разделе изучаются композиции независимых случайных операторнозначных функций со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R})$, при этом рассматриваемые операторнозначные функции порождаются решениями случайных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на вещественной прямой. Также доказывается возможность построения сильно состоятельной статистической оценки для усредняющей полугруппы на основе конечной выборки для случайной операторнозначной функции.

Во второй главе предлагается новый алгоритм для численной аппроксимации решений многомерного уравнения Колмогорова, основанный на усреднении итераций Фейнмана-Чернова [7] для случайных операторнозначных функций. В первом разделе описывается стандартный Монте-Карло алгоритм, использующий формулу Фейнмана-Каца. Во втором разделе описывается предлагаемый алгоритм, идея которого состоит в построении аппроксимации для оператора эволюции, действующего на начальное условие, на основе теоремы Чернова [6]. Предлагаемый алгоритм имеет меньшую вычислительную сложность по сравнению со стандартным Монте-Карло алгоритмом, использующим формулу Фейнмана-Каца, в случае когда значения усредняемых случайных операторнозначных функции принадлежат представлению какой-либо конечномерной группы Ли. В частности, в третьем разделе рассмотрен случай группы аффинных преобразований евклидова пространства и соответствующие уравнения, порождаемые при усреднениях итераций Фейнмана-Чернова. Также в четвертом разделе

приведены результаты численных расчетов для двух модельных задач со сравнением стандартного и предлагаемого алгоритмов.

В третьей главе исследуются усреднения итераций Фейнмана-Чернова случайных операторнозначных функций эволюции для квантовых систем. Рассматривается эволюция квантового осциллятора, которая задается композициями случайных аффинных преобразований фазового пространства, и диффузионный предел таких композиций в смысле итераций Фейнмана-Чернова. В первом разделе приводится общая постановка рассматриваемой задачи. Во втором разделе описывается декомпозиция оператора эволюции для рассматриваемых гамильтонианов с помощью формула Зассенхауса. В третьем разделе приводится уравнение Фоккера-Планка для эволюции функции квазивероятностного распределения, определяющего оператор плотности смешанного состояния. В четвертом разделе численно исследуется проблема декогеренции квантовых состояний в интерференционном эксперименте.

В четвертой главе рассматривается задача приближения операторов сдвига с помощью итераций Чернова. В первом разделе вводятся понятия и обсуждаются некоторые свойства когерентных состояний и операторов сдвига. Во втором разделе рассматривается усреднение случайных операторов сдвига с помощью итераций Фейнмана-Чернова. В третьем разделе рассматриваются случаи неканонических коммутационных соотношений, вводятся понятия двойственных по сдвигу лестничных операторов и приводится пример параметрического семейства неканонических коммутационных соотношений, при которых можно построить унитарные операторы сдвига, удовлетворяющие полугрупповому свойству на прямых в пространстве когерентных состояний, проходящих через начало координат. В четвертом приведен алгоритм аппроксимации операторов сдвига с помощью итераций Чернова, а также результаты численного эксперимента по сравнению вычислительной эффективности предлагаемого алгоритма с другими известными методами вычисления операторов сдвига на усеченном гильбертовом пространстве.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю Ю.Н. Орлову за постановку задач, ценные советы и полезные обсуждения. Также автор глубоко признателен В.Ж. Сакбаеву за замечания, рекомендации и всестороннюю поддержку.

Глава 1. Итерации Фейнмана-Чернова и их приложения к аппроксимации полугрупп

В данной главе рассматривается задача усреднения последовательностей итераций Фейнмана-Чернова, представляющих собой композиции независимых случайных операторнозначных функций увеличивающейся кратности, и изучаются предельные свойства таких композиций. Для определенного класса операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента, получены достаточные условия для сходимости математического ожидания последовательности итераций Фейнмана-Чернова к полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка.

Структура данной главы выстроена следующим образом. В первом разделе содержатся необходимые предварительные сведения, включающие теорему Чернова и используемые определения случайного оператора и математического ожидания от случайного оператора, а также дается общая постановка рассматриваемых задач. Во втором разделе рассматривается семейство случайных операторнозначных функций, порождаемых аффинными преобразованиями аргумента, и доказываются вспомогательные леммы. В третьем разделе формулируется и доказывается являющаяся основным результатом данной главы теорема 1.3.1 о сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова к соответствующей усредняющей по Чернову полугруппе. В четвертом разделе изучаются композиции независимых случайных операторнозначных функций со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R})$, при этом рассматриваемые операторнозначные функции порождаются решениями случайных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на вещественной прямой. Также доказывается возможность построения сильно состоятельной статистической оценки для

усредняющей полугруппы на основе конечной выборки для случайной операторнозначной функции.

1.1 Композиции случайных операторнозначных функций

Пусть X – банахово пространство, $B(X)$ – алгебра линейных ограниченных операторов в X . Также введем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Определение 1.1.1. Операторнозначная функция $F(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(X)$ называется сильно непрерывной, если для любого $u_0 \in X$ и любого $t_0 \geq 0$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|F(t)u_0 - F(t_0)u_0\|_X = 0. \quad (1.1)$$

Введем обозначение $C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$ для топологического векторного пространства сильно непрерывных операторнозначных функций $U(t) : [0, +\infty) \rightarrow B(X)$. Топология τ_s в $C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$ порождается семейством полунорм

$$\Phi_{T,v}(U) = \sup_{t \in [0, T]} \|U(t)v\|_X, \quad \forall T > 0, \forall v \in X. \quad (1.2)$$

Отметим, что если $U, \{U_n\}_{n=0}^\infty \in C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$, то

$$U_n \xrightarrow{\tau_s} U \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|U_n(t)v - U(t)v\|_X = 0, \quad \forall T > 0, \forall v \in X. \quad (1.3)$$

Определение 1.1.2. Операторнозначная функция $U(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(X)$ называется полугруппой, если $U(0) = I$ (тождественный оператор) и $U(t_1 + t_2) = U(t_1) \circ U(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$.

С алгебраической точки зрения определение выше означает, что множество значений $U(t)$ является не только полугруппой, но и коммутативным моноидом, являющимся гомоморфным образом моноида \mathbb{R}_+ с операцией сложения.

Но в теории операторов общепринятым является именно термин «полугруппа». [53]

Определение 1.1.3. Полугруппа $U(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(X)$ называется сильно непрерывной или C_0 -полугруппой, если для любого $u_0 \in X$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|U(t)u_0 - u_0\|_X = 0. \quad (1.4)$$

Непрерывность в определении выше достаточно проверять только в нуле в силу выполнения полугруппового свойства $U(t_1 + t_2) = U(t_1) \circ U(t_2)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$.

Определение 1.1.4. Генератором сильно непрерывной (или C_0) полугруппы $U(t)$ называется оператор $A : X \supset D(A) \rightarrow X$:

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A), \quad (1.5)$$

где область определения $D(A)$ определяется как множество таких элементов, что данный предел существует.

Область определения генератора C_0 -полугруппы всюду плотна, а сам генератор при этом является замкнутым оператором [54].

Доказательство основного результата данной главы существенно использует теорему Чернова [6], для ее формулировки будем использовать понятие эквивалентности по Чернову [8].

Определение 1.1.5. Будем говорить, что сильно непрерывная операторнозначная функция $F(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(X)$ эквивалентна по Чернову сильно непрерывной полугруппе $U(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(X)$, если $F^n \left(\frac{t}{n} \right) \xrightarrow{\tau_s} U(t)$.

В приведенных выше обозначениях теорема Чернова формулируется следующим образом:

Теорема (Чернов, 1968). Пусть операторнозначная функция $F(t) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$ удовлетворяет условиям:

1. $F(0)$ является тождественным оператором,
2. $\|F(t)\|_{B(X)} \leq e^{\alpha t}, t \geq 0$ при некотором $\alpha > 0$,
3. оператор F'_0 замыкаем и его замыкание является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$.

Тогда функция $F(t)$ эквивалентна по Чернову полугруппе $U(t)$.

Пусть \mathcal{H} – сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) . Введем понятия случайного оператора в \mathcal{H} и его математического ожидания. Пусть тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – вероятностное пространство.

Определение 1.1.6. Отображение $\hat{A} : \Omega \rightarrow B(\mathcal{H})$ будем называть случайным оператором в \mathcal{H} , если функции $(\hat{A}u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ являются (Ω, \mathcal{A}) -измеримыми (т.е. являются случайными величинами) при всех $u, v \in \mathcal{H}$.

Так как \mathcal{H} – сепарабельное, то из слабой измеримости функции $(\hat{A}u, v) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ в определении 1.1.6 следует также измеримость функций $\hat{A}u : \Omega \rightarrow \mathcal{H}$ для любого $u \in \mathcal{H}$ (сильная измеримость) и функции $\|A\| : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (см. [55]).

Определение 1.1.7. Математическим ожиданием (или усреднением) случайного оператора \hat{A} будем называть оператор $\mathbb{E}\hat{A} \in B(\mathcal{H})$ такой, что

$$(\mathbb{E}\hat{A}u, v) = \mathbb{E}(\hat{A}u, v), \quad \forall u, v \in \mathcal{H}. \quad (1.6)$$

Достаточные условия существования усреднения случайного оператора можно найти, например, в работе [56].

Определение 1.1.8. Отображение $\hat{F} : \Omega \rightarrow C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ со значениями $F_\omega(t) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H})), \omega \in \Omega$, называется случайной операторнозначной функцией, если $F_{(\cdot)}(t)$ является случайным оператором при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Для последовательности независимых одинаково распределенных случайных операторнозначных функций $\{\hat{F}_k(t)\}$, $k \in \mathbb{N}$ и произвольного неотрицательного t определены последовательности итераций Фейнмана-Чернова:

$$\hat{F}_n \left(\frac{t}{n} \right) \circ \dots \circ \hat{F}_1 \left(\frac{t}{n} \right), n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Рассмотрим следующий иллюстративный пример. Решение задачи Коши для одномерного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u|_{t=0} = f, \quad (1.8)$$

где $a \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(\mathbb{R})$, задается действием сильно непрерывной полугруппы сдвигов $T[a] : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(L_2(\mathbb{R}))$:

$$T[a](t)f(x) = f(x + at), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (1.9)$$

Генератором полугруппы $T[a]$ является оператор A :

$$\begin{aligned} Af &= f', \\ D(A) &= \{f \in L_2(\mathbb{R}) : f \text{ — абсолютно непрерывная и } f' \in L_2(\mathbb{R})\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Также рассмотрим задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = f. \quad (1.11)$$

C_0 -полугруппа $H : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(L_2(\mathbb{R}))$:

$$H(t)f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-x)^2}{t}} f(y) dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.12)$$

задает решение задачи Коши (1.11) для произвольного начального условия $f \in L_2(\mathbb{R})$. Генератором полугруппы $H(t)$ является замыкание оператора Лапласа:

$$\begin{aligned} Af &= \frac{1}{2}f'', \\ D(A) &= S(\mathbb{R}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $S(\mathbb{R})$ – пространство Шварца.

Пусть теперь $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – вещественная случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда $\hat{T}[a] : \Omega \rightarrow C_s(\mathbb{R}_+, B(L_2(\mathbb{R})))$ – случайная C_0 -полугруппа, и согласно теореме 1.3.1 (см. раздел 1.3) выполнено

$$\mathbb{E} \left(\hat{T}_n[a] \left(\sqrt{\frac{t}{n}} \right) \circ \dots \circ \hat{T}_1[a] \left(\sqrt{\frac{t}{n}} \right) \right) \xrightarrow{\tau_s} \hat{H}(t) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (1.14)$$

где $\{\hat{T}_i[a]\}_{i=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных C_0 -полугрупп сдвигов.

Формула 1.14 может рассматриваться с одной стороны как обобщение центральной предельной теоремы (при фиксированном t), а с другой как обобщение на случай операторнозначных функций следствия второго замечательного предела:

$$\left(1 + \frac{t}{n} \right)^n \rightarrow e^t \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы Чернова последовательность усреднений Фейнмана-Чернова сходится в топологии пространства $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ к предельной полугруппе. При этом усреднения итераций Фейнмана-Чернова конечной кратности могут рассматриваться как аппроксимации предельной полугруппы, которые при надлежащем выборе случайной функции могут быть эффективно вычислены. В следующих двух разделах описанный здесь подход применяется к классу случайных операторнозначных функций, порождаемых случайными аффинными преобразованиями аргумента.

1.2 Случайные аффинные преобразования аргумента функций

В данном разделе рассматриваются усреднения итераций Фейнмана-Чернова для класса случайных операторнозначных процессов со значениями в алгебре ограниченных линейных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве. Линейные операторы, являющиеся значениями рассматриваемых случайных процессов, действуют в гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций на конечномерном евклидовом пространстве и задаются случайными аффинными преобразованиями аргумента. При этом композиции независимых одинаково распределенных случайных аффинных преобразований представляют собой некоммутативный аналог случайных блужданий.

Рассмотрим случайную операторнозначную функцию $F(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ со значениями в группе аффинных преобразований конечномерного евклидова пространства следующего вида

$$F(t)\vec{x} = e^{A\sqrt{t+Bt+R(t^{\frac{3}{2}})}}\vec{x} + \vec{h}\sqrt{t} + \vec{g}t + \vec{r}(t^{\frac{3}{2}}), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (1.16)$$

где при $i, j \in 1 \dots d$ компоненты $\{A^i_j\}, \{B^i_j\}, \{h^i\}, \{g^i\}$ являются вещественными случайными величинами, а $\{R^i_j(s)\}$ и $\{r^i(s)\}$ – случайные непрерывно дифференцируемые функции, обращающиеся в ноль в точке $s = 0$. При этом все случайные величины предполагаются совместно распределенными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и имеющими конечные вторые моменты.

При произвольном фиксированном $\omega \in \Omega$ справедливо следующее представление для функции $F(t)$.

Лемма 1.2.1. В некоторой окрестности нуля функция $F(t)$ вида (1.16) представима в виде композиции $F_2(t) \circ F_1(t)$, где

$$\begin{aligned} F_1(t)\vec{x} &= e^{Bt+R_0(t^{\frac{3}{2}})}\vec{x} + \vec{g}t + \vec{r}_0(t^{\frac{3}{2}}), \\ F_2(t)\vec{x} &= e^{A\sqrt{t}}\vec{x} + \vec{h}\sqrt{t}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $\{(R_0)^i_j(s)\}$ и $\{(r_0)^i(s)\}$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции, обращающиеся в ноль в точке $s = 0$.

Доказательство. По формуле Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа (см., например, [57]) при достаточно малых t выполнено равенство

$$e^{-A\sqrt{t}}e^{A\sqrt{t}+Bt+R(t^{\frac{3}{2}})} = e^{Bt+R_0(t^{\frac{3}{2}})}, \quad (1.18)$$

причем $\{(R_0)^i_j(s)\}$ также являются непрерывно дифференцируемыми и равны нулю в точке $s = 0$. Тогда при $\vec{r}_0(t^{\frac{3}{2}}) = \vec{r}(t^{\frac{3}{2}}) - e^{A\sqrt{t}}\vec{g}t$ получаем

$$F(t)\vec{x} = e^{A\sqrt{t}}\left(e^{+Bt+R(t^{\frac{3}{2}})}\vec{x} + \vec{g}t\right) + \vec{h}\sqrt{t} + \vec{r}(t^{\frac{3}{2}}) - e^{A\sqrt{t}}\vec{g}t = F_2(t) \circ F_1(t)\vec{x}. \quad (1.19)$$

□

Случайная операторнозначная функция $F(t)$ (1.16) порождает случайную операторнозначную функцию $\hat{U}_F(t)$, $t \geq 0$, со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^n)$ таким образом, что при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ выполняется равенство

$$\hat{U}_F(t, \omega)u(x) = u(F(t, \omega)x), \quad \forall u \in \mathcal{H}. \quad (1.20)$$

Согласно теореме 1 в работе [46] при условии

$$\int_{\Omega} \left| \det \left\{ (e^{A\sqrt{t}+Bt+R(t)}) \right\} \right|^{\frac{1}{2}} d\mu(\omega) < +\infty \quad (1.21)$$

существует математическое ожидание

$$\mathbb{E}\hat{U}_F(t)u = \int_{\Omega} u \circ F(t)d\mu(\omega) \in \mathcal{H}, \quad \forall u \in \mathcal{H}. \quad (1.22)$$

Пусть выполняются следующие условия:

- A1. операторы A, B и $R'(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ принимают значения в шаре радиуса $\rho_0 < +\infty$ пространства $B(\mathbb{R}^d)$ с вероятностью 1;
- A2. распределение случайного вектора $(\{A^i_j\})$ дискретно и симметрично;
- A3. $\mathbb{E}h^i = 0$;
- A4. оператор A диагонализируем с вероятностью 1;
- A5. $\text{tr } A = 0$ с вероятностью 1.
- A6. ковариационная матрица случайного вектора $(\{A^i_j\}, \{B^i_j\}, \{h^i\}, \{g^i\})$ является положительно определенной;

В условии A6 имеется в виду следующее. Рассмотрим компоненты матриц A, B и компоненты векторов \vec{h}, \vec{g} как один случайный вектор размерности $2n^2 + 2n$. Ковариационная матрица такого вектора по определению является положительно полуопределенной. В A6 же накладывается условие, что она строго положительно определена. Отсюда следует, что все вторые моменты $(\{A^i_j\}, \{B^i_j\}, \{h^i\}, \{g^i\})$ строго больше нуля, а все их попарные корреляции строго меньше 1, иначе ковариационная матрица была бы вырожденной.

Лемма 1.2.2. Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (1.16), для которой выполнены условия A1-A2. Тогда для некоторого положительного α справедлива оценка

$$\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leq e^{\alpha t}. \quad (1.23)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(\mathcal{H})}^2 &= \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\Omega} u(F(t)x) d\mu(\omega) \right|^2 dx \\
&\stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\Omega} |u(F(t)x)|^2 d\mu(\omega) dx \stackrel{\textcircled{2}}{=} \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} |u(F(t)x)|^2 dx d\mu(\omega) \\
&\stackrel{\textcircled{3}}{=} \sup_{\|u\|_{\mathcal{H}}=1} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2 |\det(F^{-1}(t))| dx d\mu(\omega) = |\mathbb{E}(\det\{F^{-1}\}(t))| \\
&= \mathbb{E}e^{-\text{tr}\{(A\sqrt{t}+Bt+R(t))\}}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

В приведенных выше выкладках в соответствующих переходах используются:

- ① неравенство Коши — Буняковского - Шварца,
- ② теорема Фубини,
- ③ теорема о замене переменной в интеграле Лебега.

По формуле Тейлора получаем:

$$\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leq \left(\mathbb{E}e^{-\text{tr}\{(A\sqrt{t}+Bt+R(t))\}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbb{E} \left(1 - A^i_i \sqrt{t} - B^i_i t - o(t) \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.25}$$

причем $\mathbb{E}A^i_i = 0$, так как случайные величины A^i_i ограничены (A1) и распределены симметрично (A2), а математическое ожидание от остаточного члена является $o(t)$ в силу условия A1. Тогда для некоторого $\alpha > 0$ имеем при $t \in [0, T]$:

$$\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(L_2(\mathbb{R}))} \leq \left(1 + t (-\mathbb{E}B^i_i + o(t)) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \alpha t \leq e^{\alpha t}. \tag{1.26}$$

□

Лемма 1.2.3. Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (1.16), для которой выполнены условия А1-А3. Тогда для любого $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0 u &= \mathbb{E}(B^i_j x^j + \frac{1}{2}A^i_k A^k_j x^j + g^i) \partial_i u \\ &+ \frac{1}{2} \mathbb{E}(A^i_k A^j_l x^k x^l + 2A^i_k h^j x^k + h^i h^j) \partial_i \partial_j u. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Доказательство. Найдем значение $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0 u = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbb{E}\hat{U}_F(t)u - u}{t} \right)$ при $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, согласно формуле Тейлора:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\hat{U}_F(t)u(x) &= \mathbb{E}u(F(t)x) \\ &= \mathbb{E} \left(u(x) + \partial_i u(x) (F(t)x - x)^i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j u(x) (F(t)x - x)^i (F(t)x - x)^j + r(t) \right) \\ &= u(x) + \partial_i u(x) \mathbb{E} (F(t)x - x)^i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j u(x) \mathbb{E}((F(t)x - x)^i (F(t)x - x)^j) + \mathbb{E}(r(t)), \end{aligned} \quad (1.28)$$

где

$$r(t) = \partial_i \partial_j \partial_k u(\zeta) (F(t)x - x)^i (F(t)x - x)^j (F(t)x - x)^k, \quad (1.29)$$

и ζ лежит между 0 и $(F(t)x - x)$ и зависит от ω .

