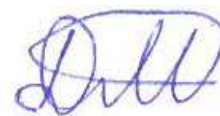


*На правах рукописи*



Дубовик Алексей Олегович

**Численные и аналитические методы решения задач динамики магнитной  
жидкости, протекающей в трубах**

05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Сургут – 2018

Работа выполнена в Бюджетном учреждении высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа–Югры «Сургутский государственный университет» (СурГУ), г. Сургут.

**Научный руководитель:**

**Галкин Валерий Алексеевич**, д. ф.-м. н., профессор, директор Политехнического института, Бюджетное учреждение высшего образования Ханты-Мансийского автономного округа – Югры «Сургутский государственный университет» (СурГУ), г. Сургут.

**Официальные оппоненты:**

**Ильин Валерий Павлович**, д. ф.-м. н., профессор, главный научный сотрудник лаборатории вычислительной физики, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМиМГ СО РАН), г. Новосибирск.

**Гинкин Владимир Павлович**, д. ф.-м. н., старший научный сотрудник, заместитель директора – начальник отдела экспертиз общества с ограниченной ответственностью «МАТЭК» (ООО «МАТЭК»), г. Обнинск.

**Ведущая организация:**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (МГУ), Механико-математический факультет, г. Москва.

Защита состоится «13» марта 2018 г. в 11:00 на заседании диссертационного совета Д002.024.03 Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук» по адресу 125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИПМ им. М. В. Келдыша РАН <http://keldysh.ru>.

Автореферат разослан «\_\_» января 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д002.024.03, к. ф.-м. н.

Корнилина М. А.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** В рамках приближения магнитной гидродинамики (МГД), описывающей течение магнитной жидкости по трубам, могут быть рассмотрены следующие проблемы: освоение трудноизвлекаемых запасов нефти, управление гемодинамикой, управление термоядерным синтезом, стратификация жидкости в условиях микрогравитации и др. Решение перечисленных проблем предполагает разработку программного обеспечения (ПО), адаптированного для высокопроизводительных вычислений на суперкомпьютерах. Результаты вычислительных экспериментов, полученные на основе такого ПО, необходимо верифицировать точными решениями уравнений МГД, описывающими течение магнитной жидкости по трубам.

Если говорить о проблеме освоения трудноизвлекаемых запасов нефти, то отметим, что в большинстве месторождений вместе с нефтью и газом залегают вода, в которой растворены различные соли. Минерализованная вода образует вместе с продуктивной частью пласта связанную гидродинамическую систему, а в процессе добычи нефти и совместного движения ее с пластовой водой образуются устойчивые эмульсии. В таком случае исследование задач динамики магнитной жидкости имеет непосредственное отношение к задачам управления течением несжимаемой жидкости (В. Б. Бетелин и В. А. Галкин, 2015), рассматриваемым в нефтегазовой отрасли в связи с необходимостью создания технологии «цифровое месторождение» (В. Б. Бетелин, 2014). Решение данного класса задач позволит, например, моделировать отклик месторождения на динамические воздействия: механические, тепловые, электромагнитные и другие, с помощью которых возможно изменять во времени геометрию области течения, что позволит ставить оптимизационные задачи с целью повышения коэффициента извлечения углеводородов. Важно учитывать тепловыделение в течении вязкой несжимаемой жидкости, которое может существенно влиять на характеристики крупномасштабных течений с большим коэффициентом вязкости и являться причиной фазовых переходов, электрических пробоев и т. д.

**Степень разработанности.** Задачи течения магнитных жидкостей в трубах впервые описаны в работах E. J Williams (1930), J. Hartmann (1937), исследовавших их в поперечном магнитном поле. В 1942 J. Alfven рассмотрел решение уравнений МГД в виде плоской волны. S. Lunquist (1950), исследуя собственные функции оператора ротор, нашел решение задачи магнитной гидростатики в классе бессиловых полей, соответствующее винтовому полю в бесконечном цилиндре. J. A. Shercliff (1953) продолжил изучать установившееся движение проводящей среды в трубах в поперечном магнитном поле. Z. O. Blewiss (1958) рассмотрел течение Куэтта в поперечном магнитном поле.

С. К. Годунов (1954) развил теорию разностных схем для исследования разрывных газодинамических течений. S. Patankar (1980) разработал метод контрольных объемов (МКО) для численного исследования задач гидродинамики. Параллельные алгоритмы решения уравнений математической физики, прямые и итерационные методы решения СЛАУ и проблемы собственных значений разрабатываются с 80-х годов В. П. Ильиным. В это же время В. П. Гинкиным ведется разработка алгоритмов и комплексов программ для решения уравнений математической физики, в том числе уравнений МГД, на основе метода неполной факторизации. Систематизацию численные методы решения задач динамики жидкости получили в работах С. Hirsh (1990), К. Fletcher (1991).

В 60-е С. И. Сыроватский описал класс точных решений МГД, соответствующий движению среды вдоль магнитного поля произвольного вида. А. Г. Куликовский (1962) обнаружил и исследовал свойства разрывных решений уравнений МГД. Ватажин В. А., Г. А. Любимов, С. А. Регирер (1970), применяя спектральные преобразования, описали нестационарные течения Гартмана и Куэтта. Г. А. Любимов в 80-е – 90-е. исследовал газодинамические и электрические характеристики МГД-генераторов. В 1988 А. Г. Куликовский развил аналитические методы и численное моделирование нелинейных явлений в различных задачах механики сплошной среды, связанных с устойчивостью течений, с распространением волновых фронтов и ударных волн. В. И. Тараканов (2007), на основе исследования спектра квадратичного пучка компактных частично

симметричных операторов, рассмотрел задачи о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей жидкостью. С. В. Головин (2013) исследовал точное решение уравнений МГД в стационарном случае, соответствующее вихревому течению идеально проводящей среды в цилиндре.

**Целью диссертационной работы** является разработка программного обеспечения, позволяющего решать задачи динамики магнитной жидкости, протекающей по трубам, с применением высокопроизводительных технологий параллельного программирования, а также исследование точных решений уравнений МГД спектральными методами дифференциальных операторов.

#### **Задачи работы:**

1. Разработка, на основе методов конечных разностей и контрольных объемов, отладка и тестирование комплекса программ, позволяющего моделировать течение магнитной жидкости по трубам с применением высокопроизводительных технологий параллельного программирования.
2. Исследование точных нестационарных решений уравнений МГД, применимых для описания движения жидкости по трубам, спектральными методами дифференциальных операторов.
3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных численных методов нахождения спектра квадратичного пучка операторов.

#### **Научная новизна:**

1. Исследована модель слоистого течения жидкости в неограниченном плоском слое. Доказана теорема о равносильности решения уравнений теплопроводности для компонент вектора скорости и системы уравнений МГД (при предположении единственности решения) для слоистого течения жидкости при условии параллельности векторов скорости и напряженности магнитного поля.
2. Показана принципиальная возможность объемного воздействия магнитным полем на слоистое течение жидкости в неограниченном плоском слое для граничных условий первого и второго рода.

3. Исследована модель слоистого течения жидкости в бесконечном цилиндре, в бесконечном коаксиальном цилиндре. Доказана теорема о равносильности решения уравнений теплопроводности для компонент вектора скорости и вектора напряженности магнитного поля и системы уравнений МГД (при предположении единственности решения) для слоистого течения жидкости.
4. Создан и протестирован комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов по моделированию трехмерных локальных слоистых течений вязкой магнитной несжимаемой жидкости с применением технологии параллельных вычислений OpenMP.
5. Предложен новый итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Доказана теорема о существовании решения и сходимости итерационного алгоритма.
6. Доказана теорема о полноте системы собственных функций квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов на своем образе, монотонности и неограниченности последовательности модулей собственных значений, найденных по итерационному алгоритму, и существовании двусторонней оценки для каждого члена последовательности.
7. Доказана равносильность решения задачи о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью, имеющей дифференциальную постановку, спектральной задаче для квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов.
8. Впервые проведено тестирование итерационного алгоритма нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Впервые вычислены собственные частоты колебания трубы при переменном растягивающем усилии.

