

На правах рукописи

Иванов Александр Владимирович

**Регуляризованные уравнения мелкой воды
для моделирования неоднородных течений
и течений со свободной поверхностью в задачах геофизики**

Специальность 1.2.2 —
«Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук»

Научный руководитель: **Елизарова Татьяна Геннадьевна**
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник отдела № 16
«Проблемы математического моделирования и
высокопроизводительных вычислений»
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Официальные оппоненты: **Дианский Николай Ардальянович,**
доктор физико-математических наук, доцент,
главный научный сотрудник
кафедры физики моря и вод суши физического
факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Янышев Дмитрий Сергеевич,
кандидат технических наук,
доцент кафедры «Авиационно-космическая
теплотехника» Московского авиационного
института

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Волгоградский государственный университет»

Защита состоится 11 апреля 2024 г. в 11:00 на заседании диссертационного
совета 24.1.237.01 на базе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН по адресу: 125047,
г. Москва, Миусская пл., д.4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМ им. М.В.
Келдыша РАН <https://keldysh.ru>.

Автореферат разослан « ____ » _____ 2024 г.

Учёный секретарь диссертационного совета 24.1.237.01
кандидат физико-математических наук

Корнилина М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Приближение мелкой воды представляет собой упрощение исходных полных уравнений гидродинамики, а именно переход от трёхмерных течений к двумерным за счёт предположения о малости глубины водоёма по сравнению с характерными размерами задачи, такими как длина волны, горизонтальный масштаб водоёма и т.д. В таком случае можно пренебречь вертикальной компонентой скорости и ускорения частиц жидкости, усреднив величины горизонтальных компонент по всей глубине.

С практической точки зрения приближение мелкой воды интересно при исследованиях, в которых можно пренебречь стратификацией, например, для моделирования озёр и искусственных водоёмов; для изучения явлений с преобладанием горизонтальных эффектов над вертикальными, например таких, как приливные колебания или распространение цунами; моделирования колебаний жидкости в резервуаре, например, углеводородов в баке топливного танкера. Приближение мелкой воды с использованием реальных данных о рельефе поверхности широко применяется при численном моделировании процессов подтопления территорий при разливах рек и авариях на плотинах. Важным преимуществом приближения мелкой воды является простота модели в сравнении с исходными полными уравнениями гидродинамики, что значительно ускоряет процесс численного расчёта. Благодаря этому модель мелкой воды зачастую используется в расчётных кодах и входит в состав комплексов программ для оперативного прогноза и моделирования больших акваторий, где помимо гидродинамики учитываются также параметры атмосферы, эрозии береговых склонов, образования льда и прочее.

Уравнения мелкой воды, записанные при отсутствии внешних сил и для плоского дна, представляют собой баротропное приближение уравнений газовой динамики. Этот факт позволяет использовать для решения уравнений мелкой воды численные методы, применимые к уравнениям Эйлера. По аналогии с алгоритмом регуляризации уравнений газовой динамики, в результате которого была выписана система квазигазодинамических (КГД) уравнений, был предложен способ регуляризации уравнений мелкой воды. Полученная система уравнений была названа системой регуляризованных уравнений мелкой воды (РУМВ), а метод регуляризации несмотря на то, что речь идёт о гидродинамических уравнениях, принято называть квазигазодинамическим (или КГД методом/подходом) ввиду связи с уравнениями газовой динамики.

Основные исследования и результаты по РУМВ опубликованы в работах О.В. Булатова, Ю.В. Шеретова, Д.С. Сабурова и Т.Г. Елизаровой. В частности, выписана и построена система РУМВ, а помимо квазигазодинамического

рассмотрен квазигидродинамический (КГиД) подход регуляризации уравнений мелкой воды и его сравнение с КГД подходом. Алгоритм прошёл валидацию на общепринятых одномерных и двумерных тестах, таких как задача о распаде разрыва и задача о разрушении несимметричной дамбы, кроме того, было приведено моделирование реального течения – сейшевых колебаний Азовского моря, возникающих под действием перепада атмосферного давления и ветра, и проведено сравнение результатов с реальными данными.

Данная диссертационная работа посвящена развитию КГД-подхода в рамках приближения мелкой воды для решения прикладных задач в трёх направлениях. Первое направление – это усовершенствование уже имеющейся модели РУМВ: включение в модель внешних факторов и сил, модификация условий сухого дна; второе – разработка новых методов моделирования неоднородных течений в приближении РУМВ; третье направление – включение алгоритма на основе РУМВ в открытый программный комплекс.

Вопрос моделирования течений в реальных акваториях является актуальным. Отличие от решения модельных задач здесь заключается в наличии большого числа внешних параметров (атмосферное воздействие, приливные силы, учёт температуры и т.д.). Вследствие этого, такие задачи эффективнее решать с использованием комплексов программ. В частности, существуют и комплексы, в основе которых лежит модель мелкой воды. В рамках этого направления автор дополнил существующие алгоритмы для решения РУМВ путём включения в них более аккуратного описания процессов наводнения/осушения в береговой зоне, сил трения и ветрового давления, силы Кориолиса, приливных явлений. Все указанные эффекты были эффективным образом включены в разностные алгоритмы.

Для моделирования неоднородных течений в рамках КГД-подхода были разработаны алгоритмы для приближения двухслойной мелкой воды и переноса пассивного скаляра (примеси) в мелкой воде.

Одним из подходов для численного исследования неоднородных течений является использование моделей, учитывающих определённую степень стратификации жидкости. Примером такой модели является система уравнений двухслойной мелкой воды. Это приближение, пусть и в грубом виде, позволяет учитывать стратификацию течений и водоёмов с чёткой границей раздела двух сред. Примером такой практической задачи может служить задача исследования циркуляции течений Чёрного моря, стратификация которого может быть ограничена двумя слоями: лёгким поверхностным слоем и глубинным слоем, насыщенным сероводородом. Также открывается новая возможность для моделирования в рамках мелкой воды океанических течений, таких как

Гольфстрим или течение в проливе Гибралтар, селевых потоков, течений различной температуры, примесей, т.е. полноценное моделирование неоднородных течений.

Другим распространённым методом учёта неоднородности течений является использование системы уравнений гидродинамики совместно с уравнением переноса. Разработка эффективного и точного численного алгоритма для подобной модели представляет собой сложную задачу. Дело в том, что при малых коэффициентах диффузии скаляра численное решение уравнения переноса становится плохо устойчивым. Для решения этой задачи на данный момент разработано большое количество методов. Одними из первых являются алгоритмы, описанные в работах Г.И. Марчука, которые применялись для определения оптимального расположения промышленных зон для минимизации загрязнения окружающей среды. Помимо этого, разрабатывались и другие схемы для решения уравнения переноса. Все эти алгоритмы, в отличие от КГД подхода, строились для отдельно взятого уравнения переноса, вне его связи с соответствующими уравнениями гидродинамики.

Финальным результатом работы является создание нового решателя, построенного на базе РУМВ в рамках открытого пакета OpenFOAM. Решатель RSWEFoam позволяет пользователям тестировать и развивать текущие научные достижения в области РУМВ, а также даёт возможность другим научным группам воспользоваться созданными алгоритмами для решения своих задач, экономя при этом ресурсы и время.

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ 19-01-00262, 20-08-00246, РНФ 19-11-00076.