В свою очередь для $\mathbb{E}(F(t)x - x)$ по формуле Тейлора получаем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F(t)x - x)^i &= \mathbb{E} \left((A^i_j \sqrt{t} + B^i_j t) + \frac{1}{2} (A^i_k \sqrt{t} + B^i_k t) (A^k_j \sqrt{t} + B^k_j t) + o(t) \right) x^j \\ &+ \mathbb{E} h^i \sqrt{t} + \mathbb{E} g^i t = \mathbb{E} \left(B^i_j x^j + \frac{1}{2} A^i_k A^k_j x^j + g^i \right) t + o(t). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Далее аналогично для мономов степеней 2 и 3 имеем:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}((F(t)x - x)^i (F(t)x - x)^j) \\ &= \mathbb{E}(((A^i_j \sqrt{t} + B^i_j t) + \frac{1}{2} (A^i_k \sqrt{t} + B^i_k t) (A^k_j \sqrt{t} + B^k_j t) + o(t)) x^j + h^i \sqrt{t} + g^i t)^2 = \\ &= \mathbb{E} (A^i_k A^j_l x^k x^l + 2A^i_k h^j x^k + h^i h^j) t + o(t), \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\mathbb{E}((F(t)x - x)^i (F(t)x - x)^j (F(t)x - x)^k) = o(t). \quad (1.32)$$

В формулах (1.30-1.32) учтены условия А1-А3 из формулировки теоремы, при этом все остаточные члены класса $o(t)$ определены и равномерно липшецевы по ω на отрезке $[0, (F(t)x - x)]$. Из разложений (1.29-1.32) следует утверждение леммы. \square

По лемме 3.1 в некоторой окрестности нуля функция $F(t)$ представима как композиция $F_2(t) \circ F_1(t)$ вида (1.17). Случайные функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$ также в свою очередь порождают операторнозначные функции $\mathbb{E}\hat{U}_{F_1}(t)$ и $\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t)$. При этом производные $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_1})'_0$ и $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2})'_0$ – это операторы, областью определения которых являются подпространства, на которых дифференцируемы в нуле $\mathbb{E}\hat{U}_{F_1}(t)$ и $\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t)$ соответственно.

Операторы \hat{H}_j , $j = 1, 2$, определим следующим образом. При $u \in C_0^\infty$

$$\hat{H}_1 u = (\mathbb{E}\hat{U}_{F_1})'_0 u = \mathbb{E} (B^i_j x^j + g^i) \partial_i u \quad (1.33)$$

$$\hat{H}_2 u = (\mathbb{E}\hat{U}_{F_2})'_0 u = \frac{1}{2} \mathbb{E} (A^i_k x^k + h^i) \partial_i (A^j_l x^l + h^j) \partial_j u. \quad (1.34)$$

При этом заданный на пространстве C_0^∞ оператор $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2})'_0$ определяет замыкаемую неположительную квадратичную форму κ_2 . За область определения оператора \hat{H}_2 берется область определения Фридрихсова расширения оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2})'_0 : C_0^\infty \rightarrow \mathcal{H}$, т.е. оператора, ассоциированного с замыканием квадратичной формы κ_2 .

В силу предположений А1-А3 оператор (1.33) определен на $D(\hat{H}_2)$ поскольку существуют постоянные $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$(\hat{H}_1 u, \hat{H}_1 u) \leq c_1 \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + c_2 |(u, \hat{H}_2 u)| \quad \forall u \in D(\hat{H}_2). \quad (1.35)$$

Поэтому можно принять $D(\hat{H}_1) = D(\hat{H}_2)$.

Заметим также, что $F_2(t)$ в силу предположения А4 представима в виде композиции случайного ортогонального преобразования S_1 , случайного самосопряженного преобразования S_2 и сдвига S_3 на случайный вектор $\vec{h}\sqrt{t}$. Таким

образом, получаем

$$\hat{U}_{F_2}(t)u = \hat{U}_{S_3}(\sqrt{t}) \circ \hat{U}_{S_2}(\sqrt{t}) \circ \hat{U}_{S_1}(\sqrt{t})u, \quad u \in \mathcal{H}, \quad t \geq 0 \quad (1.36)$$

При этом оператор S_3 неперестановочен с S_1 и S_2 , поэтому для получения в результате композиции преобразования F_2 необходимо, чтобы оператор S_3 действовал последним.

В работе [46] установлено, что для каждого $i = 1, 2, 3$, и каждого $\omega \in \Omega$ однопараметрические семейства операторов $\hat{U}_{S_i(\omega)}(t)$, $t \geq 0$, образует сильно непрерывную унитарную группу операторов в пространстве \mathcal{H} , при выполнении условия А5 обладающую антиэрмитовым генератором $\hat{L}_{S_i(\omega)}$. Поэтому в силу теоремы 1 работы [58] для каждого $i = 1, 2, 3$, и каждого $u \in D((\hat{L}_i(\omega))^2)$ верны равенства

$$\hat{U}_{S_i(\omega)}(t)u = u + t\hat{L}_{S_i(\omega)}u + \frac{t^2}{2}\hat{L}_{S_i(\omega)}^2u + \hat{R}_{S_i}(t, \omega)u, \quad \omega \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (1.37)$$

причем при каждом $\omega \in \Omega$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \|\hat{R}_{S_i}(t, \omega)u\|_{\mathcal{H}} = 0. \quad (1.38)$$

Поэтому в силу предположений А1-А5 получаем

$$\mathbb{E}\hat{U}_{S_i(\omega)}(t)u = u + t^2\hat{H}_{S_i}u + \hat{R}_i(t)u, \quad t \geq 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \|\hat{R}_i(t)u\|_H = 0. \quad (1.39)$$

Здесь $\hat{H}_{S_i}u = \frac{1}{2}\mathbb{E}\hat{L}_{S_i}^2u \quad \forall u \in C_0^\infty$.

Операторы $\hat{H}_{S_j} : C_0^\infty \rightarrow \mathcal{H}, j = 1, 2, 3$, плотно определены и положительны. Как показано в [55; 58], фридрихсовы расширения операторов $\hat{H}_{S_j} : C_0^\infty \rightarrow \mathcal{H}, j = 1, 2, 3$, являются генераторами \hat{H}_{S_j} сильно непрерывных сжимающих полугрупп $e^{t\hat{H}_{S_j}}$ в пространстве \mathcal{H} .

В приведенных выше обозначениях верна следующая лемма.

Лемма 1.2.4. Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (1.16), для которой выполнены условия А1-А6. Тогда оператор \hat{H}_2 , заданный как фридрихсово расширение оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0 : \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i}) \rightarrow \mathcal{H}$, имеет область определения $D(\hat{H}_2) = \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})$ и является неположительным самосопряженным.

Доказательство. В силу (1.37) на области определения $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0$ будет справедливо равенство

$$(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0 u = \mathbb{E} \left(\frac{1}{2} \hat{L}_{S_1}^2 + \frac{1}{2} \hat{L}_{S_2}^2 + \frac{1}{2} \hat{L}_{S_3}^2 + \hat{L}_{S_2} \circ \hat{L}_{S_1} + \hat{L}_{S_3} \circ \hat{L}_{S_2} + \hat{L}_{S_3} \circ \hat{L}_{S_1} \right) u. \quad (1.40)$$

Из антиэрмитовости операторов L_{S_i} следует, что $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0$ является неположительным оператором:

$$\begin{aligned} (u, (\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}(t))'_0 u) &= \frac{1}{2} \mathbb{E}((u, \hat{L}_{S_1}^2 u) + (u, \hat{L}_{S_2}^2 u) + (u, \hat{L}_{S_3}^2 u) \\ &\quad + 2(u, \hat{L}_{S_2} \circ \hat{L}_{S_1} u) + 2(u, \hat{L}_{S_3} \circ \hat{L}_{S_2} u) + 2(u, \hat{L}_{S_3} \circ \hat{L}_{S_1} u)) \quad (1.41) \\ &= - \mathbb{E} \|(\hat{L}_{S_1} + \hat{L}_{S_2} + \hat{L}_{S_3})u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждениям в работе [46] рассмотрим квадратичную форму

$$\beta(u, u) = -(u, \hat{H}_2|_{C_0^\infty} v) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} (A^i_k A^j_l x^k x^l + 2A^i_k h^j x^k + h^i h^j) \partial_i u \partial_j u dx, \quad (1.42)$$

для нее справедливо следующее представление

$$\begin{aligned} \beta(u, u) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} |A^i_k x^k \partial_i u + h^i \partial_i u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E} |(\nabla u, A\vec{x} + \vec{h})|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \mathbb{E} (\vec{e}, A\vec{x} + \vec{h})^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \text{Var}(|\vec{x}|(\vec{e}, A\vec{e}^{\vec{j}}) + (\vec{e}, \vec{h})) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 (|\vec{x}|^2 \text{Var}(\vec{e}, A\vec{e}^{\vec{j}}) + 2\rho|\vec{x}| \sqrt{\text{Var}(\vec{e}, A\vec{e}^{\vec{j}}) \text{Var}(\vec{e}, \vec{h})} + \text{Var}(\vec{e}, \vec{h})) dx, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где $\vec{e} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$, $\vec{e}^{\vec{j}} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$, ρ – линейный коэффициент корреляции случайных величин $(\vec{e}, A\vec{e}^{\vec{j}})$ и (\vec{e}, \vec{h}) . Заметим, что если случайные величины $(\vec{e}, A\vec{e}^{\vec{j}})$ и (\vec{e}, \vec{h}) ,

являющиеся линейными комбинациями случайных величин $\{A_j^i\}$ и $\{h^i\}$ соответственно, были бы линейно зависимыми, то тогда ковариационная матрица случайного вектора $(\{A_j^i\}, \{h^k\})$ была бы вырожденной, что противоречит условию А6. Отсюда следует, что $\exists \gamma > 0 : |\rho| < 1 - \gamma$.

Тогда из (1.43) следуют неравенства

$$-\left(u, C_1(\hat{H}_{S_1} + \hat{H}_{S_2} + \hat{H}_{S_3})u\right) \leq \beta(u, u) \leq -\left(u, C_2(\hat{H}_{S_1} + \hat{H}_{S_2} + \hat{H}_{S_3})u\right), \quad (1.44)$$

при некоторых $C_1, C_2 > 0$. Откуда следует, что область определения замыкания $\beta(u, u)$ совпадает с областью определения замыкания формы $-(u, (\hat{H}_{S_1} + \hat{H}_{S_2} + \hat{H}_{S_3})u)$. Отсюда также следует, что $\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i}) \subset D(\hat{H}_2)$.

На $\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})$ квадратичная форма оператора $-\hat{H}_2$ мажорирует квадратичные формы операторов $-\hat{H}_{S_i}$. Значит область определения замыкания квадратичной формы оператора $-\hat{H}_2|_{\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})}$ содержится в областях определения замыканий квадратичных форм операторов $-\hat{H}_{S_i}|_{\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})}$. Напомним, что при каждом $i = 1, 2, 3$ оператор $-\hat{H}_{S_i}$ является фридрихсовым расширением оператора $-\hat{H}_{S_i}|_{C_0^\infty}$ [58]. Следовательно, область определения фридрихсова расширения оператора $\hat{H}_2|_{\bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})}$ содержится в каждой из областей $D(\hat{H}_{S_i})$, и значит

$$D(\hat{H}_2) \subset \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i}).$$

Следовательно, оператор \hat{H}_2 , заданный как фридрихсово расширение оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_{F_2}u(t))'|_{t=0} : \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i}) \rightarrow \mathcal{H}$ имеет область определения $D(\hat{H}_2) = \bigcap_{i=1}^3 D(\hat{H}_{S_i})$ и самосопряжен. \square

Лемма 1.2.5. Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (1.16), для которой выполнены условия А1-А6. Тогда для любого $u \in D(\hat{H}_2)$ существует производная $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0 u = \hat{H}_2 u + \hat{H}_1 u$.

Доказательство. Для любого $u \in D(\hat{H}_2)$ справедливо

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0 u &= (\mathbb{E}(\hat{U}_{F_2} \circ \hat{U}_{F_1}))'_0 u = (\mathbb{E}(\hat{U}_{F_2} \circ \hat{U}_{F_1} - \hat{U}_{F_1} + \hat{U}_{F_1}))'_0 u \\ &= \left(\mathbb{E}((\hat{U}_{F_2} - \hat{I}) \circ \hat{U}_{F_1}) \right)'_0 u + \left(\mathbb{E}\hat{U}_{F_1} \right)'_0 u = \left(\mathbb{E} \left(\hat{H}_2 + \hat{R}(t) \right) \right)'_0 u + \hat{H}_1 u \\ &= \hat{H}_2 u + \hat{H}_1 u, \end{aligned} \tag{1.45}$$

где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \|\hat{R}(t)u\|_H = 0$. \square

Лемма 1.2.6. Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (1.16), для которой выполнены условия А1-А6. Тогда замыкание оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$, является генератором сильно непрерывной полугруппы в пространстве \mathcal{H} .

Доказательство. Замыкание оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$ в введенных выше обозначениях можно представить как $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \hat{H}$.

После выделения полного квадрата в формуле (1.43) получаем оценку для $\beta(u, u)$:

$$\beta(u, u) \geq \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 (1 - \rho^2) \text{Var}(\vec{e}, \vec{h}) dx \geq \alpha \|\nabla u\|^2, \tag{1.46}$$

где α – некоторая положительная константа, не зависящая от u .

Поскольку полуторалинейная форма β является положительной, то оператор \hat{H}_2 является генератором сжимающей полугруппы в \mathcal{H} .

Квадратичная форма оператора $\hat{I} + (-\hat{H}_2)$ мажорирует квадратичную форму оператора \hat{H}_1 , так как справедлива цепочка неравенств:

$$|(\hat{H}_1 v, v)| \leq \left\| \mathbb{E} (B^i_j) \right\|_{B(\mathbb{R}^d)} \|\vec{x}\| \|\nabla v\|_{L_2(\mathbb{R})} \|v\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\varepsilon} C((v, v) - \varepsilon(\hat{H}_2 v, v)) \tag{1.47}$$

при произвольном $\varepsilon \in (0, 1]$. Поскольку $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$ и квадратичная форма оператора $\hat{I} - \hat{H}_2$ мажорирует квадратичную форму оператора \hat{H}_1 в силу неравенства (1.47), то применима теорема о возмущении генератора полугруппы

(см., например, [59]). Следовательно, оператор \hat{H} является генератором сильно непрерывной полугруппы в пространстве \mathcal{H} . \square

1.3 Фейнмановские аппроксимации диффузионных полугрупп

Определение 1.3.1. Усредняющей по Чернову полугруппой для случайной операторнозначной функции \hat{U}_F , порождаемой функцией F вида (1.16), будем называть полугруппу \hat{W}_F , генератором которой является замыкание оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$.

Полугруппа \hat{W}_F порождается решениями задачи Коши для уравнения Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \hat{H}u, \quad u|_{t=0} = u_0 \quad (1.48)$$

для произвольного $u_0 \in \mathcal{H}$, и где оператор \hat{H} на области определения $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$ задается дифференциальным выражением

$$\hat{H} = \mathbb{E}(B^i_j x^j + \frac{1}{2}A^i_k A^k_j x^j + g^i)\partial_i + \frac{1}{2}\mathbb{E}(A^i_k A^j_l x^k x^l + 2A^i_k h^j x^k + h^i h^j)\partial_i \partial_j. \quad (1.49)$$

Теорема 1.3.1. Пусть задана случайная операторнозначная функция F вида (1.16), для которой выполнены условия А1-А6. Тогда последовательность усреднений итераций Фейнмана-Чернова сходится в топологии $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ к соответствующей усредняющей по Чернову полугруппе:

$$\mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} \xrightarrow{\tau_s} \hat{W}_F(t). \quad (1.50)$$

Доказательство. Согласно леммам 2 и 3 в работе [46] в силу независимости элементов последовательности $\{F_k(t)\}$ для всех $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$ справедливо ра-

венство :

$$\mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n})} \circ \dots \circ \mathbb{E}\hat{U}_{F_1(\frac{t}{n})} = \mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n})} \circ \dots \circ \mathbb{E}\hat{U}_{F_1(\frac{t}{n})}. \quad (1.51)$$

Сильная непрерывность функции $\mathbb{E}\hat{U}_F(t)$ следует из того, что она является интегралом по вероятностной мере от функции, значениями которой являются сильно непрерывные оператор-функции.

Тогда дальнейшее доказательство теоремы по существу состоит в проверке выполнения условий 1-3 теоремы Чернова для функции $\mathbb{E}\hat{U}_F(t)$.

1. $\mathbb{E}\hat{U}_F(0)$ по построению является тождественным оператором.
2. По лемме 1.2.2 $\|\mathbb{E}\hat{U}_F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \leq e^{\alpha t}$ для некоторого положительного α .
3. По лемме 1.2.6 замыкание оператора $(\mathbb{E}\hat{U}_F)'_0$, является генератором сильно непрерывной полугруппы \hat{W}_F в пространстве \mathcal{H} .

□

Теорема 1.3.1 дает достаточные условия для сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных операторнозначных функций вида (1.16) к соответствующей усредняющей по Чернову полугруппе. В то же время результат этой теоремы может использоваться для построения вычислительно эффективных аппроксимаций решений многомерного уравнения Колмогорова (см. следующую главу).

1.4 Усреднение по Чернову линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

В данном разделе изучаются композиции независимых случайных операторнозначных функций со значениями в пространстве ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R})$, при этом рассматриваемые операторнозначные функции порождаются решениями случайных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на вещественной прямой. рассмат-

риваемая постановка является частным случаем по отношению к задаче предыдущего раздела, где рассматривались случайные аффинные преобразования в евклидовом пространстве произвольной конечной размерности.

Также доказывается возможность построения сильно состоятельной статистической оценки для усредняющей полугруппы на основе конечной выборки для случайной операторнозначной функции. Отклонения значений композиций независимых случайных полугрупп от их математического ожидания и их вероятностные свойства уже рассматривались в [60], и результаты этого раздела являются их развитием.

В приложениях часто возникают задачи моделирования нестационарных случайных процессов в различных постановках [61]. По отношению к рассматриваемой модели в случае нестационарных параметров в этом разделе доказывается, что для обыкновенного и геометрического случайных блужданий предел итераций Фейнмана-Чернова для конкретного момента времени может быть получен с помощью усреднения по маргинальной по времени мере, в отличие от общего случая не коммутирующих случайных аффинных преобразований.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – некоторое вероятностное пространство, а функции $f(t)$ и $g(t)$ являются случайными непрерывными абсолютно интегрируемыми функциями на интервале $(0, T)$, то есть отображениями вида $\Omega \rightarrow CL_1(0, T)$, измеримыми относительно \mathcal{A} при каждом $t \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим случайное линейное неоднородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\dot{x} = f(t)x + g(t), \quad t \in (0, T). \quad (1.52)$$

При фиксированном $\omega \in \Omega$ общим решением уравнения (3.33) является семейство функций

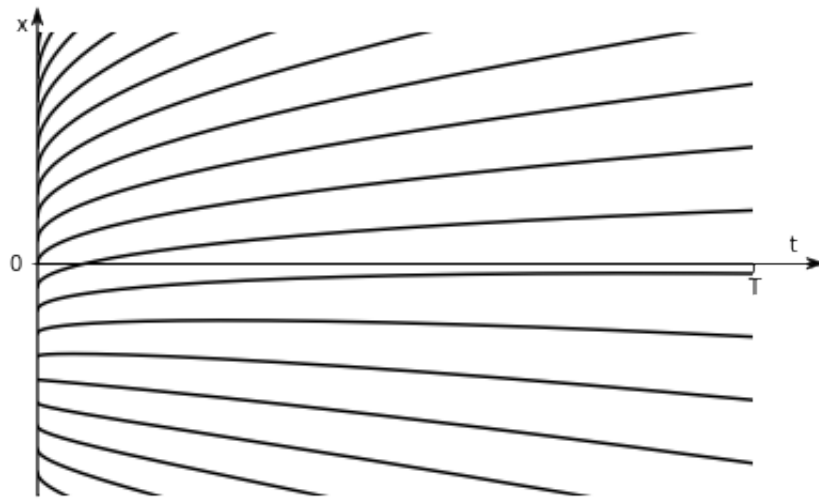
$$x(t) = F(t)x_0 = x_0 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(\xi)} g(\xi) d\xi, \quad t \in (0, T), \quad (1.53)$$

где $A(t) = \int_0^t f(\xi)d\xi$. Причем функции $x(t)$ по непрерывности могут быть продолжены на отрезок $[0, T]$.

Иными словами, уравнение (3.33) задает однопараметрическую сильно непрерывную операторнозначную функцию $F(t) : [0, T] \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R})$ со значениями в группе аффинных преобразований вещественной прямой.

На рисунке 1.1 приведен пример интегральных кривых для уравнения $\dot{x} = \frac{x+1-\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$, задаваемых как $(t, F(t)x_0)$ при различных значениях x_0 .

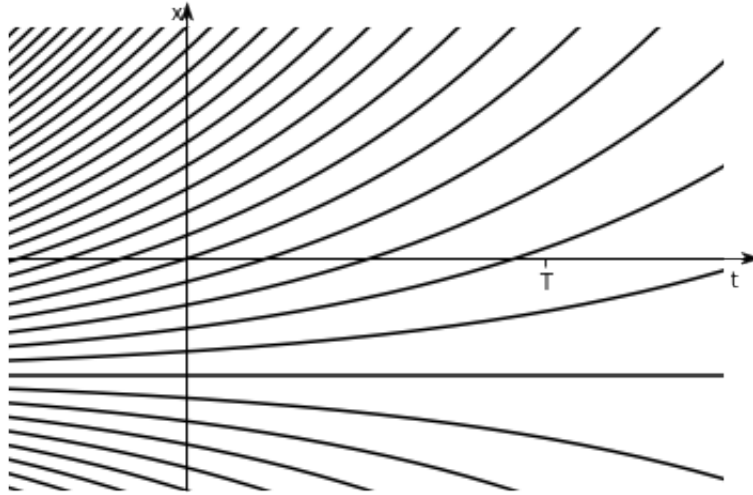
Рисунок 1.1 — Интегральные кривые $F(t)x_0$.