**Теоретическая значимость** диссертационной работы заключается в описании нового класса точных решений системы нестационарных уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости, соответствующего слоистому течению жидкости; теоретическом обосновании нового итерационного алгоритма решения спектральной задачи для квадратичного пучка компактных частично

симметричных операторов; доказательстве равносильности решения этой спектральной задачи и задачи о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью, имеющей дифференциальную постановку.

**Практическая значимость.** Разработанный программный комплекс может быть использован для моделирования отклика трехмерного слоистого течения магнитной жидкости на движение границы области течения и на объемное воздействие магнитным полем. Найденные точные решения уравнений МГД могут быть использованы для верификации ПО, позволяющего моделировать динамику магнитной жидкости.

**Методы исследования** включают в себя методы функционального анализа, теории дифференциальных операторов и методы математического моделирования. Используется понятие компактных частично симметричных операторов, введенное профессором В. И. Таракановым. Компактные частично симметричные операторы – это компактные операторы, симметричные на своем образе, являющемся подмножеством гильбертова пространства. Если это подмножество совпадает с гильбертовым пространством, то в этом случае компактные частично симметричные операторы являются компактными самосопряженными.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Исследована модель слоистого течения жидкости, выделен класс точных решений системы нестационарных уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости, соответствующих слоистому течению жидкости в следующих областях: неограниченный плоский слой, бесконечный цилиндр, бесконечный коаксиальный цилиндр.
2. Разработан итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Проведено его теоретическое обоснование. Выполнена численная апробация итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью, показавшая его эффективность.
3. Разработан комплекс программ с применением технологии параллельных вычислений OpenMP для проведения вычислительного эксперимента по

моделированию слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости. Найденные точные решения уравнений МГД использованы для верификации разработанного программного обеспечения, показавшей его эффективность.

**Степень достоверности результатов.** Достоверность аналитических результатов обеспечивается корректностью математических доказательств. Достоверность численных результатов обеспечивается применением теоретически обоснованных численных методов, высокой точностью численных результатов в сравнении с аналитическим решением.

**Апробация результатов.** Результаты работы докладывались и обсуждались на международных конференциях: «Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе» (Сургут, 2014, 2016), «Супервычисления и математическое моделирование» (Саров, 2016), «Марчуковские научные чтения – 2017» (Новосибирск, Академгородок, 2017); всероссийских конференциях «Север России: стратегии и перспективы развития» (Сургут, 2015, 2016), «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики» (Новороссийск, Абрау-Дюрсо, 2016); семинаре кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», объединенном семинаре «Численный анализ» ИВМиМГ СО РАН и кафедры вычислительной математики ММФ НГУ, семинаре отдела гидродинамических исследований и моделирования в нефтегазовой отрасли ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

**Публикации.** Результаты диссертационной работы опубликованы в 18 научных работах, из них: 7 статей в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК [1-7], 3 из которых переведены на англ. язык и опубликованы в международных журналах, входящих в систему цитирования Scopus [8–10], 1 в рецензируемом научном издании [11], 6 в сборниках трудов и тезисов конференций [12–17], 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [18].



**Работа выполнена при поддержке** гранта РФФИ №15-41-00059 p\_урал\_a «Моделирование термодинамики органов человека в условиях стационарности и нестационарности». Результаты диссертационной работы использовались при выполнении государственного задания «Аналитические и вычислительные задачи нелинейной математической физики, связанные с актуальными задачами развития Ханты-Мансийского автономного округа-Югры».

**Личный вклад.** Все аналитические результаты получены автором самостоятельно или при непосредственном его участии. Все численные результаты автор получил самостоятельно.

**Благодарности.** Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Валерию Алексеевичу Галкину за поддержку и полезные замечания при проведении научных исследований. Автор глубоко признателен профессору Виктору Ивановичу Тараканову за проявленное большое внимание и терпение к первым шагам в науке.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, изложенных на 119 страницах, и включает 26 иллюстраций, 19 таблиц. Список цитируемой литературы содержит 109 источников и занимает 11 страниц.

**В введении** обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи, изложена научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, описаны методы исследований, обосновано соответствие диссертации паспорту научной специальности 05.13.18, отображен личный вклад автора.

**В главе 1** представлен обзор численных методов и точных решений задач динамики магнитной жидкости. **В главе 2** исследуется модель слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости в неограниченном плоском слое. **В п. 2.1** рассматривается слоистое течение жидкости  $\mathbf{u} = \{u_1(x_2, t), 0, u_3(x_2, t)\}$  (ортогонально  $Ox_2$ , вдоль плоскости  $x_1Ox_3$ ) в рамках гидродинамики, в **п. 2.2** – МГД. Модель слоистого течения жидкости может быть использована для описания течения в малых полостях и зазорах таких вязких жидкостей, как нефть, масло и др. **В п. 2.2.1** рассматриваются уравнения МГД в декартовых координатах

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left( p + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right) + \mu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{H} = (\mathbf{H} \nabla) \mathbf{u} + \mu_m \Delta \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \chi \Delta T + \frac{1}{c_p} \frac{\mu}{2} \sum_{i,l=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} (\operatorname{rot} \mathbf{H})^2,$$

где  $\{x_1, x_2, x_3\} \in D$ ,  $t$  – время,  $\mathbf{u}$  – скорость жидкости,  $p$  – давление,  $\rho_0$  – плотность,  $\mu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $\chi$  – коэффициент температуропроводности среды,  $c_p$  – теплоемкость жидкости при постоянном давлении,  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$  – напряженность магнитного поля,  $\mu_m$  – магнитная вязкость жидкости,  $T(\mathbf{x}, t)$  – температура жидкости. При предположении единственности решения уравнений МГД имеет место

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{u}$  – вектор скорости жидкости, компоненты которого являются решениями одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}, \quad i=1, 3, \quad x_2 \in (0; l), \quad t > 0,$$

кроме того, положим  $\mu_m = \mu$ ,  $\mathbf{H} = \alpha \mathbf{u}$ ,  $\alpha = \text{const}$ ,  $p = -\frac{1}{8\pi} \mathbf{H}^2$ , тогда тройка  $(\mathbf{u}, p, \mathbf{H})$  является решением системы уравнений МГД.