Целью данной работы является усовершенствование существующих методов для моделирования прикладных задач в рамках регуляризованных уравнений мелкой воды, разработка новых численных методов для моделирования неоднородных течений в приближении мелкой воды, а также создание нового решателя для моделирования течений в приближении мелкой воды в рамках открытого пакета программ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Усовершенствование текущих методов моделирования в рамках РУМВ.
2. Построение регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды, метод их численного решения и решение модельных задач.
3. Регуляризация уравнения переноса и моделирование процессов переноса в рамках приближения мелкой воды.

4. Реализация решателя в рамках открытого пакета программ OpenFOAM для моделирования течений в приближении мелкой воды.

Научная новизна:

1. Впервые в рамках квазигазодинамического подхода были построены и применены алгоритмы для моделирования неоднородных течений в приближении двухслойной мелкой воды.
2. Впервые получена система уравнений для переноса пассивного скаляра в рамках регуляризованных уравнений мелкой воды и реализован эффективный численный алгоритм решения.
3. Реализован новый решатель в рамках открытого пакета программ OpenFOAM для моделирования течений в приближении мелкой воды.

Научная и практическая значимость: разработаны новые однородные алгоритмы для решения описанных выше задач. Созданные методы можно использовать для мониторинга экологически важных объектов, а также встраивать в уже существующие численные пакеты.

Реализация решателя в рамках OpenFOAM даёт возможность воспользоваться описанными в работе методами для решения различных задач другими исследователями, что важно как для практических приложений, так и для развития КГД методов, а также позволит поддерживать, модифицировать и создавать новые решения на базе текущих разработок.

Достоверность полученных результатов обеспечивается их сравнением с данными экспериментов и валидацией численных алгоритмов на модельных задачах с известным решением. Результаты хорошо согласуются с результатами, полученными другими исследователями и уже существующими расчётами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- XXIV Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2017», Москва, Россия, 10–14 апреля 2017.
- Семинар лаборатории Цунами им. академика С.Л. Соловьёва, ИО им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия, 22 декабря 2017.
- Ломоносовские чтения-2018, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 16–25 апреля 2018.
- XXVI Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2019», Москва, Россия, 11 апреля 2019.
- 5th International Conference on Geographical Information Systems Theory, Applications and Management (GISTAM 2019), Heraklion, Crete, Greece, Греция, 3–5 мая, 2019.
- Всероссийская конференция молодых учёных-механиков, «Буревестник» МГУ, Сочи, Россия, 3–13 сентября 2020.

- Международная конференция «Марчуковские научные чтения 2020», посвящённая 95-летию со дня рождения академика Гурия Ивановича Марчука (МНЧ-2020) Академгородок, Новосибирск, Россия, 19–23 октября 2020.
- 16th OpenFOAM Workshop, University College Dublin, Dublin, Ireland, Ирландия, 8–11 июня 2021.
- Открытая международная конференция ИСП РАН им. В.П. Иванникова, Москва, Россия, 2–3 декабря 2021.
- Открытая международная конференция ИСП РАН им. В.П. Иванникова, Москва, Россия, 1–2 декабря 2022.

Личный вклад. Лично автором выполнены все описанные исследования и положения, выносимые на защиту. В частности, это непосредственная разработка математической модели регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды и построение регуляризованного уравнения переноса примеси в мелкой воде, написание всех программных кодов, их тестирование и оформление результатов в виде статей и докладов. Также автором была выполнена разработка и реализация нового вычислительного модуля в рамках открытого программного комплекса OpenFOAM для библиотеки КГД/КГиД течений. Автор принимал активное участие в развитии КГД/КГиД методов.

Публикации. Основные результаты по теме работы изложены в 13 печатных изданиях, 8 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [1–8], 4 — опубликованы в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах данных Scopus и/или Web of Science [9–12]. Кроме того, 3 работы опубликованы соискателем без соавторов [6], [8] и [12].

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём работы составляет 125 страниц с 61 рисунком и 2 таблицами. Список литературы содержит 80 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи, обосновывается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** приводится система регуляризованных уравнений мелкой воды (РУМВ), которая описывает плоские двумерные течения в терминах толщины слоя воды h и скорости течений \mathbf{u} :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_m = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (h\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u}) + \nabla \frac{gh^2}{2} = h^* (\mathbf{f}^v - g\nabla b) + \mathbf{f}^s + \nabla \cdot \Pi, \quad (2)$$

$$h^* = h - \tau \nabla \cdot (h\mathbf{u}). \quad (3)$$

Здесь введены обозначения:

$$\mathbf{j}_m = h (\mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (4)$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{h} [\nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + gh\nabla (b + h)], \quad (5)$$

$$\Pi = \Pi_{NS} + \tau \mathbf{u} \otimes [h (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + gh\nabla (b + h)] + \tau I [gh\nabla \cdot (h\mathbf{u})], \quad (6)$$

$$\Pi_{NS} = \frac{\tau gh^2}{2} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T], \quad (7)$$

где $\mathbf{f}^v = \{f_x^v(\mathbf{x}, t), f_y^v(\mathbf{x}, t)\}$ – вектор объёмной внешней силы, действующей на всю толщу слоя воды, например силы Кориолиса, $\mathbf{f}^s = \{f_x^s(\mathbf{x}, t), f_y^s(\mathbf{x}, t)\}$ – вектор поверхностной внешней силы, например силы трения ветра или донного трения, \otimes – символ тензорного произведения, \mathbf{I} – диагональная единичная матрица. Π_{NS} – тензор вязких напряжений.

В основе регуляризации уравнений мелкой воды лежит тот факт, что массовая плотность потока \mathbf{j}_m отличается от импульса единицы объёма $h\mathbf{u}$. Это приводит к появлению малых дополнительных диссипативных слагаемых в каждом из уравнений системы (1)–(2). Эти регуляризирующие слагаемые имеют физический характер и улучшают свойства численной устойчивости явных разностных алгоритмов, в которых пространственные производные аппроксимированы центральными разностями. Степень вязкости определяется параметром τ , который также называется параметром регуляризации. При $\tau \rightarrow 0$ система РУМВ (1)–(7) переходит в систему уравнений мелкой воды.

В модели мелкой воды аналогом числа Маха в газовой динамике $Ma = |u|/c_S$, где $c_S = \sqrt{\gamma RT}$ – скорость звука в газе, является число Фруда $Fr = |u|/c$. При этом скорость распространения длинных волн вычисляется как $c = \sqrt{gh}$. По аналогии с газовой динамикой параметр регуляризации τ можно определить как

$$\tau = \frac{\alpha l}{c + |\mathbf{u}|} = \frac{\alpha l}{\sqrt{gh} + |\mathbf{u}|}, \quad (8)$$

где α – настроечный параметр, l – характерный размер пространственной ячейки.

В параграфе 1.2 изложены основы построения системы РУМВ (1)–(7) и описан алгоритм её численного решения с помощью явного метода конечных объёмов с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями. Условие устойчивости численного алгоритма имеет вид условия Куранта и для случая двумерной сетки с шагами Δx и Δy записывается как:

$$\Delta t = \beta \left(\frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{gh}} \right)_{min}. \quad (9)$$

Особенностью описанных в работе численных алгоритмов решения РУМВ является их модификация для учёта приливных колебаний уровня воды, а также построение специальных граничных условий, обеспечивающих описание сухих зон и зон обводнения вблизи берега сложной конфигурации.