Заметим, что если коэффициенты $f(t)$ и $g(t)$ определены и непрерывны на всей вещественной прямой, то соответствующее неавтономное линейное уравнение будет определять (неавтономный) фазовый поток (рис. 1.2).

Таким образом, на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ определена случайная операторнозначная функция $F(t) : \Omega \rightarrow ([0, T] \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}))$.

Случайная функция $F(t)$ в свою очередь порождает соответствующую случайную операторнозначную функцию $\hat{U}_F(t)$ со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R})$, равенством $\hat{U}_F(t)u(x) = u(F(t)x)$.

Рисунок 1.2 — Преобразование потока для уравнения $\dot{x} = x + 1$.

Согласно теореме 1 в работе [46] при условии

$$\int_{\Omega} \left| e^{-A(t)} \right|^{\frac{1}{2}} d\mu(\omega) < +\infty, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.54)$$

существует математическое ожидание $\hat{U}_F(t)$:

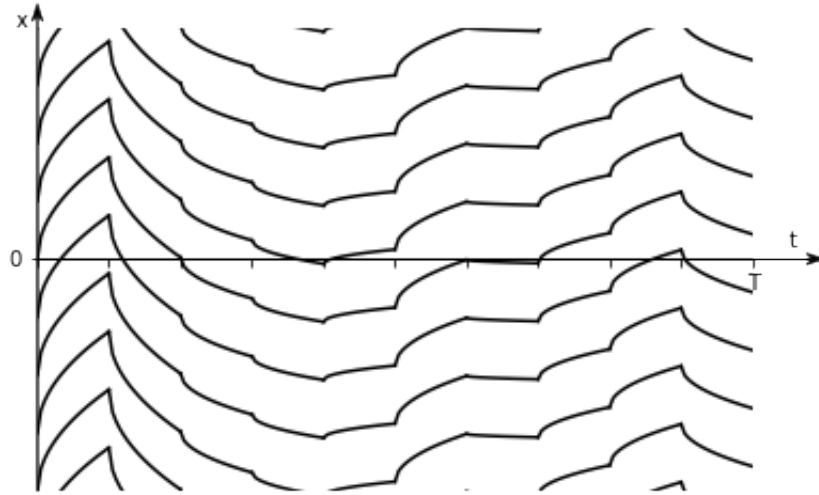
$$\mathbb{E} \hat{U}_F(t) u = \int_{\Omega} u \circ F(t) d\mu(\omega) \in \mathcal{H}, \quad \forall u \in L_2(\mathbb{R}), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.55)$$

Для последовательности $\{F_k(t)\}$, $k \in \mathbb{N}$ независимых одинаково распределенных случайных функций вида (1.53) определены последовательности итераций Фейнмана-Чернова (рис. 1.3):

$$F_n \left(\frac{t}{n} \right) \circ \dots \circ F_1 \left(\frac{t}{n} \right), \quad t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.56)$$

Рассмотрим случай, когда случайная функция $F(t)$ является простой (то есть конечной суммой индикаторных случайных величин) и при каждом фикс-

Рисунок 1.3 — Случайная реализация итераций Фейнмана-Чернова для $n = 10$.



сированном ω представима в виде:

$$F(t)x = xe^{at+b\sqrt{t}+o(t)} + ct + d\sqrt{t} + o(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.57)$$

то есть порождается дифференциальным уравнением

$$2\sqrt{t}\dot{x} = \left(2a\sqrt{t} + b + o(\sqrt{t})\right)x + 2c\sqrt{t} + d + o(\sqrt{t}), \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.58)$$

Неавтономное векторное поле, соответствующее уравнению (1.52) продолжается по непрерывности на $[0, T] \times \mathbb{R}$ только при $b = d = 0$. При этом поле направлений, соответствующее этому же уравнению, всегда можно продолжить по непрерывности на $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Частными случаями полей направлений, соответствующих дифференциальным уравнениям вида (1.58), являются:

- 1) постоянные поля направлений;
- 2) поля направлений, соответствующие однородному и неоднородному линейным уравнениям первого порядка с постоянным коэффициентом;

- 3) поля направлений, соответствующие уравнениям с разделяемыми переменными $2\sqrt{t}\dot{x} = d$ и $2\sqrt{t}\dot{x} = bx$;

Лемма 1.4.1. Пусть задана простая случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(L_2(\mathbb{R})))$ вида (1.57), причем $\mathbb{E}d = 0$, $\mathbb{E}d^2 > 0$, $\mathbb{E}(bd)^2 < (\mathbb{E}b^2)(\mathbb{E}d^2)$ и распределение b является симметричным.

Тогда для любого $T > 0$ и любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|(\mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} - \hat{W}(t))u_0\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0, \quad (1.59)$$

где \hat{W} – полугруппа, порождаемая решениями задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E} \left(c + ax + \frac{1}{2}b^2x \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E} (b^2x^2 + 2bdx + d^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (1.60)$$

Лемма 1.4.1 является прямым следствием из теоремы 1.3.1, так как она является ее частным случаем для простой случайной величины и размерности 1.

Пусть $\hat{U}_1(t), \dots, \hat{U}_k(t)$ – сильно непрерывные операторнозначные функции $[0, T] \rightarrow B(X)$, являющиеся выборкой из распределения случайной операторнозначной функции $\hat{U} : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(X))$, определим выборочное среднее $\overline{\hat{U}}(t)$ как:

$$\overline{\hat{U}}(t)u = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{U}_i(t)u, \quad \forall u \in X. \quad (1.61)$$

Лемма 1.4.2. Пусть задана простая случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(\mathbb{R}))$, тогда при произвольном фиксированном n почти наверное выполнено равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\overline{\hat{U}}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} - \mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})}\| = 0. \quad (1.62)$$

Доказательство. Так как F является простой случайной величиной, то $\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})}$ представима в виде конечной суммы:

$$\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\Omega_i}(\omega) \hat{U}_i(t), \quad (1.63)$$

где совокупность Ω_i является конечным разбиением Ω , а \hat{U}_i – некоторые функции из $C_s([0, T], B(X))$.

Тогда

$$\overline{\hat{U}}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} - \mathbb{E} \hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} = \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i - p_i) \hat{U}_i(t), \quad (1.64)$$

где \tilde{p}_i являются сильно состоятельными оценками вероятностей p_i .

Цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|\overline{\hat{U}}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} - \mathbb{E} \hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})}\| &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left(\sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i - p_i) \|\hat{U}_i(t)\| \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i - p_i) \sup_{t \in [0, T], i=1 \dots N} \|\hat{U}_i(t)\| \leq \alpha \sum_{i=1}^N (\tilde{p}_i - p_i), \end{aligned} \quad (1.65)$$

доказывает теорему. □

Лемма (1.4.2) показывает, что $\overline{\hat{U}}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})}$ является сильно состоятельной статистической оценкой для операторнозначной функции $\mathbb{E} \hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})}$.

Теорема 1.4.1. Пусть задана простая случайная операторнозначная функция $F : \Omega \rightarrow C_s([0, T], B(L_2(\mathbb{R})))$ вида (1.57), причем $\mathbb{E}d = 0$, $\mathbb{E}d^2 > 0$ и $\mathbb{E}(bd)^2 < (\mathbb{E}b^2)(\mathbb{E}d^2)$ и распределение b является симметричным.

Тогда для любого $T > 0$ и любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|\overline{\hat{U}}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} - \hat{W}(t)\|_{L_2(\mathbb{R})} u_0 = 0 \quad (1.66)$$

почти наверное, и где \hat{W} – полугруппа, порождаемая решениями задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E} \left(c + ax + \frac{1}{2}b^2x \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E} (bx^2 + 2bdx + d^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (1.67)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \|(\overline{\hat{U}}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} - \hat{W}(t))u_0\|_{L_2(\mathbb{R})} &\leq \|(\overline{\hat{U}}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} - \mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})})u_0\|_{L_2(\mathbb{R})} + \\ &+ \|(\mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})} - \hat{W}(t))u_0\|_{L_2(\mathbb{R})}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

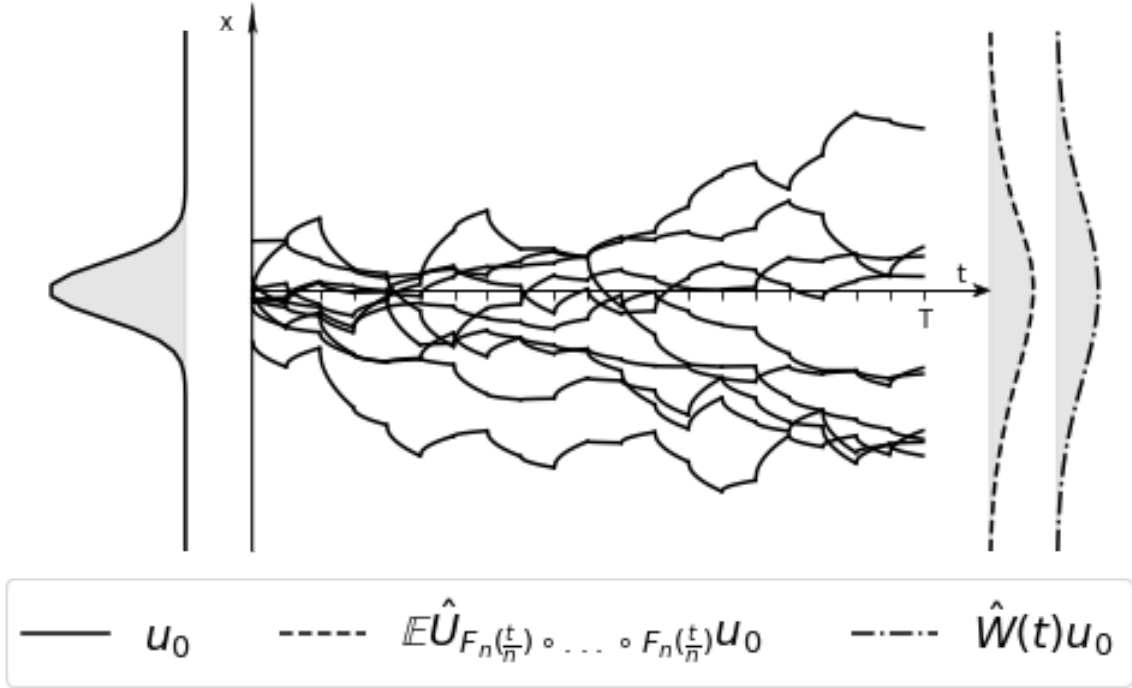
тогда требуемое утверждение непосредственно следует из лемм (1.4.1) и (1.4.2), примененных для первого и второго слагаемых в правой части соответственно. \square

Теорема (1.4.1) обосновывает возможность при аппроксимации полугруппы \hat{W} использовать не само математическое ожидание $\mathbb{E}\hat{U}_{F_n(\frac{t}{n}) \circ \dots \circ F_1(\frac{t}{n})}$, а его статистическую сильно состоятельную оценку (1.61).

В случае $a = b = 0$ случайное аффинное преобразование прямой вида (1.57) является случайным сдвигом с точностью до бесконечно малых добавок. При этом итерации Фейнмана-Чернова (1.56) при действии на элемент \mathbb{R} порождают обыкновенное случайное блуждание в \mathbb{R} . А предел по распределению таких итерации в случае $\mathbb{E}c = 0$ является стандартным броуновским движением, также называемым винеровским процессом (рис. 1.4).

В случае $c = d = 0$ случайное аффинное преобразование прямой становится линейным и является просто умножением на число. При этом итерации Фейнмана-Чернова (1.56) при действии на элемент \mathbb{R} порождают геометрическое случайное блуждание в \mathbb{R} . А предел по распределению таких итерации является геометрическим винеровским процессом со сносом (рис. 1.5).

Рисунок 1.4 — Аппроксимация винеровского процесса итерациями Фейнмана-Чернова.



В случае $b = c = 0$ предел по распределению итерации Фейнмана-Чернова (1.7) является процессом Орнштейна-Уленбека.

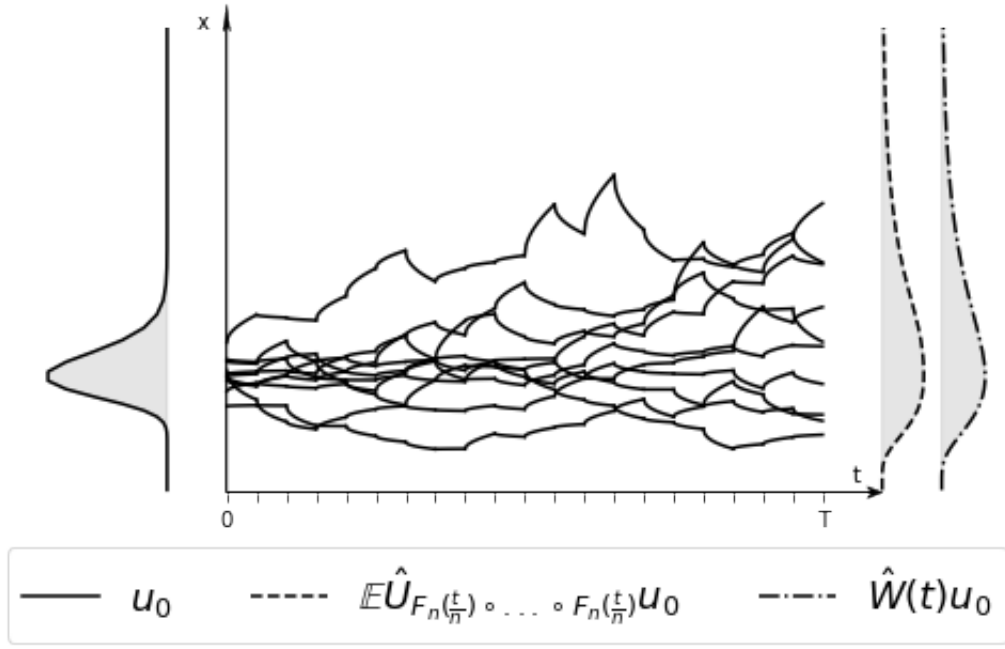
Рассмотрим случай, когда мера μ_t распределения функции $F(t)$ не является стационарной, а меняется со временем. Маргинальную по t меру обозначим за μ . В этом контексте возникает вопрос, как связаны пределы последовательностей итераций Фейнмана-Чернова с нестационарными параметрами, генерируемыми мерой μ_t , и со стационарными параметрами, генерируемыми мерой μ .

Теорема 1.4.2. Пусть задано семейство $\{F_\tau\}$, $\tau \in [0, T]$ простых случайных операторнозначных функций, таких что для каждого τ функция F_τ вида (1.57), параметры которой определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_\tau)$, удовлетворяет условиям $\mathbb{E}d = 0$ и $a = b = 0$.

Тогда для любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbb{E}\hat{U}_{F_{(n-1)T}(\frac{T}{n})} \circ \dots \circ F_0(\frac{T}{n}) - \hat{W}(T))u_0\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0, \quad (1.69)$$

Рисунок 1.5 — Аппроксимация геометрического броуновского движения.



где \hat{W} – полугруппа, порождаемая решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{E}_\mu c \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E}_\mu d^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (1.70)$$

Доказательство. Определим случайную операторнозначную функцию

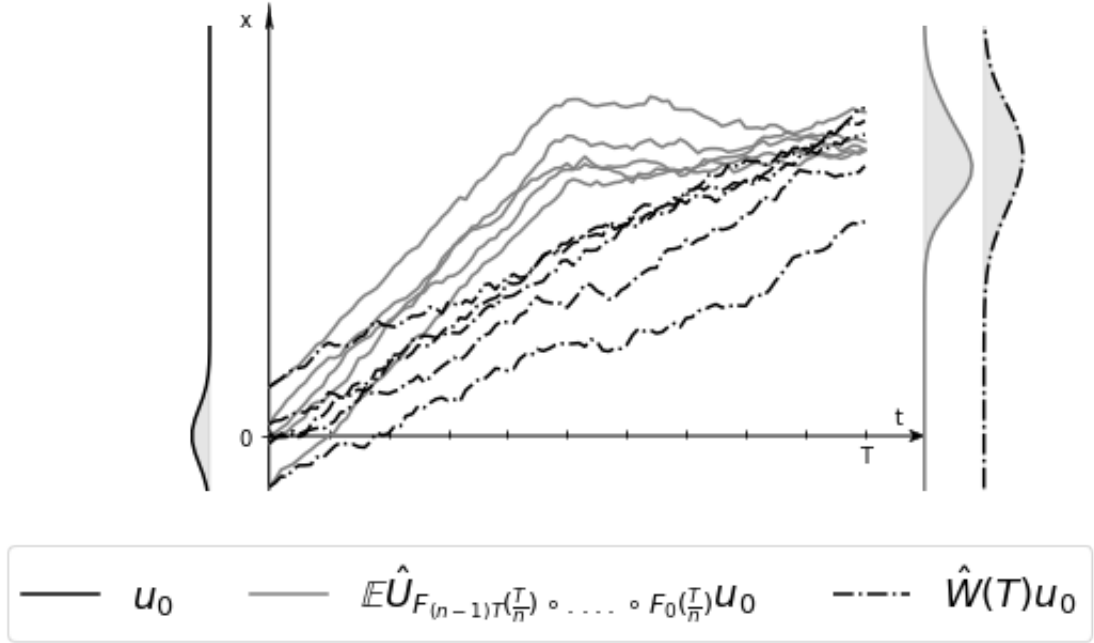
$$F(t)x = x + ct + d\sqrt{t} + o(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.71)$$

у которой (c, d) распределены с маргинальной по τ мерой μ и соответствующую последовательность независимых $\{G_k(t)\}, k \in \mathbb{N}$.

В условиях теоремы $F_{(n-1)T}(\frac{T}{n}) \circ \dots \circ F_0(\frac{T}{n})x$ и $G_n(\frac{T}{n}) \circ \dots \circ G_1(\frac{T}{n})x$ являются суммами независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям центральной предельной теоремы Ляпунова и поэтому сходятся в пределе $n \rightarrow \infty$ по распределению к $\mathcal{N}(\mathbb{E}_\mu cT, \mathbb{E}_\mu d^2 T)$. Тогда для любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbb{E}\hat{U}_{F_{(n-1)T}(\frac{T}{n}) \circ \dots \circ F_0(\frac{T}{n})} - \mathbb{E}\hat{U}_{G_n(\frac{T}{n}) \circ \dots \circ G_1(\frac{T}{n})})u_0\|_{L_2(\mathbb{R})} = 0. \quad (1.72)$$

Рисунок 1.6 — Линейное случайное блуждание с нестационарным параметром сноса.



Применение следствия 3.1 для $G(t)$ и неравенства треугольника доказывает требуемое утверждение. \square

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение

Теорема 1.4.3. Пусть задано семейство $\{F_\tau\}$, $\tau \in [0, T]$ простых случайных операторнозначных функций, таких что для каждого τ функция F_τ вида (1.57), параметры которой определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_\tau)$, удовлетворяет условиям $c = d = 0$ и и распределение b является симметричным.

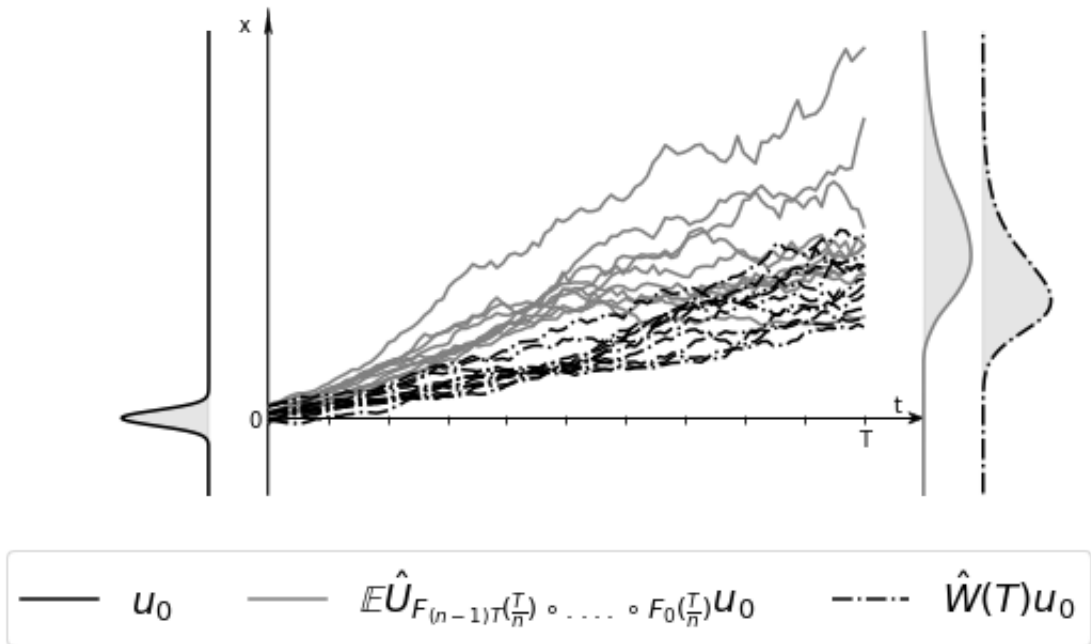
Тогда для любого $u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbb{E} \hat{U}_{F_{(n-1)T}(\frac{T}{n}) \circ \dots \circ F_0(\frac{T}{n})} - \hat{W}(T)) u_0\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} = 0,$$

где \hat{W} — полугруппа, порождаемая решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\mathbb{E}_\mu a x + \frac{1}{2} \mathbb{E}_\mu b^2 x \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbb{E}_\mu b^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (1.73)$$

Рисунок 1.7 — Аффинное случайное блуждание с нестационарным параметром линейного сноса.