**В п. 2.2.2** рассматривается решение тестовой задачи о слоистом течении магнитной жидкости при предположениях  $x_2 \in [0; 1]$ ,  $T \equiv T(x_2, t)$ , со следующими начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0, \quad u_i(x_2, t) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u_i(x_2, t) \Big|_{x_2=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x_2} \right|_{x_2=1} = 0, \\ u_1(x_2, 0) = \sin \pi x_2, \quad T(x_2, 0) = 0, \quad u_3(x_2, 0) = \sin 2\pi x_2, \quad i=1, 3. \end{aligned}$$

При вычислениях полагалось  $\mu=1$ , равенство остальных параметров жидкости единице. Кинетическая и внутренняя энергия течения, а также энергия магнитного поля рассчитывались по следующим формулам

$$E_k(t) = \int_D \rho_0 \frac{\mathbf{u}^2}{2} dx, \quad U_{in}(t) = \int_D c_p T dx, \quad W_{mag} = \int_D \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}.$$

Аналитическое решение тестовой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \exp(-0.1\pi^2 t) \sin \pi x_2, & u_3 &= \exp(-0.4\pi^2 t) \sin 2\pi x_2, \\
 T &= \left[ -\frac{1}{4} \exp(-0.2\pi^2 t) - \frac{1}{4} \exp(-0.8\pi^2 t) + \frac{1}{2} + \cos 2\pi x_2 \left( -\frac{1}{76} \exp(-4\pi^2 t) + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{76} \exp(-0.2\pi^2 t) \right) + \cos 4\pi x_2 \left( -\frac{1}{76} \exp(-16\pi^2 t) + \frac{1}{76} \exp(-0.8\pi^2 t) \right) \right] \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4\pi} \right), \\
 H_1 &= \alpha \exp(-0.1\pi^2 t) \sin \pi x_2, & H_3 &= \alpha \exp(-0.4\pi^2 t) \sin 2\pi x_2, \\
 p &= -\frac{\alpha^2}{8\pi} \left( \exp(-0.2\pi^2 t) \sin^2 \pi x_2 + \exp(-0.8\pi^2 t) \sin^2 2\pi x_2 \right), \\
 E_k(t) &= 0.25 \left( \exp(-0.2\pi^2 t) + \exp(-0.8\pi^2 t) \right), \\
 U_{in}(t) &= \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4\pi} \right) \left[ -0.25 \left( \exp(-0.2\pi^2 t) - \exp(-0.8\pi^2 t) \right) + 0.5 \right], \\
 W_{mag}(t) &= \frac{\alpha^2}{16\pi} \left( \exp(-0.2\pi^2 t) + \exp(-0.8\pi^2 t) \right), \\
 E &\stackrel{def}{=} E_k(t) + W_{mag}(t) + U_{in}(t) \equiv 0.5 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{4\pi} \right).
 \end{aligned}$$

При расчетах  $\alpha^2 = \pi$ . Рис. 1. иллюстрирует явление тепловыделения вследствие внутреннего трения жидкости и джоулева подогрева. Рис 2. иллюстрирует закон диссипации кинетической энергии течения и энергии магнитного поля во внутреннюю энергию жидкости. Рассматривается фазовый поток дифференциального уравнения  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Аналитическое решение,

описывающее изменение геометрии области течения, имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{10}{\pi^2} \left( 1 - \exp(-0.1\pi^2 t) \right) \sin \pi x_2 + x_{1,0}, & x_2 &= x_{2,0}, \\
 x_3 &= \frac{5}{2\pi^2} \left( 1 - \exp(-0.4\pi^2 t) \right) \sin 2\pi x_2 + x_{3,0},
 \end{aligned}$$

где  $\{x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}\}$  – начальное положение точки  $\mathbf{x}(t)$ . Для наглядности выделим куб (рис. 3а) из неограниченного плоского слоя жидкости. Рис. 3б иллюстрирует изменение геометрии области в случае слоистого течения жидкости в результате движения границы области течения и объемного воздействия магнитным полем.

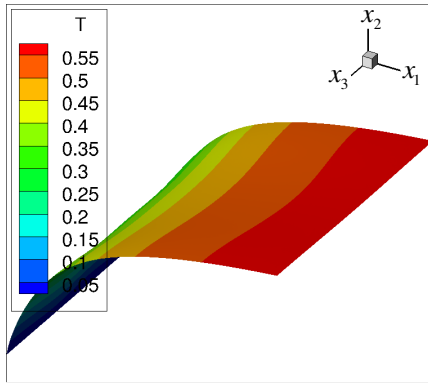


Рис. 1. Поверхность  $T(x_2, t)$  в зависимости от  $x_2, t$

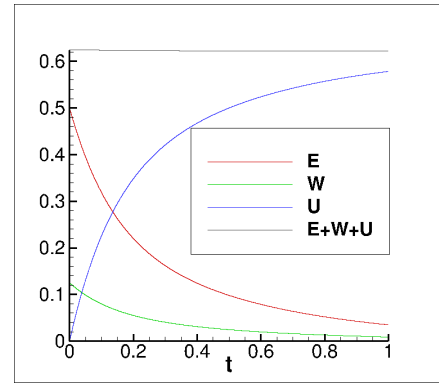


Рис. 2. Закон диссипации  $E_k$  ( $E$ ),  $W_{mag}$  ( $W$ ) в  $U_{in}$  ( $U$ ) и их сумма

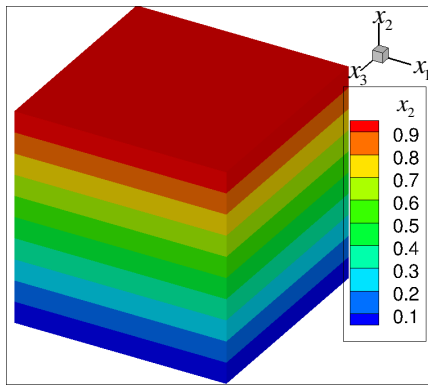


Рис. 3 а) Геометрия области жидкости при  $t=0$ .

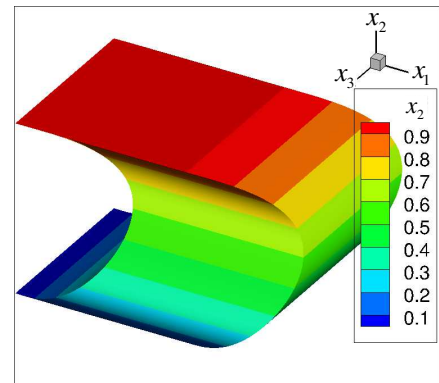


Рис. 3 б) Геометрия области жидкости при  $t=1$ .

Табл. 1. Оценка максимальной абсолютной и относительной погрешностей расчетов в сравнении с аналитическим решением при  $t=1$

Результаты расчетов	$\max_{x_2}  f_{an} - f_{calc} $	$\max_{x_2} \frac{ f_{an} - f_{calc} }{ f_{an} } \cdot 100\%$
Поле скоростей $\mathbf{u}(x_2, 1)$	$6 \cdot 10^{-6}$	0.02
Поле давления $p(x_2, 1)$	$5 \cdot 10^{-7}$	0.05
Магнитное поле $\mathbf{H}(x_2, 1)$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	0.02
Поле температуры $T(x_2, 1)$	0.005	0.9
Геометрия области $\mathbf{x}(1)$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	0.006
Сохранение энергии $E_{kin}(1) + U_{in}(1) + W_{mag}(1)$	0.003	0.5

**В п. 2.2.3** исследуется возможность объемного воздействия магнитным полем на слоистое течение жидкости при условии параллельности векторов

напряженности магнитного поля и скорости при  $x_2 \in [0; l]$ . Показано, что такое воздействие возможно при линейной зависимости от времени скорости жидкости на границе в случае условий прилипания или при однородности граничных условий второго рода. Во втором случае вектор напряженности магнитного поля является постоянной величиной. **В п. 2.3.** дается характеристика разработанного ПО. Тестовые расчеты проведены методом конечных разностей с явной схемой по времени на ПК и не потребовали более трех минут. Сетка по пространственной координате  $x_2 \in [0; 1]$  и времени  $t \in [0; 1]$  является равномерной с шагом 0.005 и  $10^{-5}$  соответственно. Интегралы при расчетах энергии вычислялись методом трапеций. Оценка погрешности расчетов приведена в табл. 1 на момент времени  $t = 1$ .