В работе описано два подхода учёта приливных явлений: использование объёмной силы, вычисляемой через приливной потенциал Ω : $\mathbf{f}_{tidal} = \nabla\Omega$, и задание на границе Γ области приливных колебаний уровня воды $\eta(x,y,t)$ в виде суперпозиции восьми приливных гармоник:

$$\eta(x,y,t)\Big|_{\Gamma} = \eta_0 + \sum_{i=1}^8 f_i A_i(x,y) \cos(q_i t + \psi_{0i} - g_i(x,y)), \quad (10)$$

где η_0 – средний уровень моря рассматриваемой акватории, t – время от полуночи, выраженное в часах, $A_i(x,y)$, $g_i(x,y)$, q_i , ψ_{0i} и f_i – приливные параметры.

В работе приведены усовершенствованные методы расчёта сухих зон. Для описания сухих областей вводится параметр отсечения ε , который определяет минимальный уровень воды в расчётной ячейке, при котором она считается влажной. В общем виде условия сухого дна можно записать так:

$$\text{если } h < \varepsilon : \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \tau = 0. \quad (11)$$

Также для численной реализации условия (11) используется общепринятая классификация границ ячейки: сухая, влажная или частично влажная. В зависимости от типа границы вводятся ограничения на потоки массы и импульса через неё. Для избежания ситуаций, в которых суммарный отток массы из ячейки превышает величину текущей массы воды в ней, используется специальный алгоритм, корректирующий расчёт толщины слоя воды вблизи сухих границ.

Описана модификация алгоритма для эффективного расчёта движения волны цунами и её взаимодействия с берегом. При численном моделировании

задачи о набегании волны на берег в акватории с большими перепадами глубин коэффициент регуляризации τ (8) в областях мелководья может принимать большие значения, увеличивая искусственную диссипацию алгоритма в этих зонах. Чтобы значение τ не сильно менялось при изменении глубины акватории, следует строить такую вычислительную сетку, для которой характерный размер пространственной ячейки l изменяется пропорционально характерной скорости длинной волны $l \sim \sqrt{gh}$, что обеспечивает близкое к постоянному значение параметра регуляризации τ как в глубоких зонах акватории, так и на мелководье. Например, при типичном моделировании волны цунами глубина акватории меняется от 1000 м до величин порядка 10 м, т.е. в 100 раз. Шаг по времени явной разностной схемы, построенной на основе РУМВ, пропорционален минимальному значению τ . Поэтому указанный выбор коэффициента τ не приводит к неконтролируемому уменьшению вычислительного шага по времени.

В параграфе 1.3 представлен исследовательский комплекс программ для моделирования отдельных акваторий северных морей. Ядром комплекса является модифицированный алгоритм решения РУМВ. В комплекс входит модуль препроцессинга, который предназначен для выполнения различных функций: задание конфигурации береговой линии и дна водоёмов; извлечение полей скорости ветра из расчётов, полученных с помощью пакета WRF (Weather Research and Forecasting); формирование граничных и начальных условий, полученных из расчёта глобальной модели динамики океана NEMO, характерный шаг широтно-долготной расчётной сетки которой составляет 0.25° ; расчёт приливных характеристик на основе заданных величин фаз и амплитуд, полученных с помощью модели для расчёта приливов OSU TPXO Tidal Model. Также комплекс оснащён модулем постпроцессинга, благодаря которому осуществляется вывод и визуализация результатов.

Выполнено моделирование динамики крупномасштабных течений и динамики приливных и нагонных течений в отдельных районах Карского моря, а также районах Териберской, Обской и Печорской губ. На рис. 1 показана общая схема расчётной области для исследовательского комплекса, на границах области заданы величины скорости и уровня воды, полученные из расчётов по глобальной модели динамики океана NEMO с шагом сетки 0.25° (порядка 25 км) по пространству и $t = 24$ ч по времени. Далее эти данные интерполировались на сетку для расчётов с РУМВ с шагом по пространству $\Delta x_B = \Delta y_B = 2$ км. По окончании расчёта основной области производилась интерполяция по пространству и времени всех полей: скорости ветра, скорости течений, толщины слоя воды – для задания начальных и граничных условий выбранных

подобластей. Более детальные расчёты проведены в подобластях, выделенных прямоугольниками, рис. 1, с шагами порядка $\Delta x_s = \Delta y_s = 500$ м. Красными точками показаны расположения гидрометеорологических станций.

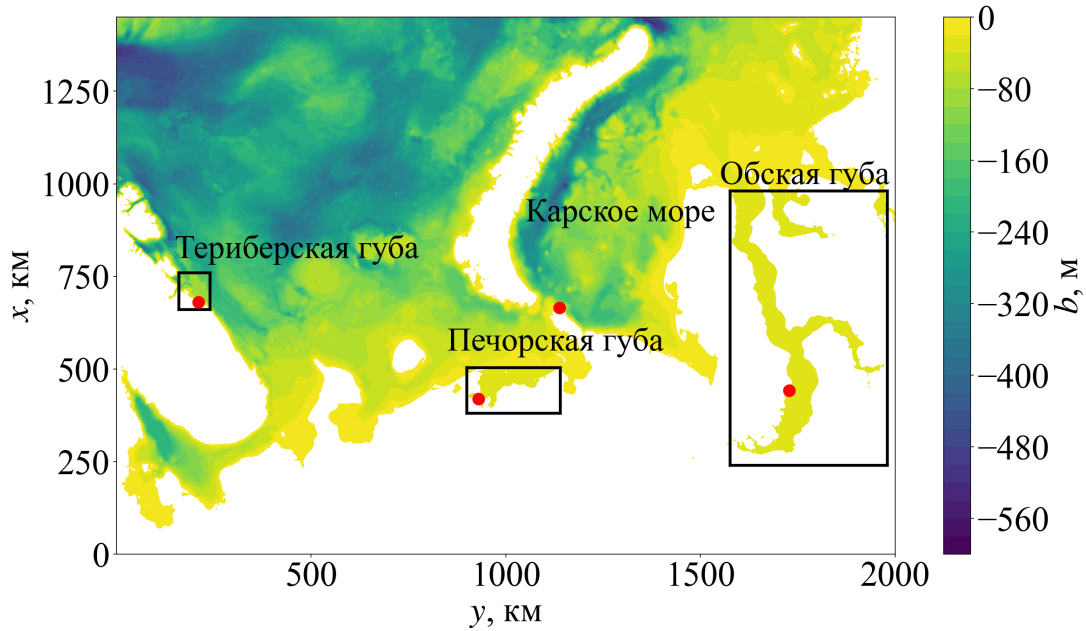


Рис. 1 — Исследуемая область.

Расчёт проводился для периода наблюдений с 1 по 7 июля 2013 года, поскольку в данный период кромка льда практически отсутствует в указанных районах, что позволяет пренебречь влиянием ледового покрытия, которое не учитывается в описываемом комплексе.

В результате получены картины течений и изменения уровня, которые качественно согласуются с данными наблюдений. Примеры распределения поля течений и колебаний уровня моря приведены на рис. 2. Время указано в часах с 1 июля 2013 года 00:00. Полученные распределения показывают сложный и изменчивый характер на временах 12 часов, что соответствует реальной картине приливных течений в рассмотренной области со сложным рельефом дна. Результаты, полученные в точках расположения гидрометеорологических станций также соответствуют экспериментальным наблюдениям.