Аналогичное утверждение для общего случая нестационарного распределения функции $F(t)$, удовлетворяющего условиям теоремы 1.4.1, оказывается неверным из-за некоммутативности аффинных преобразований, что проиллюстрировано на рисунке 1.7 с помощью численного моделирования.

Глава 2. Аппроксимация решений многомерного уравнения Колмогорова

Многомерные уравнения в частных производных встречаются в большом числе различных практических приложений. Численное решение таких уравнений при помощи сеточных алгоритмов, таких как конечно-разностные алгоритмы или метод конечных элементов, становится практически невозможным для достаточно больших размерностей. Стандартным подходом для задач большой размерности является построение статистических оценок для решений методом Монте-Карло [62–64]. Также в последние годы получили развитие идеи применения глубоких нейронных сетей для построения аппроксимаций решений [65–68]. Обучение таких сетей также требует достаточно больших обучающих выборок, которые опять же, как правило, строятся методом Монте-Карло.

В этой главе предлагается новый алгоритм численной аппроксимации решений многомерного уравнения Колмогорова, основанный на усреднении итераций Фейнмана-Чернова [10] для случайных операторнозначных функций. Основная идея алгоритма берет свое начало в теории сильно непрерывных полугрупп и состоит в построении аппроксимации для оператора эволюции, действующего на начальное условие, на основе теоремы Чернова [6]. Предлагаемый алгоритм имеет меньшую вычислительную сложность по сравнению со стандартным Монте-Карло алгоритмом [62], использующим формулу Фейнмана-Каца [69–71], в случае когда значения усредняемых случайных операторнозначных функции принадлежат представлению какой-либо конечномерной группы Ли. В частности, в третьем разделе рассмотрен случай группы аффинных преобразований евклидова пространства и соответствующие уравнения, порождаемые при усреднениях итераций Фейнмана-Чернова. Также в четвертом разделе приведены результаты численных расчетов для двух модельных задач со сравнением стандартного и предлагаемого алгоритмов.

2.1 Уравнение Колмогорова и формула Фейнмана-Каца

Пусть \mathbb{R}^d – евклидово пространство конечной размерности d , $L_2(\mathbb{R}^d)$ – пространство квадратично интегрируемых функций. Рассмотрим задачу Коши

$$\partial_t u = Lu, \quad t \in (0, T] \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (2.2)$$

где $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$ – некоторое начальное условие, а

$$L = \mu^i(x)\partial_i + \frac{1}{2}D^{ij}(x)\partial_i\partial_j \quad (2.3)$$

– дифференциальный оператор, задаваемый коэффициентами сноса $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ и диффузии $D = \sigma\sigma^T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$.

Рассмотрим также соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито

$$dX = \mu dt + \sigma dW, \quad (2.4)$$

где W – стандартный винеровский процесс.

При выполнении достаточных условий:

1. $\exists C_1 > 0 : \|\mu(x)\| + \|\sigma(x)\| \leq C_1(1 + \|x\|), \forall x \in \mathbb{R}^d$ (ограниченного роста),
2. $\exists C_2 > 0 : \|\mu(x_1) - \mu(x_2)\| + \|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)\| \leq C_2(\|x_1 - x_2\|), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ (Липшица),
3. $\exists C_3 > 0 : (\eta, \sigma\sigma^T(x)\eta) \geq C_3\|\eta\|^2, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall \eta \in T_x\mathbb{R}^d$ (равномерной эллиптичности)

задача Коши (2.1)-(2.2) имеет для произвольного $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^d) \cap C^2(\mathbb{R}^d)$ единственное сильное решение $u(x, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0, T])$, а уравнение (2.4) с начальным условием $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ имеет сильно единственное (pathwise unique)

решение $X(t)$ [71; 72]. При этом формула Фейнмана-Каца связывает эти два решения следующим образом

$$u(x,t) = \mathbb{E}(u_0(X(t))|X(0) = x). \quad (2.5)$$

Уравнение, задаваемое сопряженным к L оператором

$$\partial_t p = L^* p, \quad (2.6)$$

и описывающее эволюцию плотности распределения $p(t)$ случайной величины $X(t)$, называют уравнением Фоккера-Планка или прямым уравнением Колмогорова, а уравнение (2.1) – обратным уравнением Колмогорова [71].

Формула Фейнмана-Каца (2.5) позволяет получить численную оценку значения $u(x,t)$ для уравнения (2.1), применив метод Эйлера-Маруямы для моделирования случайного процесса $X(t)$ и метод Монте-Карло для статистической оценки математического ожидания.

Стандартный алгоритм вычисления оценки для решения задачи Коши (2.1)-(2.2) методом Монте-Карло с использованием формулы Фейнмана-Каца выглядит следующим образом [62]:

Алгоритм: Monte-Carlo by Feynman-Kac (MCFK)

Data: functions $u_0(\cdot), \mu(\cdot), \sigma(\cdot)$, target points $\{x_i\}_{i=1}^N$, timestep size Δt , timesteps count N_t , iterations count N_iter .

Result: $\{u_i\}_{i=1}^N$

begin

$\{u_i\}_{i=1}^k \leftarrow 0;$

foreach x *in* $\{x_i\}_{i=1}^N$ **do**

for $iteration = 1$ **to** N_iter **do**

$x_rand_path \leftarrow x;$

for $time_step = 1$ **to** N_t **do**

$\xi \leftarrow$ random sample from standard normal distribution;

$x_rand_path \leftarrow x_rand_path + \mu(x_rand_path)\Delta t + \sigma(x_rand_path)\xi\sqrt{\Delta t};$

end

$u_i \leftarrow u_i + u_0(x_rand_path)/N_iter;$

end

end

end

Данный алгоритм является бессеточным и характеризуется вычислительной сложностью $O(NN_{iter}N_t)$, где N – число точек, в которых строится оценка, N_{iter} – число итераций метода Монте-Карло, а N_t – число шагов по времени в методе Эйлера-Маруямы.

Статистические аппроксимации решения задачи Коши (2.1)-(2.2) методом Монте-Карло используются в случае большой размерности решаемой задачи, так как в этом случае сеточные численные методы не применимы из-за чрезвычайно большого размера расчетной сетки (см., например, [62–64; 73; 74]).

2.2 Аппроксимация решений с помощью итераций Фейнмана-Чернова

В этом разделе численная аппроксимация решений задачи Коши (2.1)-(2.2) рассматривается с точки зрения теории сильно непрерывных полугрупп и описывается Монте-Карло алгоритм, основанный на применении итераций Фейнмана-Чернова для операторнозначных функций.

Если дифференциальный оператор L (2.3) является генератором сильно непрерывной полугруппы $e^{Lt} : \mathbb{R}_+ \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, тогда для произвольного начального условия $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^d)$ слабое решение задачи Коши (2.1)-(2.2) представляется в виде [54]:

$$u(x,t) = e^{Lt}u_0(x), \quad t \in [0,T]. \quad (2.7)$$

Пусть $\{F_k(t)\}$, $k \in \mathbb{N}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных сильно непрерывных операторнозначных функций $\Omega \rightarrow C_s(\mathbb{R}_+, B(X))$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Пусть также средние $\mathbb{E}F_k(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(X)$ эквивалентны по Чернову полугруппе e^{Lt} . Тогда в силу теоремы Чернова [6] конечная композиция операторов

$$\prod_{i=1}^N \mathbb{E}F_i\left(\frac{t}{N}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^N F_i\left(\frac{t}{N}\right)\right) \quad (2.8)$$

при достаточно большом N может быть использована в качестве аппроксимации оператора e^{Lt} . Операция взятия математического ожидания в формуле (2.8) может быть вынесена наружу в силу независимости $F_k(t)$ [46]. И тогда оценка для решения задачи Коши (2.1)-(2.2) $u(x,t)$ может быть получена с помощью метода Монте-Карло для оценки математического ожидания $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^N F_i\left(\frac{t}{N}\right)\right)u_0$.

Предлагаемый в данной работе алгоритм, использующий метод Монте-Карло для семплирования итераций Фейнмана-Чернова, выглядит следующим образом

Алгоритм: Monte-Carlo by Feynman-Chernoff (MCFCh)

Data: functions $u_0(\cdot), \mu(\cdot), \sigma(\cdot)$, target points $\{x_i\}_{i=1}^N$, timestep size Δt , timesteps count N_t , iterations count N_iter .

Result: $\{u_i\}_{i=1}^N$

begin

$\{u_i\}_{i=1}^k \leftarrow 0;$

for $k = 1$ **to** N_iter **do**

$A_k \leftarrow Id;$

for $time_step = 1$ **to** N_t **do**

$F(\frac{t}{N}) \leftarrow$ random sample from operator-valued function distribution;

$A_k \leftarrow A_k \circ F(\frac{t}{N});$

end

foreach x **in** $\{x_i\}_{i=1}^N$ **do**

$u_i \leftarrow u_i + A_k u_0(x) / N_iter;$

end

end

end

Данный алгоритм также является бессеточным. В общем случае вычислительная сложность метода также является $O(NN_{iter}N_t)$, где N – число точек, в которых строится оценка, N_{iter} – число итераций метода Монте-Карло, а N_t – число итераций Фейнмана-Чернова. Но в случае когда значения операторнозначных функции принадлежат представлению какой-либо конечномерной группы Ли (например представлению группы аффинных преобразований, см. следующий раздел) вычислительная сложность может быть понижена до $O(N_{iter}(N_t + N))$, что является значительным преимуществом. Возможность

уменьшения сложности возникает здесь из-за того, что операторы A_k в алгоритме MCFCCh в этом случае однозначно восстанавливаются из элемента порождающей группы, и для вычисления $A_k u_0(x)$ во втором внутреннем цикле не требуется вычислений всех промежуточных шагов для каждой целевой точки.

В данном разделе приведен пример построения численного Монте-Карло алгоритма для аппроксимаций решений многомерного уравнения Колмогорова, основанного на усреднении итераций Фейнмана-Чернова случайных операторнозначных функций. Предлагаемый алгоритм имеет меньшую вычислительную мощность для определенного класса уравнений за счет использования структуры группы Ли на множестве значений рассматриваемых операторнозначных функций.

2.3 Усреднение аффинных преобразований

В данном разделе рассматривается усреднение по Чернову аффинных преобразований аргумента функций и соответствующие порождаемые уравнения Колмогорова. Для таких уравнений задача Коши (2.1)-(2.2) может быть численно решена алгоритмом MCFCCh с вычислительной сложностью $O(N_{iter}(N_t + N))$.

Рассмотрим случайную операторнозначную функцию $F(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^d)$ со значениями в группе аффинных преобразований конечномерного евклидова пространства следующего вида

$$F(t)\vec{x} = e^{A\sqrt{t+Bt+R(t^{\frac{3}{2}})}}\vec{x} + \vec{h}\sqrt{t} + \vec{g}t + \vec{r}(t^{\frac{3}{2}}), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (2.9)$$

где при $i, j \in 1 \dots d$ компоненты $\{A_j^i\}, \{B_j^i\}, \{h^i\}, \{g^i\}$ являются вещественными случайными величинами, а $\{R_j^i(s)\}$ и $\{r^i(s)\}$ – случайные непрерывно дифференцируемые функции, обращающиеся в ноль в точке $s = 0$. При этом все

случайные величины предполагаются совместно распределенными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ и имеющими конечные вторые моменты.

Случайная операторнозначная функция $F(t)$ (1.16) порождает случайную операторнозначную функцию $U_F(t)$, $t \geq 0$, со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d)$, таким образом, что при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ выполняется равенство

$$U_F(t, \omega)u(x) = u(F(t, \omega)x), \quad \forall u \in L_2(\mathbb{R}^d). \quad (2.10)$$

Пусть выполняются следующие условия:

- A1. операторы A, B и $R'(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ принимают значения в шаре радиуса $\rho_0 < +\infty$ пространства $B(\mathbb{R}^d)$ с вероятностью 1;
- A2. распределение случайного вектора $(\{A^i_j\})$ дискретно и симметрично;
- A3. $\mathbb{E}h^i = 0$;
- A4. оператор A диагонализируем с вероятностью 1;
- A5. $\text{tr } A = 0$ с вероятностью 1.
- A6. ковариационная матрица случайного вектора $(\{A^i_j\}, \{B^i_j\}, \{h^i\}, \{g^i\})$ является положительно определенной;

Из теоремы (1.3.1) и того, что значения F_n лежат в группе аффинных преобразований, следует что задача Коши (2.1)-(2.2), в которой оператор L представим в виде (1.49) может быть численно решена алгоритмом MCFCCh с вычислительной сложностью $O(N_{iter}(N_t + N))$.

В данном разделе рассмотрена реализация алгоритма для случая, когда значения операторнозначных функций принадлежат представлению группы аффинных преобразований евклидова пространства. Определенный интерес составляет изучение итераций Фейнмана-Чернова для преобразований, порождаемых другими конечномерными группами Ли и их различными представлениями. Одним из дальнейших направлений исследований является расширение круга рассматриваемых задач (неавтономные уравнения, уравнения с граничными условиями), а также повышение эффективности за счет техник умень-

шения дисперсии (variance reduction). В последние годы достаточно активно развиваются методы аппроксимации операторов на бесконечномерных функциональных пространствах с помощью глубоких нейронных сетей [68], и в этой связи итерации Фейнмана-Чернова могут быть использованы в качестве суррогатных моделей для эффективного построения обучающих выборок.

2.4 Результаты численных экспериментов

В данном разделе приведены некоторые численные результаты, иллюстрирующие свойства рассматриваемых алгоритмов.

2.4.1 Случай коэффициентов общего вида в размерности 1.

Пусть коэффициенты сноса и диффузии в задаче Коши (2.1)-(2.3) для произвольного $x \in \mathbb{R}$ определены функциями

$$\begin{aligned}\mu &= 1 + \cos x, \\ \sigma &= 1 + 0.2 \cos x.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Начальное условие:

$$u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}} \sin(4x).\tag{2.12}$$

Множество точек, в которых строится оценка решения: $\{0.1i\}_{i=0}^{100}$, шаг по времени $\Delta t = 0.005$, а число шагов по времени равно 200.

На рисунках 2.1 и 2.2 приведен пример построения оценок для решения задачи Коши алгоритмами MCFK и MCFCh. На рисунке 2.3 приведены графики ошибок для алгоритмов MCFK и MCFCh. Если число точек, в которых стро-

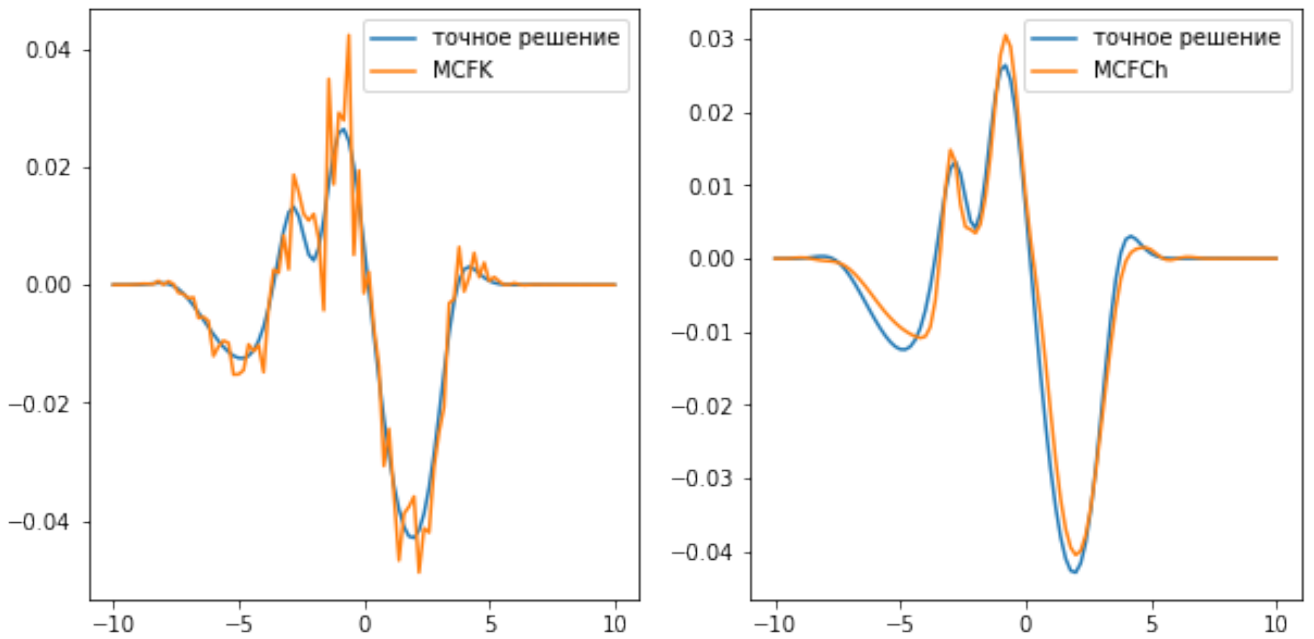


Рисунок 2.1 — Оценки для решения задачи Коши алгоритмами MCSF и MCSFCh (число случайных траекторий - 100).

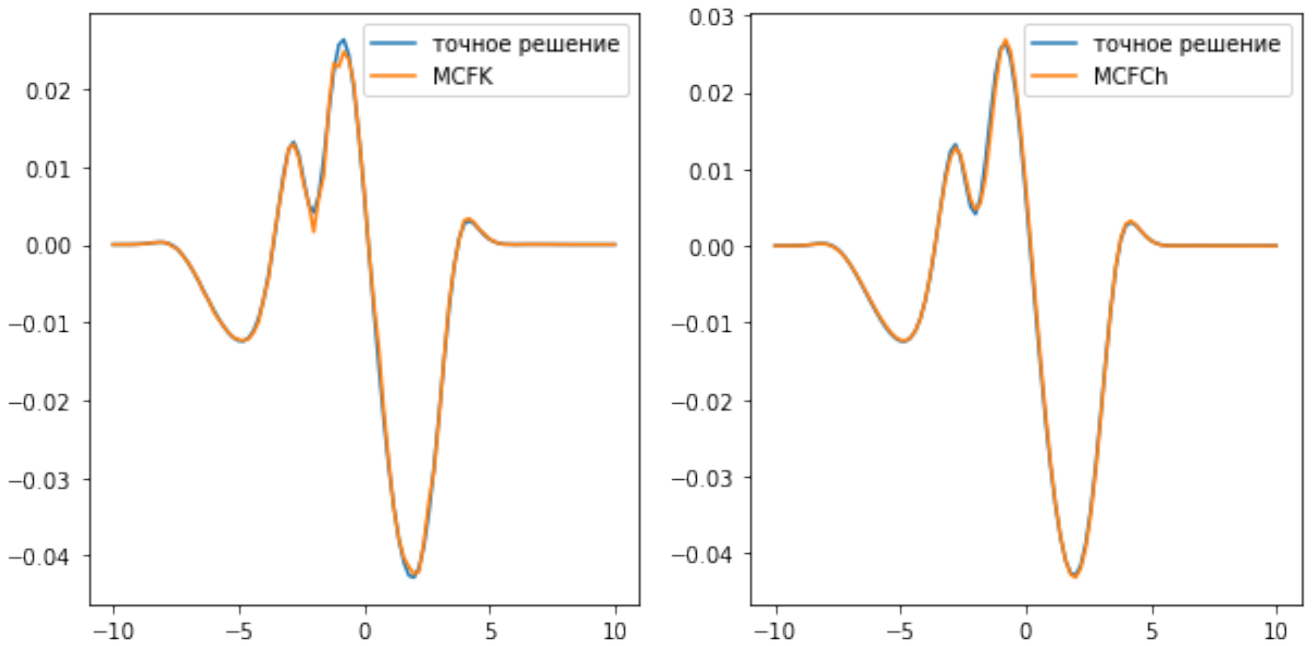


Рисунок 2.2 — Оценки для решения задачи Коши алгоритмами MCSF и MCSFCh (число случайных траекторий - 10000).