**В главе 3** продолжается исследование модели слоистого течения жидкости в рамках модели МГД, но записанной в цилиндрической системе координат  $\{\rho, \varphi, z\}$ . Рассматривается задача о слоистом течении жидкости  $\mathbf{u} \equiv \{0, u_\varphi(\rho, t), u_z(\rho, t)\}$  в бесконечном цилиндре (**п. 3.1**) и бесконечном коаксиальном цилиндре (**п. 3.2**). При предположении единственности решения уравнений МГД справедлива теорема:  
**Теорема 2.** *Решение системы уравнений МГД в бесконечном цилиндре, бесконечном коаксиальном цилиндре  $D$  для слоистого течения жидкости при предположениях  $\mathbf{H} \equiv \{0, 0, H_z(\rho, t)\}$ ,  $p \equiv p(\rho, t)$  сводится к решению следующей системы уравнений*

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \mu_m \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \right), & \frac{u_\varphi^2}{\rho} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi\rho_0} H_z \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} &= \mu \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} \right) \right) - \mu \frac{u_\varphi}{\rho^2}, & \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \mu \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right) \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u_\varphi}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \Delta T + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} \left( \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\mu}{c_p} \left\{ \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

**В п. 3.1.1** вычислены векторы скорости и напряженности магнитного поля для слоистого течения жидкости в бесконечном цилиндре  $\rho \in [0; R]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $z \in [-\infty; +\infty]$  при следующих граничных и начальных условиях

$$H_z|_{\rho=R} = H_R \sin 2\pi t, \quad H_z(\rho, 0) = H_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right),$$

$$u_\varphi|_{\rho=R} = Re^{-t}, \quad u_\varphi(\rho, 0) = \rho, \quad u_z(\rho, 0) = u_{z,R} \equiv \text{const}, \quad u_z(\rho, 0) = u_{z,R} \frac{\rho^2}{R^2}.$$

Аналитическое решение уравнений МГД в этом случае имеет вид

$$u_z(\rho, t) = u_{z,R} \left[ 1 - 8 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-t\mu\left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)} \right], \quad P(\rho, t) = \rho_0 \int_0^\rho \frac{u_\varphi^2}{\rho} d\rho - \frac{1}{8\pi} H_z^2(\rho, t) + \theta(t),$$

$$u_\varphi(\rho, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{J_2(\gamma_n)} \left( \frac{\exp\{-t\} - \exp\left\{-\mu t \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\}}{\mu \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^3 - \frac{\gamma_n}{R}} \right) + \rho \exp\{-t\},$$

$$H_z(\rho, t) = H_R \sin 2\pi t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R}\right)}{J_1(\gamma_n)} \left[ 8 \frac{H_0}{\gamma_n^3} \exp\left\{-t\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} - \frac{H_R}{\gamma_n} \left\{ \frac{2R^2}{\gamma_n^2} + \sin 2\pi t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mu_m}{\pi} \cos 2\pi t - \frac{\mu_m}{\pi} \exp\left\{-t\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R}\right)^2\right\} \right\} \right] / \left( \frac{R^2}{\gamma_n^2} + \frac{\mu_m^2}{4\pi^2} \frac{\gamma_n^2}{R^2} \right),$$

где в формулах для  $u_z$  и  $H_z$   $\{\gamma_n\}$  – нули функции Бесселя первого рода нулевого порядка  $J_0(\gamma_n) = 0$ , в формуле для  $u_\varphi$   $\{\gamma_n\}$  – нули функции Бесселя первого рода первого порядка  $J_1(\gamma_n) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , а  $\theta(t)$  – произвольная функция времени.

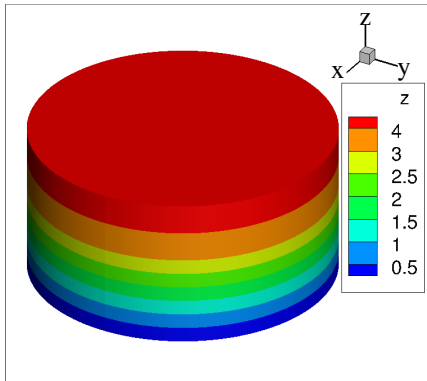


Рис. 4а. Геометрия области жидкости при  $t=0$

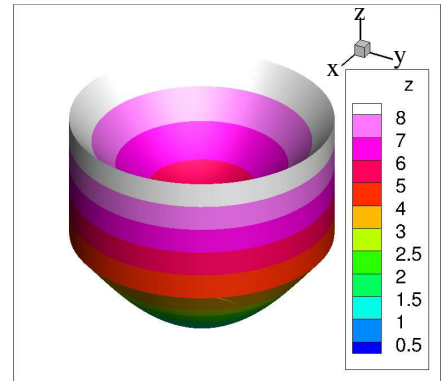


Рис. 4б. Геометрия области жидкости при  $t=1$

**В п. 3.1.2** вычислен фазовый поток, соответствующий полю скоростей, представленному в п. 3.1.1. При расчетах параметры жидкости полагались равными единице. Для иллюстрации выделим из области, занятой жидкостью в начальный момент времени, цилиндр конечного размера (рис. 4а)  $\rho \in [0; 5]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ,

$z \in [0; 5]$ . Тогда жидкость при  $t = 1$  в результате движения границы области течения и объемного воздействия магнитным полем занимает следующую область (кружка), представленную на рис. 4б. В п. 3.2.1 вычислены векторы скорости и напряженности магнитного поля для слоистого течения жидкости в коаксиальном цилиндре  $\{\rho, \varphi, z\}$ ,  $\rho \in [R_1; R_2]$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi)$ ,  $z \in [-\infty; +\infty]$ . Граничные и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} H_z|_{\rho=R_1} &= H_1(t), & H_z|_{\rho=R_2} &= H_2(t), & H_z|_{t=0} &= H_0(\rho), & u_z|_{\rho=R_1} &= u_z^{(1)}(t), \\ u_z|_{\rho=R_2} &= u_z^{(2)}(t), & u_z|_{t=0} &= \psi_z(\rho), & u_\varphi|_{\rho=R_1} &= u_\varphi^{(1)}(t), & u_\varphi|_{\rho=R_2} &= u_\varphi^{(2)}(t), \\ u_\varphi|_{t=0} &= \psi_\varphi(\rho), & \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial D} &= 0, & T|_{t=0} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности коаксиального цилиндра. Аналитическое решение системы уравнений МГД с такими граничными и начальными условиями имеет вид