Вторая глава посвящена математическому моделированию неоднородных течений со свободной поверхностью в рамках приближения мелкой воды. Рассматривается два варианта неоднородности – течение в виде двух несмешивающихся слоёв жидкости, или так называемая модель двухслойной мелкой воды, и неоднородность как течение мелкой воды с примесью, так называемая модель переноса пассивного скаляра в мелкой воде.

Приближение двухслойной мелкой воды описано в параграфе 2.1. Система уравнений двухслойной мелкой воды для толщины нижнего и верхнего слоёв h_1 ,

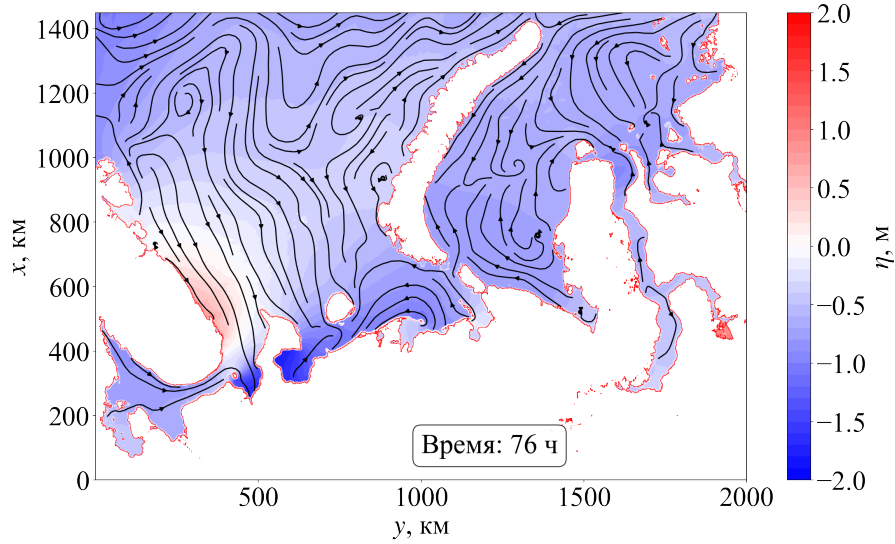
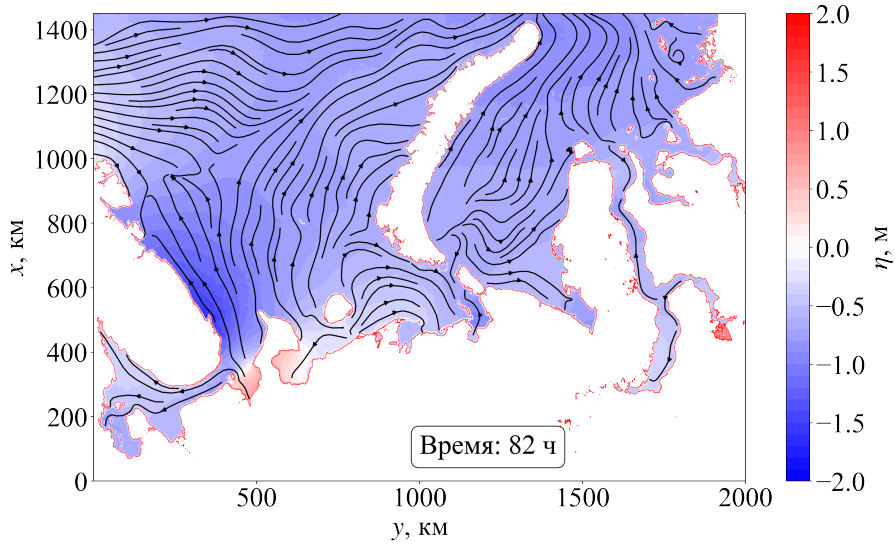
а) $t = 76$ ч.б) $t = 82$ ч.

Рис. 2 — Отклонение уровня моря и линии тока.

h_2 и скоростей их течений \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 соответственно и имеет вид

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \nabla \cdot (h_2 \mathbf{u}_2) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial (h_1 \mathbf{u}_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (h_1 \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1) + \nabla \frac{gh_1^2}{2} + gh_1 \nabla (rh_2 + b) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial (h_2 \mathbf{u}_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (h_2 \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{u}_2) + \nabla \frac{gh_2^2}{2} + gh_2 \nabla (h_1 + b) = 0, \quad (15)$$

где $b(x)$ – функция батиметрии, а $r = \rho_2/\rho_1 \leq 1$ – отношение плотностей слоёв.

Система (12)–(15) состоит из двух связанных между собой подсистем, описывающих поведение отдельного слоя. Межслойное взаимодействие посредством гидростатического давления выражается в нелинейных перекрёстных слагаемых вида $h_i \nabla h_j$, $i, j = 1, 2, i \neq j$. Эти слагаемые имеют неконсервативный вид, что вносит дополнительные неустойчивости в численное решение, в отличие от классических уравнений мелкой воды.

По аналогии с РУМВ была построена система регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды (РУДМВ), в которой в систему (12)–(15) вносится дополнительная физически-обоснованная вязкость.

Численное решение РУДМВ строилось с помощью метода конечных объёмов с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями и явной по времени схемы. Алгоритм построен с учётом выполнения условий «хорошей балансировки» и использованием модифицированного метода расчёта сухих областей.

Степень осреднения уравнения и сглаженности, а также устойчивости численного решения характеризуется параметрами регуляризации τ_1 и τ_2 :

$$\tau_i = \alpha_i \frac{\Delta x}{\sqrt{gh_i + |\mathbf{u}_i|}}, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Условие устойчивости построенной явной схемы имеет вид условия Куранта.

Проведена валидация алгоритма на одномерных задачах: задаче о распаде неподвижного разрыва, задаче о распаде разрыва вблизи наклонного берега, где образуются зоны сухого дна, и задаче о транскритическом течении над неровностями дна. Последняя наиболее интересна тем, что её точным решением является стационарное течение, но в зависимости от начальных и граничных условий в решении может формироваться гидродинамический скачок.

Для системы уравнений двухслойной мелкой воды (12) – (15), как и для РУДМВ, существует точное решение вида

$$\begin{cases} h_1 u_1 = Q_1 = const, & \frac{Q_1^2}{2h_1^2} + g(h_1 + rh_2 + b) = E_1 = const, \\ h_2 u_2 = Q_2 = const, & \frac{Q_2^2}{2h_2^2} + g(h_1 + h_2 + b) = E_2 = const. \end{cases} \quad (17)$$

Его физическая интерпретация – постоянство потока Q_k и энергии E_k стационарного течения. Решение системы (17) обладает рядом особенностей. Во-первых, оно не зависит от направления течений, а во-вторых, при определённой форме дна $b(x)$, а также граничных и начальных условий в

течении образуется разрыв. В задаче о транскритическом течении в области $x \in [-3, 3]$ дно задано функцией

$$b(x) = \begin{cases} 0.125 (\cos \frac{\pi}{2}x + 1)^2, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

Соотношение плотностей слоёв жидкости $r = 0.98$, а величина $g = 10$.