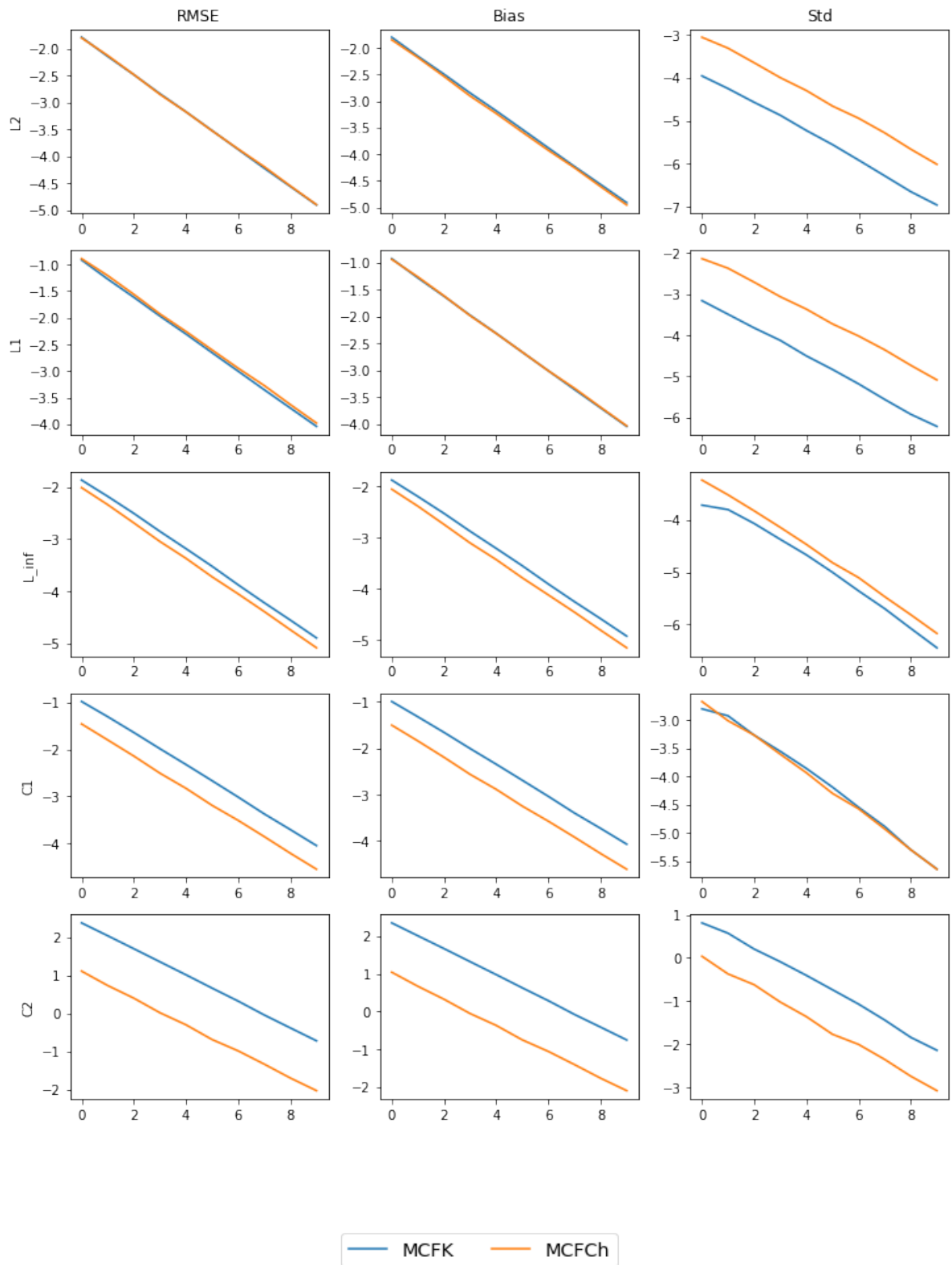


Рисунок 2.3 — Графики ошибок для алгоритмов MCFK и MCFCh для различных норм.

RMSE - корень среднеквадратичной ошибки, Bias - смещение, Std - стандартное отклонение.

ится оценка, больше одной, то алгоритм МСФК имеет более низкую вариацию для L_1 и L_2 норм в силу независимости генерируемых случайных траекторий для каждой целевой точки, при этом средняя квадратичная ошибка оказывается сравнимой для обоих методов. В тоже время алгоритм МСФСh дает более низкую среднюю квадратичную ошибку для норм L_{inf}, C^1, C^2 . Также заметим, что МСФСh сохраняет гладкость начального условия, в то время как оценка алгоритмом МСФК подвержена некоррелированному пространственному шуму.

2.4.2 Случай коэффициентов специального вида в размерности 10

Пусть коэффициенты сноса и диффузии в задаче Коши (2.1)-(2.3) для произвольного $x \in \mathbb{R}^{10}$ определены функциями

$$\begin{aligned}\mu &= 0.2 * Id, \\ \sigma &= 0.2 * Id.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Начальное условие:

$$u_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^5} e^{-\frac{x^T x}{2}}.\tag{2.14}$$

Точки, в которых строится оценка решения, равномерно распределены внутри единичного гиперкуба $[0,1]^{10}$, шаг по времени $\Delta t = 0.005$, а число шагов по времени равно 200.

На рисунке 2.4 показаны зависимости времени выполнения алгоритмов МСФК и МСФСh при различных значениях числа Монте-Карло итераций и числа точек, в которых строится оценка. Полученные зависимости согласуются с теоретическими оценками сложности, в частности для алгоритма МСФК хорошо видно, что линии уровня являются гиперболами. При всех значениях параметров полученное среднее время выполнения алгоритма МСФК значитель-

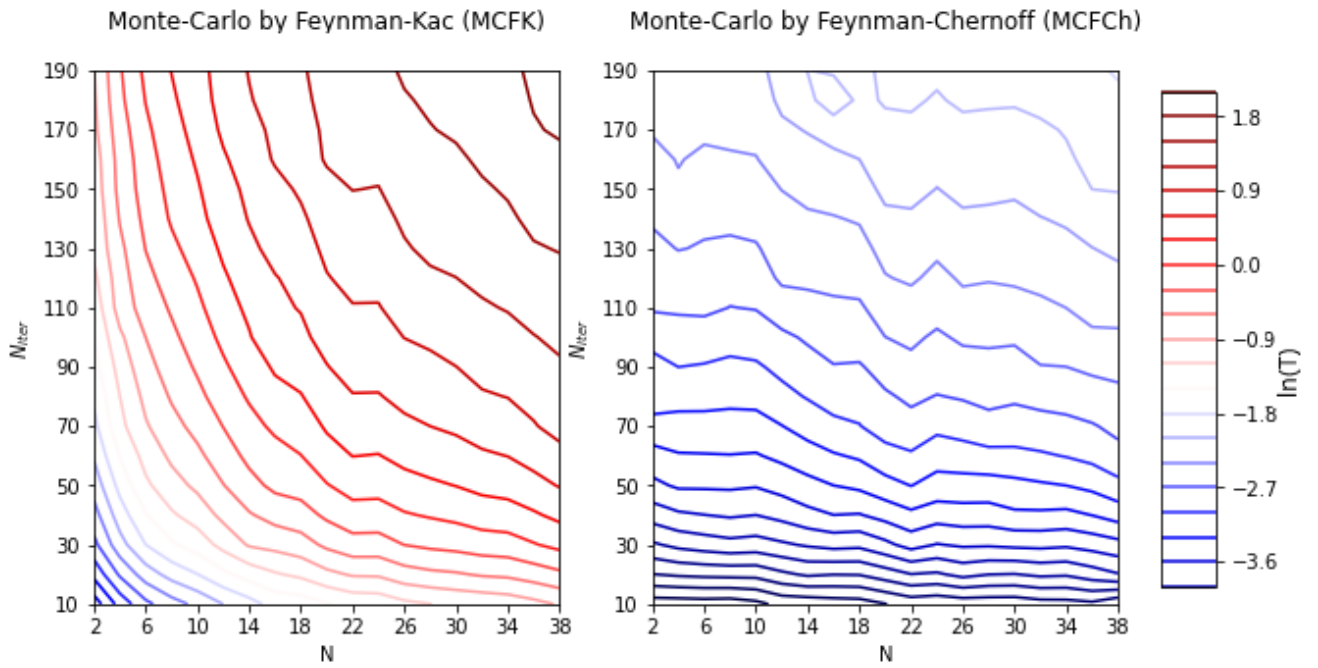


Рисунок 2.4 — Времена выполнения алгоритмов MCFK и MCFCh в зависимости от числа Монте-Карло итераций и числа точек, в которых строится оценка.

но больше, чем среднее время выполнения алгоритма MCFCh при сравнимых величинах ошибок.

Глава 3. Моделирование необратимой квантовой эволюции

Влияние нестационарных случайных воздействий на эволюцию квантовых и классических систем изучалось в ряде работ [7; 35; 43; 56; 60; 75; 75–78]. Предельные теоремы, описывающие асимптотику распределения произведения произведения большого числа независимых случайных матриц, изучались в работах [32; 33; 79–81]. В работах [9; 35; 60; 82] получены предельные теоремы типа закона больших чисел и центральной предельной теоремы, описывающие сходимость случайных композиций по вероятности и по распределению. В статье [35] получены теоремы типа закона больших чисел, утверждающие сходимость по распределению последовательности произведений случайных матриц к детерминированной предельной матрице. В статье [60] установлены предельные теоремы, описывающие предельные распределения композиций большого числа независимых случайных линейных преобразований конечномерного евклидова пространства. Подчеркнем, что, в отличие от [35], в работе [60] была доказана сходимость по вероятности последовательности случайных композиций к предельной полугруппе, что позволяет дать оценку вероятности отклонения в форме неравенства Чебышёва. Следует отметить, что результаты работ [9; 60; 82] представляют предельные теоремы, описывающие предельные распределения композиций большого числа независимых случайных преобразований бесконечномерных банаховых пространств.

В этой главе исследуются усреднения итераций Фейнмана-Чернова случайных операторнозначных функций эволюции для квантовых систем. Рассматривается эволюция квантового осциллятора, которая задается композициями случайных аффинных преобразований фазового пространства, и диффузионный предел таких композиций в смысле итераций Фейнмана-Чернова. Приводится уравнение Фоккера-Планка для эволюции функции квазивероятностного распределения, определяющего оператор плотности смешанного состояния, и

численно исследуется проблема декогеренции квантовых состояний в интерференционных экспериментах.

3.1 Постановка задачи и предлагаемый подход

В данной работе исследуются усреднения итераций Фейнмана-Чернова [10]

$$e^{-i\hat{H}_n \frac{t}{n}} \circ \dots \circ e^{-i\hat{H}_1 \frac{t}{n}} \quad (3.1)$$

операторнозначных функций эволюции для квантовых систем.

Центральным примером будут выступать гамильтонианы вида

$$\hat{H}(t) = g(t)\hat{a}^+\hat{a} + f(t)\hat{a}^+ + \overline{f(t)}\hat{a} + h(t), \quad (3.2)$$

где $g(t)$ и $h(t)$ – вещественнозначные функции времени, $f(t)$ – комплекснозначная функция времени, \hat{a} и \hat{a}^+ – операторы рождения и уничтожения.

В работах Глаубера [83], Меты и Сударшана [84] было показано, что в случае канонических коммутационных соотношений формула (3.2) задает общий вид гамильтониана, при котором любое когерентное состояние всегда остается когерентным в процессе эволюции. Под когерентными состояниями при этом подразумеваются состояния, соответствующие собственным векторам оператора уничтожения: $\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle$, $z \in \mathbb{C}$.

В случае гамильтониана вида (3.2) действие оператора эволюции

$$\hat{S}(t) = \mathcal{T} \left\{ \exp \left(-i \int_0^t \hat{H}(\tau) d\tau \right) \right\}, t > 0, \quad (3.3)$$

на начальное когерентное состояние описывается формулами:

$$|z(t)\rangle = \hat{S}(t) |z(0)\rangle, \quad (3.4)$$

$$z(t) = e^{-i\phi(t)} z(0) - ie^{-i\phi(t)} \int_0^t f(\tau) e^{i\phi(\tau)} d\tau, \quad (3.5)$$

где $\phi(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$. Символ \mathcal{T} в формуле (1.16) обозначает операцию хронологического упорядочения операторов [85].

В некоторых задачах [86; 87] возникает необходимость учета накапливающегося общего фазового множителя у вектора гильбертова пространства \mathcal{H} , соответствующего начальному состоянию. Подстановка вектора $e^{i\gamma(t)} |z(t)\rangle$ в уравнение Шрёдингера приводит к уравнению

$$\left(i \frac{d\gamma(t)}{dt} + \frac{d}{dt} \right) |z(t)\rangle = -i \hat{H}(t) |z(t)\rangle, \quad (3.6)$$

из которого следует, что

$$\gamma(t) - \gamma(0) = \int_0^t \langle z(\tau) | \hat{H}(\tau) | z(\tau) \rangle + i \int_0^t \langle z(\tau) | \frac{d}{d\tau} | z(\tau) \rangle. \quad (3.7)$$

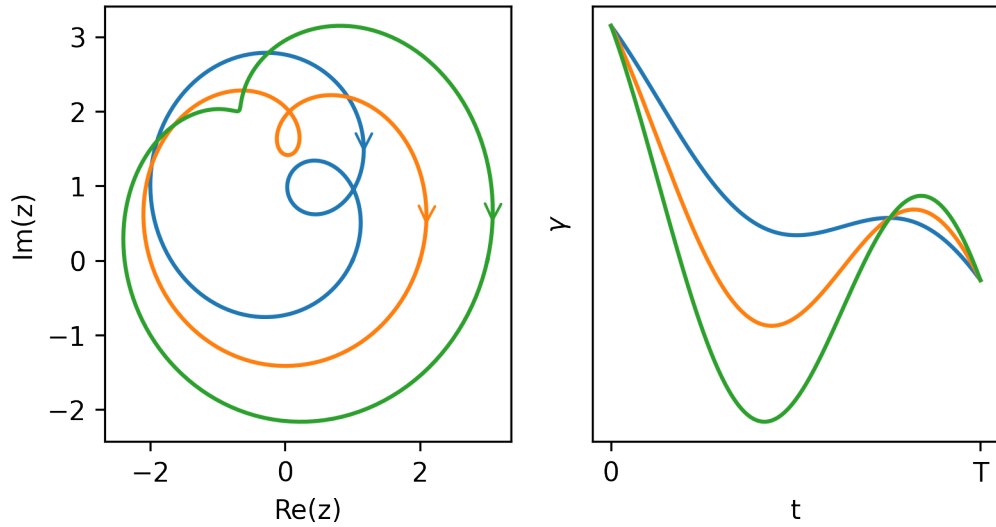
При этом первое слагаемое в правой части формулы (3.7) называют динамической фазой, а второе – геометрической фазой или фазой Берри [88].

Для примера на рисунке 3.1 изображены некоторые траектории $(\operatorname{Re} z(t), \operatorname{Im} z(t))$ и $\gamma(t)$, описывающие эволюцию векторов, соответствующих когерентным состояниям, под действием гамильтониана вида (3.2).

Таким образом, согласно уравнениям (3.5) и (3.7) эволюция векторов гильбертова пространства \mathcal{H} , отвечающих когерентным состояниям, при действии семейства операторов $\hat{S}(t)$, полностью описывается операторнозначной функцией со значениями в группе аффинных преобразований $\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

В следующих разделах рассматривается эволюция осциллятора, которая задается композициями случайных преобразований вида (3.5, 3.7), и диффузионный предел таких композиций в смысле итераций Фейнмана-Чернова, при этом эволюция будет сопровождаться эффектом декогеренции [89]. Приводится уравнение Фоккера-Планка для эволюции плотности смешанного состояния и

Рисунок 3.1 — Эволюция векторов, соответствующих когерентным состояниям.



численно исследуется проблема декогеренции квантовых состояний в интерференционных экспериментах.

3.2 Оператор эволюции автономного квантового осциллятора и формула Зассенхауса

Пусть операторнозначная функция эволюции $\hat{S} = (e^{-i\hat{H}t}) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ определяется гамильтонианом вида

$$\hat{H} = g\hat{a}^+\hat{a} + f\hat{a}^+ + \bar{f}\hat{a} + h, \quad (3.8)$$

где $g, h \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{C}$, и введем обозначения

$$\begin{aligned} \hat{X} &= -ig\hat{a}^+\hat{a}, \\ \hat{Y}(\alpha) &= \alpha\hat{a}^+ + \bar{\alpha}\hat{a}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В этих обозначениях оператор эволюции записывается как

$$\hat{S}(t) = \exp(-iht) \circ \exp\left(\hat{X}t + \hat{Y}(-if)t\right), \quad (3.10)$$

и может быть представлен с помощью формулы Зассенхауза [90] в виде

$$\hat{S}(t) = \exp(-iht) \circ \exp\left(\hat{X}t\right) \circ \exp\left(\hat{Y}(-if)t\right) \circ \prod_{n=2}^{\infty} \exp\left(t^n C_n(\hat{X}, \hat{Y}(-if))\right), \quad (3.11)$$

где $C_n(\cdot, \cdot)$ – однородные многочлены Ли степени n [91].

Введем также обозначения $\hat{D}(z) = \exp(z\hat{a}^+ - \bar{z}\hat{a})$ – оператор сдвига, $\hat{R}(\theta) = \exp(i\theta\hat{a}^+\hat{a})$ – оператор поворота, а $\hat{P}(\gamma) = \exp(i\gamma)$ – оператор сдвига общей фазы.

Заметим, что $[\hat{X}, \hat{Y}(\alpha)] = \hat{Y}(-ig\alpha)$, а коммутатор $[\hat{Y}(\beta), [\hat{X}, \hat{Y}(\alpha)]] = [\hat{Y}(\beta), \hat{Y}(-ig\alpha)]$ является оператором умножения на чисто мнимое число, поэтому произведение

$$\prod_{n=2}^{\infty} \exp\left(t^n C_n(\hat{X}, \hat{Y}(-if))\right) \quad (3.12)$$

в формуле (3.11) является композицией счетного числа операторов сдвига и поворота общей фазы, аргументы которых являются $o(t)$ при $t \rightarrow 0$. Далее, учитывая что оператор поворота общей фазы является оператором умножения на число и поэтому коммутирует с остальными сомножителями, а также формулу композиции для операторов сдвига

$$\hat{D}(z_2)\hat{D}(z_1) = e^{\frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2)} \hat{D}(z_1 + z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad (3.13)$$

получаем, что оператор эволюции для гамильтониана (3.8) может быть записан в виде:

$$\hat{S}(t) = \hat{P}(-ht + o(t^2)) \circ \hat{D}(-ift) \circ \hat{R}(-gt). \quad (3.14)$$

Для учета накопления общей фазы в процессе эволюции системы рассмотрим множество единичных векторов в \mathcal{H}

$$M = \{e^{i\gamma}|z\rangle = e^{i\gamma}|x + iy\rangle\} = |(x, y, \gamma)\rangle, \quad (3.15)$$

соответствующих когерентным состояниям и образующих трехмерное многообразие гомеоморфное $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, и его естественное накрытие $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$, такое что $p(x, y, \gamma) = e^{i\gamma}|(x, y)\rangle$ (Рис. 3.2).

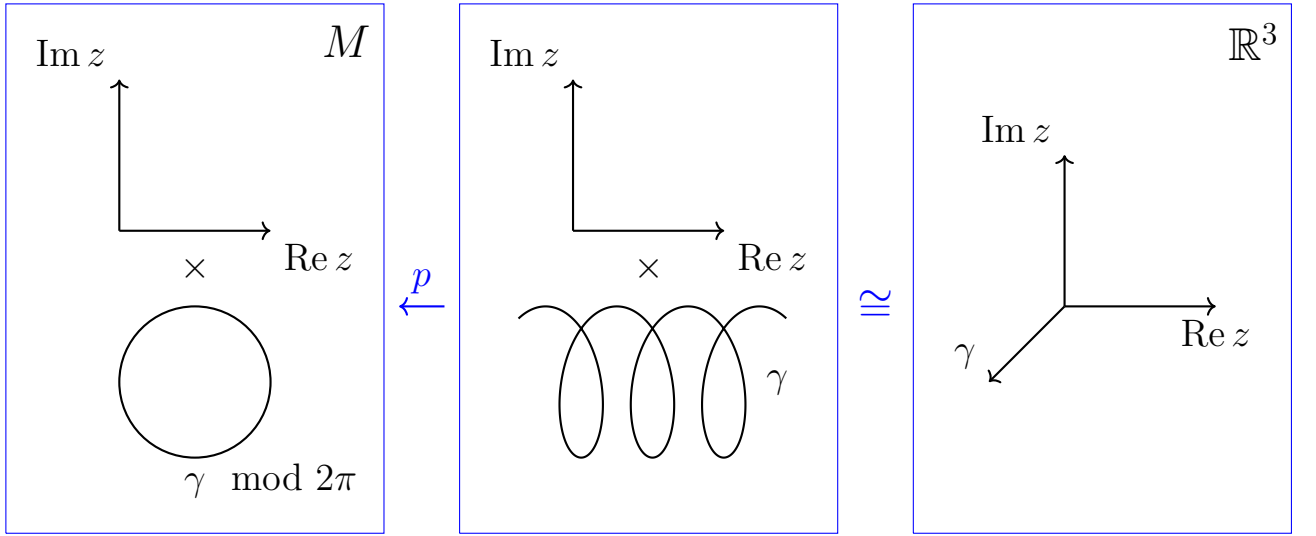


Рисунок 3.2 — Фазовое пространство M для эволюции когерентного состояния.

Тогда операторы $\hat{D}(z)$, $\hat{R}(\theta)$ и $\hat{P}(\gamma)$ представляются в виде композиций $p \circ D_{\mathbb{R}^3}(z) \circ p^{-1}$, $p \circ R_{\mathbb{R}^3}(\theta) \circ p^{-1}$ и $p \circ P_{\mathbb{R}^3}(\varphi) \circ p^{-1}$ соответственно, где

$$D_{\mathbb{R}^3}(z) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{Im } z & -\text{Re } z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{Re } z \\ \text{Im } z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

$$R_{\mathbb{R}^3}(\theta) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$$P_{\mathbb{R}^3}(\gamma) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

являются аффинными преобразованиями \mathbb{R}^3 , а все композиции определены однозначно в независимости от выбора слоев p^{-1} .