$$\begin{aligned} u_z(\rho, t) &= \frac{\pi^2}{2R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\gamma_n) \gamma_n^2 Z_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right)}{J_0^2(\gamma_n) - J_0^2(\gamma_n k)} \left\{ \exp\left\{-\mu \left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)^2 t\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left( \psi_z(\rho) - \frac{u_z^{(2)}(0) - u_z^{(1)}(0)}{R_2 - R_1} \rho - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{u_z^{(1)}(0)R_2 - u_z^{(2)}(0)R_1}{R_2 - R_1} \right) \cdot Z_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right) d\rho + \int_0^t \exp\left\{-\mu \left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)(t - \tau)\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left[ \frac{\mu(u_z^{(2)}(\tau) - u_z^{(1)}(\tau))}{\rho(R_2 - R_1)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{u_z^{(2)}(\tau) - u_z^{(1)}(\tau)}{R_2 - R_1} \rho - \frac{u_z^{(1)}(\tau)R_2 - u_z^{(2)}(\tau)R_1}{R_2 - R_1} \right] \cdot Z_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) d\rho d\tau \right\} + \\ &\quad + \frac{u_z^{(2)}(t) - u_z^{(1)}(t)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{u_z^{(1)}(t)R_2 - u_z^{(2)}(t)R_1}{R_2 - R_1}, \\ u_\varphi(\rho, t) &= \frac{\pi^2}{2R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\gamma_n) \gamma_n^2 Z_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right)}{J_1^2(\gamma_n) - J_1^2(\gamma_n k)} \left\{ \exp\left\{-\mu \left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)^2 t\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left( \psi_\varphi(\rho) - \frac{u_\varphi^{(2)}(0) - u_\varphi^{(1)}(0)}{R_2 - R_1} \rho - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{u_\varphi^{(1)}(0)R_2 - u_\varphi^{(2)}(0)R_1}{R_2 - R_1} \right) Z_1\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right) d\rho - \int_0^t \exp\left\{-\mu \left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)(t - \tau)\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[ \frac{\mu(u_\varphi^{(1)}(\tau)R_2 - u_\varphi^{(2)}(\tau)R_1)}{\rho^2(R_2 - R_1)} + \frac{u_\varphi^{(2)}(\tau) - u_\varphi^{(1)}(\tau)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{u_\varphi^{(1)}(\tau)R_2 - u_\varphi^{(2)}(\tau)R_1}{R_2 - R_1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot Z_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) d\rho d\tau \left\} + \frac{u_\phi^{(2)}(t) - u_\phi^{(1)}(t)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{u_\phi^{(1)}(t) R_2 - u_\phi^{(2)}(t) R_1}{R_2 - R_1}, \\
P(\rho, t) &= \rho_0 \int_{R_1}^{\rho} \frac{u_\phi^2}{\rho} d\rho - \frac{1}{8\pi} H_z^2(\rho, t), \\
H_z(\rho, t) &= \frac{\pi^2}{2R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0^2(\gamma_n) \gamma_n^2 Z_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right)}{J_0^2(\gamma_n) - J_0^2(\gamma_n k)} \left\{ \exp\left\{-\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right)^2 t\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left( H_0(\rho) - \frac{H_2(0) - H_1(0)}{R_2 - R_1} \rho - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{H_1(0) R_2 - H_2(0) R_1}{R_2 - R_1} \right) Z_0\left(\frac{\gamma_n \rho}{R_1}\right) d\rho + \int_0^t \exp\left\{-\mu_m \left(\frac{\gamma_n}{R_1}\right) (t - \tau)\right\} \int_{R_1}^{R_2} \rho \left[ \frac{\mu_m (H_2(\tau) - H_1(\tau))}{\rho (R_2 - R_1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{H_2'(\tau) - H_1'(\tau)}{R_2 - R_1} \rho - \frac{H_1'(\tau) R_2 - H_2'(\tau) R_1}{R_2 - R_1} \right] Z_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) d\rho d\tau \right\} + \\
& \left. + \frac{H_2(t) - H_1(t)}{R_2 - R_1} \rho + \frac{H_1(t) R_2 - H_2(t) R_1}{R_2 - R_1}. \right.
\end{aligned}$$

Здесь используются следующие обозначения:  $k = \frac{R_1}{R_2}$ , в формулах для  $u_z$ ,  $H_z$

$$Z_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) \stackrel{def}{=} J_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) Y_0(\gamma_n k) - J_0(\gamma_n k) Y_0\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right), \quad \{\gamma_n\} \quad - \quad \text{корни}$$

$$J_0(\gamma_n) Y_0(\gamma_n k) - J_0(\gamma_n k) Y_0(\gamma_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{в равенстве для } u_\phi$$

$$Z_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) \stackrel{def}{=} J_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right) Y_1(\gamma_n k) - J_1(\gamma_n k) Y_1\left(\gamma_n \frac{\rho}{R_1}\right), \quad \{\gamma_n\} \quad - \quad \text{корни}$$

$$J_1(\gamma_n) Y_1(\gamma_n k) - J_1(\gamma_n k) Y_1(\gamma_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad J_\nu(\rho), \quad Y_\nu(\rho) \quad - \quad \text{функции Бесселя}$$

соответственно первого и второго рода порядка  $\nu$ . Расчеты выполнены при следующих граничных и начальных условиях

$$H_z|_{\rho=R_1} = 2 \sin 2\pi t, \quad H_z|_{\rho=R_2} = 4(1 - e^{-t}), \quad H_z(\rho, 0) = 3 \left(1 - \frac{\rho}{R_1}\right) \left(1 - \frac{\rho}{R_2}\right),$$

$$u_z|_{\rho=R_1} = 2, \quad u_z|_{\rho=R_2} = 4, \quad u_z(\rho, 0) = \frac{2\rho}{R_2 - R_1} + \frac{2R_2 - 4R_1}{R_2 - R_1},$$

$$u_\phi|_{\rho=R_1} = te^{-t}, \quad u_\phi|_{\rho=R_2} = (1 - t^2)e^{-t^2}, \quad u_\phi(\rho, 0) = \ln \frac{\rho}{R_1} \cdot \left(\ln \frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}.$$

**В п. 3.2.2** представлены результаты вычисления фазового потока. При расчетах параметры жидкости полагались равными единице. Рис. 5а, 5б



иллюстрируют изменение во времени геометрии области слоистого течения жидкости в результате эффекта, оказываемого магнитным полем и вращением, движением вдоль оси  $Oz$  стенок коаксиального цилиндра. При расчетах полагалось  $\rho \in [1;5]$ ,  $\varphi \in [0;2\pi)$ ,  $z \in [0;5]$ .

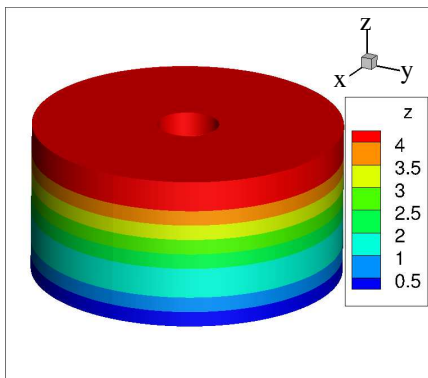


Рис. 5 а) Геометрия области жидкости при  $t=0$ .

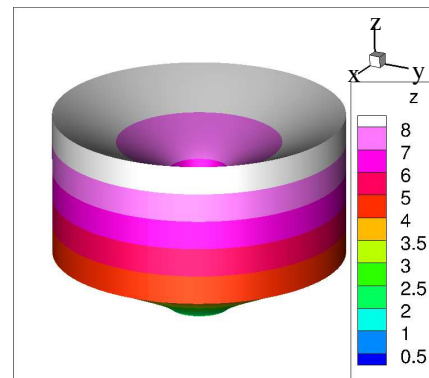


Рис. 5 б) Геометрия области жидкости при  $t=1$

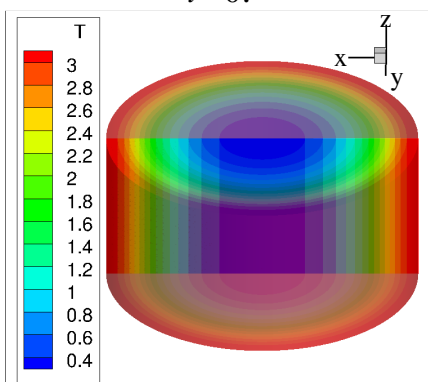


Рис. 6. Поле температуры (цилиндр) при  $t=1$  в сечении плоскостью  $XOZ$

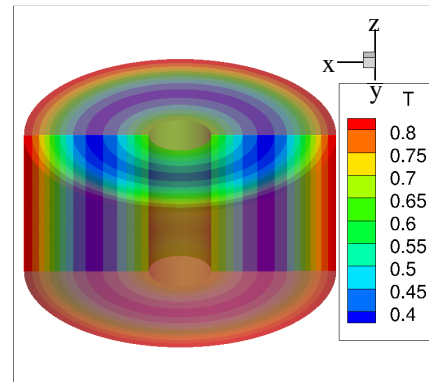


Рис. 7. Поле температуры (коаксиальный цилиндр) при  $t=1$  в сечении плоскостью  $XOZ$

Далее представлен результат численного решения поля температур  $T(\rho, \varphi, z, t)$ , соответствующего слоистому течению жидкости в цилиндре (п. 3.1.3, рис. 6) и коаксиальном цилиндре (п. 3.2.3, рис. 7) при граничных и начальных

условиях  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial D} = 0$ ,  $T|_{t=0} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности цилиндра

(коаксиального цилиндра). Тепловыделение в слоистом течении жидкости вызвано внутренним трением в жидкости и джоулевым подогревом.