Характер течения определяется «комбинированным» числом Фруда G :

$$G^2 = Fr_1^2 + Fr_2^2 - (1 - r)Fr_1^2Fr_2^2, \quad Fr_k^2 = \frac{u_k^2}{g'h_k}, \quad g' = (1 - r)g, \quad (18)$$

где Fr_k , $k = 1, 2$ числа Фруда для слоёв 1 и 2. На пиковой точке возвышения неровности дна ($b'(x) = 0$) решение должно быть либо симметричным, либо достигать критической точки $G^2 = 1$, поэтому, при $G^2 < 1$ течение докритическое, а при $G^2 > 1$ – сверхкритическое.

В диссертации рассмотрено два варианта постановки задачи – с разрывом и без разрыва. Приведём здесь результаты для задачи с разрывом. Для этого в начальный момент времени слои находились в состоянии покоя, чтобы образовался гидродинамический скачок. На левой границе ставилось условие постоянства потока $(Q_1)_{in} = (Q_2)_{in} = 0.09282893$, а справа – фиксировалась толщина слоёв:

$$h_1 + b \Big|_{x=3} = 0.9205217, \quad h_2 \Big|_{x=3} = 0.5794783, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x} \Big|_{x=3} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Результаты, полученные на различных сетках, для распределения уровня слоёв ξ_1, ξ_2 рис. 3а, где $\xi_1 = h_1 + b$, $\xi_2 = \xi_1 + h_2$, и числа Фруда G^2 рис. 3б практически совпадают и хорошо согласуются с точным решением.

Вторым направлением в рамках моделирования неоднородных течений в мелкой воде является задача переноса пассивного скаляра, которая изложена в параграфе 2.2. В работе предложен принципиально новый подход моделирования переноса пассивного скаляра в мелкой воде, в котором расчёт переноса примеси согласован с вычислительным алгоритмом для расчёта скорости \mathbf{u} и толщины слоя h . Вместо системы уравнений мелкой воды рассматривается система регуляризованных уравнений (1) – (7), описанных в главе 1, к которой добавляется регуляризованное уравнение переноса:

$$\frac{\partial Ch}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j}_m C) = \nabla \cdot (Dh \nabla C + \tau \mathbf{u} h (\mathbf{u} \cdot \nabla C)). \quad (19)$$

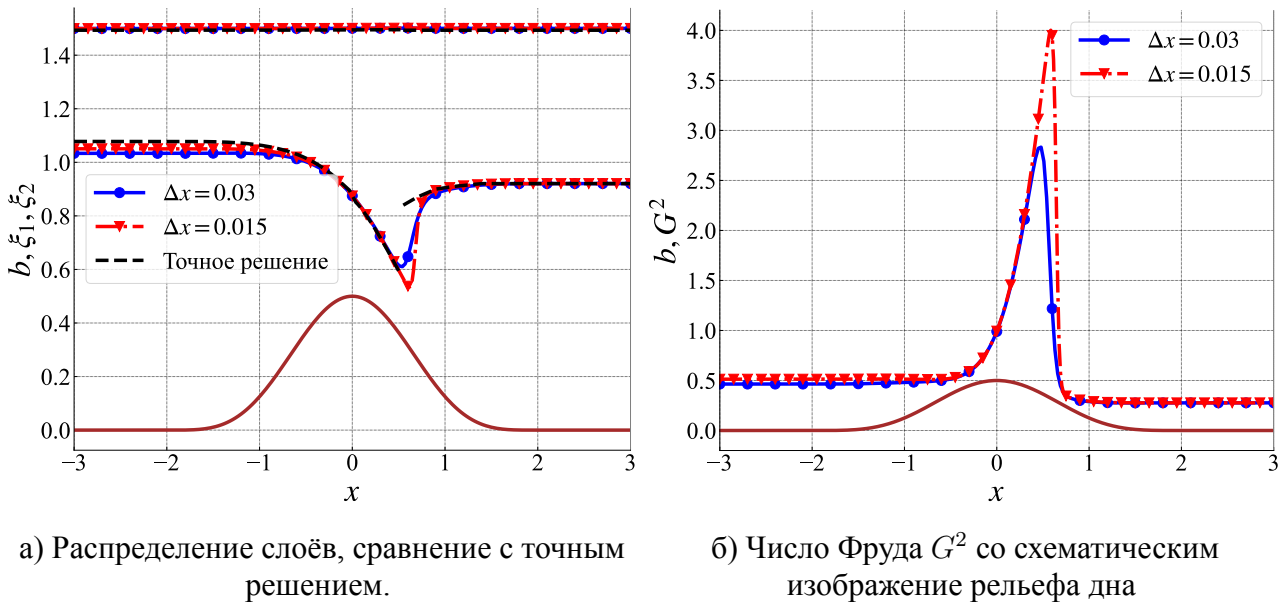


Рис. 3 — Течение с разрывом, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.1$, $t = 500$.

Система уравнений (1)–(7) и (19) аналогично аппроксимируется с помощью метода конечных объёмов с аппроксимацией пространственных производных центральными разностями со вторым порядком точности.

Численный алгоритм прошёл валидацию на одномерных и двумерных тестах. В качестве одномерных задач рассматривались перенос примеси над неровным дном, прорыв плотины на плоском дне и задача Римана с разбегающейся жидкостью, точным решением которой является стационарный разрыв. Пространственные задачи представлены в виде задачи о разрушении симметричной дамбы на плоском дне, в которой рассматривается распространение примеси вблизи разрыва, и задачи с источником примеси, переменным по времени.

С помощью предложенного алгоритма проведено моделирование циркуляции озера Валунден, которое изучалось научной группой под руководством Е.Г. Морозова. Неглубокое озеро размерами 1300 на 700 м² сообщается с морским заливом – фиордом – через узкий канал глубиной 1 м и обладает плоским дном глубиной 10-12 м. Ввиду приливных колебаний уровня воды во фиорде, в канале, соединяющем фьорд и озеро, возникает нестационарное течение со скоростями до 1 м/с. Температура втекающего потока ниже, чем температура воды в озере, вследствие чего при достаточно низких температурах воздуха озеро покрывается льдом, а вблизи канала образуется более толстая наледь.

Основной задачей численного эксперимента являлась проверка гипотезы о том, что втекающая холодная вода из канала влияет на распределение толщины

льда. Распространение холодной воды описывалось уравнением теплопроводности (19), где величина C рассматривалась как безразмерный показатель температуры.