Пусть G_0 подгруппа группы аффинных преобразований \mathbb{R}^3 , такая что все ее элементы задаются преобразованиями вида

$$G_0 : v \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} v + \vec{h}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Тогда оператор $\hat{S}(t)$, действующий на M , может рассматриваться как композиция $\hat{S}(t) = p \circ F(t) \circ p^{-1}$, $\hat{F}(t) \in G_0$ (Рис. 3.3).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow \hat{F}(t) & & \downarrow \hat{S}(t) \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

Рисунок 3.3 — Коммутативная диаграмма, связывающая \mathbb{R}^3 и фазовое пространство M .

Пусть начальное состояние системы задается оператором плотности, определенным с помощью некоторой функции квазивероятностного распределения [92] (например, функции Вигнера, Q-функции Хушими или P-функции Глаубера-Сударшана):

$$\hat{\rho}(0) = \int \rho(z) |z\rangle\langle z| d^2z. \quad (3.20)$$

Тогда эволюция состояния системы будет описываться уравнением

$$\hat{\rho}(t) = \int \rho(z) \hat{S}(t) |z\rangle\langle z| \hat{S}(t)^\dagger d^2z = \int \rho(z) |F(t)z\rangle\langle F(t)z| d^2z, \quad (3.21)$$

из которого после замены переменной под знаком интеграла следует

$$\hat{\rho}(t) = \int \rho(F(-t)z) |z\rangle\langle z| d^2z. \quad (3.22)$$

Введя обозначение операторнозначной функции

$$U_F(t)\rho(z) = \rho(F(-t)z), \quad (3.23)$$

получаем Купмановское представление [93] для эволюции состояния системы

$$\hat{\rho}(t) = \int U_F(t)\rho(z) |z\rangle\langle z| d^2z. \quad (3.24)$$

При описании эволюции квантового состояния с помощью оператора плотности можно не учитывать накапливающуюся общую фазу. Но в некоторых задачах [86; 87] возникает необходимость учета этой фазы, например, если рассматриваемая система не изолированная и является частью некоторой более крупной системы. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в разделе 3.4.

3.3 Квантовые системы со случайным гамильтонианом

Рассмотрим случайный гамильтониан вида

$$\hat{H}(t) = g(t)\hat{a}^+\hat{a} + f(t)\hat{a}^+ + \bar{f}(t)\hat{a} + h(t), \quad (3.25)$$

где

$$f(t) = f_1 + f_2/\sqrt{t}, \quad (3.26)$$

$$g(t) = g_1 + g_2/\sqrt{t}, \quad (3.27)$$

$$h(t) = h_1 + h_2/\sqrt{t}, \quad (3.28)$$

а компоненты

$$(\operatorname{Re}(f_1), \operatorname{Im}(f_1), \operatorname{Re}(f_2), \operatorname{Im}(f_2), g_1, g_2, h_1, h_2) \quad (3.29)$$

являются случайным вещественным вектором, который обозначим за \vec{v} .

Пусть эволюция состояния квантовой системы определяется последовательностью независимых и одинаково распределенных случайных гамильтонианов \hat{H}_i вида (3.25):

$$\hat{S}_n(t) = e^{-i\hat{H}_n(\frac{t}{n})\frac{t}{n}} \circ \dots \circ e^{-i\hat{H}_1(\frac{t}{n})\frac{t}{n}}. \quad (3.30)$$

Пусть опять же начальное состояние системы задается оператором плотности, определенным с помощью функции квазивероятностного распределения (3.20). Тогда

$$\hat{\rho}_n(t) = \mathbb{E} \left(\int U_{F_n}(t) \rho(z) |z\rangle\langle z| d^2z \right) = \int \mathbb{E} U_{F_n}(t) \rho(z) |z\rangle\langle z| d^2z. \quad (3.31)$$

Композиции операторнозначных функций вида (3.30) будем в след за [10] называть итерациями Фейнмана-Чернова, а порождаемые ими операторнозначные функции $\mathbb{E} U_{F_n}(t)$ – усреднениями по Чернову.

Предположим, что для случайного вектора \vec{v} (3.29) выполняются следующие условия:

- (1) равномерная ограниченность с вероятностью 1;
- (2) распределение дискретно и симметрично;
- (3) $\mathbb{E} f_2 = \mathbb{E} g_2 = \mathbb{E} h_2 = 0$;

(4) ковариационная матрица является невырожденной.

Тогда согласно теореме 1.3.1 усреднения по Чернову будут сходиться к сильно непрерывной сжимающей полугруппе $U(t)$ в топологии τ_s :

$$\mathbb{E}U_{F_n}(t) \xrightarrow{\tau_s} U(t), \quad (3.32)$$

при этом полугруппа $U(t)$ порождается решениями задачи Коши:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L\rho, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0, \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned} L = \mathbb{E}((\operatorname{Im} f_1 - g_1 y)\partial_x + (\operatorname{Re} f_1 + g_1 x)\partial_y) + \\ + \frac{1}{2}\mathbb{E}((\operatorname{Im} f_2 - g_2 y)\partial_x + (\operatorname{Re} f_2 + g_2 x)\partial_y)^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.4 Численное моделирование необратимой квантовой эволюции

Рассмотрим эволюцию начального квантового состояния $\hat{\rho}_s(0) = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{\rho}(0)$ под действием последовательности операторов $\hat{B} \circ \hat{S}(t) \circ \hat{B} = \hat{U}$:

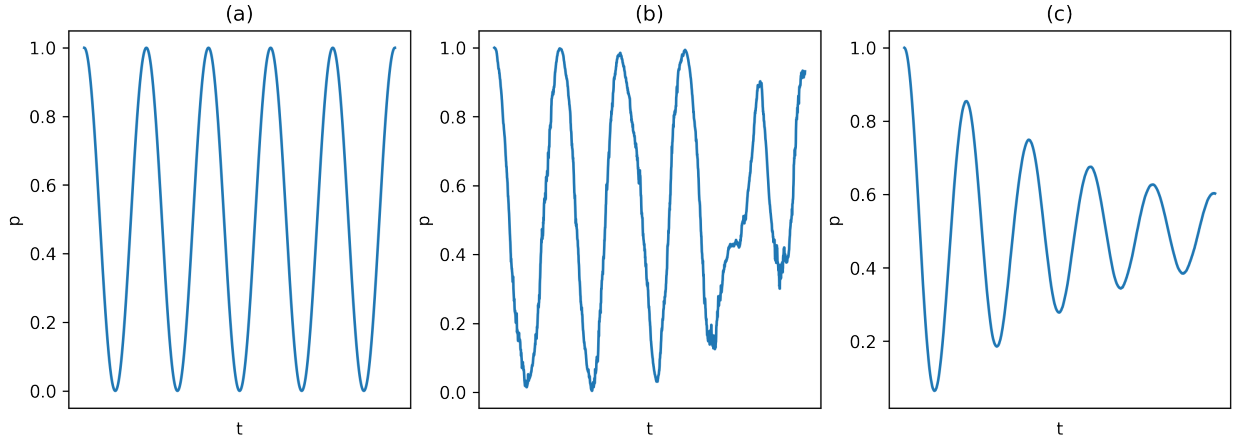
$$\hat{\rho}_s(t) = \mathbb{E}(\hat{U} \circ \hat{\rho}_s(0) \circ \hat{U}^\dagger) \quad (3.35)$$

где

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|) \otimes Id, \quad (3.36)$$

$$\hat{S}(t) = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{S}_1(t) + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{S}_2(t), \quad t > 0, \quad (3.37)$$

Рисунок 3.4 — График $\langle p(t) \rangle$: (a) — без учета декогеренции, (b) — для одной случайной реализации \hat{H}_1 и \hat{H}_2 , (c) — усреднение по Чернову.



и последующим измерением наблюдаемой вида

$$\langle p(t) \rangle = \text{tr}\{(|0\rangle\langle 0| \otimes Id) \circ \hat{\rho}_s(t)\}. \quad (3.38)$$

Будем предполагать, что операторы \hat{S}_1 и \hat{S}_2 являются случайными и независимыми и имеют вид (3.30). Предел усреднений итераций Фейнмана-Чернова (3.30) при этом будет моделировать эволюцию системы подверженной случайному внешнему воздействию среды.

Последовательность операторов (3.35) и измерение (3.38) соответствует схеме интерферометра Маха—Цендера. Аналогичные конструкции возникают при моделировании квантовых вентилях сдвига геометрической фазы [86; 87]. Также усреднение унитарной или неунитарной эволюции с мультимодальными квадратичными (по операторам рождения и уничтожения) гамильтонианами по отношению к пуассоновскому процессу рассмотрены в [75; 78].

Если начальное состояние $\hat{\rho}(0)$ является когерентным и равно $|z(0)\rangle\langle z(0)|$, тогда

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(1 + \cos(\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) e^{-\frac{1}{2}(|z_1(t)|^2 + |z_2(t)|^2) + z_1 \bar{z}_2} \right), \quad (3.39)$$

где $(z_1(t), \gamma_1(t))$ и $(z_2(t), \gamma_2(t))$ соответствуют решениям (3.5) и (3.7) для \hat{S}_1 и \hat{S}_2 .

Таким образом, усреднения итераций Фейнмана-Чернова при достаточно большой, но конечной мелкости разбиения по времени, позволяют численно моделировать процесс декогеренции в рассматриваемой квантовой системе (Рис. 3.4).

Глава 4. Аппроксимации операторов сдвига с помощью итераций Чернова

В этой главе рассматривается задача приближения операторов сдвига для произвольных коммутационных соотношений с помощью итераций Чернова.

В работе [94] были рассмотрены случайные сдвиги в пространстве бозонных когерентных состояний и показано, что их усреднение с помощью теоремы Чернова также является когерентным состоянием. Физическая интерпретация этого результата состояла в том, что эволюция квантового осциллятора или цепочки осцилляторов с переменной частотой может рассматриваться как результат последовательно применяемых операторов сдвига, среднее значение которых и генерирует наблюдаемое в данный момент состояние. Тем самым метод построения средней полугруппы на основе теоремы Чернова [6] может служить основой для разработки приближенной итерационной вычислительной процедуры, сходящейся к решению рассматриваемой эволюционной задачи. Когерентные, а также сжатые состояния в последнее время активно применяются не только в моделях квантовой оптики, но и в моделях высокотемпературной сверхпроводимости [40] и в задаче о поляроне в биологических структурах [95; 96]. Отметим, что основной моделью в указанных работах [40; 95; 96] является гамильтониан Фрелиха [97] в сверхпроводимости, описывающий взаимодействие операторов рождения-уничтожения электронов с фононами, спектр которого точно исследовать пока не удастся. Решение этой задачи представляется в виде действия произведения операторов Гейзенберга и операторов сдвига на вакуумное состояние гамильтониана. Поэтому анализ таких операторных конструкций с точки зрения применения теоремы Чернова является теоретически важным, а получаемые на его основе приближенные методы, сходящиеся к точному решению, такие, как усреднение по Фейнману-Чернову, могут быть практически востребованными. В работах [45; 98–104] рассмотрены обобщенные когерентные

состояния, которые генерируются неклассическими коммутационными соотношениями. Такие соотношения возникают при анализе моделей комбинационного рассеяния в квантовой оптике при диагонализации полиномиальных гамильтонианов с полным набором законов сохранения [105]. Тем самым анализ композиций преобразований, моделирующих эволюцию состояний квантовых систем, является актуальной задачей.

В первом разделе вводятся понятия и обсуждаются некоторые свойства когерентных состояний и операторов сдвига. Во втором разделе рассматривается усреднение случайных операторов сдвига с помощью итераций Фейнмана-Чернова. В третьем разделе рассматриваются случаи неканонических коммутационных соотношений, вводятся понятия двойственных по сдвигу лестничных операторов и приводится пример параметрического семейства неканонических коммутационных соотношений, при которых можно построить унитарные операторы сдвига, удовлетворяющие полугрупповому свойству на прямых в пространстве когерентных состояний, проходящих через начало координат. В четвертом приведен алгоритм аппроксимации операторов сдвига с помощью итераций Чернова, а также результаты численного эксперимента по сравнению вычислительной эффективности предлагаемого алгоритма с другими известными методами вычисления операторов сдвига на усеченном гильбертовом пространстве.

4.1 Представление когерентных состояний и операторы сдвига

Пусть \mathcal{H} – сепарабельное гильбертово пространство, а $B(\mathcal{H})$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов в \mathcal{H} . Проективизация $P(\mathcal{H})$ гильбертова пространства \mathcal{H} , то есть факторизация ненулевых векторов по от-

ношению эквивалентности $|\psi\rangle \sim |\phi\rangle \iff \exists \alpha \neq 0 \in \mathbb{C} : |\psi\rangle = \alpha|\phi\rangle$, определяет множество чистых состояний квантовой системы.

Пусть \hat{a}, \hat{a}^+ – лестничные операторы в \mathcal{H} , удовлетворяющие каноническому коммутационному соотношению $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ и в представлении чисел заполнения (в некотором ортонормированном базисе) имеющие вид:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Состояния, являющиеся собственными векторами оператора уничтожения, называются когерентными и обозначаются $|z\rangle$, где z – соответствующие собственное значение:

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle.$$

Когерентные состояния в случае канонического коммутационного соотношения порождают неортогональное разбиение единицы [98]:

$$\frac{1}{\pi} \int |z\rangle\langle z| d^2z = I. \quad (4.1)$$

Возможны другие определения когерентных состояний, краткий обзор различных подходов можно найти в [106].

Заметим, что вакуумное состояние $|0\rangle$ является когерентным состоянием. Операторнозначная функция комплексного переменного

$$\hat{D}(z) = e^{z\hat{a}^+ - \bar{z}\hat{a}}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

определяет семейство операторов сдвига, порождающих когерентное состояние $|z\rangle$ при действии на вакуумное состояние $|0\rangle$:

$$\hat{D}(z)|0\rangle = |z\rangle.$$

Композиция операторов сдвига не является оператором сдвига и определяется формулой

$$\hat{D}(z_2)\hat{D}(z_1) = e^{\frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2)} \hat{D}(z_1 + z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

При этом если z_1 и z_2 лежат в комплексной плоскости на одной прямой l , проходящей через начало координат, то $\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 = 0$ и композиция $\hat{D}(z_1)$ и $\hat{D}(z_2)$ уже является оператором сдвига, более того, для всех точек прямой l выполняется полугрупповое свойство:

$$\hat{D}(z_2)\hat{D}(z_1) = \hat{D}(z_1 + z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in l.$$

Таким образом, для фиксированного $z \in \mathbb{C}$ операторнозначная функция действительного переменного

$$\hat{D}_z(t) = e^{zt\hat{a}^+ - \bar{z}t\hat{a}}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

является однопараметрической сильно непрерывной группой унитарных операторов с генератором $z\hat{a}^+ - \bar{z}\hat{a}$.

4.2 Усреднение случайных операторов сдвига

Пусть $z_\omega = z(\omega)$, $\omega \in \Omega$, – комплексная случайная величина, где $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – заданное вероятностное пространство. Тогда $\hat{D}_\omega(t) = \exp(z_\omega t\hat{a}^+ - \bar{z}_\omega t\hat{a})$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ – является случайной полугруппой, то есть измеримым отображением из Ω в пространство сильно непрерывных однопараметрических полугрупп в $B(\mathcal{H})$.

При этом оператор $\mathbb{E}\hat{D}_\omega(t)$ при некотором фиксированном t , вообще говоря, не является оператором сдвига, а также не является унитарным [94]. Это видно уже из простейшего примера, когда z_ω может принимать только два

различных значения z_1 и z_2 с равными вероятностями. Из этого же примера видно, что однопараметрическое семейство операторов $\mathbb{E}\hat{D}_\omega(t)$, вообще говоря, не обладает полугрупповым свойством, так как операторнозначная функция $\frac{1}{2} \left(\hat{D}(z_1 t) + \hat{D}(z_2 t) \right)$ является суммой двух экспоненциальных функций, и сама уже не является экспоненциальной.

По следствию теоремы Чернова [46] в случае когда z_ω имеет конечное математическое ожидание, оператор $\mathbb{E}\hat{D}_\omega(t)$ эквивалентен по Чернову оператору $\hat{D}(\mathbb{E}z_\omega t)$, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \left\| \left(\mathbb{E}\hat{D}_\omega\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n - \hat{D}(\mathbb{E}z_\omega t) \right\| |\psi\rangle = 0, \forall T > 0, \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}.$$

4.3 Операторы сдвига для неканонических коммутационных соотношений

В работах [45; 98] рассмотрены представления неклассических коммутационных соотношений между операторами канонически сопряженных величин и исследованы свойства системы когерентных состояний, определяемых как собственные векторы оператора уничтожения. Следуя обозначениям [45], рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство \mathcal{H} и действующие в нем линейные операторы \hat{a}, \hat{a}^+ и \hat{n} , такие что оператор \hat{n} самосопряжен, операторы \hat{a}, \hat{a}^+ эрмитово сопряжены друг другу. Пусть представление Фока для данных коммутационных соотношений в стандартном ортонормированном базисе в \mathcal{H} имеет вид:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{A_n}|n-1\rangle, \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{A_{n+1}}|n+1\rangle, \hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (4.2)$$

где $\{A_n\}_{n=0}^\infty$ – некоторая возрастающая вещественная числовая последовательность, начинающаяся с нуля: $A_0 = 0, A_{n+1} > A_n$. В этом случае коммутационное

соотношение задается формулой:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+]|n\rangle = (A_{n+1} - A_n)|n\rangle. \quad (4.3)$$

Несложно проверить, что в случаях неканонических коммутационных соотношений аналог классического оператора сдвига $\hat{D}(z) = \exp(z\hat{a}^+ - \bar{z}\hat{a})$ не генерирует когерентное состояние $|z\rangle$ из вакуумного состояния $|0\rangle$. В связи с этим встает вопрос существования комплексного однопараметрического семейства унитарных операторов сдвига, позволяющих генерировать произвольные когерентные состояния и обладающих полугрупповым свойством на прямых, проходящих через начало координат.

Определим двойственные по сдвигу (displacement duality) к \hat{a} и \hat{a}^+ лестничные операторы как:

$$\hat{b}|n\rangle = \frac{n}{\sqrt{A_n}}|n-1\rangle, \quad n > 0, \quad (4.4)$$

$$\hat{b}|0\rangle = 0, \quad (4.5)$$

$$\hat{b}^+|n\rangle = \frac{n+1}{\sqrt{A_{n+1}}}|n+1\rangle.$$

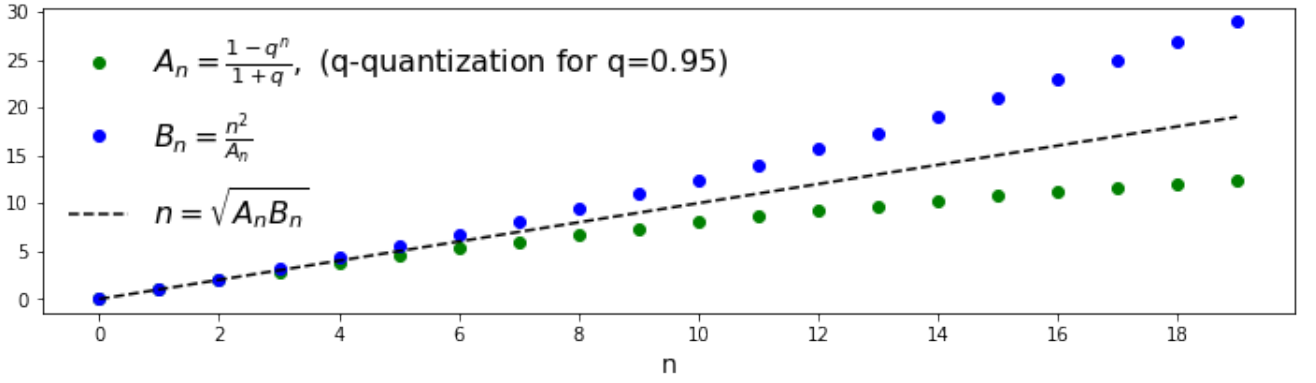
Заметим, что при таком определении коммутатор $[\hat{a}, \hat{b}^+] = 1$.

На рисунке 4.1 в качестве иллюстрации представлены последовательности A_n и $B_n = \frac{n^2}{A_n}$ для случая q -квантования [98].

В работе [100] в несколько других обозначениях было определено семейство обобщенных операторов сдвига

$$\hat{D}_a(z) = \exp\left(z\hat{b}^+\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z\hat{b}^+)^i}{i!}. \quad (4.6)$$

Оператор $\hat{D}_a(z)$ при действии на вакуумное состояние $|0\rangle$ генерирует собственный вектор оператора уничтожения \hat{a} внутри некоторого круга сходимости, но является неограниченным оператором.

Рисунок 4.1 — Пример последовательностей A_n и $\frac{n^2}{A_n}$ для q -квантования

Теорема 4.3.1. Действие оператора $\hat{D}_a(z) = \exp(z\hat{b}^+)$ на вакуумное состояние $|0\rangle$ генерирует собственный вектор $|z\rangle_a$ оператора уничтожения a , при условии $z \in M_a$, $M_a = \{|z| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{A_n}\}$.

А действие оператора $\hat{D}_b(z) = \exp(z\hat{a}^+)$ на вакуумное состояние $|0\rangle$ генерирует собственный вектор $|z\rangle_b$ оператора уничтожения b , при условии $z \in M_b$, $M_b = \{|z| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{A_n}}\}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\hat{D}_a(z)\hat{a}\hat{D}_a(-z) = e^{z\hat{b}^+}\hat{a}e^{-z\hat{b}^+}.$$

Из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [107] следует:

$$\hat{D}_a(z)\hat{a}\hat{D}_a(-z) = \hat{a} + \underbrace{[z\hat{b}^+, \hat{a}]}_{-z} + \frac{1}{2}\underbrace{[z\hat{b}^+, [z\hat{b}^+, \hat{a}]]}_{0} + \underbrace{\dots}_{0} = \hat{a} - z.$$

То есть все слагаемые в разложении кроме первых двух равны нулю в силу коммутационного соотношения $[\hat{a}, \hat{b}^+] = 1$.