**П. 3.3** посвящен характеристике разработанного ПО. Численные результаты получены на основе МКО с полностью неявной схемой по времени. Сетка по координатам  $\{\rho, \varphi, z\}$  составила  $102 \times 100 \times 102$  точек, шаг по времени равен  $10^{-4}$ . Тестовые расчеты проведены на ПК, процессор которой имеет 4 ядра, за

исключением поля температур для которого расчеты проводились на усиленной рабочей станции, процессор которой имеет 10 ядер. Использование технологии OpenMP позволило сократить время расчетов в  $\approx 3.5$  раза в первом случае и в  $\approx 4$  раза во втором случае по сравнению с однопоточными расчетами. Во втором случае для решения СЛАУ использовался метод сопряженных градиентов, реализованный в библиотека LIS ([www.ssisc.org](http://www.ssisc.org)).

Табл. 2. Погрешность расчетов (цилиндр)  
при  $t=1$

Величина	$\Delta f$	$\delta f$
$u_z(\rho, 1)$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	0.02
$u_\varphi(\rho, 1)$	$2 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-3}$
$H_z(\rho, 1)$	$5 \cdot 10^{-4}$	0.9
$z(1)$	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$
$\varphi(1)$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	0.03

Табл. 3. Погрешность расчетов  
(коаксиальный цилиндр) при  $t=1$

Величина	$\Delta f$	$\delta f$
$u_z(\rho, 1)$	$2 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-4}$
$u_\varphi(\rho, 1)$	$5 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-3}$
$H_z(\rho, 1)$	$5 \cdot 10^{-4}$	0.05
$z(1)$	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-4}$
$\varphi(1)$	$1.0 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-3}$

Время вычисления векторных полей скорости и напряженности магнитного поля, фазового потока не превысило 35 секунд. Время расчетов поля температур для слоистого течения в неограниченном цилиндре составило  $\approx 6$  часов, для неограниченного коаксиального цилиндра –  $\approx 2.8$  часа. В табл. 2, 3 приводится максимальная по пространственной переменной абсолютная и относительная погрешности результатов расчетов в сравнении с аналитическим решением при  $t=1$  для слоистого течения в бесконечном цилиндре и бесконечном коаксиальном

цилиндре соответственно, где  $\Delta f = \max_{\rho}^{\text{def}} |f_{an} - f_{calc}|$ ,  $\delta f = \max_{\rho}^{\text{def}} \frac{|f_{an} - f_{calc}|}{|f_{an}|} \cdot 100\%$ .

**Глава 4** посвящена новому итерационному алгоритму нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. **П. 4.1.** посвящен теоретическому обоснованию итерационного алгоритма. **В п. 4.1.1** рассматривается спектральное уравнение в гильбертовом пространстве  $H$  для квадратичного пучка операторов  $\varphi = \lambda \varepsilon B \varphi + \lambda^2 A \varphi$ , где  $A$ ,  $B$  – компактные,

частично симметричные операторы,  $\lambda$  – спектральный параметр,  $\varepsilon$  – некоторое заданное число  $0 \leq \varepsilon \leq p$ ,  $p$  – параметр, зависящий от операторов  $A$ ,  $B$ . Действительный спектр этого уравнения ищется на основе итерационного алгоритма

$$y_{k+1} = \sigma_k \varepsilon B y_k + \sigma_k^2 A y_k, \quad k=1, 2, \dots, \quad y_1 = A y_0, \quad y_0 \in H,$$

где  $\sigma_k$  – один из действительных корней уравнения

$$\sigma_k^4 \|A y_k\|^2 + 2\sigma_k^3 \varepsilon (A y_k, B y_k) + \sigma_k^2 \varepsilon^2 \|B y_k\|^2 - \|y_k\|^2 = 0.$$

Операторы  $A$ ,  $B$  – интегральные,  $\|y_0\| \neq 0$ ,  $\text{Ker} A = 0$ ,  $A: H \rightarrow E$ ,  $B: H \rightarrow E$  и  $(v, Av) > 0$ ,  $\forall v \in E$ . **В п. 4.1.2** доказывается теорема:

**Теорема 3.** Для каждого  $\varepsilon \in \{0 \leq \varepsilon < p\}$  и произвольных, компактных частично симметричных операторов  $A$ ,  $B$ , из которых  $A$  является положительным и имеющим нулевое ядро, существует одно положительное и одно отрицательное значение  $\lambda^+$ ,  $\lambda^-$  спектрального параметра в спектральных уравнениях  $\varphi^\pm = \lambda^\pm \varepsilon B \varphi + |\lambda^\pm|^2 A \varphi^\pm$ , а итерационный алгоритм сходится к решению  $\varphi^+$ , либо –  $\varphi^-$  в смысле  $|\sigma_{k+1}| < |\sigma_k|$ ,  $\forall k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^+ = \lambda^+$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^- = \lambda^-$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k^+ - \varphi^+\| = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k^- - \varphi^-\| = 0$ , если итерационный процесс реализуется отдельно для положительного значения корня  $\sigma_k^+$  и для отрицательного значения корня  $\sigma_k^-$ , а в качестве значения  $p$  берется выражение

$$p = \frac{\|A y_1\|}{\sqrt{\|B\|}} \left\{ |(A y_1, B y_1)| + \sqrt{(A y_1, B y_1)^2 + \|A y_1\| \left[ \|B\|^2 \|y_1\|^2 - \|B y_1\|^2 \right]} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

**В п. 4.1.3** рассматривается итерационный алгоритм с модифицированными операторами  $A_j$ ,  $B_j$ , ( $j$ -й итерационный цикл)  $j \in \mathbb{N}$ , определяемыми рекуррентными соотношениями  $A_{j+1} u = A_j u - \varphi_j(\varphi_j, A_j u)$ ,  $B_{j+1} u = B_j u - \varphi_j(\varphi_j, B_j u)$ ,  $A_1 u \equiv A u$ ,  $B_1 u \equiv \varepsilon B u$ ,  $\varphi_1 \equiv \varphi$ , где  $A_j, B_j: E_j \rightarrow E_{j+1}$ ,  $E_j = E_{j+1} \oplus \text{span}\{\varphi_j\}$ .

**Теорема 4.** 1. Существует бесконечное множество действительных собственных чисел  $\lambda_j$  и соответствующих собственных функций  $\varphi_j$ , которые

представляют полную ортонормированную систему на множестве  $E \subset H$ . Собственные числа и собственные функции удовлетворяют одному и тому же уравнению  $\varphi_j = \lambda_j \varepsilon B \varphi_j + \lambda_j^2 A \varphi_j$  и находятся последовательно путем реализации итерационного алгоритма с модифицированными операторами  $A_j, B_j, j \in \mathbb{N}$ .