На границе канала были заданы граничные условия, описывающие периодическое изменение величины уровня и скорости втекающего в озеро потока в соответствии с приливом/отливом:

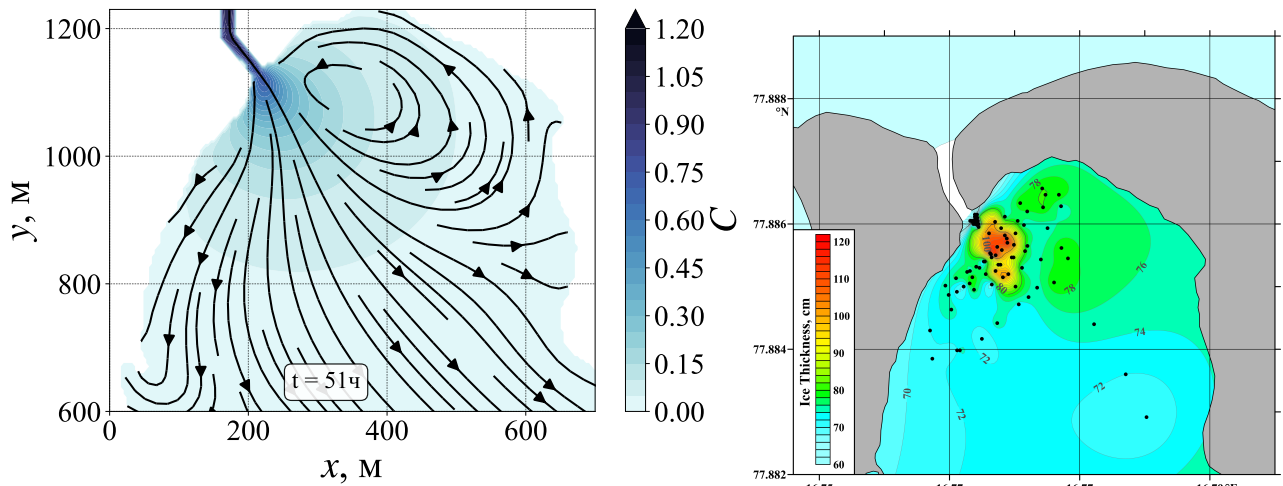
$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{y=1250} = 0; \quad \left. u_y \right|_{y=1250} = -\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) (1 - e^{-t/6}) \text{ м/с}; \quad \left. u_x \right|_{y=1250} = 0 \text{ м/с};$$

где время t указано в часах. Также задавалось постоянное значение температуры $C = 1$ на границе канала. Другие границы озера определялись условием «сухого дна».

В области построена прямоугольная равномерная расчётная сетка $\Delta x \simeq 4.1$ м, $\Delta y \simeq 5.4$ м, $\alpha = 0.3$ (8), $\beta = 0.2$ (9), $\varepsilon = 0.01$ (11). В начальный момент времени озеро находится в состоянии покоя. Скорость притока обеспечивает постепенное установление циркуляции воды в озере. Периодические изменения скорости притока вызывают колебания уровня воды в озере, которые устанавливаются лишь после $t = 40$ ч, а средний уровень воды увеличивается примерно до 20 см. Это объясняется тем, что в озере нет стоков, а его склоны очень крутые. Узкий и неглубокий канал не позволяет воде полностью вытекать из озера во время отлива. Часть воды остаётся в водоёме, благодаря чему общий уровень воды постепенно увеличивается в течение первых $t = 50\text{--}60$ ч. Кроме того, важную роль играют форма и глубина канала. Модель батиметрии хорошо согласуется со спутниковыми снимками и обеспечивает амплитуду изменения уровня воды в озере, равную ± 20 см, что соответствует экспериментальным наблюдениям.

Распределение концентрации более холодной воды повторяется с периодичностью 12 ч, что соответствует периоду изменения граничных условий. Пример распространения холодной воды показан на рис. 4а. Величина концентрации C падает вдвое в радиусе 100 м от притока, при этом холодная вода образует область радиусом около 300 м.

Расчётная скорость течения составляет порядка нескольких сантиметров в секунду вдали от канала, что согласуется с экспериментальными наблюдениями. Также образуется круговой вихрь диаметром 200-300 м, рис. 4а, что соответствует экспериментальным наблюдениям. Форма и расположение вихря относительно канала зависят от батиметрии дна вблизи него. Численные эксперименты показали, что наличие силы Кориолиса не влияет на



а) Распространение холодной воды в виде характеристики C в момент времени $t = 51$ ч, чёрными линиями обозначены линии тока.

б) Экспериментальные замеры толщины льда.

Рис. 4 — Сравнение результатов численных расчётов с экспериментальными данными.

формирование циркуляции, т.е. циркуляция обусловлена исключительно формой озера и положением притока.

Концентрация втекающей холодной воды определяет формирование и распределение толщины льда при замерзании озера. Холодная вода концентрируется вблизи притока, рис. 4а. Это соответствует реальной картине распределения толщины льда: в районе вихря вблизи канала лёд значительно толще. На рис. 4 приведено сравнение концентрации C , полученной из численных расчётов рис. 4а и карты замеров толщины льда рис. 4б. Расчётная величина концентрации C вблизи канала в 2 раза превышает концентрацию холодной воды в другой части озера, что согласуется с реальными замерами, где толщина льда в озере в 2 раза меньше, чем в области притока.

Третья глава посвящена реализации решателя в открытом программном комплексе OpenFOAM. В работе используется OpenFOAM v2012, решатель RSWEFoam реализован с использованием метода конечных объёмов (библиотеки fvM). Особенности реализации решателя описаны в параграфе 3.1.

Для элемента конечного объёма V_P , смежного с элементом конечного объёма V_N , рис. 5, аппроксимация уравнений (1)–(7) в потоковом представлении, при отсутствии внешних сил $\mathbf{f}^v = \mathbf{0}$ и $\mathbf{f}^s = \mathbf{0}$ имеет вид

$$\hat{h}_P = h_P - \frac{\Delta t}{V_P} \sum_f \Phi_f, \quad (20)$$

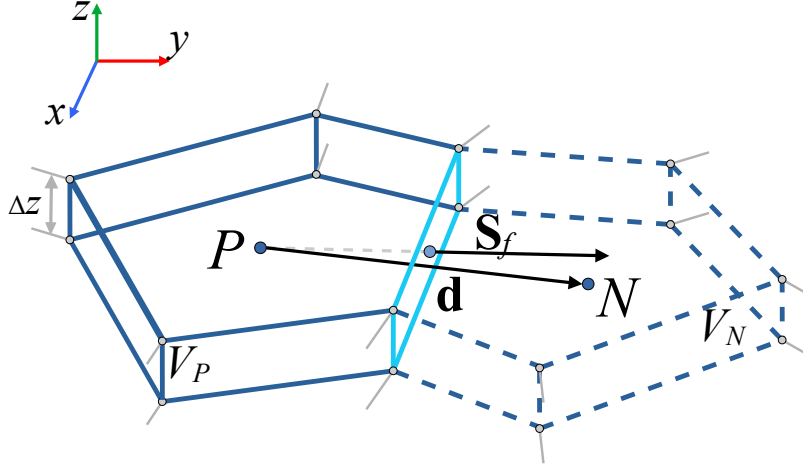


Рис. 5 — Схематическое изображение элемента конечного объёма.

$$\widehat{(h\mathbf{u})}_P = (h\mathbf{u})_P - \frac{\Delta t}{V_P} \sum_f \mathbf{F}_f, \quad (21)$$

$$\Phi_f = (h\mathbf{u})_f \cdot \mathbf{S}_f - \tau_f \left([\nabla \cdot (h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})]_f + gh_f [\nabla (b + h)]_f \right) \cdot \mathbf{S}_f, \quad (22)$$

$$\mathbf{F}_f = \Phi_f \mathbf{u}_f + \frac{g(h_f)^2}{2} \mathbf{S}_f - \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{\Pi}_f + g \left(\tilde{h}_f - \tau_f [\nabla \cdot (h\mathbf{u})]_f \right) b_f \mathbf{S}_f, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_f = \mathbf{\Pi}_{NSf} + \tau_f \mathbf{u}_f \otimes \left((h\mathbf{u})_f \cdot [\nabla \mathbf{u}]_f + gh_f [\nabla (b + h)]_f \right) + \\ + \tau_f \mathbf{I} \left(gh_f [\nabla \cdot (h\mathbf{u})]_f \right), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{\Pi}_{NSf} = \tau_f g \frac{h_f^2}{2} [(\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T]_f. \quad (25)$$

Величины, значения которых взяты на грани f ячейки, обозначены нижним индексом f , а скобки $[\cdot]_f$ говорят о том, что оператор, заключённый в них, вычисляется в центре ребра f .