Тогда имеем

$$\hat{a}\hat{D}_a(-z)|z\rangle_a = \hat{D}_a(-z)\hat{D}_a(z)\hat{a}\hat{D}_a(-z)|z\rangle_a = \hat{D}_a(-z)(\hat{a} - z)|z\rangle_a,$$

где правая часть равна нулю для произвольного когерентного состояния $|z\rangle_a$ в круге сходимости M_a , внутри которого когерентные состояния корректно определены. Отсюда следует, что

$$\hat{D}_a(-z)|z\rangle_a = C|0\rangle \Rightarrow \hat{D}_a(z)|0\rangle = \frac{1}{C}|z\rangle_a.$$

Аналогично, в силу того, что $[\hat{b}, \hat{a}^+] = 1$, имеем

$$\hat{D}_b(z)\hat{b}\hat{D}_b(-z) = \hat{b} + \underbrace{[z\hat{a}^+, \hat{b}]}_{\parallel -z} + \frac{1}{2}\underbrace{[z\hat{a}^+, [z\hat{a}^+, \hat{b}]]}_{\parallel 0} + \underbrace{\dots}_{\parallel 0} = \hat{b} - z.$$

Откуда следует, что действие оператора $\hat{D}_b(z) = \exp(z\hat{a}^+)$ на вакуумное состояние $|0\rangle$ генерирует собственный вектор $|z\rangle_b$ оператора уничтожения b .

□

Отсутствие унитарности оператора $\hat{D}_a(z)$ является существенным недостатком. Это означает, что $\hat{D}_a(z)$ не может быть оператором эволюции замкнутой квантовой системы. Следующая теорема дает пример неканонических коммутационных соотношений, для которых возможно построить унитарный оператор сдвига.

Теорема 4.3.2. Пусть для некоторого $\alpha \geq 0$ лестничные операторы задаются соотношениями

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{\frac{n}{(1-\alpha) + \alpha n}}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{1 + \alpha n}}|n+1\rangle, \quad (4.7)$$

тогда двойственные по сдвигу лестничные операторы имеют вид:

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n((1-\alpha) + \alpha n)}|n-1\rangle, \quad \hat{b}^+|n\rangle = \sqrt{(n+1)(1 + \alpha n)}|n+1\rangle, \quad (4.8)$$

и оператор сдвига

$$\hat{D}_a(z) = e^{(z\hat{b}^+ - \bar{z}\hat{b})}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad (4.9)$$

генерирует когерентное состояние $|\frac{-1+\sqrt{1+4\alpha|z|^2}}{2\alpha|z|^2}z\rangle_a$ оператора уничтожения \hat{a} , является унитарным и удовлетворяет полугрупповому свойству на прямых, проходящих через начало координат.

Доказательство. Оператор $z\hat{b}^+ - \bar{z}\hat{b}$ – антиэрмитов, следовательно $\hat{D}_a(z) = \exp(z\hat{b}^+ - \bar{z}\hat{b})$ – унитарный оператор.

Введем обозначение

$$\hat{G}(z) = z\hat{b}^+ - \bar{z}\hat{b}.$$

Тогда по формуле Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа

$$\begin{aligned} \hat{D}(z_2)\hat{D}(z_1) = \exp & \left(\hat{G}(z_1) + \hat{G}(z_2) + \frac{1}{2}[\hat{G}(z_1), \hat{G}(z_2)] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{12}[\hat{G}(z_1), [\hat{G}(z_1), \hat{G}(z_2)]] - \frac{1}{12}[\hat{G}(z_2), [\hat{G}(z_1), \hat{G}(z_2)]] + \dots \right). \end{aligned}$$

В случае если z_1 и z_2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, коммутатор $[\hat{G}(z_1), \hat{G}(z_2)]$ равен нулю:

$$[\hat{G}(z_1), \hat{G}(z_2)] = (\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2)[\hat{b}^+, \hat{b}] = 0,$$

и композиция операторов сдвига удовлетворяет полугрупповому свойству:

$$\hat{D}(z_2)\hat{D}(z_1) = \hat{D}(z_1 + z_2).$$

Для лестничных операторов $\hat{a}, \hat{a}^+, \hat{b}, \hat{b}^+$ в данном случае справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\hat{b}^+ &= \hat{a}^+ + \alpha \hat{a}^+ \hat{b}^+ \hat{a}, \\ \hat{b} &= \hat{a} + \alpha \hat{a}^+ \hat{b} \hat{a}.\end{aligned}$$

Так как $[\hat{b}, \hat{a}] = [\hat{a} + \alpha \hat{a}^+ \hat{b} \hat{a}, \hat{a}] = -\alpha \hat{a}^2$ и $[\hat{b}, \hat{a}^2] = 0$, то:

$$\hat{D}_a(z) \hat{a} \hat{D}_a(-z) = \hat{a} - z + \bar{z} \alpha \hat{a}^2.$$

Тогда имеем

$$\hat{a} \hat{D}_a(-z) |z_0\rangle_a = \hat{D}_a(-z) \hat{D}_a(z) \hat{a} \hat{D}_a(-z) |z_0\rangle_a = \hat{D}_a(-z) (\hat{a} - z + \bar{z} \alpha \hat{a}^2) |z_0\rangle_a$$

Корнями квадратного уравнения $z_0 - z + \bar{z} \alpha z_0^2 = 0$ относительно переменной z_0 являются числа $\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha|z|^2}}{2\alpha|z|^2} z\right)$ и $\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\alpha|z|^2}}{2\alpha|z|^2} z\right)$, причем только первое из них лежит в круге сходимости $M_a = \left\{|z| < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right\}$, внутри которого корректно определены когерентные состояния.

Тогда получаем, что для произвольного когерентного состояния $|z_0\rangle$ в круге сходимости, внутри которого когерентные состояния корректно определены, $(\hat{a} - z + \bar{z} \alpha \hat{a}^2) |z_0\rangle_a = 0$, если $z_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha|z|^2}}{2\alpha|z|^2} z$. Отсюда и из унитарности $\hat{D}_a(z)$ следует, что для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\hat{D}_a(-z) |z_0\rangle_a = e^{i\theta} |0\rangle \Rightarrow \hat{D}_a(z) |0\rangle = e^{-i\theta} |z_0\rangle_a. \quad (4.10)$$

Т.е. действие оператора $\hat{D}_a(z)$ на вакуумное состояние $|0\rangle$ генерирует собственный вектор $\left|\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha|z|^2}}{2\alpha|z|^2} z\right\rangle_a$ оператора уничтожения \hat{a} . \square

На рисунке 4.2 представлены последовательности A_n и $B_n = \frac{n^2}{A_n}$, определяющие двойственные по сдвигу лестничные операторы (4.7) и (4.8).

Рисунок 4.2 — Последовательности A_n и $\frac{n^2}{A_n}$ для лестничных операторов (4.7) и (4.8) при $\alpha = 0.05$

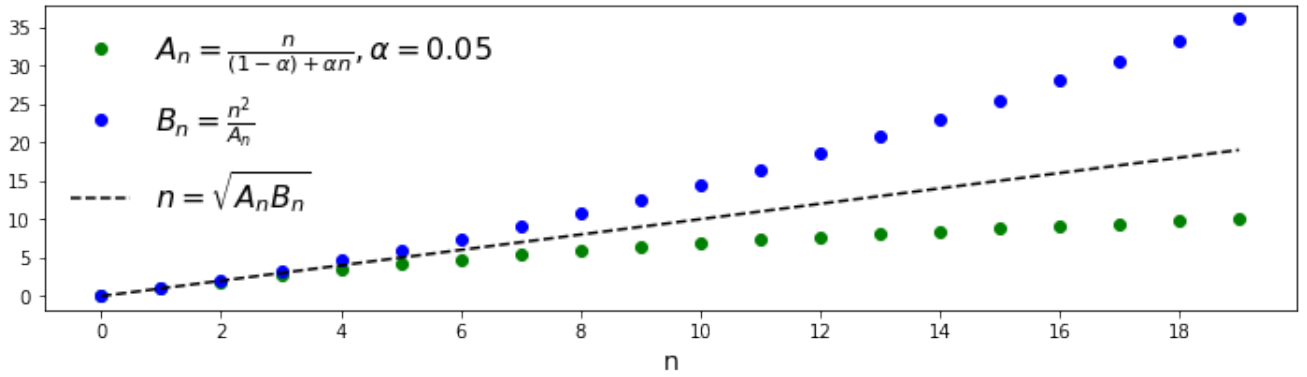
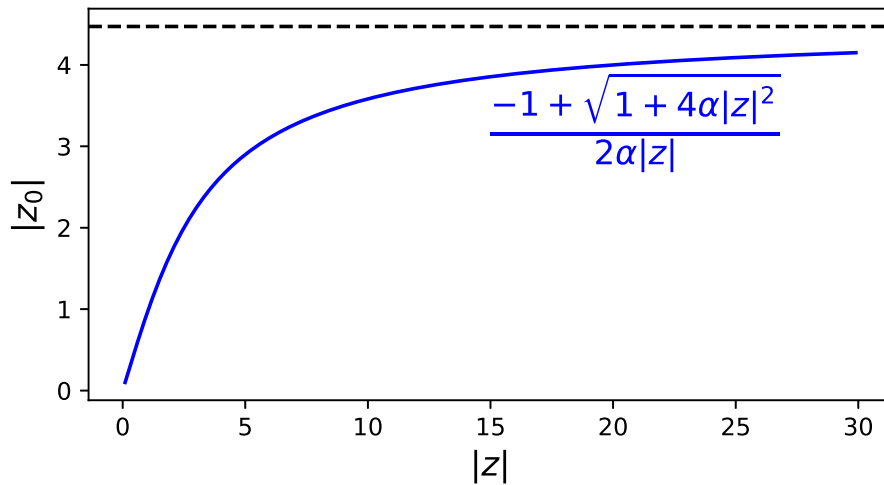


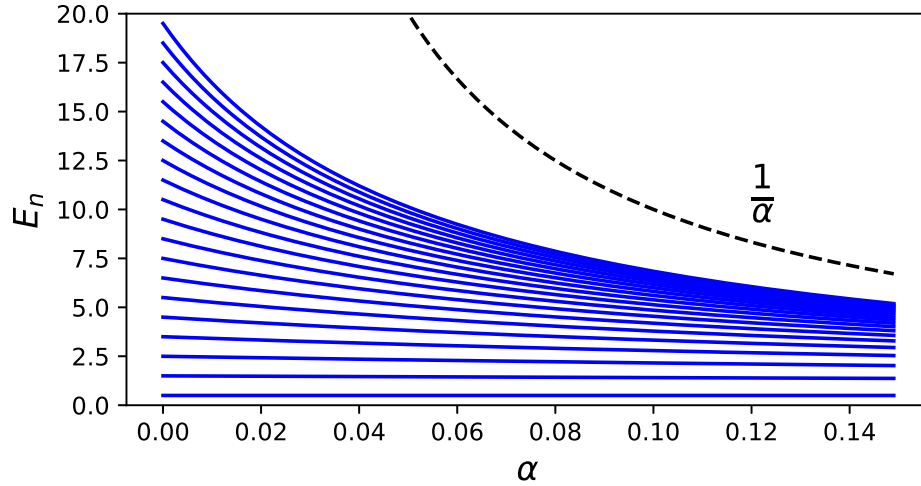
Рисунок 4.3 — Зависимость когерентного состояния \tilde{z} от аргумента оператора сдвига z



На рисунке 4.3 представлена зависимость когерентного состояния $z_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha|z|^2}}{2\alpha|z|^2} z$ от аргумента z оператора сдвига $\hat{D}_\alpha(z)$, получаемое при действии оператором сдвига на вакуумное состояние, при значении параметра деформации $\alpha = 0.05$.

На рисунке 4.3 представлены разрешенные уровни энергии E_n , то есть собственные значения оператора $\frac{1}{2}(\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a})$, при различных значениях параметра деформации α .

Рассмотрим усреднения по Чернову для приведенного выше семейства лестничных операторов. Пусть теперь $z = z(\omega), \omega \in \Omega$ — комплексная случайная

Рисунок 4.4 — Зависимость уровней энергии от параметра деформации α 

величина, где $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ – некоторое вероятностное пространство. Тогда $\hat{D}_a(\omega, t) = \hat{D}_a(z(\omega)t) = \exp(z_\omega t \hat{a}^+ - \overline{z_\omega} t \hat{a})$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, является случайной C_0 -полугруппой.

Теорема 4.3.3. Пусть для некоторого $\alpha \geq 0$ лестничные операторы задаются соотношениями (4.7) и комплексная случайная величина z имеет конечное математическое ожидание, тогда оператор $\mathbb{E}\hat{D}_a(zt)$ эквивалентен по Чернову оператору $\hat{D}_a(\mathbb{E}zt)$.

Доказательство. $\mathbb{E}\hat{D}_a(0) = I$ по построению.

Справедлива оценка

$$\|\mathbb{E}\hat{D}_a(zt)\|_{B(\mathcal{H})} = \left\| \int_{\Omega} \hat{D}_a(z(\omega)t) d\mu(\omega) \right\|_{B(\mathcal{H})} \leq \int_{\Omega} \|\hat{D}_a(z(\omega)t)\|_{B(\mathcal{H})} d\mu(\omega) \leq 1 \quad (4.11)$$

при произвольном $t \geq 0$ в силу унитарности операторов сдвига $\hat{D}_a(zt)$.

Для произвольного вектора u из пересечения областей определения операторов \hat{b} и \hat{b}^+ выполнено

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}\hat{D}_a(zt))'_0 u &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\Omega} \hat{D}_a(z(\omega)t) u d\mu(\omega) - u \right) = \\ &= \int_{\Omega} (z(\omega)\hat{b}^+ - \overline{z(\omega)}\hat{b}) u d\mu(\omega) = \left(\hat{D}_a(\mathbb{E}zt) \right)'_0 u. \end{aligned} \quad (4.12)$$

То есть производная в нуле операторнозначной функции $\mathbb{E}\hat{D}_a(zt)$ совпадает на области определения с генератором сильно непрерывной полугруппы $\hat{D}_a(\mathbb{E}z_\omega t)$.

Тогда требуемое утверждение следует из теоремы Чернова. \square

4.4 Методы аппроксимации операторов сдвига

Рассмотрим задачу аппроксимации операторов сдвига в случае произвольных коммутационных соотношений. Задача разбивается на два случая, которые будем рассматривать отдельно:

- (i) Если лестничные операторы имеют вид (4.7), то операторы сдвига $\hat{D}_a(zt) = e^{(z\hat{b}^+ - \bar{z}\hat{b})t}$ являются унитарным, удовлетворяет полугрупповому свойству по t , а их генераторы $(z\hat{b}^+ - \bar{z}\hat{b})$ являются антиэрмитовыми и трехдиагональными. Заметим, что сюда входит случай канонических коммутационных соотношений.
- (ii) Для общего же случая коммутационных соотношений будем строить аппроксимации неунитарных операторов сдвига $\exp(zt\hat{b}^+)$ или $\exp(z\hat{b}^+ - \bar{z}\hat{a})t$. В этом случае операторы сдвига также удовлетворяют свойству $\hat{D}_a(z) = \hat{D}_a(zt) \circ \hat{D}_a(z(1-t))$ при $t \in (0,1)$, а генераторы являются трехдиагональными, но уже не антиэрмитовы.

При моделировании квантовой динамики на обычном (не квантовом) компьютере вместо бесконечномерного гильбертова пространства \mathcal{H} рассматривают его подпространство, натянутое на конечное число первых базисных векторов, называемое усеченным гильбертовым пространством (truncated Hilbert space). В усеченном гильбертовом пространстве операторы сдвига можно аппроксимировать стандартными способами аппроксимации матричной экспоненты, их обзор можно найти например в [108]. В случае (i) для трехдиагональных

и антиэрмитовых генераторов можно также воспользоваться вычислительно эффективным методом, использующим быстрый алгоритм диагонализации для трехдиагональных эрмитовых матриц, обсуждавшийся на странице вычислительного пакета QuTiP: <https://github.com/qutip/qutip/issues/1293>.

Ниже представлен алгоритм аппроксимации оператора сдвига с помощью итераций Чернова (**Chernoff**). Алгоритм имеет линейную сложность по количеству измерений в усеченном гильбертовом пространстве и по числу используемых итераций Чернова. Заметим, что при известной последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ коэффициентов на вход алгоритму **Chernoff** может подаваться вектор произвольной размерности, в отличие от остальных алгоритмов, где приближение оператора сдвига сразу строится для фиксированной размерности усеченного гильбертова пространства.

Алгоритм: Аппроксимация оператора сдвига с помощью итераций Чернова (**Chernoff**)

Data: $z, |\psi\rangle, N_iter, \{A_n\}$

Result: $\hat{D}_a(z) |\psi\rangle$

begin

for $k = 1$ **to** N_iter **do**

$|\psi\rangle = |\psi\rangle + \frac{1}{N_iter} * (z * \{\sqrt{(n+1)(1+\alpha n)}\} * \text{ShiftToRight}(|\psi\rangle) -$
 $\bar{z} * \{\sqrt{n((1-\alpha)+\alpha n)}\} * \text{ShiftToLeft}(|\psi\rangle)) / *$ (умножения
 массивов поэлементные) */

end

return $|\psi\rangle$

end

В данном исследовании также будут рассмотрены следующие программные реализации аппроксимации операторов сдвига на языке Python:

1. **expm** – метод аппроксимации матричной экспоненты из пакета `scipy` [109; 110];

2. **QuTiP** – метод аппроксимации классического оператора сдвига из достаточно популярного пакета для моделирования квантовых вычислений QuTiP (QuTiP использует для вычисления оператора сдвига `expm` из `scipy`, поэтому это по сути тот же метод, просто с дополнительным "синтаксическим сахаром" для квантовых вычислений, основная страница проекта – <https://qutip.org/>);
3. **Pade** – собственная реализация аппроксимации матричной экспоненты на основе метода, использующего аппроксимации Паде и принцип масштабирования и возведения в квадрат [109];
4. **eig** – нахождение матричной экспоненты с помощью диагонализации (может использоваться только для диагонализуемых операторов) на основе пакета `scipy`;
5. **triag** – нахождение матричной экспоненты с помощью эффективного алгоритма диагонализации трехдиагональной эрмитовой матрицы из пакета `scipy` (может использоваться только для эрмитовых матриц);
6. **triag_precalc** – оптимизированная версия метода **triag**, где часть предварительных вычислений делается заранее и не учитывается в подсчете времени выполнения;
7. **Chernoff** – алгоритм аппроксимации с помощью итераций Чернова.

При реализации всех алгоритмов также использовалась библиотека `numba` для прекомпиляции кода и ускорения расчетов.

Число итераций в методе Чернова выбиралось исходя из того, чтобы относительная ошибка на произвольном векторе не превосходила 10^{-4} , при этом остальные методы являются точными (точность 10^{-15}).

В качестве тестовой задачи бралось вычисление

$$\hat{D}_\alpha(1+i) |(1+i)\sqrt{\#dim/10}\rangle, \quad (4.13)$$

для размерностей $\#dim$: [100,500,1000,2000].

Рисунок 4.5 — Зависимость времени выполнения алгоритмов **tridiag_precalc** и **Chernoff** от размерности $\#dim$ усеченного гильбертова пространства

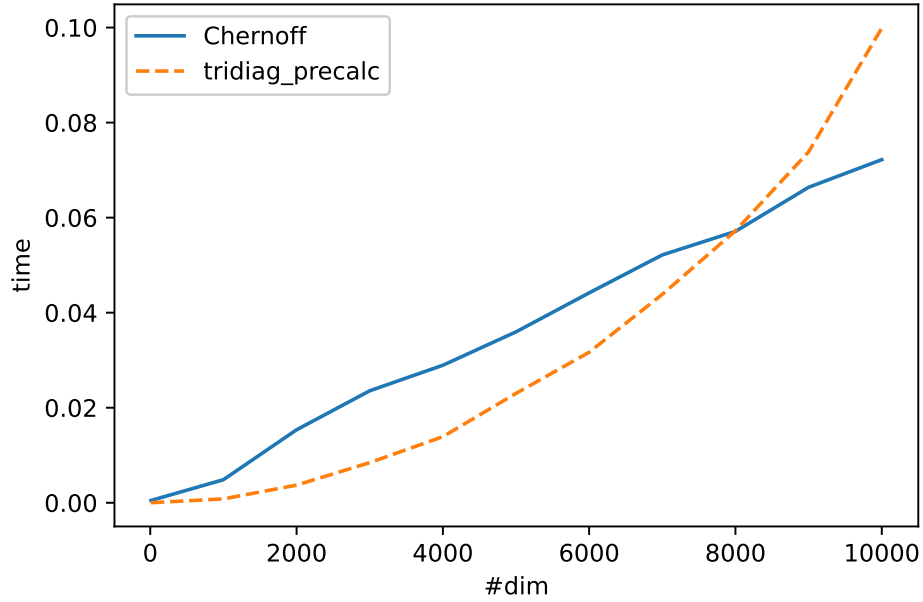


Таблица 4.1 — Время работы алгоритмов для случая (1) в секундах в зависимости от размерности $\#dim$ усеченного гильбертова пространства

#dim	QuTiP	expm	Pade	eig	tridiag	tridiag_precalc	Chernoff
100	0.007	0.007	0.003	0.015	0.002	0.000	0.003
500	1.667	1.637	1.113	0.685	0.037	0.024	0.050
1000	11.77	12.38	6.75	3.49	0.19	0.15	0.18
2000	71.17	71.04	36.18	20.74	1.24	0.85	1.03

В алгоритмах **QuTiP**, **expm**, **Pade** основное время вычислений приходится на вычисление матричной экспоненты, в алгоритме **eig** самым затратным является алгоритм нахождения собственных чисел и векторов. В алгоритмах **tridiag**, **tridiag_precalc** время нахождения собственных чисел и векторов значительно снижено с помощью учета трехдиагональности и эрмитовости матриц генераторов.