2. Собственные числа  $|\lambda_j|$  неограниченно растут с ростом номера  $j$ , причем существует нижняя граница собственных чисел, больше нуля. Существуют двусторонние оценки каждого числа  $|\lambda_j|$ , которые растут с ростом номера  $j$ , причем нижняя оценка растет монотонно  $0 < \alpha_j \leq |\lambda_j| \leq \beta_j, \alpha_{j+1} \geq \alpha_j$ . Собственные числа  $|\lambda_j|$  представляют почти упорядоченное множество в следующем смысле. Для любого номера  $i \geq 1$  существует число  $m_* \equiv m_*(i) \geq 1$ , такое, что если произвести перенумерацию собственных чисел на промежутке  $1 \leq j \leq i$ , то они будут меньше всех собственных чисел, определенных на промежутке  $i < j < \infty$ . Число  $m_*$  находится из условия, при котором неравенство  $\alpha_{i+m_*} < \beta_i$  меняется на неравенство  $\beta_i < \alpha_{i+m_*}$ .

В качестве  $\alpha_j, \beta_j$  могут быть рассмотрены следующие величины

$$\alpha_j = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2 \|B\|_{E_j}^2 + 4\|A\|_{E_j}^2 + \varepsilon\|B\|_{E_j}}}, \quad \beta(\varphi_j) = \frac{\left[ \sqrt{\varepsilon^2 (\varphi_j, B\varphi_j)^2 + 4(\varphi_j, A\varphi_j)} + \varepsilon [(\varphi_j, B\varphi_j)] \right]}{2(\varphi_j, A\varphi_j)}.$$

**П. 4.2** посвящен численной апробации итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью. **В п. 4.2.1** представлена математическая модель колебания трубы в тросовом приближении с закрепленными концами

$$\left[ (N(x) - \rho V^2) W_x \right]_x - \rho V W_{xt} = \rho_0 W_{tt}, \quad 0 < x < l, \quad W|_{x=0} = 0, \quad W|_{x=l} = 0,$$

где  $W \equiv W(x, t)$  – поперечное смещение трубы,  $x$  – координата вдоль трубы,  $t$  – время,  $V \equiv const$  – скорость жидкости,  $N \equiv N(x)$  – растягивающее усилие, действующее на трубу,  $l$  – длина трубы,  $\rho$  – погонная плотность жидкости,  $\rho_0$  –

погонная плотность и жидкости и трубы.  $\rho$ ,  $\rho_0$  – постоянные величины. Если положить вектор напряженности магнитного поля постоянным, то справедливо уравнение Бернулли  $p + \rho gx + \frac{\mathbf{H}^2}{4\pi} + \rho \frac{V^2}{2} = const$ , где  $g$  – ускорение свободного падения, при этом вектор скорости  $\{V, 0, 0\}$  удовлетворяет условиям непротекания на границе трубы. Прикладная задача в безразмерной постановке имеет вид

$$\left[ h(\xi) y \right]_{\xi\xi} - i\lambda \varepsilon y_\xi + \lambda^2 y = 0, \quad 0 < \xi < 1, \quad \int_0^1 y(\xi) d\xi = 0,$$

где  $\xi = \frac{x}{l}$ , безразмерная частота колебаний  $\lambda = \omega \frac{l}{V}$ ,  $\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $h(\xi) = \frac{\rho}{\rho_0} \left[ \frac{N(\xi)}{\rho V^2} - 1 \right]$ ,  $y = U_\xi$ ,  $W(x, t) = U(x) e^{i\omega t}$ , а  $\omega$  – собственная частота колебаний.

**В п. 4.2.2** задаются множества  $H$ ,  $E$ ,  $P$ :

$$H = \{u \mid u \in L_2(0, 1)\}, \quad E = \left\{ u \mid u \in L_2(0, 1), \int_0^1 u d\xi = 0 \right\}, \quad P = \left\{ u \mid u \in C(0, 1), \int_0^1 u d\xi = 0 \right\}.$$

Справедливы вложения  $P \subset E \subset H$ . В  $H$  вводятся операторы  $A$ ,  $B$ :

$$Ay = \frac{1}{h(\xi)} \left[ - \int_0^\xi \int_0^{\xi_1} y(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \left( \int_0^1 \frac{d\xi}{h(\xi)} \right)^{-1} \int_0^1 \frac{1}{h(\xi)} \left( \int_0^\xi \int_0^{\xi_1} y(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right) d\xi \right],$$

$$By = \frac{i}{h(\xi)} \left[ \int_0^\xi y(\xi_1) d\xi_1 - \left( \int_0^1 \frac{d\xi}{h(\xi)} \right)^{-1} \int_0^1 \frac{1}{h(\xi)} \left( \int_0^\xi y(\xi_1) d\xi_1 \right) d\xi \right],$$

При этом выполняются условия

$$\int_0^1 Ay d\xi = 0, \quad \int_0^1 By d\xi = 0.$$

**Утверждение 1.** Операторы  $A$ ,  $B$  компактны в  $H$  и справедливы вложения  $R(A) \subset P$ ,  $R(B) \subset P$ .

**Утверждение 2.** Операторы  $A$ ,  $B$  являются частично симметричными.

**Утверждение 3.** Оператор  $A$  положительный  $(u, Au)$ ,  $\forall u \in E$ .

**Утверждение 4.** Оператор  $A$  имеет нулевое ядро.

**Утверждение 5.** Спектральное уравнение для квадратичного пучка операторов  $y = \lambda \varepsilon B y + \lambda^2 A y$  эквивалентно спектральной задаче в безразмерном виде.

**В 4.2.3** представлено аналитическое решение тестовой задачи, вычисленное при постоянном растягивающем усилии и используемое для верификации алгоритма (табл. 7 ниже). **В п. 4.2.4** доказывается следующий факт:

**Замечание.** Собственные числа и собственные функции можно находить по теореме 4, при этом каждый четный итерационный цикл дает то же значение собственного числа, что и предшествующий нечетный итерационный цикл.

**В п. 4.2.5** представлены результаты расчетов значений спектрального параметра для итерационных циклов  $j=1, 2, 3, 4$ . Предполагается, что  $h(\xi) \equiv \alpha\xi + \beta$ ,  $y_0 = 1$ . В качестве  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  брались следующие значения:

$$\varepsilon = 0.001, 0.01, 0.05, \quad \alpha = 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, \quad \beta = 0, 0.01, 0.02, 0.03.$$

Табл. 4. Зависимость спектральных чисел  $\lambda_1^+$  от параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $\beta$

$\varepsilon$	$\beta$	0	0.01	0.02	0.03
	$\alpha$				
0.001	0.10	0.993457	1.017673	1.040758	1.062855
	0.15	1.216732	1.236668	1.255959	1.274664
	0.20	1.404962	1.422299	1.439208	1.455718
	0.25	1.570795	1.586342	1.601577	1.616519
0.01	0.10	0.993334	1.017553	1.040641	1.062740
	0.15	1.216632	1.236569	1.255862	1.274568
	0.20	1.404875	1.422213	1.439123	1.455634
	0.25	1.570718	1.586265	1.601501	1.616443
0.05	0.10	0.990368	1.014656	1.037807	1.059963
	0.15	1.214206	1.234182	1.253511	1.272251
	0.20	1.402773	1.420136	1.437070	1.453604
	0.25	1.568836	1.584402	1.599655	1.614615

Табл. 5. Значение параметра  $p$

	номер итерационного цикла			
	1	2	3	4
$p$	0.71	0.35	0.46	0.26

Табл. 6. Оценка погрешностей  $\delta_1$  и  $\delta_2$

	номер итерационного цикла	
	1	3
$\max_{\varepsilon, \alpha, \beta} \delta_1$	$7 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-8}$
$\max_{\varepsilon, \alpha, \beta} \delta_2$	$0.9 \cdot 10^{-15}$	$1.4 \cdot 10^{-15}$