Величина τ определена с использованием средневзвешенного расстояния между центром ячейки P и всех соседних ячеек C_δ

$$\tau_P = \frac{\alpha C_\delta}{\sqrt{gh_P + |\mathbf{u}_P|}}, \quad C_\delta = \frac{\sum_f \delta_f |S_f|}{\sum_f |S_f|}, \quad \delta_f = \delta_{PC_\delta} = \frac{|\mathbf{d}|^2}{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}_f)}, \quad (26)$$

где δ_f – расстояние между ячейками с поправкой на неортогональность сетки.

Для аппроксимации пространственных производных на гранях ячеек в решателе использовался метод наименьших квадратов, реализованный рамках QGDSolver – фреймворка, разработанного лабораторией свободного

программного обеспечения цифрового моделирования технических систем (ЛСПО ЦМТС) ИСП РАН совместно с ИПМ им. М.В. Келдыша, на основе OpenFOAM, предназначенного для моделирования течений жидкости с использованием регуляризованных уравнений (квазигазодинамического и квазигидродинамического подходов). Фрэймворк содержит библиотеку для аппроксимации частных производных в центрах граней ячеек и набор решателей для широкого спектра задач.

Для выполнения условий «хорошей балансировки» величина \tilde{h}_f аппроксимируется, исходя из равенства

$$\sum_f \mathbf{F}_f = \sum_f \left(\frac{g(h_f)^2}{2} \mathbf{S}_f + g\tilde{h}_f b_f \mathbf{S}_f \right). \quad (27)$$

Условия сухого дна для центра ячейки P имеет вид

$$\text{если } h_p < \varepsilon : \quad \mathbf{u}_P = \mathbf{0}, \quad \tau_P = 0, \quad (28)$$

а в случае грани f :

$$\text{если } h_f < \varepsilon : \quad \tau_f = 0, \quad \Phi_f^{out} = 0, \quad (29)$$

где Φ_f^{out} – исходящий поток массы (22) через грань f .

Верификация решателя проводилась на множестве модельных задач. В параграфе 3.2 приведены вычислительные тесты. В частности, описана одномерная задача распада разрыва над сухим дном, которая является классическим тестом для проверки численных методов решения уравнений мелкой воды. В качестве пространственных тестов описаны задача о затоплении поверхности с тремя конусами и задача о разрушении несимметричной дамбы. Последняя представляет собой задачу о течении, возникающем при мгновенном разрушении дамбы, разделяющей два бассейна с водой в квадратной области с ровным дном $b(x,y) = 0$. Высота уровня воды в левом бассейне составляет 10 м, в правом 5 м. Длина разрыва равна 75 м, начало разрыва расположено в точке с $y = 95$ м, рис. 6. Толщина стенки дамбы 10 м, а её левая сторона расположена в точке $x = 95$ м, $g = 9.81$ м/с². На всех внутренних и внешних границах ставились условия непроницаемых стенок.

Линии уровня для распределения толщины слоя воды на момент времени $t = 7.2$ с представлены на рис. 6. Расчёт проведён на равномерной прямоугольной сетке с шагами $\Delta x = \Delta y = 1$ м и с параметрами $\alpha = 0.2$,

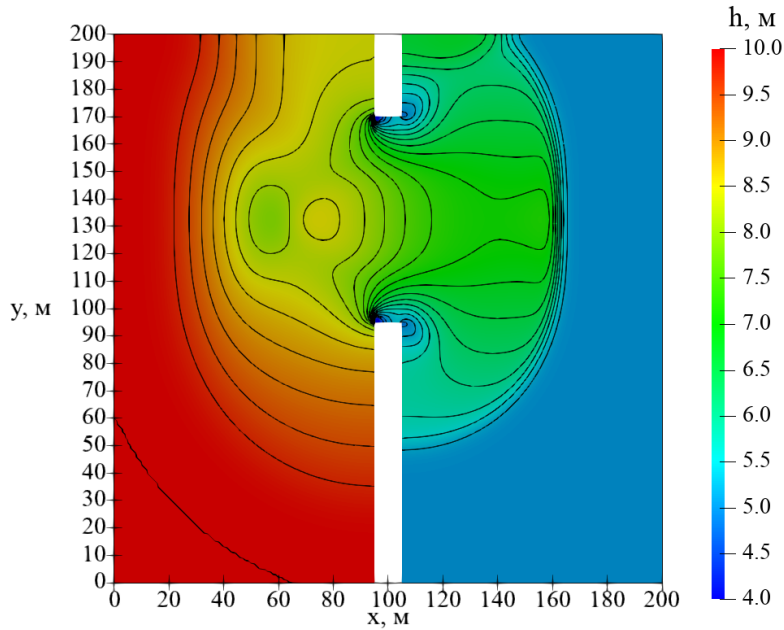


Рис. 6 — Разрушение несимметричной плотины. Толщина слоя жидкости и линии уровня, $t = 7.2\text{с}$, $\Delta x = \Delta y = 1\text{м}$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$.

$\beta = 0.2$. В решении, рис. 6, проявляются характерные особенности возникающего к указанному моменту времени течения, а именно: сглаженный немонотонный профиль слева от разрыва и резкий, но монотонный профиль в правой части области, а также отражение волны от верхней стенки бассейна. Результаты расчётов на основе алгоритма с регуляризацией для $\Delta x = \Delta y = 1\text{ м}$ хорошо совпадают с решением, полученным на сетке с шагами порядка 2 м с применением численных алгоритмов высокого порядка точности.

На рис. 7 представлены распределения уровня воды и числа Фруда вдоль линии $y = 160\text{ м}$, параллельной оси OX в момент времени $t = 7.2\text{с}$ и с параметрами $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$ для различных пространственных шагов $\Delta x = \Delta y = 1\text{м}$, $\Delta x = \Delta y = 0.5\text{м}$ и $\Delta x = \Delta y = 0.25\text{м}$. Видна сходимость решения при сгущении сетки как для h , так и для Fr . Профили численного решения для уровня воды и числа Фруда соответствуют эталонным результатам и приближаются к нему при уменьшении шага сетки.

В **заключении** приведены основные результаты работы и описаны дальнейшие перспективы её развития.