При достаточно высоких размерностях (и при выбранной точности аппроксимации) время работы алгоритма **Chernoff** становится меньше, чем время работы алгоритма **tridiag_precalc** в виду меньшей вычислительной сложности (Рис. 4.5).

Заметим, что алгоритмы **tridiag** и **tridiag_precalc** неприменимы для задачи (2), так как в ней генераторы не являются эрмитовыми. А алгоритм **eig** может использоваться в задаче (2) только для расчета операторов $\exp(z\hat{b}^+ - \bar{z}\hat{a})$, так как для оператора $\exp(z\hat{b}^+)$ генератор в нуле является вырожденной матрицей.

Для задачи (1) алгоритм **tridiag_precalc** является оптимальным по времени выполнения. Для задачи (2) группа алгоритмов 'Scaling and squaring' (**expm**, **QuTiP**, **Pade**) является оптимальной для высокой относительной точности аппроксимации (10^{-15}), а алгоритм **Chernoff** – для низкой относительной точности (10^{-4}).

Таким образом, метод приближенного вычисления операторов сдвига с помощью итераций Чернова может оказываться вычислительно эффективнее других методов в некоторых задачах моделирования квантовой динамики.

Заключение

Обзор выполненного исследования.

Тематика диссертации относится к области вычислительной математики, связанной с построением численных аппроксимаций решений эволюционных уравнений, и ее приложений к математической физике. В диссертации рассмотрены задачи аппроксимации эволюционных полугрупп с помощью усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных операторнозначных функций.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Сформулированы и доказаны достаточные условия сходимости последовательности усреднений итераций Фейнмана-Чернова для случайных аффинных преобразований аргумента к предельной сильно непрерывной полугруппе, разрешающей задачу Коши для соответствующего уравнения Фоккера-Планка.
2. Разработан алгоритм численной аппроксимации решений многомерных уравнений Колмогорова, порождаемых случайными аффинными преобразованиями аргумента.
3. Найдено однопараметрическое семейство операторов рождения и уничтожения, для которых операторнозначная функция сдвига является унитарной и удовлетворяет полугрупповому свойству на прямых, проходящих через начало координат.
4. Разработан и реализован в виде программного комплекса численный метод моделирования необратимой эволюции квантовых систем.

Список литературы

1. *Feynman R.P.* Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics // *Rev. Mod. Phys.* — 1948. — Vol. 20. — Pp. 367–387.
2. *Feynman R.P.* An operation calculus having applications in quantum electrodynamics // *Phys. Rev.* — 1951. — Vol. 84. — Pp. 108–128.
3. *Nelson E.* Feynman Integrals and the Schroedinger Equation // *J. Math. Phys.* — 1964. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 332–343.
4. *Trotter H.F.* On the product of semi-groups of operators // *Proceedings of the American Mathematical Society.* — 1959. — Vol. 10, no. 4. — Pp. 545–551.
5. *Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A.* Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula // *J. Math. Phys.* — 2002. — Vol. 43, no. 10. — Pp. 5161–5171.
6. *Chernoff P.* Note on product formulas for operator semigroups // *J. Funct. Anal.* — 1968. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 238–242.
7. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // *Изв. РАН. Сер. матем.* — 2016. — Т. 80, № 5. — С. 141–172.
8. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана как метод усреднения случайных гамильтонианов // *Тр. МИАН.* — 2014. — Т. 285. — С. 232–243.
9. Рандомизированное квантование гамильтоновых систем / Дж. Гоф, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов // *Доклады РАН.* — 2021. — Т. 498, № 1. — С. 31–36.

10. Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. Итерации Фейнмана–Чернова и их приложения в квантовой динамике // *Труды МИАН*. — 2018. — Т. 301. — С. 209–218.
11. Remizov I.D. Formulas that represent Cauchy problem solution for momentum and position Schrodinger equation // *Potential Analysis*. — 2020. — Vol. 52. — P. 339–370.
12. Галкин О.Е., Ремизов И.Д. Скорость сходимости черновских аппроксимаций операторных C_0 -полугрупп // *Матем. заметки*. — 2022. — Т. 111, № 2. — С. 297–299.
13. Chernoff approximations of Feller semigroups in Riemannian manifolds / S. Mazzucchi, V. Moretti, I. Remizov, O. Smolyanov // *Mathematische Nachrichten*. — 2023. — Vol. 296, no. 2. — Pp. 1244–1284.
14. Сакбаев В.Ж. Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвигов // *ТМФ*. — 2017. — Т. 191, № 3. — С. 473–502.
15. Сакбаев В.Ж., Ефремова Л.С. Понятие взрыва множества решений дифференциальных уравнений и усреднение случайных полугрупп // *ТМФ*. — 2015. — Т. 185, № 2. — С. 252–271.
16. Obrezkov O.O. “Representations of the solutions of Lindblad equations with the help of randomized Feynman formulas // *Dokl. Akad. Nauk*. — 2016. — Vol. 466, no. 5. — Pp. 518–521.
17. Butko Ya.A. Chernoff approximation for semigroups generated by killed Feller processes and Feynman formulae for time-fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equations // *Fract. Calc. Appl. Anal.* — 2018. — Vol. 21, no. 5.
18. Butko Ya.A. Chernoff approximation of subordinate semigroups // *Stoch. Dyn.* — 2018. — Vol. 18, no. 3.

19. Марковские аппроксимации эволюции квантовых систем / Дж. Гоф, Ю.Н. Орлов, В.Ж. Сакбаев, О.Г. Смолянов // *Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.* — 2022. — Т. 503. — С. 48–53.
20. Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. Представления функциональными интегралами решений уравнения теплопроводности с оператором Владимирова // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.* — 2008. — Т. 4. — С. 16–22.
21. Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н. Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям для эволюционных уравнений с оператором Владимирова // *Труды МИАН.* — 2009. — Т. 265. — С. 229–240.
22. Plyashechnik A.S. Feynman formula for Schrödinger-type equations with time- and space-dependent coefficients // *Russ. J. Math. Phys.* — 2012. — Vol. 19, no. 3. — Pp. 340–359.
23. Zagrebnov V.A. Notes on the Chernoff estimate // *International Journal of Modern Physics A.* — 2022. — Vol. 37, no. 20n21.
24. Prudnikov P.S. Speed of convergence of Chernoff approximations for two model examples: heat equation and transport equation // *Preprint: arXiv:2012.09615.* — 2012.
25. Bernád J.Z. Product formulas in the framework of mean ergodic theorems // *Adv. Oper. Theory.* — 2020. — Vol. 5. — P. 15–26.
26. Anshelevich M., J.D. Williams. Limit theorems for monotonic convolution and the Chernoff product formula // *Preprint: arXiv:1209.4260.* — 2012.
27. Neklyudov A.Y. Chernoff and Trotter-Kato theorems for locally convex spaces // *Preprint: arXiv:0804.0916.* — 2008.

28. *Smolyanov O.G.* Feynman formulae for evolutionary equations // *Trends in Stochastic Analysis, London Mathematical Society Lecture Notes Series.* — 2009. — Т. 353. — С. 283–302.
29. *Smolyanov O.G.* Schrodinger type semigroups via Feynman formulae and all that // *Proceedings of the Quantum Bio-Informatics V, Tokyo University of Science, Japan, 7 - 12 March 2011. World Scientific.* — 2013. — С. 301–313.
30. *Бутко Я.А.* Фейнмановские формулы для эволюционных уравнений // *Наука и образование.* — 2014. — Т. 3. — С. 95–132.
31. *Kinderknecht (Butko) Ya.* Chernoff approximation of evolution semigroups generated by Markov processes. Feynman formulae and path integrals // *Habilitationsschrift.* — 2017.
32. *Furstenberg H.* Non-commuting random products // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1963. — Vol. 108, no. 3. — Pp. 377–428.
33. *Тутубалин В.Н.* О предельных теоремах для произведений случайных матриц // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1965. — Т. 10, № 1. — С. 19–32.
34. *Скороход А.В.* Операторные стохастические дифференциальные уравнения и стохастические полугруппы // *Успехи матем. наук.* — 1982. — Т. 37, № 6. — С. 157–183.
35. *Berger M.A.* Central limit theorem for products of random matrices // *Trans. AMS.* — 1984. — Vol. 285, no. 2. — Pp. 777–803.
36. *Мета М.Л.* Случайные матрицы. — Москва: МЦНМО, 2012. — 648 с.
37. *Шубин Н.Ю.* Статистические методы в теории ядра // *Физика элементарных частиц и атомного ядра.* — 1974. — Т. 5, № 4. — С. 1023–1074.
38. *Холеево А.С.* Стохастические представления квантовых динамических полугрупп // *Тр. МИАН СССР.* — 1989. — Т. 191, № 4. — С. 130–139.

39. *Teklemariam G. et al.* Method for modeling decoherence on a quantum-information processor // *Phys. Rev. A.* — 2003. — Vol. 67, no. 062316.
40. *Lakhno V.D.* Translation-invariant bipolarons and the problem of high temperature superconductivity // *Solid State Commun.* — 2012. — Vol. 152, no. 7. — Pp. 621–623.
41. *Castejón O., Kaloshin V.* Random Iteration of Maps on a Cylinder and diffusive behavior // *Preprint: arXiv:1501.03319.* — 2015.
42. *Козырев С.В.* Модель вибронов в квантовом фотосинтезе как аналог модели лазера // *Тр. МИАН.* — 2019. — Т. 306. — С. 158–169.
43. *Bonaccorci S., Cottini F., Mugnolo D.* Random evolution equation: well-posedness, asymptotics and application to graphs // *Appl Math Optim.* — 2021. — Vol. 84. — Pp. 2849–2887.
44. *Girotti F. et al.* Large deviations, central limit, and dynamical phase transitions in the atom maser // *J. Math. Phys.* — 2022. — Vol. 63, no. 062202.
45. *Kalmetev R.Sh., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.* Generalized Coherent States Representation // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* — 2021. — Vol. 42, no. 11. — Pp. 2608–2614. — (WoS, Scopus, ВАК).
46. *Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.* Итерации Чернова как метод усреднения случайных аффинных преобразований // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2022. — Т. 62, № 6. — С. 1030–1041. — (WoS, Scopus, ВАК).
47. *Кальметьев Р.Ш., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.* Усреднение случайных аффинных преобразований аргумента функций // *Уфимский математический журнал.* — 2023. — Т. 15, № 2. — С. 55–64. — (WoS, Scopus, ВАК).

48. *Kalmetev R.Sh., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.* Quantum Decoherence via Chernoff Averages // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2023. — Vol. 44, no. 6. — P. 2044–2050. — (WoS, Scopus, ВАК).
49. *Кальметьев Р.Ш.* Усреднение по Чернову линейных дифференциальных уравнений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2023. — 12 стр. — (ВАК).
50. *Кальметьев Р.Ш.* Аппроксимация решений многомерного уравнения Колмогорова с помощью итераций Фейнмана-Чернова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2023. — 15 стр. — (ВАК).
51. *Кальметьев Р.Ш.* Об операторах сдвига для обобщенных когерентных состояний // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. — 2021. — 61. — С. 51–54.
52. *Kalmetev R.Sh.* Quantum decoherence via Chernoff averages // International Online Conference «One-Parameter Semigroups of Operators 2023». — 2023. — Pp. 48-49.
53. *Ремизов И.Д.* Формулы Фейнмана для параболических дифференциальных уравнений и исчисление функций Чернова: Ph.D. thesis / МГУ. — Москва, 2017.
54. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — New York: Springer New York, 1999. — 589 pp.
55. *Замана К.Ю.* Усреднение случайных ортогональных преобразований аргумента функций // *Уфимск. матем. журн.* — 2021. — Т. 13, № 4. — С. 23–41.

56. *Замана К.Ю., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Случайные процессы на группе ортогональных матриц и описывающие их эволюционные уравнения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* — 2020. — Т. 60, № 10. — С. 1741–1756.
57. *Hall B.C.* Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. — Springer, 2015. — 449 pp.
58. *Замана К.Ю., Сакбаев В.Ж.* Композиции независимых случайных операторов и связанные с ними дифференциальные уравнения // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша.* — 2022. — № 49.
59. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — Москва: Мир, 1973. — 740 с.
60. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп // *Труды МИАН.* — 2019. — Т. 306. — С. 210–226.
61. *Орлов Ю.Н., Осминин К.П.* Нестационарные временные ряды. — УРСС, 2011. — 384 с.
62. *Graham C., Talay D.* Stochastic Simulation and Monte Carlo Methods. — Heidelberg: Springer Berlin, 2013. — 260 pp.
63. *Graham C. et al.* Probabilistic Models for Nonlinear Partial Differential Equations. — Heidelberg: Springer-Verlag Berlin, 1996. — 302 pp.
64. *Sherman A.S., Peskin C.S.* A Monte Carlo method for scalar reaction diffusion equations // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* — 1986. — Vol. 7. — Pp. 1360–1372.
65. *Richter L., Berner J.* Robust SDE-Based Variational Formulations for Solving Linear PDEs via Deep Learning // *Proceedings of the 39th International Conference on Machine Learning, PMLR.* — 2022. — Vol. 162. — Pp. 18649–18666.

66. *Han J., Jentzen A., E. Weinan.* Solving highdimensional partial differential equations using deep learning // *Proceedings of the National Academy of Sciences.* — 2018. — Vol. 115, no. 34. — Pp. 8505–8510.
67. *E W., Han J., A. Jentzen.* Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations // *Communications in Mathematics and Statistics.* — 2017. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 349–380.
68. *Kovachki N. et al.* Neural Operator: Learning Maps Between Function Spaces // *arXiv:2108.08481.* — 2021.
69. *Simon B.* Functional Integration and Quantum Physics. — New York: Academic Press, 1979. — 295 pp.
70. *Лобода А.А.* Метод Ито доказательства формулы Фейнмана-Каца для евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера // *Дифференциальные уравнения.* — 2018. — Т. 54, № 4.
71. *Karatzas I., Shreve S.E.* Brownian Motion and Stochastic Calculus. — New York: Springer New York, 1998. — 470 pp.
72. *Øksendal B.* Stochastic Differential Equations. — Heidelberg: Springer Berlin, 2003. — 379 pp.
73. *Орлов Ю.Н., Федоров С.Л.* Моделирование ансамбля нестационарных случайных траекторий с использованием уравнения Фоккера–Планка // *Матем. моделирование.* — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 61–72.
74. *Бобылев А.В., Потапенко И.Ф., Карпов С.А.* Моделирование методом Монте-Карло кинетического столкновительного уравнения с внешними полями // *Матем. моделирование.* — 2014. — Т. 26, № 5. — С. 79–98.

75. Иванов Д.Д., Теретёнков А.Е. Динамика моментов и стационарные состояния для уравнений ГКСЛ типа классической диффузии // *Матем. заметки*. — 2022. — Т. 111, № 2. — С. 307–311.
76. Трушечкин А.С. Необратимость и роль измерительного прибора в функциональной формулировке классической механики // *ТМФ*. — 2010. — Т. 164, № 3. — С. 435–440.
77. Open quantum system dynamics and the mean force Gibbs state / A.S. Trushechkin, M. Merkli, J.D. Cresser, J. Anders // *AVS Quantum Sci.* — 2022. — Vol. 4. — P. 23.
78. Nosal Iu.A., Teretenkov A.E. Higher Order Moments Dynamics for Some Multimode Quantum Master Equations // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. — 2022. — Т. 43. — С. 1726–1739.
79. Тутубалин В.Н. Некоторые теоремы типа усиленного закона больших чисел // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1969. — Т. 37, № 6. — С. 319–326.
80. А.В. Летчиков. Условная предельная теорема для произведений случайных матриц // *Матем. сб.* — 1995. — Т. 186, № 3. — С. 65–84.
81. В.Ю. Протасов. Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц // *Матем. сб.* — 2011. — Т. 202, № 1. — С. 105–132.
82. Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh., Shmidt E.V. Operator Approach to Weak Convergence of Measures and Limit Theorems for Random Operators // *Lobachevskii J Math.* — 2021. — Vol. 42, no. 10. — Pp. 2413–2426.
83. Glauber R.J. Classical behavior of systems of quantum oscillators // *Physics Letters*. — 1966. — Vol. 21, no. 6. — Pp. 650–652.
84. Mehta C.L., Sudarshan E.C.G. Time evolution of coherent states // *Physics Letters*. — 1966. — Vol. 22, no. 5. — Pp. 574–576.

85. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields, Vol. 3. — Cambridge University Press, 1995. — 143 pp.
86. *Leibfried D. et al.* Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate // *Nature*. — 2003. — Vol. 422. — P. 412–415.
87. *Müller K., Luoma K., Strunz W.T.* Geometric phase gates in dissipative quantum dynamics // *Phys. Rev. A*. — 2020. — Vol. 102, no. 032611.
88. *Berry M.* Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // *Proc. R. Soc. Lond. Ser.A*. — 1984. — Vol. 292. — Pp. 47–57.
89. Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory / E. Joos, H.D. Zeh, C. Kiefer et al. — Heidelberg: Springer Berlin, 2003. — 496 pp.
90. *Casas F., Murua A., Nadinic M.* Efficient computation of the Zassenhaus formula // *Computer Physics Communications*. — 2012. — Vol. 183, no. 11. — Pp. 2386–2391.
91. *Reutenauer C.* Free Lie algebras. — New York: Oxford University Press, 1993. — 288 pp.
92. *Schleich W.* Quantum Optics in Phase Space. — Wiley-VCH, 2001. — 696 pp.
93. *Koopman B.O.* Hamiltonian systems and transformation in hilbert space // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. — 1931. — Vol. 17, no. 5. — P. 315.
94. *Borisov L.A., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.* Chernoff Equivalence for Shift Operators, Generating Coherent States in Quantum Optics // *Lobachevskii J Math*. — 2018. — Vol. 39. — Pp. 742–746.
95. *Lakhno V.D., Sultanov V.B.* On the possibility of bipolaronic states in DNA // *Mol.Biophysics*. — 2011. — Vol. 56, no. 2. — Pp. 210–213.

96. *Каширина Н.И., Лазно В.Д.* Континуальная модель одномерного биполярона Холстейна в ДНК // *Мат. биол. и биоинф.* — 2014. — Т. 9, № 2. — С. 430–437.
97. *Fröhlich H.* On the Theory of superconductivity: The one dimensional case // *Proceedings of the Royal Society A.* — 1954. — Vol. 223, no. 1154. — Pp. 296–305.
98. *Орлов Ю.Н.* Основы квантования вырожденных динамических систем. — Москва: МФТИ, 2004. — 236 с.
99. *Barut A. O., Girardello L.* New "Coherent" States associated with non-compact groups // *Communications in Mathematical Physics.* — 1971. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 41–55.
100. On the coherent states, displacement operators and quasidistributions associated with deformed quantum oscillators / P. Aniello, V. Man'ko, G. Marmo et al. // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* — 2000. — Vol. 2, no. 6. — Pp. 718–725.
101. *Perelomov A.M.* Coherent states for arbitrary Lie groups // *Commun. Math. Phys.* — 1972. — Vol. 26. — Pp. 222–236.
102. *Perelomov A.M.* Generalized coherent states and their applications. — Berlin: Springer, 1986. — 320 pp.
103. *Gilmore R.* Geometry of symmetrized states // *Annals of Physics. Elsevier BV.* — 1972. — Vol. 74, no. 2. — Pp. 391–463.
104. *Gilmore R.* On properties of coherent states // *Revista Mexicana de Física.* — 1974. — Vol. 23. — Pp. 143–187.
105. *Orlov Yu.N., Vedenyapin V.V.* Special polynomials in problems of quantum optics // *Modern Physics Letters B.* — 1995. — Vol. 9, no. 5. — Pp. 291–298.

106. *Martin-Dussaud P.* Searching for Coherent States: From Origins to Quantum Gravity // *Quantum*. — 2021. — Vol. 5, 390.
107. *Rossmann W.* Lie groups: an introduction through linear groups. — Oxford University Press, 2006. — 265 pp.
108. *Moler C., Loan C.V.* Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later // *SIAM Review*. — 2003. — Vol. 45, no. 1. — Pp. 3–49.
109. *Al-Mohy A.H., Higham N.J.* A New Scaling and Squaring Algorithm for the Matrix Exponential // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2009. — Vol. 31, no. 3. — Pp. 970–989.
110. *Higham N.J., Tisseur F.* A Block Algorithm for Matrix 1-Norm Estimation, with an Application to 1-Norm Pseudospectra // *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* — 2000. — Vol. 21, no. 4. — Pp. 1185–1201.