В табл. 4. приводятся значения спектрального параметра при  $j=1$ . Расчетные значения при  $j=2$  совпали со значениями при  $j=1$ , что соответствует

замечанию. Табл. 5 содержит значения параметра  $p$  – верхней границы диапазона сходимости итерационного алгоритма, вычисленные по вспомогательному алгоритму. **П. 4.2.6.** описывается характеристика разработанного ПО. Интегралы в операторах  $A$ ,  $B$  на промежутке  $0 < \xi < 1$  рассчитаны методом трапеций с равномерным разбиением отрезка на 2000 интервалов. Для вычисления первой собственной пары требовалось 15-40 итераций, для вычисления последующих не более 10 итераций. Точность решения оценивалась величинами  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Величина  $\delta_1$  характеризует относительную погрешность в выполнении спектрального уравнения  $y_k = \sigma_k \varepsilon B y_k + \sigma_k^2 A y_k$ , а величина  $\delta_2$  – относительную погрешность в вычислении собственных значений

$$\delta_1 = \frac{\|y_k - \sigma_k \varepsilon B y_k - \sigma_k^2 A y_k\|}{\|y_k\| + |\sigma_k| \varepsilon \|B y_k\| + \sigma_k^2 \|A y_k\|}, \quad \delta_2 = \left| 1 - \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}} \right|.$$

Табл. 7. Погрешность расчетов в сравнении с аналитическим решением

	номер итерационного цикла	
	1	3
$\max_{\varepsilon, \alpha}  \lambda^{an} - \lambda $	$3 \cdot 10^{-7}$	$7 \cdot 10^{-4}$
$\max_{\varepsilon, \alpha} \frac{ \lambda^{an} - \lambda }{ \lambda^{an} } \cdot 100\%$	$7 \cdot 10^{-4}$	0.04

Табл. 6 содержит оценки максимальных значений погрешностей  $\delta_1$  и  $\delta_2$  для итерационных циклов  $j=1$ ,  $j=3$ . В табл. 7 приводится оценка результатов расчетов спектрального параметра в сравнении с аналитическим решением, имеющим место при  $\beta=0$ . Результаты расчетов показали устойчивость относительно серии параметров  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ . На основании результатов численной апробации делается вывод о эффективности итерационного алгоритма.

**В заключении** формулируются основные результаты выполненных исследований, рекомендации и направления дальнейшей разработки темы.

**Основными результатами диссертационной работы являются:**

1. Исследована модель слоистого течения жидкости, выделен класс точных решений системы нестационарных уравнений МГД вязкой несжимаемой жидкости, соответствующих слоистому течению жидкости в следующих областях: неограниченный плоский слой, бесконечный цилиндр, бесконечный коаксиальный цилиндр.
2. Разработан итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка компактных частично симметричных операторов. Проведено его теоретическое обоснование. Выполнена численная апробация итерационного алгоритма на задаче о резонансной потере устойчивости трубы с протекающей магнитной жидкостью, показавшая его эффективность.
3. Разработан комплекс программ с применением технологии параллельных вычислений OpenMP для проведения вычислительного эксперимента по моделированию слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости. Найденные точные решения уравнений МГД использованы для верификации разработанного программного обеспечения, показавшей его эффективность.

**Список публикаций автора****Публикации в журналах, рецензируемых ВАК**

1. Тараканов В. И., Дубовик А. О. Итерационный алгоритм нахождения спектра квадратичного пучка операторов в гильбертовом пространстве // Сиб. журн. вычисл. матем.- Новосибирск. 2015.Т.18. № 1.С. 79 – 93.
2. Бетелин В. Б., Галкин В. А., Дубовик А. О. Об управляемом слоистом течении вязкой несжимаемой жидкости в модели МГД // ДАН. 2016. Т. 470. № 2. С. 150-152.
3. Галкин В. А., Дубовик А. О., Епифанов А. А. Приближенные методы для уравнений несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. 2017. Т. 57. № 2. С. 275 – 284.



4. Галкин В. А., Дубовик А. О. Об управлении тепловыделением в течении вязкой несжимаемой жидкости посредством движения границы области течения // Вест. кибернетики. Сургут: СурГУ. 2015. № 3 (19). С. 144 – 147.
5. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости во вращающейся трубе // Вест. кибернетики. Сургут: СурГУ. 2017. № 2 (26). С. 58 – 65.
6. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости во вращающейся коаксиальной трубе // Вест. кибернетики. Сургут: СурГУ. 2017. № 3 (27). С. 128-137.
7. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании тепловыделения в слоистом течении вязкой магнитной несжимаемой жидкости во вращающейся трубе // Вест. кибернетики. Сургут: СурГУ, 2017. № 4 (28). С. 56–61.

#### **Публикации в изданиях, индексируемых в Scopus**

8. Tarakanov V. I., Dubovik A. O. An iterative algorithm for calculation of spectral parameters of a quadratic bunch of operators in the Hilbert space // Numerical Analysis and Applications. Pleiades Publishing. 2015. V. 8. I. 1. P. 68 – 80.
9. Betelin V. B., Galkin V. A., Dubovik A. O. On the control of layered flow of a viscous incompressible fluid within MHD // Doklady Mathematics. Pleiades Publishing. 2016. V 94. I. 2. P. 591 – 593.
10. Galkin V. A., Dubovik A. O., Epifanov A. A. Approximate Methods for equations of incompressible fluid // Comput. Math. and Math. Phys. Pleiades Publishing. 2017. V 57. No. 2. P. 272 – 280.

#### **Публикация в рецензируемом научном издании**

11. Галкин В. А., Дубовик А. О. Об управлении параметрами течения вязкой несжимаемой жидкости посредством движения границы области течения // Вестн. кибернетики. Сургут: СурГУ, 2016. № 1 (21). С. 25–28.

#### **Публикации по материалам выступлений на конференциях**

12. Тараканов В. И., Дубовик А. О. Численная апробация итерационного алгоритма нахождения спектра квадратичного пучка операторов в

- гильбертовом пространстве // Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе : тез. докладов. Сургут : ИЦ СурГУ, 2014. С. 51–53.
13. Галкин В. А., Дубовик А. О. Задачи управления слоистым течением вязкой несжимаемой жидкости в рамках модели МГД // Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе : тез. докладов. Сургут : ИЦ СурГУ. 2016. С. 41–42.
  14. Галкин В. А., Дубовик А. О. Исследование тепловыделения в течении вязкой несжимаемой жидкости // Северный регион: наука, образование, культура. Сургут : СурГУ, 2015. Т. 2. № 2 (32). С. 63–65.
  15. Галкин В. А., Дубовик А. О. Управление слоистым течением вязкой магнитной несжимаемой жидкости // Супервычисления и математическое моделирование : тез. XVI Междунар. конф. Саров : ИПК ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2016. С. 41–42.
  16. Галкин В. А., Дубовик А. О. Моделирование слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости // Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики : тез. докл. XXI Всерос. конф. и молодеж. шк.-конф. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016. С. 75–76.
  17. Галкин В. А., Дубовик А. О. О моделировании слоистого течения вязкой магнитной несжимаемой жидкости // Марчуковские научные чтения – 2017 : тез. междунар. конф. Новосибирск : Омега Принт. 2017. С. 26.

#### **Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ**

18. Галкин В. А., Дубовик А. О. Локальная 3D модель слоистых управляемых течений: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017611813; правообладатель БУ ВО ХМАО-Югры «Сургутский государственный университет». – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 09.02.2017.