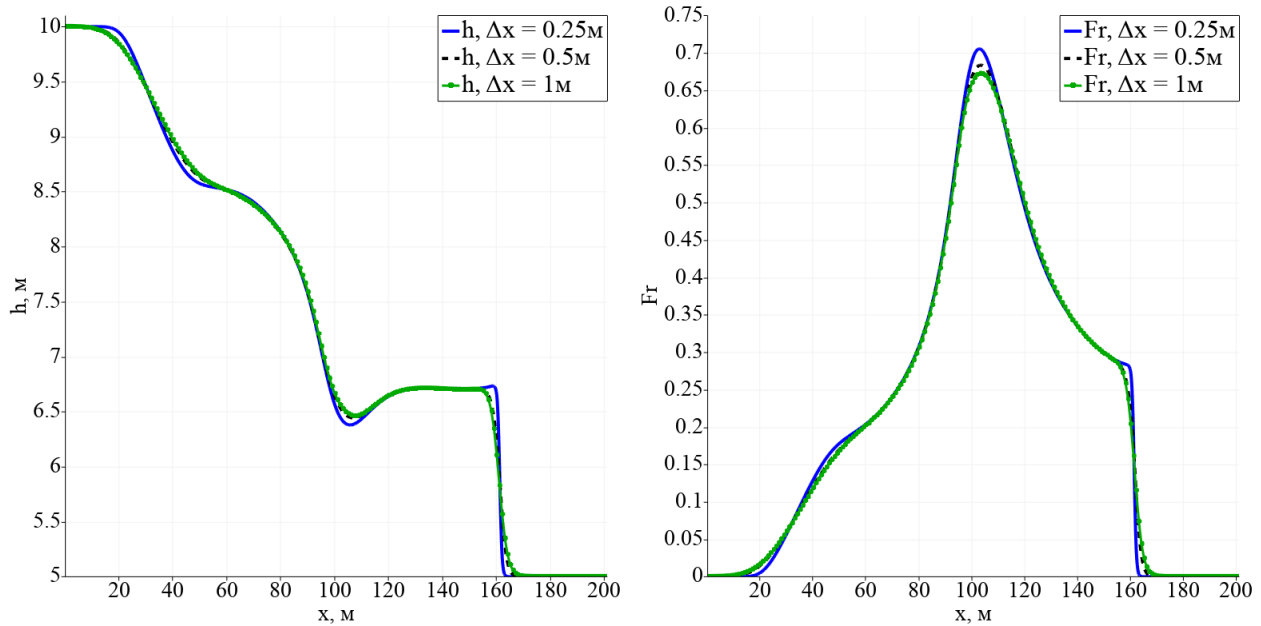
а) Уровень воды $h(x) = h(x, y = 160)$ б) Число Фруда $Fr(x) = Fr(x, y = 160)$

Рис. 7 — Разрушение несимметричной плотины, срез вдоль линии $y = 160$ м,
 $t = 7.2с$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.2$.

Основные результаты диссертационной работы:

1. Разработаны усовершенствованные алгоритмы численного решения регуляризованных уравнений мелкой воды для расчёта сухих зон, выполнения условий «хорошей балансировки» и учёта внешних сил и приливных воздействий. На базе усовершенствованных алгоритмов создан исследовательский комплекс программ для моделирования прикладных задач. С его помощью выполнено моделирование прибрежной акватории Карского, Печорского и части Баренцева морей.
2. На основе квазигазодинамического подхода построена система регуляризованных уравнений двухслойной мелкой воды и создан алгоритм их численного решения. Выполнена валидация алгоритма на характерных модельных задачах.
3. Предложена модификация регуляризованной системы уравнений мелкой воды, включающая в себя уравнение переноса пассивного скаляра. Разработан и программно реализован численный алгоритм решения полученной системы уравнений. С его помощью проведено моделирование циркуляции озера Валунден (о. Шпицберген). В численном эксперименте получены распределения температур и скоростей, что позволило теоретически обосновать наблюдаемые толщины слоя льда на поверхности озера.

4. На базе усовершенствованных и доработанных алгоритмов решения регуляризованных уравнений мелкой воды создан новый решатель RSWEFoam в рамках открытого пакета программ OpenFOAM. Проведена апробация решателя на модельных задачах.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2016. — № 69. — С. 1—27. — DOI: [10.20948/prepr-2016-69](https://doi.org/10.20948/prepr-2016-69).
2. *Елизарова Т., Иванов А.* Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений в приближении двухслойной мелкой воды // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — № 5. — С. 741—761. — DOI: [10.7868/s004446691805006x](https://doi.org/10.7868/s004446691805006x).
3. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Об однородном алгоритме численного моделирования волны цунами // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2018. — № 3. — С. 1830103–1—1830103–6. — URL: <https://uzmu.phys.msu.ru/abstract/2018/3/1830103>.
4. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Метод регуляризации для численного моделирования переноса примеси в мелкой воде // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2019. — № 27. — С. 1—28. — DOI: [10.20948/prepr-2019-27](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-27).
5. *Елизарова Т. Г., Иванов А. В.* Численное моделирование переноса пассивного скаляра в мелкой воде с использованием квазигазодинамического подхода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2020. — Т. 60, № 7. — С. 1248—1267. — DOI: [10.31857/s0044466920070066](https://doi.org/10.31857/s0044466920070066).
6. *Иванов А. В.* Вычислительный комплекс для моделирования морских течений с применением регуляризованных уравнений мелкой воды // Математическое моделирование. — 2021. — Т. 33, № 10. — С. 109—128. — DOI: [10.20948/mm-2021-10-08](https://doi.org/10.20948/mm-2021-10-08).

7. *Иванов А. В., Крапошин М. В., Елизарова Т. Г.* О новом методе регуляризации уравнений двухфазной несжимаемой среды // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2021. — № 61. — С. 1—27. — DOI: [10.20948/prepr-2021-61](https://doi.org/10.20948/prepr-2021-61).
8. *Иванов А. В.* О реализации модели мелкой воды на базе квазигазодинамического подхода в открытом программном комплексе OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2023. — № 28. — С. 1—27. — DOI: [10.20948/prepr-2023-28](https://doi.org/10.20948/prepr-2023-28).
9. *Elizarova T. G., Ivanov A. V.* Numerical simulation of coastal flows with passive pollutant by regularized hydrodynamic equations in shallow water approximation // GISTAM 2019 5th International Conference on Geographical Information Systems Theory, Applications and Management. — Heraklion, Crete, Greece, 2019. — P. 358–365. — DOI: [10.5220/0007877203580365](https://doi.org/10.5220/0007877203580365).
10. *Elizarova T. G., Ivanov A. V., Kuleshov A. A.* Mathematical modeling of russian northern coastal waters in the shallow water approximation // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — P. 012017–012017. — DOI: [10.1088/1742-6596/1715/1/012017](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1715/1/012017).
11. Freezing of tidal flow in lake Vallunden (Spitsbergen) / A. V. Marchenko [et al.] // Proceedings of the 26th International Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions. — 2021. — P. 1–10.
12. *Ivanov A. V.* A software package for flows simulation in the coastal regions of the Kara and Barents seas using shallow water approximation // Proceedings of the 2021 Ivannikov Ispras Open Conference. — 2021. — P. 165–169. — DOI: [10.1109/ispras53967.2021.00029](https://doi.org/10.1109/ispras53967.2021.00029).
13. Ice thickening caused by freezing of tidal jet / A. V. Marchenko [et al.] // Russian Journal of Earth Sciences. — 2021. — Vol. 21, no. 2. — P. 1–8. — DOI: [10.2205/2021es000761](https://doi.org/10.2205/2021es000761).

Подписано в печать 08.02.2024. Заказ А-2.

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 80 экз.

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 125047, Москва, Миусская пл., 4